KOMPARATIVNA GEOMETRIJA

poučavanje s uporabom pribora

ISTVÁN LÉNÁRT, NIKOL RADOVIĆ,
ANNA RYBAK, MARIO BRKIĆ,
PETAR MLADINIĆ

BIBLIOTEKA HUNI

BIBLIOTEKA HUNI

Naslov:

István Lénárt, Nikol Radović, Anna Rybak, Petar Mladinić, Mario Brkić:
Komparativna geometrija - poučavanje s uporabom pribora

Glavni urednik: Petar Mladinić

Urednici: Petar Mladinić & Nikol Radović

Recenzenti: Drago Špoljarić, Michael de Villiers,
Sanja Antoliš, Milena Ćulav Markičević, Snježana Lukač, Mia Milun

Lektorica: Ivana Babić

Korektor: Petar Bonačić

Hrvatska udruga nastavnika istraživača (HUNI), Zagreb

Nakladnik: Hrvatska udruga nastavnika istraživača, Zagreb, 2022.

CIP dostupan u računalnom katalogu
Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem xxxx

ISBN 978-953-49726-2-5 (PDF)

Tisak: Tiskara Zelina, Sveti Ivan Zelina

`www.huni.hr/nastava-matematike/`

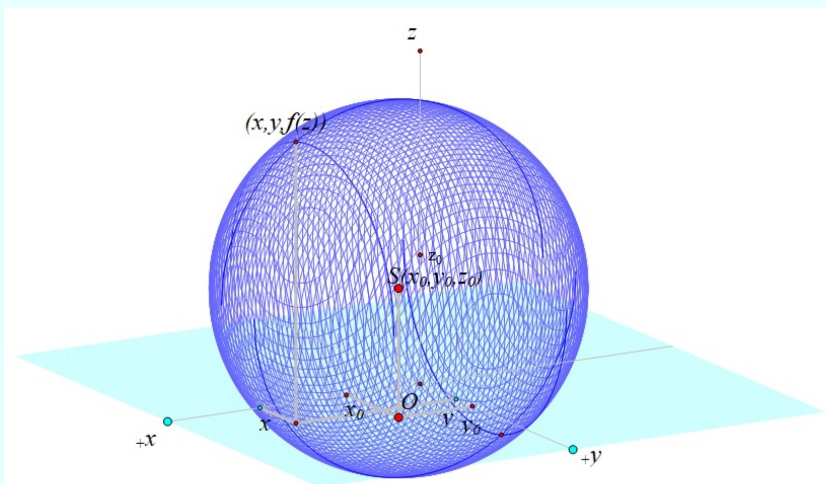
Slog i prijelom: $P\overset{\heartsuit}{i}erreM$

Dizajn naslovnice i omota: Iva Risek

KOMPARATIVNA GEOMETRIJA

poučavanje s uporabom pribora

István Lénárt, Nikol Radović, Anna Rybak,
Petar Mladinić, Mario Brkić



Zagreb, 2022.

Sadržaj

Riječ, dvije školnicima i ...

Vizualizacija apstraktnih matematičkih struktura neeuklidske geometrije je teška, iako ne i nemoguća.

Standardni euklidski modeli za neeuklidske geometrije, poput eliptične i hiperbolične geometrije , razvijeni su kako bi pružili vizualnu podršku onima koji pokušavaju razumjeti te geometrije.

Lénárt, veliki zagovornik integracije sferne geometrije u nastavni plan i program geometrije, razvio je materijal i pribor za podučavanje i učenje sferne geometrije, nazvan *Lénártova sfera* . Materijali omogućuju učenicima istraživanje sferne geometrije koristeći realnu sferu i sferne ekvivalente šestara i ravnala.

Od 1990-ih, za podučavanje euklidske geometrije sve se više koristi softveri za dinamičnu geometriju (DGS), kao što su *Cabri* i *Sketchpad HR 5.03*.

Svojstva dinamične geometrije omogućuju učenicima brzo i jednostavno istraživanje istinitosti pojedinih nagađanja. Štoviše, ovi računalni programi olakšavaju istraživanja koja promiču proces nagađanja.

Jedna od najvažnijih značajki dinamične geometrije je njezino razvijanje intuicije i poticanje učeničkog 'istraživanja' u geometriji te njezina velika i jednostavna uporaba u vizualizaciji (čak i "teških" numeričkih i apstraktnih činjenica).

U geometriji koja se temelji na istraživanju učenici su uvedeni u proces matematizacije koji se sastoji od eksperimentiranja, nagađanja, definiranja pretpostavki i objašnjenja (dokaza).

Proces matematizacije moguće je provesti i kroz nekoliko koraka:

Eksperimentiranje: Uključuje konstruiranje geometrijskih oblika i interakciju s njima, mjerenje pojedinih dijelova geometrijskih objekata, te gledanje posebnih slučajeva pomicanjem geometrijskih objekata.

Pretpostavka: Aspekti mjerenja i pomicanja geometrijskih objekata uporabom softvera omogućuju učenicima kreiranje pretpostavki o odnosu između različitih svojstava stvorenih oblika.

Objašnjenje (dokaz): U ovom koraku od učenika se traži pronalaženje dokaza njihovih nagađanja. Kod učenika uporaba DGS-a može lako proizvesti brojne konfiguracije/tvrdnje za koje učeniku nije potrebna daljnja provjera. Stoga je važno da ih učitelji izazovu pitanjem zašto misle da je određeni rezultat istinit.

Ova induktivna priroda softvera daje učenicima prigodu naučiti euklidsku geometriju putem istraživanja.

Unatoč tome što se DGS već dugo koriste za podučavanje euklidske geometrije, oni su tek nedavno korišteni za podučavanje sferne geometrije.

Svrha ove knjige je omogućiti/pokazati kako učenici mogu u matematici istraživati sfernu geometriju koristeći *Sketchpad* kao alat te potrebu dokazivanja vlastite pretpostavke stečene pomoću njega.

Na ovaj način želimo ukazati na mogućnost učenje zasnovanog na softveru dizajniranog za podučavanje sferne geometrije.

Nedavni razvoj snažnih novih softvera, kao što su *Cabri Geometry* i *Sketchpad HR 5.03* s mogućnošću pomicanja/dinamičnog mijenjanja, stvorio je neprekidne varijacije mogućih geometrijskih objekata koje omogućuju učenicima brzo i jednostavno stvaranje pretpostavki u euklidskoj geometriji.

Međutim, razvijeno je malo softvera kojima bi učenici mogli istražiti sfernu geometriju.

Dakle, raspolažemo s malo literature o tome kako ti softveri mijenjaju okruženje za učenje sferne geometrije.

U ovoj knjizi pokušat ćemo, između ostalog, pružiti nastavnicima i učenicima materijale i datoteke kako bi stekli iskustvo sa Sketchpadovim datotekama priređenima za poučavanje i učenje sferne geometrije koje će tako pretvoriti učionice (s računalima, tabletima i mobitelima) u laboratorij u kojem učenici mogu istraživati nove odnose i nagađati.

Istraživanje matematičkih relacija i testiranje pretpostavki u ovom okruženju dinamične geometrije čini ovu vrstu softvera snažnim alatom za učenje.

Štoviše, očekujemo da će uporaba ove knjige i datoteka te radnih listića motivirati učenike za deduktivni dokaz.

* * * * *

Sveučilišni profesor matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, Mladen Alić, koji je bio i prvi predsjednik Hrvatskog matematičkog društva, 90-ih godina prošlog stoljeća formulirao je tzv. *Alićev poučak o školstvu.*

Glavna tvrdnja tog poučka je bila: *Kadgod je hrvatsko školstvo "rasteretilo" neki predmetni kurikul čitav svijet i primjene krenule su upravo u smjeru onoga što je u Hrvatskoj izbačeno.*

On je dao niz argumenata/dokaza o sadržajima koji su izbačeni iz određenih kurikula, a suvremeno ih društvo treba.

Ovdje ćemo navesti samo njegov argument o sfernoj geometriji i trigonometriji. Usporedbom ranijih udžbenika (i kurikula) s današnjim, uočava se da su 50-tih godina prošlog stoljeća (neposredno prije nego je satelit s psom Lajkom, kao prvim živim stvorom, poslan u putanju oko Zemlje) iz srednjoškolskog matematičkog kurikula izbačene sferna geometrija i sferna trigonometrija, iako je u tom trenutku bilo očito da svijet kreće u stratosferu i korištenje satelita oko Zemlje i da je znanje o tome višestruko (i u općeobrazovnom i u usko stručnom smislu) vrijedno.

Dakle, umjesto poučavanja populacije o sfernim pojmovima, bez ikakvog opravdanog razloga su ti isti pojmovi izbačeni iz školstva!

Kao nastavak takve aktivnosti kasnije su izbačeni i iz visokoškolskih kurikula/kolegija. Jedva su "ostavljene" naznake u nekim stručnim predmetima.

Jedna od rijetkih visokoškolskih ustanova, koja od svojih začetaka njeguje izučavanje sferne trigonometrije je *Geodetski fakultet* Sveučilišta u Zagrebu.

Do 1994. godine izučavao se predmet *Geodetski račun* čiji sadržaj je obuhvaćao goniometriju, trigonometriju u ravnini i sfernu trigonometriju.

Možemo reći da je to klasičan sadržaj matematičkih disciplina primijenjenih u praksi.

Malom reformom, taj predmet je ukomponiran u *Matematiku 2* s minimalnim brojem sati. Provedbom Bolonjskog procesa, 2008. godine uvodi se i predmet *Sferna trigonometrija*. Osnovni cilj predmeta je obnova i nadogradnja srednjoškolskih vještina iz trigonometrije ravnine na teoretska i praktična znanja i trigonometrije sfere s posebnim naglaskom na primjenu u *geodeziji* i *geoinformatici*.

Našli smo trag o sfernoj geometriji još na dva hrvatska sveučilišta. Na zagrebačkom sveučilištu sferna geometrija je uklopljenana na PMF-u u kolegiju *Neeuklidska geometrija* u 1. poglavlju *Modeli ravninske geometrije* odjeljku 1.2. *Model sfere S^2*.

Nešto drukčije koncipirana je sferna geometrija na riječkom Sveučilištu. U *Općoj informaciji odjela za matematiku* opisan je program *Neeuklidske geometrije*:

`Geometrija je značajan dio matematike te zauzima veći dio obaveznih matematičkih sadržaja koji se obrađuju u osnovnoj i srednjoj školi. Začetnik geometrije kao znanstvene discipline je starogrčki matematičar Euklid te je povijest razvoja geometrije koju mi danas nazivamo euklidska geometrija trajao više od 2000. godine te predstavlja jedan od najznačajnijih dijelova povijesti matematike.`

`Za konzistentno, potpuno i neproturječno aksimomatsko zasnivanje geometrije presudne su bile upravo tzv. neeuklidske geometrije. Kao što se sadržaje euklidske geometrije uvode učenicima od` samog početka školovanja, isto je moguće i sa sadržajima neeuklidskih geometrija.

Ovaj program cjeloživotnog obrazovanja nudi polaznicima aktivno sudjelovanje u otkrivanju karakteristika neeuklidskih geometrija te razlika između euklidske i neeuklidske geometrije uz pomoć *Lénártove sfere* (http://lenartsphere.com/) i računalnih programa. Posljedica toga je i bolje poimanje same euklidske geometrije.

Program je namijenjen odraslim polaznicima, matematičarima i nematematičarima kao dodatna edukacija iz matematike.

Očekuje se da će polaznici nakon završeng programa biti sposobni:

- razlikovati euklidsku, sfernu, projektivnu i hiperboličnu ravninsku geometriju,
- opisati barem jedan model svake od uvedenih ravninskh geometrija,
- samostalno koristiti Lénártovu sferu i besplatne računalne programe za prikaz osnovnih objekata u pojedinim geometrijama.

I na kraju navedimo riječi i misli **Istvána Lenártá** iz 2002. godine kojima se oslikava stanje i u našoj hrvatskoj nastavi, a koji ukazuju na naše motive i namjere pisanja ove knjige te stvaranje pratećih datoteka s listićima za rad.

Ideje, argumenti za nastavu komparativne geometrije.

Što znači predavati komparativnu geometriju?

Od nižih razreda osnovne škole paralelno učimo geometriju u ravnini i sfernu geometriju, koristeći manipulativne alate, a kasnije i računala. Od sedmog do osmog razreda zalutamo i u svijet Bolyaijeve geometrije.

Volim poučavanje: povremeno predajem dvadeset godina, a redovito dvanaest godina. Sada ne govorim kao učitelj praktičar. Trebala su mi desetljeća kako bih shvatio koju ulogu zapravo želim igrati. Dakle: ja sam odgajatelj, učitelj i student učitelj, učitelj nastavnih ideja. Bavim se osmišljavanjem i testiranjem metoda, postupaka i alata koji obrazovanje čine ugodnijim, šarenijim i korisnijim za sve sudionike.

Materijala je puno, sati matematike sve manje - gdje da strpamo nove ideje? Škola nema novca - kako kupiti novu opremu? Nastava, obitelj, domaća zadaća, posebna nastava - kada bismo trebali upoznati nove ideje?

Prošle, 2002. godine, koja je za mene bila prekrasna, proputovao sam zemlju od Nagyatáda do Sátoraljaújhelyja, od Gyora do Makóa.

Razgovarao sam s mnogim edukatorima i držao predavanja iz matematike tisućama (nije pretjerivanje!) učenika na izložbama i u školama. Posvuda sam naišao na dobronamjernost i izraze odobravanja: od laika i stručnjaka, mladih i starih.

Unatoč svemu tome, moja su iskustva potvrdila jednu davno nametnutu misao.

Nastava matematike u zemlji i inozemstvu prolazi kroz razdoblje krize, čiji je najočitiji znak raspoloženje javnosti. Pitajmo sljedećih deset ljudi koje sretnemo: Što misle o matematici? O geografiji? O književnosti? O autoškoli? Procijenimo rezultate! Koliko smo glasova dobili za svaku tvrdnju: *"Da, smatram da je ovo korisno." "Da, bilo je zanimljivo i lijepo." "To je lijepa stvar, ali meni nažalost neshvatljiva." "Mrzim."?*

Za one koje ova anketa nije uvjerila, proučite broj prijavljenih na pojedine smjerove visokog obrazovanja dvadesetak godina unatrag do danas! Moramo biti slijepi i gluhi da ne primijetimo gubitak prestiža matematike.

Ovaj proces ne počinje u visokom obrazovanju. Prije desetak godina to je bila rijetkost, a danas se sve češće čuje pitanje: "Učitelju, zašto trebam znati logaritme ili trigonometrijske funkcije?" I - molim vas, nemojte to krivo shvatiti - osjećam da ni mnogi moji kolege nisu sigurni u odgovor! Doista: kako matematički pojmovi pomažu u situacijama svakodnevnog donošenja odluka, u privatnim i građanskim problemima, u procjeni mase informacija koje hrle na nas? Nije li to samo neka pretjerana igra, logička zagonetka shvaćena preozbiljno? Što zapravo želimo reći našim učenicima uz pomoć matematike?

Matematika je za mene slobodan izbor temelja, razmjena mišljenja između partnera koji se međusobno poštuju i samostalno razmišljanje.

Jednosistemsku, nepogrešivu matematiku smatram zastarjelom, mrtvom i nepoučljivom. Jednosistemska matematika je u oštroj suprotnosti sa svime što današnji mladi ljudi doživljavaju u većini područja života: politici, ekonomiji, izboru posla, privatnom životu. Najvažnija zadaća živog, suvremenog matematičkog obrazovanja je osposobiti mlade ljude za samostalno razmišljanje, upoznavanje situacija odluka i njihovo rješavanje.

Sukladno tome, u bilo kojem području matematike moramo prikazati nekoliko mogućih sustava i metoda, ostavljajući pravo i dužnost izbora našim učenicima.

Komparativna geometrija ima za cilj implementirati ovaj pristup više polazišta u matematici.

Osnove su već izrađene, a odgovarajuća nastavna sredstva i udžbenici izdani. Klasično djelo Györgya Hajósa iz književnosti na mađarskom jeziku također sadrži mnogo korisnih sfernih informacija. Udžbenik Attile Kálmána "Elementi neeuklidskih geometrija" daje sustavno, komparativno objašnjenje geometrije ravnine, sferne geometrije i Bolyaijeve geometrije. Molim vas, nemojte shvatiti kao neskromnost ako spomenem, između ostalog, set sfera za crtanje, udžbenik i tečaj za učitelje koji sam razvio.

Bavim se detaljnim primjerima koje učitelj praktičar može smatrati lako razumljivima, korisnima, iznenađujućima i zabavnima za svoje učenike. Želio bih pokazati da, osim razvoja matematičkih i pedagoških teorija, postoje i - mogu tako reći, manji - zadatci kojima možemo ostvariti sve te ciljeve u radu škole.

Zašto se uz ravninu i sferu odmah ne pozabavimo i Bolyaijevom geometrijom?

Ne, jer po mom mišljenju prvi i najvažniji korak je usporediti ravninu i sferu. Ako smo kod naših učenika olabavili kruti, jednosistemski način razmišljanja, oni puno lakše upoznaju nove, drugačije svjetove. Osim toga, geometrija ravne plohe i sferne plohe još je živopisnija od najjednostavnijih modela Bolyaijeve geometrije. No, želio bih naglasiti da je put ravnina-sfera-polusfera, kao metoda koja vodi do Bolyaijeve geometrije, put koji mogu razumjeti i voljeti čak i tinejdžeri.

Navodim neke karakteristike sferne geometrije koje bi mogle biti iznenađujuće onima koji su navikli na geometriju ravnine.

1. Svaka sferna točka ima suprotnu, najudaljeniju točku od sebe (Sjeverni pol - Južni pol)

2. Sferne krivulje: sferna glavna kružnica (ekvatorijalna, kružnice dužine da - kružnice zemljopisne širine izvan ekvatora ne!)

3. Sferna udaljenost između dviju sfernih točaka: duljina kraćeg glavnog luka koji ih povezuje; a za suprotne točke, duljina bilo kojeg polulukа, tj. 180°.

4. Svakoj sfernoj točki može se dodijeliti glavna kružnica (ekvator); dvije sferne točke (kutne točke) mogu se dodijeliti svakoj glavnoj kružnici. Odnos se naziva polaritet ili dvojnost.

5. Kut nagiba dva glavna luka također se može mjeriti sfernom glavnom konturom, duž ekvatora koja odgovara vrhu kuta (baš

kao što se kut nagiba dviju kružnica može mjeriti duž ekvatora). To znači da se sljedeći izraz može protumačiti za sferu: "zbroj jedne stranice trokuta i kuta nasuprot njoj".

6. Pod "stranicama sfernog trokuta" podrazumijevamo kraće glavne lukove koji spajaju vrhove, tj. razmake (Eulerove trokute).

7. Za Eulerove trokute, baš kao i na ravnini, nejednakost trokuta je istinita; a također je istina da jednaki kutovi leže nasuprot jednakim stranicama, a veći kutovi leže nasuprot većim stranicama.

8. Zbroj kutova trokuta može varirati od 180° do 540°. Zbroj kutova je točno 180° ako jedan od tri vrha pada na kraći glavni luk definiran s druga dva; i točno 540° ako bilo koji vrh pada na najdulji glavni luk definiran s druga dva. Drugim riječima: u oba ekstremna slučaja, tri vrha se nalaze na jednoj glavnoj kružnici, ali za 180° trokut znači samo jedan glavni luk, a za 540° punu glavnu kružnicu! Kod 180° kutovi trokuta su: 0°, 180°, 0°; kod 540° kutovi trokuta su: 180°, 180°, 180°.

9. Postoje jednom pravokutni, dvaput pravokutni i trostruko pravokutni sferni trokuti.

10. Poučci o sukladnim trokutima: stranica-stranica-stranica, kut-stranica-kut i stranica-kut-stranica vrijede na isti način kao i na ravnini. Poučak kut-kut-stranica na sferi - za razliku od ravnine - općenito ne vrijedi!

11. Slučaj kut-kut-kut - u potpunoj suprotnosti s ravninom - dovoljan je za sukladnost! Dva su trokuta na sferi slična samo ako su i sukladna. Razmotrimo, na primjer, pravilne sferne trokute: kut vrlo malog trokuta, koji se degenerira u točku, varira od 60° do kuta od 180° degeneriranog trokuta, koji se pretvara u punu glavnu kružnicu.

12. Svaki sferni trokut ima polarni sferni trokut čiji su vrhovi vrhovi izvornog trokuta. Bilo koji kut trokuta nadopunjuje suprotnu stranicu polarnog trokuta do 180°; bilo koja stranica trokuta zaokružuje kut nasuprot stranici polarnog trokuta do 180°. Slijedi da, ako su zadani kutovi trokuta, a, b, c, tada se trokut može konstruirati na sljedeći način: uzmemo stranice $180° - a, 180° - b, 180° - c$, iz njih možemo konstruirati polarni trokut, a od polarnog trokuta željeni, originalni trokut: on će imati kutove a, b, c.

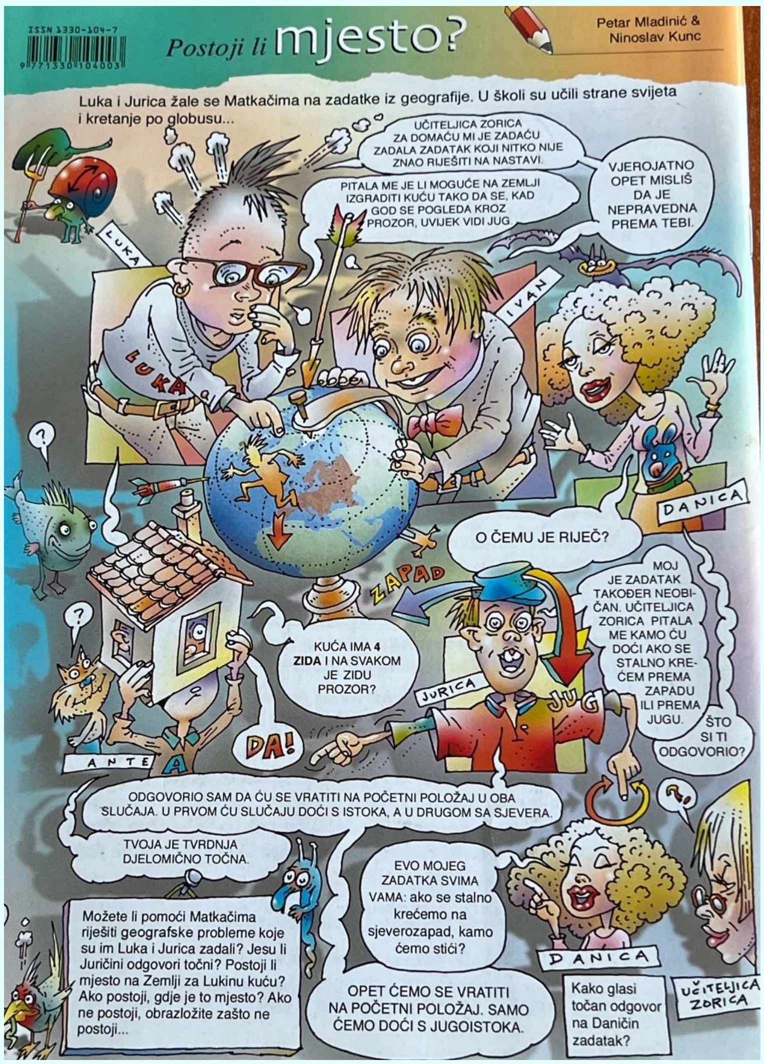
Misaoni proces na ravnini gotovo u potpunosti vrijedi i na sferi, zbog čega pristup vezan za ravninu snažno sugerira pogrješan zaključak: ovdje više nema rješenja!

Međutim, ako pogledamo sferoid i konstruiramo njegovu simetralu kuta, možemo vidjeti da sferoid ima povlaštenu točku: središte simetrije. Bilo koja glavna kružnica koja prolazi kroz ovu točku dijeli jednakokračan na dva zrcalno sukladna sferna trokuta. Svaki od tih trokuta zadovoljava uvjete - dakle postoji beskonačan broj rješenja na sferi koja uključuje nejednake trokute!

Zahvalni smo svim čitateljima koji će nam se, čitajući i rješavajući zadatke iz ove knjige kao i onima koji će uporabljivati priređene radne listiće i prateće datoteke, ukazati na pogrješke ili bolja i ljepša rješenja, a koja ćemo, ufamo se, u nekom sljedećem izdanju ugraditi u ovu knjigu.

ilenart@cs.elte.hu
nikol.radovic@geof.unizg.hr
a.rybak@uwb.edu.pl
mario.brkic@geof.unizg.hr
petar.mladinic@zg.ht.hr

1. Uvod



Problemi gibanja na globusu:
- strip zadatak iz *Matke* broj 113, rujan 2020.

Sferna geometrija ima široku primjenu. U matematici se primjenjuje pri izučavanju geometrijskih tijela, u trigonometriji, topologiji, kalkulusu, projektivnoj geometriji, diferencijalnoj geometriji, konačnim geometrijama, teoriji kompleksnih brojeva i teoriji funkcija.

Mnogi su koncepti sferne geometrije već prezentirani u kurikulu školskog zemljopisa.

Geografski koordinatni sustav pomaže u uvođenju koncepata sferne geometrije.

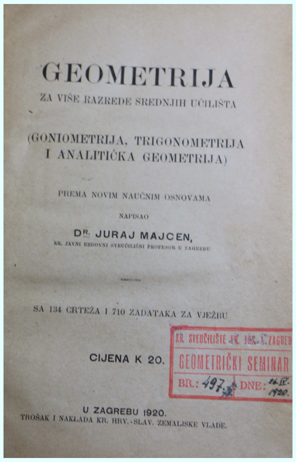
Nadalje, primjenjuje se i u:

- klasičnoj i modernoj fizici
- anorganskoj i organskoj kemiji
- kristalografiji
- znanosti o Zemlji
- astronomiji
- navigaciji
- umjetničkom i tehničkom crtanju
- industrijskom dizajnu
- inženjerstvu
- geofizici i astrofizici
- balistici
- geodeziji
- ...

Pri suvremenim geodetskim mjerenjima, kad se radi o velikim udaljenostima, mora se uzeti u obzir sferni oblik Zemlje.

Posebno su važne formule za rješavanje *sfernih trokuta*, tj. trokuta koji leže na sferi.

Ovaj su problem poznavali već i stari Grci. To je dovelo do razvoja *sferne geometrije.*



U udžbeniku J. Majcena: *Geometrija* [29.] iz 1920. na str. 81. o razvoju sferne geometrije piše i sljedeće:

Sferna je trigonometrija postojala usporedno s astronomskim istraživanjima, kako su ih udesili **HIPARH**, onda **Menelaj** (1. vijek pr. Kr.), pa **Ptolemej**. Od Grka je poznavanje te grane geometrije na Inde (u 5. vijeku), a od ovih na Arape, među kojima se osobito istakao astronom **Al-Battani** (u 9. vijeku), pa **Abû'l Wafa** (u 10. vijeku) koji je prvi potpuno dokazao *poučak o sinusima*.

Sfernu je trigonometriju sistematski upotpunio **Regiomontan** (u 15. vijeku) koji je prvi udesio *poučak o kosinusu* za rješavanje sfernih trokuta, premda prvi tragovi za poznavanje toga poučka vode sve do Inda (u 5. vijeku).

Za noviji razvoj sferne trigonometrije stekli su osobitih zasluga **J. Neper**[1] (u 16. i na početku 17. vijeka), **L. Euler** i **R. J. Bošković** (u 18. vijeku), pa **K. F. Gauß** (u 18. i 19. vijeku) i **A. Möbius** (u 19. vijeku).

J. Majcen u istoj knjizi, u trećem dijelu ili poglavlju koji naziva *Sferna trigonometrija*, navodi:

I. O sfernim trokutima uopće.

34. Sferni kut i sferna daljina
35. Sferni trokut
36. Polarni trobridi i pripadni sferni trokuti

II. Pravokutni sferni trokut.

37. Deset formula za pravokutni sferni trokut
38. Neperovo pravilo
39. Općeno rješenje pravokutnoga trokuta

[1] J. Napier Merchistonski (poznat i kao Napair, ili Neper)

III. Kosokutni sferni trokut.

40. Poučak o sinusima

41. Poučak o kosinusu za stranicu i za kut

42. Površina sfernog trokuta

43. Astronomski zadaci:

    1. Određivanje geogr. širine na Zemlji
    2. Najveće kružnice, sferne daljine i kutovi na nebeskoj kugli
    3. Primjeri

44. Općeno rješenje kosokutnih sfernih trokuta

45. Rješenje sfernog trokuta primijenjeno na zadaće

Detaljno i danas aktualno je to! Kao što je to bilo vrlo aktualno nekada!

Kako bismo to potvrdili, pogledajmo dio sadržaja udžbenika *Geometrijska vježbenica* [57.] koji su napisali K. Zahradnik i D. Segen 1898. godine.

U drugom poglavlju se obrađuje:

Sferna geometrija

Rješavanje pravokutna sfernoga trokuta

Primjena pravokutna sfernoga trokuta

Razrješavanje kosokutna sfernoga trokuta

Primjena kosokutna sfernoga trokuta

*****

Kao uvod u temu pogledajmo sljedeća tri primjera. Oni najbolje ilustriraju/ukazuju primjenu općeg školskog znanja na probleme sferne geometrije koji su se nekada poučavali, a danas su napušteni.

Problem 1.

a) Gdje ćemo stići ako se stalno krećemo na zapad?

b) Gdje ćemo stići ako krenemo na sjever?

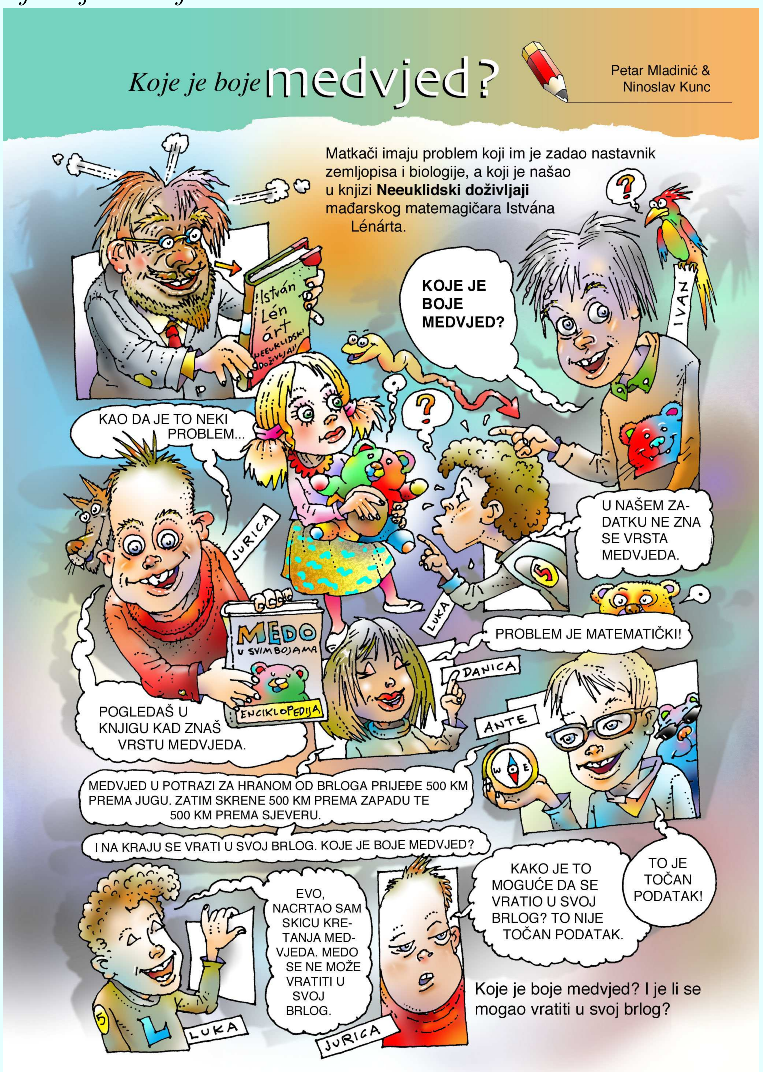
c) Gdje ćemo stići ako se stalno krećemo prema sjevero-zapadu?

Problem 2. *Postoji li mogućnost podizanja zgrade koja na svakoj od 4 strane ima prozor kroz koji se uvijek vidi jug?*

Treći je problem iz knjige *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere* [26.] koju je napisao **István Lénárt** 1996. godine.

Problem 3. *Medvjed živi u brlogu. U potrazi za hranom prijeđe 100 km na jug. Nakon toga se kreće 100 km na zapad. I napokon promijeni smjer kretanja te krene na sjever. Na naše iznenađenje vrati se natrag u brlog.*

Koje je boje medvjed?



Tipično proučavanje geometrije u suvremenom poučavanju utemeljeno je na euklidskoj geometriji ravnine koja ne korespondira s realnošću našeg "kretanja na Zemlji". Razumijevanje učenika i prihvaćanje pojmova sferne geometrije važno je za razumijevanje i objašnjavanje fizičkog svijeta oko nas.

Proučavanje sferne geometrije nije apstraktno jer su učenici dobro upoznati sa sferama. Ako učenici dobiju odgovarajuće alate, ovo proučavanje može biti vrlo zanimljivo. Učenici mogu lako razmotriti mnoge elementarne poučke iz ravninske euklidske geometrije i istražiti ih na sferi.

Ovaj pristup usporedbe ravninske i sferne geometrije omogućuje učenicima razumjeti da je euklidska geometrija jedna od mnogih geometrija.

To je i predloženo u *Standardima za nastavu matematike* [64.] u kojima se elaborira da *učenici, koji namjeravaju studirati, euklidsku geometriju trebaju shvaćati kao jednu od mnogih aksiomatskih sustava*. Ovo shvaćanje ostvaruje se usmjeravanjem učenika na istraživanje svojstava drugih geometrija kako bi se uvjerili da temeljni aksiomi i definicije dovode do sasvim različitih i često kontradiktornih zaključaka.

Skromna početna ilustracija ovih činjenica sadržana je u naznačenim problemima 1., 2. i 3.

Prema Lénártu, postoje četiri prednosti učenja sferne geometrije:

1. *Analizirajuća aktivnost*

   Usporedba rezultata iste aktivnosti u ravnini i na sferi pomaže učeniku dublje razumijevanje nastalih razlika.

2. *Shvaćanje situacije*

   U većini slučajeva učenik je bolje i više upoznat s nizom aktivnosti i njihovom matematičkom pozadinom na ravnini nego na sferi. Dakle, konstruiranje novih situacija i novih koncepata razumijevanjem onih poznatih od znatne je pomoći učeniku da mu novi koncepti postanu pristupačniji.

3. *Učenik sam postavlja problem*

   Kad učenik razumije kako su određeni koncepti ravninske i sferne geometrije međusobno usklađeni u danom sustavu moći će prevesti novi problem ravninske geometrije u drugi problem sferne geometrije ili obrnuto.

4. *Ponovno razmatranje odbačenih ideja*

   Kada nastavnik iskaže novu tvrdnju česta reakcija učenika je neprihvaćanje te tvrdnje ili barem sumnja u nju. Tada učenik pokušava s protutvrdnjom ili protuidejom.

Kad učenici stvaraju vlastita nagađanja/hipoteze na temelju svojih istraživanja Sketchpadom postaju svjesni činjenice da oni moraju dati dokaz tih nagađanja.

Dakle, povjerenje u ovo okruženje je preduvjet za pronalaženje dokaza.

Matematičar G. Polya opisao je ovaj proces učenja:

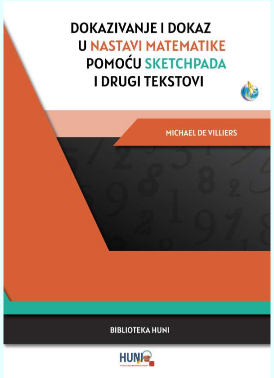
`... nakon što smo potvrdili poučak u nekoliko posebnih slučajeva, prikupili smo jake induktivne dokaze za to.`

`Induktivna faza nadvladala je našu početnu sumnju i dala nam čvrsto povjerenje u poučak. Bez takvog samopouzdanja jedva da bismo smogli hrabrosti poduzeti dokaz koji nije nimalo izgledao kao rutinski posao. Kad ste uvjereni da je poučak istinit, počnete ga dokazivati.`

Sketchpad zapravo ne može generirati dokaze, nego daje eksperimentalne podatke koji omogućuju snažno uvjerenje koje treba motivirati učenike na dokazivanje.

Međutim, naši učenici moraju biti upoznati s deduktivnom prirodom matematike i znati da empirijske metode ne objašnjavaju zašto je neko nagađanje općenito istinito.

U knjizi *Dokazivanje i dokaz u nastavi matematike pomoću Sketchpada i drugi tekstovi* [10.] autor Michael de Villiers navodi nas na promišljanje i poučava o jednom od osnovnih pojmova u matematici - *dokazu*.



Pri tome propituje uobičajeno tumačenje riječi dokaz kao potvrde neke matematičke tvrdnje te otvara nove poglede na svrhu dokaza kao i na doprinos dokaza pri konstruiranju novih znanja.

Čitatelj će tako osvijestiti da postoje različite svrhe dokaza: *dokaz kao objašnjenje, kao otkriće, kao provjera, kao izazov, kao sistematizacija* . Svaka od ovih uloga dokaza teorijski je obrazložena i popraćena brojnim i potpuno razrađenim primjerima aktivnosti za učenike. Za nastavnika knjiga predstavlja prekrasno vrelo teorijskih pogleda na to što bismo s učenicima mogli raditi i konkretnih materijala koji pokazuju na koji je to način moguće učiniti.

Primjena tehnologije sastavni je dio svih predloženih aktivnosti. No, tehnologija nije sama sebi svrha, već je uvijek u funkciji metodike nastave matematike. Ona je snažno podupiruće sredstvo koje će omogućiti učeniku otkrivanje matematičkih svojstava, propitivanje uzroka i posljedica te razumijevanje veza među matematičkim objektima.

Proces matematizacije mora se završiti deduktivnim dokazom. No, neka su istraživanja pokazala da učenici ne trebaju dokaz u Sketchpadovom okolišu. Pretpostavlja se da je ova koncepcija usko povezana s njihovim vjerovanjima i edukacijskim iskustvima u vezi s matematikom.

Proces matematizacije (eksperimentiranje, nagađanje i objašnjenje) sastavni je dio matematičke kulture i namijenjen je svim učenicima na svim razinama geometrijskog obrazovanja (u euklidskoj geometriji).

Međutim, s obzirom na neeuklidske geometrije, trebamo li od učenika tražiti deduktivni dokaz?

To je retoričko pitanje i aktivnost na toj razini u okviru sferne geometrije prepuštamo nastavnicima i učenicima.

Ova je knjiga, između ostalog, motivirana i potrebom da nastavnicima, učenicima i studentima te zainteresiranoj javnosti ponudimo tekst/materijale/datoteke koji će im *omogućiti postizanje 4. i 5. van Hieleove razine znanja učenika* uz općeobrazovne i svakodnevne pojmove potrebne svakom suvremenom čovjeku.

Iako je Sketchpad (DSG) transformirao okruženje učionice u energičnije, dinamičnije i privlačnije mjesto koje potiče na razmišljanje, to ne znači da zagovaramo zamjenu korištenja u učionici realnih sfera sa Sketchpadom.

Mora se naglasiti da je jedini način da bilo koja geometrija postane stvarna i da učenici ostvare duboko razumijevanje osnovnih geometrijskih pojmova taj da učenici fizički dodiruju i igraju se realnim predmetima i realnim priborom. (I ne trebamo preferirati zamjenu virtualnog i realnog pribora tj. jednoga s drugim nego kao nadopunu u učenju i poučavanju.)

2. Datoteke i radni listići

Lénártova radionica s najmlađim učenicima

Ovdje ćemo kreirati radne listiće u skladu s kurikulom.

Uz svaki listić kreirat ćemo i Sketchpadovu datoteku za rad.

Kreirat ćemo listić s pitanjima prema Lénártovoj ideji i pitanjima iz njegove knjige *Non-Euclidean Adventures on the Lénaárt Sphere - Investigations in Planar and Spherical Geometry* [26.].

Odgovore na pitanja postavljena u listićima naći ćete u poglavlju 6.*Ravninska geometrija nasuprot sferne geometrije* na stranicama od 127. i dalje (u tablicama).

Razmatrajući pitanja iskazana u listiću/listićima i uspoređujući odgovore za probleme u ravnini i na sferi, dobit će se iskustvo i činjenice koje su nužne za daljnji rad na ostalim problemima *komparativne geometrije*.

2.1. Prvi problem: temeljni elementi

Ovaj odjeljak sadrži pet listića koje učenicima pružaju osnovne ideje i vježbe koji će im trebati za rad na Lénártovoj sferi. U problemu 2.1. i 2.2 učenici određuju sferni ekvivalent točke i pravca. Baš kao što rade u ravninskoj geometriji, oni se moraju složiti oko ovih najjednostavnijih elemenata prije nego što mogu graditi složenije oblike.

Budući da na sferi nema pravaca, problem 2.2. jest presudan za učenikovo razumijevanje osnovne razlike između te dvije geometrije i preduvjet je za gotovo sve druge probleme/istraživanja.

U problemu 2.3. učenici uče kako koristiti sferno ravnalo za mjerenje udaljenosti na sferi.

U problemu/zadatku 2.4. učenici pronalaze metode za konstruiranje polarnih točaka i ekvatora - oblika koji ne postoje u ravnini, ali su važni u mnogim sfernim konstrukcijama.

U problemu 2.5. učenici grade mali sferni kutomjer od komada sferne prozirnice.

Koristite ove prve probleme kao uvod u sfernu geometriju, ali ne dopustite da vaši učenici zaglave u rješavanju ovih osnovnih pojmova dugo. Ideje u ovom poglavlju prikladno će ih pripremiti za više sofisticirane probleme koji se pojavljuju kasnije u knjizi.

Koristite avanturističke karte, ako više volite otvoreniji pristup nastavi. Ako više volite strukturirane lekcije, umjesto toga koristite Vodiče za studente. Priručnik za nastavnike koji slijedi nakon svakog Vodiča za studente sadrži rješenja i prijedloge.

*****

U ovom odjeljku razmotrit ćemo pet istraživanja/problema/zadataka:

2.1. Koji je najjednostavniji oblik?

2.2. Može li se nacrtati pravac na sferi?

2.3. Kako mjeriti udaljenost?

2.4. Kako se može konstruirati ekvator i polarne točke?

2.5. Kako se može koristiti kutomjer za mjerenje kutova na sferi?

1. radni listić: Koji je najjednostavniji oblik?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koji je najjednostavniji oblik?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

1. Otvorite Sketchpadovu datoteku `Koji je najjednostavniji oblik?.gsp` i priredite model sfere.

2. Na Sketchpadovoj datoteci nacrtajte u ravnini elemente za koje smatrate da su najjednostavniji. Iste te elemente nacrtajte na sferi.

3. Argumentirajte zašto ih smatrate najjednostavnijim elementima geometrije.

4. Koji su to elementi? Nabrojite ih!

5. Koji objekti u ravnini odgovaraju objektima na sferi?

6. Što je isto, a što različito tim objektima u ravnini i na sferi? Zašto je to tako?

7. Kako se ti elementi definiraju u ravnini, a kako na sferi?

Usporedite ravninu i sferu

1. a) Nacrtajte barem dva oblika na svojoj sferi koja ne možete crtati u ravnini.
   b) Opišite oblike i objasnite zašto ne možete nacrtati ove oblike u ravnini.

2. a) Na svojoj sferi nacrtajte najmanje dva oblika koja možete nacrtati u ravnini.
   b) Opišite oblike i objasnite zašto ih možete nacrtati u ravnini.

3. Raspravite o svojim nalazima sa svojim partnerom ili grupom. Pogledajte koliko razlika možete naći između ravnine i sfere.

Uputa: *Odgovore na ova pitanja možete pronaći u odgovarajućoj tablici u kojoj se uspoređuju ove činjenice u* **poglavlju 6. stranica 127.**

2. radni listić: Može li se nacrtati pravac na sferi?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Može li se nacrtati pravac na sferi?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Otvorite Sketchpadovu datoteku `Može li se nacrtati pravac na sferi?.gsp` i priredite model sfere.

Na Sketchpadovoj datoteci nacrtajte u ravnini dvije različite točke A i B. Iste te elemente nacrtajte na sferi.

Konstrukcija u ravnini

1. Nacrtajte dvije različite točke u ravnini. Označite ih A i B.
2. Spojite točke A i B s tri različita pravca ili krivulje.
3. Nacrtajte najkraći put između točaka A i B ako to još niste učinili. Uporabite ravnalo da produžite svoju najkraću stazu dok ne dosegne rubove svojeg papira.
4. Kad biste mogli zauvijek produljiti krajeve svojeg pravca, bi li se ikada sreli?
5. Po čemu se najkraći put između točaka A i B razlikuje od ostalih putova koje si nacrtao?
6. a) Na koliko dijelova točke A i B dijele vaš pravac?
   b) Koliko je od ovih odsječaka konačno dugo?
   c) Koliko ih je beskonačno dugih?
7. Koliko različitih pravaca možete nacrtati kroz jednu točku u ravnini?
8. Koliko različitih pravaca možete nacrtati kroz dvije točke u ravnini?

Konstrukcija na sferi

1. Kakav ćete oblik dobiti kada dvije točke na sferi spojite najkraćim mogućom stazom?
2. Što će se dogoditi kada ovu putanju produžite u oba smjera oko sfere?
3. Nacrtajte dvije različite točke na svojoj sferi. Označite ih A i B.
4. Razapnite konac na sferi između dviju točaka A i B kako biste pronašli najkraći put između točaka. Nacrtajte crtu duž napete uzice pomoću markera.

5. Pokušajte ravnalom "spojiti" ove točke na sferi. Što opažate?
6. Nacrtajte liniju između točaka A i B pomoću sfernog ravnala i proširite je što je više moguće u oba smjera.
7. Upravo ste stvorili glavnu kružnicu na sferi. Opišite je!
8. a) Na koliko lukova točke A i B dijele vašu glavnu kružnicu?
   b) Koliko je od ovih lukova konačnih?
   c) Koliko ih je beskonačno dugih?
9. Odredite koji rubovi vašeg sfernog ravnala ocrtavaju lukove glavnih kružnica, a koji ne.
10. Koliko glavnih kružnica možete nacrtati kroz jednu točku na sferi?
    a) Koliko glavnih kružnica možete nacrtati kroz dvije točke na sferi?
    b) Je li vaš odgovor točan za bilo koje dvije točke na sferi?

Usporedite ravninu i sferu

1. Koliko činjenica možete uočiti o pravcima u ravnini i o glavnoj kružnici na sferi?
2. Odlučite što mislite da je jednostavnije: pravci u ravnini ili glavne kružnice na sferi. Zašto?
3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto su linije jednostavnije na površini koju niste izabrali gore.

Odgovori se nalaze na stranici 130.

3. radni listić: Kako mjeriti udaljenost?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako mjeriti udaljenost?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Otvorite Sketchpadovu datoteku `Kako mjeriti udaljenost?.gsp` i priredite model sfere.

Često morate izmjeriti udaljenost između dvije figure.

- Opišite kako mjeriti udaljenost u ravnini.
- Opišite kako se mjeri udaljenost na sferi.
- U svakom slučaju objasnite koje mjerne jedinice možete koristiti.

Konstrukcija u ravnini

1. Nacrtajte dvije različite točke u ravnini. Označite ih A i B.
2. Izmjerite udaljenost između točaka A i B.
3. Nacrtajte stazu kojom ste izmjerili udaljenost.
4. Zašto je ovo jedina staza po kojoj možete mjeriti udaljenost između točaka A i B?

Konstrukcija na sferi

Kako možete izmjeriti udaljenost između dviju točaka na sferi?

1. Nacrtajte dvije različite točke na svojoj sferi. Označite ih A i B.
2. Nacrtajte cijelu glavnu kružnicu koja sadrži ove dvije točke.
3. a) Koliko lukova spaja točke A i B?
   b) Uporabite oznake stupnjeva na vašem sfernom ravnalu kako biste izmjerili duljinu svakog od njih u stupnjevima.
   c) Kolika je udaljenost izmedu točaka A i B?
   d) Koju ste mjeru luka odabrali kao udaljenost? Objasnite zašto ste odabrali ovu mjeru.
4. a) Opišite par točaka na sferi između kojih je moguće mjeriti najkraću udaljenost duž više od jednog luka.
   b) Postoji li par točaka u ravnini između kojih je moguće mjeriti udaljenost duž više od jednog segmenta?
5. a) Kolika je najveća moguća udaljenost između dviju točaka u ravnini?
   b) Kolika je najveća moguća udaljenost između dviju točaka na sferi?
   c) Kolika je najkraća moguća udaljenost između dviju točaka u ravnini?
   d) Kolika je najkraća moguća udaljenost između dviju točaka na sferi?

Usporedite ravninu i sferu

1. Što možete uočiti o mjerenju udaljenosti u ravnini i na sferi?
2. Mislite li da je mjerenje udaljenosti jednostavnije u ravnini ili na sferi? Zašto?
3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto je mjerenje udaljenosti jednostavnije na površini koju nisi izabrao gore.

Odgovori se nalaze na stranici 132.

4. radni listić: Kako se mogu konstruirati ekvator i polarne točke?

Priredite model sfere i pribor.

Ekvator Zemlje otprilike je glavna kružnica. Ova glavna kružnica ima dva središta ili polarne točke: Sjeverni i Južni pol. Na sferi nazivamo veliku kružnicu ekvatorom, a polarne točke glavne kružnice nazivamo njezinim polovima.

Slijede tri odvojene konstrukcije na sferi. Svaku konstrukciju započnite s čistom sferom.

1. konstrukcija: Nacrtajte točku na svojoj sferi. Ovo će biti polarna točka (pol). Uporabite svoje sferno ravnalo i šestar za konstruiranje ekvatora koji odgovara ovoj polarnoj točki (polu). Opišite svoju konstruktivnu metodu.
2. konstrukcija: Nacrtajte točku na svojoj sferi. Ovo će biti tvoja prva polarna točka (pol). Pronađite način da konstruirate suprotnu polarnu točku (pol). Opišite svoju metodu.
3. konstrukcija: Nacrtajte glavnu kružnicu. Pronađite način da konstruirate polarne točke (polove) koji odgovaraju ovoj glavnoj kružnici. Opišite svoju metodu.

1. Usporedite svoje metode konstruiranja s drugima u tvojem razredu.
2. Kolika je udaljenost između bilo kojeg para polova?
3. Kolika je udaljenost između pola i ekvatora?
4. Pretpostavimo da je grad u kojem živite pol Zemlje.
   a) Opišite mjesto vašeg suprotnog pola.
   b) Opiši ekvator svog rodnog grada.
5. Pronađite grinički meridijan (0° zemljopisne dužine) na globusu. Gdje su polarne točke glavne kružnice koje uključuju ovaj meridijan?

Usporedite ravninu i sferu

Ima li smisla u ovom slučaju napraviti usporednu tablicu između ravnine i sfere kao što smo radili u prethodnim listićima? Zašto da ili zašto ne?

5. radni listić: Kako se može koristiti kutomjer za mjerenje kutova na sferi?

Znadete koristiti kutomjer za mjerenje kutova u ravnini. Možete li koristiti taj kutomjer za mjerenje kutova na sferi?

Uporabite komad sferne prozirne folije za napraviti kutomjer kojim se može mjeriti kutovi na sferi.

Izrada sfernog kutomjera

Samo jedna grupa u vašem razredu treba napraviti 1. korak.

1. korak: Morate izrezati prozirnu foliju na komade **tako** da svaka grupa u vašem razredu može napraviti vlastiti kutomjer. Stavite prozirnicu na vašu sferu. Uporabite svoj sferni šestar za nacrtati kružnicu koja ima rupu na prozirnici kao njezino središte i polumjer 25°. Označite točku otprilike na sredini između kružnice i ruba prozirnice. Koristite ovu točku kao središte i nacrtajte drugu kružnicu polumjera 25°. Označite dodatne točke kao središta i uporabite svako središte da nacrtate kružnicu koja ima radijus od 25°. Odaberite središnje točke tako da kružnice budu blizu jedan drugoj ali da se ne dodiruju. Uklonite prozirnu foliju sa sfere i uporabite škare za pažljivo je izrezati na komade tako da je na svakom komadu po jedna kružnica. Podijelite jedan od ovih prozirnih dijelove svakoj grupi u vašem razredu. Ako je potrebno, uporabite drugu prozirnu foliju za izradu dodatnih komada.

Svaka grupa u vašem razredu treba izvesti preostale korake.

2. korak: Označite polarnu točku na svojoj sferi. Uporabite svoje sferno ravnalo za crtanje odgovarajućeg ekvatora. Zatim označite svaki deseti stupanj duž ekvatora.

3. korak: Pretvorite svoj komad prozirnice u disk tako da pažljivo skroz obrežete vanjski rub kruga. Zatim zalijepite omču od prozirne trake ovog diska na sferu tako da se njegova središnja točka poklapa s polom koji ste označili na sferi.

4. korak: Uparabite svoje ravnalo da poravnate svaki par nasuprot oznake na ekvatoru sfere sa središnjom točka diska. Zatim nacrtajte tanke crtice svakih deset stupnjeva po disku.

5. korak: Odaberite par okomitih lukova i podebljajte ih. Dovršite svoj praktični kutomjer s diskom probijanjem male rupe točno u središtu.

6. korak: (Neobavezno) Kako bi kutomjer trajao dulje, uporabite ravnalo i marker da prati tvoje lukove. (Nastojte da ne ostane trajna tinta na vašoj sferi. Možete linije obrisati alkoholom.)

1. Na vašoj sferi nacrtajte dva luka glavnih kružnica koje imaju zajedničku krajnju točka. Uporabite kutomjer za mjerenje za oba formirana sferna kuta. Što uočavate za ove kutove?

2. Uporabite svoj disk kutomjer i svoje sferno ravnalo za konstruirati kut od 50°. Konstruirajte kut od 100°, kut od 200° i 3. kut od 300°.

3. a) Kako možete uporabiti svoje sferno ravnalo za mjerenje bilo kojeg kuta?

   b) Koje su praktične prednosti manjeg kutomjera s diskom koji ste upravo napravili?

Usporedite ravninu i sferu

Usporedite metode mjerenja kutova u ravnini i na sferi? Što je zanimljivije?

2.2. Drugi problem: paralelnost i okomitost

U ovom odjeljku razmotrit ćemo tri istraživanja/problema/zadataka:

3.1. Koliko točaka mogu dijeliti dvije linije?

3.2. Kako izgledaju okomite crte na sferi?

3.3. Koliko zajedničkih okomica mogu imati dva pravca?

Paralelne linije i okomite linije imaju neke iznenađujuće razlike u ravnini i sferi. Listići u ovom poglavlju naglašavaju ove razlike.

U tekstovima koji slijede u ovoj knjizi nalaze se za nastavnike i učenike rješenja i sugestije.

U listiću 3.1. učenici istražuju paralelne i presječne parove linija.

Budući da paralelne linije ne mogu stajati na sferi, ovaj listić pruža važan primjer kako je sferna geometrija nedosljedna s jednim od najosnovnijih aksioma euklidske ravninske geometrije - s postulatom o paralelama.

Listić 3.1. neophodan je ako ovu knjigu koristite za formalno proučavanje sferne geometrije, budući da pokazuje temeljni razlog da sferna geometrija je neeuklidska geometrija.

Listić 3.2. predstavlja lijep nastavak lekcije 2.1. jer istražuje moguća sjecišta triju različitih linija.

Listići 3.2. i 3.3. istražuju neke od razlika između okomitih linija na dvije različite površine.

Listić 3.2. definira i istražuje svojstva pravca okomitog na jedan drugi pravac.

U listiću 3.3. učenici istražuju svojstva linije koja je okomita na najmanje dvije druge crte. Oba listića uspoređuju te pojmove ravninske i sferne geometrije.

Listić 3.2. je od pomoći kao uvod za 3.3.

1. radni listić: Koliko točaka mogu dijeliti dvije linije?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koliko točaka mogu dijeliti dvije linije?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte pravac. Označite ga l.
2. korak: Pokušajte nacrtati drugi pravac koji nema zajedničku točku s pravcem l. Označite ga a.
3. korak: Pokušajte nacrtati pravac koja ima točno jednu točku zajedničku s l. Označite ga b.
4. korak: Pokušajte nacrtati pravac koji ima točno dvije točke zajedničke s pravcem l. Označite ga c.
5. korak: Pokušajte nacrtati pravac koji ima više od dvije zajedničke točke s pravcem l. Označite ga d.

1. Koje su konstrukcije bile moguće u ravnini?
2. Koji su vaši pravci paralelni? Zašto?
3. Opišite sve različite načine na koje se dva različita pravca mogu presijecati u ravnini.

Konstrukcija na sferi

Hoće li vaši zaključci biti isti za glavne kružnice na sferi?

1. Izvedite iste korake na sferi kao što ste u ravnini, zamjenjujući pravce s glavnim kružnicama. Pratite koje su konstrukcije moguće na sferi.

2. Opišite sve načine za koje se dvije glavne kružnice mogu sjeći na sferi.

3. Mogu li dvije glavne kružnice ikada biti paralelne?

Usporedite ravninu i sferu

1. Koliko sjecišta imaju dva pravca u ravnini a koliko sjecišta dvije glavne kružnice na sferi?

2. Mislite li da je sjecište dvaju pravaca jednostavnije u ravnini ili na sferi? Koji je slučaj intrigantniji? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto je sjecište dviju linija jednostavnije ili intrigantnije na površini koju odaberete gore.

Odgovori se nalaze na stranici 134.

2. radni listić: Kako izgledaju okomite crte na sferi?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako izgledaju okomite crte na sferi?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Okomite se linije sijeku na poseban način u ravnini i na sferi.

- Opišite dva okomita pravca u ravnini.

- Opišite dvije okomite glavne kružnice na sferi.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte dva pravca koja se sijeku i dijele ravninu na područja koja su sva sukladna.

2. korak: Izmjerite i označite sve kutove u svakoj točki sjecišta ovih dvaju pravaca.

1. Dva pravca koje ste konstruirali su okomita jedan na drugog. Uočite što možete zaključiti o okomitim pravcima u ravnini.

Kako izgledaju okomice na sferi?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte dvije glavne kružnice koje dijele vašu sferu na područja koja su sva kongruentna.
2. korak: Izmjerite i označite sve kutove u svakoj točki presjeka ovih dviju okomitih glavnih kružnica.

1. Dvije glavne kružnice koje ste konstruirali su okomite jedna na drugu. Zabilježite sva zapažanja koja možete napraviti za okomite glavne kružnice na sferi.

Odgovori se nalaze na stranici 134.

Usporedite ravninu i sferu

1. Koliko činjenica možete uočiti za okomite pravce u ravninu i za okomite glavne kružnice na sferi?
2. Mislite li da su okomite crte zanimljivije u ravnini ili na sferi? Zašto?
3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto su okomite linije zanimljivije na površini koju niste odabrali gore.

3. radni listić: Koliko zajedničkih okomica mogu imati dva pravca?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koliko zajedničkih okomica mogu imati dva pravca?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Ako je pravac okomit na dva druga pravca odjednom, onda je on zajednička okomica za te pravce.

- Istražite zajedničke okomice dvaju pravaca u ravnini.
- Istražite zajedničke okomice dviju glavnih kružnica na sferi.

1. Koliko zajedničkih okomica možete nacrtati u 1. koraku?
2. Koliko biste zajedničkih okomica mogli nacrtati u 2. koraku?

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte dva pravca koji se sijeku. Zatim pokušajte nacrtati neke pravce koji su okomiti na oba.
2. korak: Nacrtajte dva paralelna pravca. Zatim pokušajte nacrtati neki pravac koji je okomit na oba.

Hoće li vaši zaključci o zajedničkim okomicama biti isti na sferi?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte dvije različita glavne kružnice.

2. korak: Izmjerite i označite sve kutove u svakoj točki presjeka ovih dviju okomitih glavnih kružnica.

1. Koliko zajedničkih okomice znadete nacrtati na bilo koje dvije glavne kružnice?

Usporedite ravninu i sferu

1. Koliko činjenica možete uočiti o zajedničkim okomicama u ravnini i o zajedničkim okomicama na sferi?

2. Mislite li da su uobičajene okomice jednostavnije u ravnini ili na sferi? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto su zajedničke okomice jednostavnije na površini koju niste odabrali gore.

Odgovori se nalaze na stranici 136.

2.3. Treći problem: mnogokuti

- Je li moguće nacrtati poligon sa samo dvije stranice?
- Koja područja možete stvoriti pomoću tri linije?
- Koliko trokuta može imati ista tri vrha?
- Koliki je zbroj kutnih mjera jednog trokuta?
- Može li trokut imati više od jednog pravog kuta?

1. radni listić: Je li moguće nacrtati mnogokut sa samo dvije stranice?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Je li moguće nacrtati mnogokut sa samo dvije stranice?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Nacrtali ste mnogo različitih mnogokuta, kao što su trokuti, četverokuti, peterokuti i šesterokuti.

Odredite je li moguće nacrtati dvostrani mnogokut.

Konstrukcija u ravnini

Nacrtaj dvije zrake/polupravca sa zajedničkom početnom točkom.

1. Hoće li se dvije zrake sastati u nekoj drugoj točki ako ih produžimo?
2. Dvije zrake dijele ravninu na različita područja. Opišite veličinu i oblik područja.
3. Mnogokut je zatvoreni lik s ravnim stranicama. Objasnite da li je moguće stvoriti dvostrani mnogokut u ravnini.

Konstrukcija na sferi

Možete li napraviti dvostrani mnogokut na sferi?

Nacrtajte lukove dviju različitih glavnih kružnica počevši od iste točke na vašoj sferi.

1. Proširite dva luka. Sastaju li se dva luka u još jednoj točki?
2. Dva luka dijele sferu na različita područja. Opišite veličinu i oblik područja.
3. a) Napišite definiciju mnogokuta na sferi.
   b) Jesu li neka od područja koje ste stvorili na svojoj sferi mnogokuti?
4. Mnogokut na sferi koji ima točno dva kuta naziva se dvokut. Mjera svakog kuta u mnogokutu ne može biti veća od 180°. Šrafiraj jedan dvokut na tvojoj sferi.
5. Izmjerite oba kuta dvokuta i opišite svojstvo koje vrijedi za kutove bilo kojeg dvokuta.
6. Izmjerite obje stranice dvokuta i opišite dva svojstva koja vrijede za stranice bilo kojeg dvokuta.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete nacrtati dvije zrake sa zajedničkom početnom točkom u ravnini i dva luka glavnih kružnica sa zajedničkom početnom točkom na sferi.
2. Što mislite koja je površina jednostavnija u ovom slučaju: ravnina ili sfera? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti argument. Navedite razloge zašto bi moglo biti jednostavnije.

Odgovori se nalaze na stranici 136.

2. radni listić: Koja područja možete stvoriti pomoću tri linije?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koja područja možete stvoriti pomoću tri linije?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Kada se tri linije sijeku, one dijele površinu na nekoliko područja.

- Istražite područja koja možete stvoriti koristeći tri pravca u ravnini.
- Istražite područja koja možete stvoriti pomoću tri glavne kružnice na sferi.

Konstrukcija u ravnini

Svaki par različitih pravaca u ravnini je paralelan ili se siječe. Napravite crteže za demonstraciju svakog mogućeg slučaja za tri različita pravca u ravnini.

1. *Za svaki* crtež odredite koliko područja stvaraju tri pravca.
2. Za svaki crtež odredite koliko područja ima konačnu površinu, a koliko područja imaju beskonačnu.

Koje vrste područja možete stvoriti s tri glavne kružnice na sferi?

Konstrukcija na sferi

Nacrtajte tri glavne kružnice na svojoj sferi.

1. Koliko područja možete stvoriti s tri različite glavne kružnice na sferi? Navedite sve moguće odgovore na ovo pitanje.
2. Za svaki primjer koji ste naveli u gornjem odgovoru odredite koliko područja ima konačnu površinu a koliko imaju beskonačnu.
3. U jednom od gornjih slučajeva stvorili ste područja koja su trokuti. Trokuti su sukladni ako im su odgovarajuće stranice sukladne i odgovarajući kutovi sukladni. Koristite svoj crtež napravljen za ovaj slučaj i pronađite par sukladnih trokuta na suprotnim stranama vaše sfere.

a) Označite svaki takav par trokuta na svojem crtežu s različitim bojama.

b) Koliko takvih parova trokuta stvaraju vaše tri glavne kružnice?

4. Nacrtajte jedan od ovih trokuta na prozirnu foliju.

   a) Slaže li se trokut točno na svojeg sukladnog partnera?

   b) Objasnite kako možete to točno uklopiti.

   c) Takav par trokuta zove se *refleksni par trokuta*. Objasnite zašto je ovaj naziv dobar za ove parove trokuta.

Usporedite ravninu i sferu

1. Koliko slučajeva možete napraviti s tri različita pravca u ravnini i s tri glavne kružnice na sferi.

2. Što mislite da je jednostavnije: tri pravca u ravnini ili tri glavne kružnice na sferi? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto tri linije su jednostavnije na površini koju odaberete gore.

Odgovori se nalaze na stranici 137.

3. radni listić: Koliko trokuta može imati ista tri vrha?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koliko trokuta može imati ista tri vrha?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Pretpostavimo da odaberete tri točke.

- Istražite koliko različitih trokuta možete dobiti spajanjem točaka u ravnini pomoću dužina.

- Istražite koliko različitih trokuta možete dobiti spajanjem točaka na sferi pomoću lukova.

Konstrukcija u ravnini

Nacrtajte tri nekolinearne točke u ravnini. Konstruirati trokut s te tri točke kao vrhovima.

1. Koliko različitih dužina možete nacrtati između dviju točaka u ravnini?

2. Koliko različitih trokuta možete nacrtati s tri ista vrha?

Na koliko različitih načina možete spojiti tri točke na sferi za nacrtati trokut?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte tri točke na svojoj sferi, pazeći da sve tri točke nisu na istoj glavnoj kružnici i da nijedna od tri točke nije jedna nasuprot ostalima. Označite svoje točke A, B i C.

2. korak: Konstruirajte sferni trokut s točkama A, B i C kao vrhovima.

1. Koliko različitih lukova glavne kružnice možete nacrtati između dviju točaka, pod pretpostavkom da točke nisu jedna nasuprot drugoj?

2. Pokažite da točke A, B i C u vašoj konstrukciji ne određuju jedinstveni trokut na istoj sferi. Uporabite markere različitih boja kako biste prikazali različite trokute određene s ove tri točke.

3. a) Koliko različitih sfernih trokuta možete nacrtati s točkama A, B i C kao vrhovima?

   b) Objasnite kako ste odredili taj broj.

4. Dvije točke na sferi dijele glavnu kružnicu koja prolazi kroz njih na dva luka. Uvijek izaberemo kraći od dva luka kada konstruiramo sferni trokut.

   a) Navedite primjer sfernog trokuta koji se pridržava ove nove definicije.

   b) Objasnite kako će ova nova definicija pojednostavniti vaše daljnje istraživanje trokuta na sferi.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite koliko možete napraviti trokuta u ravnini i trokuta na sferi.

2. Mislite li da su trokuti jednostavniji u ravnini ili na sferi? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto su trokuti jednostavniji na površini koju odaberete gore.

Odgovori se nalaze na stranici 139.

4. radni listić: Koliki je zbroj kutnih mjera u trokutu?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koliki je zbroj kutnih mjera u trokutu?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Ako zbrojite mjere kutova trokuta, dobivate li uvijek istu vrijednost?

- Istražite zbroj mjera kutova ravninskih trokuta.
- Istražite zbroj mjera kutova sfernih trokuta.

Konstrukcija u ravnini

Nacrtajte dva trokuta tako da je jedan potpuno u drugom. Izmjerite unutarnje kutove svakog trokuta.

1. Objasnite zašto je zbroj mjera unutarnjih kutovi ravninskog trokuta uvijek isti.

Koliki je zbroj mjera unutarnjih kutova sfernog trokuta?

Konstrukcija na sferi

Nacrtajte tri trokuta: prvi trokut potpuno unutra drugog i drugi potpuno unutar trećeg. Izmjerite unutarnje kutove svakog trokuta.

1. Nađite zbroj mjera kutova svakog od svojih sfernih trokuta.
2. Objasnite zašto dobivate različite odgovore za različite trokute.
3. a) Što mislite koji je najmanji mogući zbroj kutnih mjera za sferni trokut?
   b) A koji je najveći? Objasnite svoje razmišljanje.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete odrediti zbroj mjera kutova trokuta u ravnini i na sferi.
2. Mislite li da je zbroj mjera kutova za ravninski trokut jednostavniji ili za sferni? Zašto? Koji slučaj je zanimljiviji? Koji će slučaj vjerojatnije potaknuti veze između mjerenja kuta i drugih svojstava trokuta?
3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto ste odabrali površinu koju ste odabrali gore da je jednostavnije ili zanimljivije određivanje zbroja mjera.

Odgovori se nalaze na stranici 140.

5. radni listić: Može li trokut imati više od jednog pravog kuta?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Može li trokut imati više od jednog pravog kuta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Možda ste već naučili neka posebna svojstva pravokutnih trokuta.

- Provjerite možete li konstruirati trokut s više od jednog pravog kuta.

Konstrukcija u ravnini

Konstruiraj pravokutni trokut u ravnini.

1. Objasnite zašto je nemoguće da trokut u ravnini ima više od jednog pravog kuta.

Može li trokut na sferi imati više od jednog pravog kuta?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte točku P. Zatim nacrtajte ekvatorijalnu veliku kružnicu koji ima P kao polnu točku.
2. korak: Iz točke P povuci okomicu na svoj ekvator.
3. korak: Nacrtajte tri druge okomice. Označite točke sjecišta na ekvatoru A, B, C, i D.
4. korak: Izmjerite kutove trokuta $\triangle PAB, \triangle PAC$, i $\triangle PAD$.
5. korak: Izmjerite stranice trokuta $\triangle PAB, \triangle PAC$, i $\triangle PAD$.

1. a) Odredite zbroj mjera triju kutova u svakom od ovih trokuta. Je li zbroj mjera unutarnjih kutova sfernih trokuta uvijek $180°$?

   b) Opišite svaki odnos koji ste uočili između površina ovih trokuta i zbroja njihovih kutnih mjera.
2. Nacrtajte trokut koji ima točno tri prava kuta. Zabilježite duljine njegovih stranica i zbroj njegovih kutova.
3. Dva trokuta zadovoljavaju uvjet KKS (kut-kut-stranica) ako su dva para odgovarajućih kutova sukladna i par odgovarajućih stranica nije uključen u sukladnost kutova. Svaki par trokuta u ravnini mora biti sukladan ako zadovoljavaju KKS uvjet. Uporabite pravokutne trokute koje ste nacrtali u ovoj istrazi i objasnite zašto KKS uvjet ne jamči sukladnost za trokute na sferi.

4. Dva trokuta zadovoljavaju uvjet SSK (stranica-stranica-kut) ako su dva para odgovarajućih stranica sukladna i par odgovarajućih kutova koji nisu uključeni u ove stranice su sukladni. Na ravnini SSK uvjet jamči sukladnost samo za određene parove trokuta. Primjerice, ako su oba trokuta pravokutni trokuti, tada uvjet SSK jamči njihovu sukladnost.Uporabite pravokutne trokute koje ste nacrtali za ovu istragu kako biste objasnili zašto SSK uvjet ne jamči sukladnost za pravokutne trokute na sferi.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete nacrtati trokute s pravim kutom u ravnini i s pravim kutovima na sferi.

2. Mislite li da su trokuti s pravim kutom jednostavniji u ravnini ili na sferi? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto niste odabrali površinu koja je gore jednostavnija.

Odgovori se nalaze na stranici 142.

2.4. Četvrti problem: sličnost i kongruencija/sukladnost

- Možete li konstruirati slične mnogokute?
- Po čemu su posebna dva trokuta čiji su odgovarajući kutovi sukladni?
- Koji uvjeti jamče sukladnost sfernih trokuta?

1. radni listić: Možete li konstruirati slične mnogokute?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Možete li konstruirati slične mnogokute?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Dva su mnogokuta slična ako su im odgovarajući kutovi sukladni i njihove odgovarajuće stranice proporcionalne.

- Odlučite možete li nacrtati slične mnogokute u ravnini i na sferi.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Konstruirajte trokut.

2. korak: Konstruirajte drugi trokut sa stranicama upola kraćim od odgovarajućih stranica vašeg prvog trokuta.

3. korak: Izmjerite i označite sve stranice i kutove u svakom trokutu.

1. Objasnite zašto su vaša dva trokuta slični trokuti.

Možete li nacrtati par sličnih trokuta na svojoj sferi?

Konstrukcija na sferi

Slijedite iste korake koje ste učinili u konstruiranju u ravnini. Počnite s prilično velikim trokutom.

1. Jesu li trokuti koje ste nacrtali na svojoj sferi slični trokuti? Zašto da ili zašto ne?

2. Dva mnogokuta su slična ako i samo ako su (1.) svi odgovarajući kutovi jednake mjere i (2.) sve odgovarajuće stranice proporcionalne.

   a) Odredite je li moguće nacrtati par mnogokuta na vašoj sferi koji zadovoljava prvi dio ove definicije. Nacrtajte primjere.
   b) Odredite je li moguće nacrtati par mnogokuta na vašoj sferi koji zadovoljava drugi dio ove definicije. Nacrtajte primjere.
   c) Što možete zaključiti o sličnim mnogokutima na sferi?

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete nacrtati sličnost u ravnini i sličnost na sferi.

2. Mislite li da je sličnost jednostavnija u ravnini ili na sferi? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto je sličnost jednostavnija na površinu koju ste odabrali gore.

Odgovori se nalaze na stranici 146.

2. radni listić: Što je posebno kod dva trokuta čiji su odgovarajući kutovi sukladni?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Što je posebno kod dva trokuta čiji su odgovarajući kutovi sukladni?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

- Istražite moraju li dva trokuta biti slična ako su odgovarajući kutovi sukladni.
- Istražite moraju li dva trokuta biti sukladna ako su odgovarajući kutovi sukladni.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte trokut na jednom komadu papira. Označite svaki kut u blizini njegovog vrha.
2. korak: Odrežite svaki od tri kuta vašeg trokuta.
3. korak: Pomaknite kutove kako biste pokušali stvoriti još jedan trokut koji imaju iste kutove ali sa stranicama koje imaju različite duljine od duljina stranica prvog trokuta.

1. Koliko različitih trokuta možete napraviti pomoću ta ista tri kuta?
2. Ako dva trokuta imaju sva tri para odgovarajućih kutova sukladna, tada kažemoo da trokuti zadovoljavaju uvjet KKK (kut-kut-kut). Što je posebno o dva ravninska trokuta koji zadovoljavaju uvjet KKK?
3. Ako par ravninskih trokuta zadovoljava KKK uvjet, jamči li to da su ta dva trokuta sukladna?

Hoće li uvjet KKK jamčiti ili sličnost ili sukladnost trokuta na sferi?

Konstrukcija na sferi

Morat ćete izrezati barem jednu prozirnicu da biste napravili ovu konstrukciju.

1. korak: Nacrtajte trokut na svojoj sferi. Kako biste kasnije pratili kutove, označite svaki kut u blizini njegovog vrha drugom bojom ili oznakom.
2. korak: Stavite prozirnu foliju preko jednog kuta trokuta tako da je vrh kuta ispod rub prozirnice. Ucrtajte kut na prozirnicu i produljite stranice kuta dok se gotovo ne presijeku. Zatim izrežite kut i obojite ga tako da odgovara izvornom kutu na sferi.
3. korak: Ponovite 2. korak za druga dva kuta.

4. korak: Okrenite svoju sferu tako da je vaš izvorni trokut na dnu. Složite tri kuta u vrhove tvoje sfera. Pomaknite kutove i pokušajte oblikovati novi trokut koji ima ova tri kuta kao vrhove. Možda želite označiti stranice kutova kako biste ih lakše vidjeli.

5. korak: Kada ste formirali trokut, zalijepite tri kuta zajedno. Zatim ponovno okrenite svoju sferu i usporedite svoj novi trokut s izvornim trokutom.

1. Kako se vaš trokut napravljen od prozirnih folija može usporediti s originalnim trokutom koji ste nacrtali na sferi?

2. Koliko različitih sfernih trokuta možete napraviti koristeći ista tri kuta?

3. Što je posebno kod sfernih trokuta čiji su odgovarajući kutovi sukladni?

4. Pomiješajte svoje sferne kutove s onima koje su napravili drugi u vašem razredu i zatim pokušajte oblikovati sferne trokute. Što ste uočili?

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete napraviti ravninske trokute koji zadovoljavaju KKK uvjet i sferni trokute koji zadovoljavaju KKK uvjet.

2. Mislite li da je ravnina ili sfera jednostavnija u ovom slučaju? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto je jednostavnija površina koju ste odabrali gore od ove druge.

Odgovori se nalaze na stranici 147.

3. radni listić: Koji uvjeti jamče sukladnost sfernih trokuta?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koji uvjeti jamče sukladnost sfernih trokuta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Sjećate li se koje kombinacije sukladnih stranica i kutova jamče sukladnost dva trokuta u ravnini?

- Testirajte ove kombinacije kako biste pronašli koje također jamče sukladnost sfernih trokuta.

- Pronađite neke kombinacije sukladnih stranica i kutova koje jamče sukladnost sfernih trokuta ali ne i trokuta u ravnini.

Konstrukcija u ravnini

Mnogo je uvjeta koji jamče da su dva trokuta u ravnini sukladni. Primjerice, dva trokuta zadovoljavaju SSS (stranica-stranica-stranica) uvjet ako su sva tri para odgovarajućih stranice dvaju trokuta sukladna. Bilo koji par trokuta koji zadovoljavaju SSS uvjet moraju biti kongruentan.

1. Kopirajte sljedeći popis mogućih uvjeta sukladnosti. Zaokružite uvjete koji jamče sukladnost trokuta u ravnini. Prekrižite one koji ne zadovoljavaju.

   SSS KKK KKS SSK KSK SKS

2. Za svaki uvjet koji ste prekrižili nacrtajte dva trokuta u kojima su odgovarajući navedeni dijelovi sukladni, ali trokuti nisu sukladni.

Koje kombinacije sukladnih kutova i stranica jamče sukladnost trokuta na sferi?

Konstrukcija na sferi

1. Odredite koje kombinacije odgovarajućih sukladnih dijelova jamče sukladnost sfernih trokuta. Napravite crteže na svojoj sferi koji pokazuju koji uvjeti rade, a koji ne.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete utvrditi koji uvjeti sukladnosti trokuta u ravnini vrijede a koji uvjeti sukladnosti za trokute na sferi.
2. Što mislite koja je površina jednostavnija u ovome slučaju: ravnina ili sfera? Zašto?
3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto ste odabrali gornju površinu da je jednostavnija.

Odgovori se nalaze na stranici 148.

2.5. Peti problem: kružnice

- Koja su neka svojstva kružnice na sferi?
- Kakvi su neki odnosi u skupu koncentričnih kružnica?
- Koliki je omjer opsega kružnice i njezinog promjera duljine 1?

1. radni listić: Koja su neka svojstva kružnice na sferi?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koja su neka svojstva kružnice na sferi?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

- Usporedi kružnice u ravnini s kružnicama na sferi. Kakve sličnosti i razlike možete pronaći?

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte točku u ravnini. Zatim nacrtajte kružnicu sa središtem u toj točki. Nacrtajte polumjer kružnice.
2. korak: Nacrtajte promjer kružnice, tetivu kružnice i tangentu na kružnicu.

1. Navedite neka svojstva koja su istinita za bilo koju kružnicu u ravnini.
2. Objasnite zašto svaka kružnica u ravnini ima samo jedno središte.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte točku na svojoj sferi. Označite točku P. Uporabite svoj sferni šestar za nacrtati kružnicu kojoj je središte točka P. Uporabite svoje sferno ravnalo za nacrtati polumjer kružnice.
2. korak: Koristite svoje sferno ravnalo za nacrtati promjer kružnice, tetivu kružnice i tangentu na kružnicu.
3. korak: Nacrtajte točku koja je nasuprot točke P. Označite ovu suprotnu točku P'.

1. Nacrtajte neke točke na kružnici i izmjerite udaljenost od svake točke do P'. Je li P' još jedno središte kružnice? Zašto da ili zašto ne?
2. Zatim uporabite svoje sferno ravnalo za mjerenje polumjera kružnice od središta P kako biste izmjerili polumjer iste kružnice iz suprotne točke P'. Kako ove udaljenosti usporediti?
3. Pogledajte listu svojstava kružnica u ravnini koju ste napravili. Odredite koja od tih svojstva vrijede za kružnice na sferi.
4. Sferni šestar može nacrtati kružnice s polumjerima manjim od ili jednakim $90°$. Objasnite kako se crta kružnica čiji polumjer iznosi $120°$.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete nacrtati kružnice u ravnini i kružnice na sferi.
2. Mislite li da su kružnice jednostavnije u ravnini ili na sferi? Zašto?
3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto su kružnice jednostavnije na površini koju ste birali gore.

Odgovori se nalaze na stranici 150.

2. radni listić: Kakvi su neki odnosi u skupu koncentričnih kružnica?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kakvi su neki odnosi u skupu koncentričnih kružnica?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Skup koncentričnih kružnica odnosi se na sve kružnice s istim središtem.

- Nacrtajte dio skupa koncentričnih kružnica u ravnini i skupa koncentričnih kružnica na sferi.
- Usporedite ova dva skupa.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte točku u ravnini. Označite točku P.
2. korak: Nacrtajte kružnicu sa središtem P i polumjerom 3 cm.
3. korak: Nacrtajte drugu kružnicu sa središtem P i polumjerom od $3+3$ cm, tj. 6 cm.
4. korak: Nacrtajte još jednu kružnicu sa središtem i polumjerom od $3+3+3$ cm, tj. od 9 cm.

1. Upravo ste konstruirali nekoliko članova iz skupa koncentričnih kružnica u ravnini. Je li moguće nastaviti ovaj proces crtanja zauvijek, pod pretpostavkom da imate dovoljno veliki šestar?
2. Kako kružnice postaju veće, čini se da su manje zakrivljene. Možete li pronaći kružnice u svojem skupu koncentrične kružnica koje su toliko velike da su pravci? Drugim riječima, ako imate dovoljno velik šestar, možeš li ga se dovoljno otvoriti za nacrtati pravac? Objasnite.

3. Možete li konstruirati sve manje i manje koncentrične kružnice dok ne konstruirate jednu malu da je samo točka?

4. Možete li pronaći bilo koje dvije različite kružnice u svojem skupu koncentričnih kružnica koje su kongruentne jedna drugoj?

Kako se skup koncentričnih kružnica na sferi razlikuje od skupa koncentričnih kružnica u ravnini?

Konstrukcija na sferi

Ponovite iste korake na sferi koje ste izveli u ravnini, zamjenjujući mjeru polumjera od 3 cm s polumjerom mjere od 30°. Polumjeri vaših kružnica trebaju mjeriti $0°, 30°, 60°$ i $90°$.

1. Upravo ste konstruirali nekoliko koncentričnih kružnica na sferi. Može li se nastaviti ovaj proces konstruiranja zauvijek, pod pretpostavkom da imate dovoljno velik šestar?

2. Možete li pronaći kružnice među svim tim koncentričnim kružnicama koje su veće od glavne kružnice? Drugim riječima, možete li otvoriti svoj sferni šestar dovoljno široko kako biste nacrtali sferni ekvivalent pravca?

3. Možete li konstruirati sve manje i manje koncentrične kružnice dok ne konstruirate jednu tako malu da je samo točka?

4. Možete li pronaći bilo koje dvije različita kružnice u svojem skupu koncentričnih kružnica koje su kongruentne jedna drugoj?

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete nacrtati koncentrične kružnice u ravnini i koncentrične kružnice na sferi.

2. Mislite li da su koncentrične kružnice jednostavnije na sferi ili u ravnini? Zašto? I koji od ova dva slučaj zanimljiviji?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto niste odabrali površinu gore i koja je jednostavnija ili zanimljivija.

Odgovori se nalaze na stranici 151.

3. radni listić: Koliki je omjer opsega kružnice i njezinog promjera?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koliki je omjer opsega kružnice i njezinog promjera?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Možda ste prije usporedili opseg kružnice s njezinim promjerom.

- Provedite vlastite pokuse kako biste odredili približan omjer opsega i promjera kružnice u ravnini i na sferi.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Namotajte konac oko kružnog ruba čaše za piće, plastične čaše ili bilo koje druge okrugle posude i šupljeg predmeta. Zamolite partnera da označi opseg kružnice na predmetu.

2. korak: Na ravnom papiru razvucite konac u pravac. Zamolite svog partnera da izmjeri i zabilježi duljinu opsega. Izrazite svoj odgovor u centimetrima.

3. korak: Stavite okrugli predmet na ravni papir i nacrtajte njegov kružni rub.

4. korak: Izmjerite i zabilježite promjer kružnice u centimetrima.

1. Odredite omjer opsega i promjera.

2. Odaberite drugi okrugli predmet, manji ili veći i ponovite postupak. Zabilježite svoje rezultate.

3. Ostaje li omjer opsega i promjera isti za manje i veće kružnice? Objasnite što znate o ovom poznatom omjeru.

Hoće li omjer opsega i promjera biti isti za kružnice na sferi?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Namotajte konac oko kružnog ruba istog okruglog predmeta koji ste koristili u svojoj konstrukciji u ravnini. Zamolite partnera da označi opseg kružnice na predmetu.

2. korak: Rastegnite konopac na površinu vaše sfere. Zamolite svog partnera za mjerenje, koristeći sferno ravnalo, opsega označenog na predmetu, a zatim zabilježite njegovu sfernu duljinu. Izrazite svoj odgovor u stupnjevima.

3. korak: Stavite svoj okrugli predmet na površinu vaše sfere i nacrtajte oko njega kružni rub.

4. korak: Zatim uporabite svoje sferno ravnalo da izmjerite sferni promjer kružnice i da zabilježite njezinu duljinu. Izrazite svoj odgovor u stupnjevima.

1. Odredite omjer opsega i promjera vaše kružnice.
2. Odaberite drugi okrugli predmet, manji ili veći, i ponovite postupak. Zabilježite svoje rezultate.
3. Objasnite što se događa s omjerom opsega i promjera za kružnice čija veličina varira.
4. Je li moguće nacrtati kružnicu čiji je opseg dvostruko veći od njezinog promjera? Objasnite zašto da ili zašto ne.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete napraviti omjer opsega i promjera za kružnice u ravninu i isti omjer za kružnice na sferi.
2. Što mislite koja je ploha jednostavnija u ovom slučaju: ravnina ili sfera? Zašto?
3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto niste odabrali površinu gore koja je jednostavnija.

Odgovori se nalaze na stranici 152.

2.6. Šesti problem: površina

- Možete li uvijek koristiti kvadratne jedinice za mjerenje površine?
- Kako možete izmjeriti površinu trokuta?
- Kako možete približno odrediti površinu kruga?

1. radni listić: Možete li uvijek koristiti kvadratne jedinice za mjerenje površine?

Kvadrat je četverokut s četiri sukladne stranice i četiri prava kuta.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Možete li uvijek koristiti kvadratne jedinice za mjerenje površine?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

- Konstruirajte kvadrat i podijelite ga na manje sukladne kvadrate. Istražite ovu konstrukciju u ravnini i na sferi.
- Za mjerenje površina u ravnini rabimo kvadratne jedinice. Istražite koje jedinice možete uporabiti za mjerenje površina na sferi.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte kružnicu sa središtem O.
2. korak: Konstruirajte dva okomita promjera kružnice. Označite točke sjecišta A, B, C i D.
3. korak: Nacrtajte dužine $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ i $\overline{DA}$.
4. korak: Nacrtajte dužinu okomitu na dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ koja također prolazi kroz točku O. Nacrtajte drugu dužinu kroz točku O okomito na dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$. Označite nove točke sjecišta E, F, G i H.

1. Usporedite stranice četverokuta $ABCD$.
2. Usporedite kutove četverokuta $ABCD$.
3. Usporedite stranice i kutove četiriju manjih četverokuta $OEAH, OHDG, OGCF$ i $OFBE$.
4. Jesu li ovi manji četverokuti slični velikom četverokutu $ABCD$?
5. Koji su od ovih četverokuta kvadrati?

Je li moguće konstruirati kvadrat na vašoj sferi?
Je li moguće kvadrat na sferi podijeliti na manje sukladne kvadrate?
Je li moguće izmjeriti sfernu površinu kvadratnim jedinicama?

Konstrukcija na sferi

Ponovite istu konstrukciju na sferi koju ste učinili u ravnini. Nacrtajte lukove glavnih kružnica umjesto dužina koje ste nacrtali u ravnini.

1. Usporedite stranice sfernog četverokuta $ABCD$.
2. Usporedite kutove sfernog četverokuta $ABCD$.
3. Usporedite stranice i kutove četiri manja sferna četverokuta $OEAH, OHDG, OGCF$ i $OFBE$.
4. Jesu li ovi manji četverokuti slični velikom četverokutu $ABCD$?
5. Koji su od ovih četverokuta kvadrati?

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete podijeliti kvadrat u ravnini a kako podijeliti pravilni četverokut na sferu.
2. Mislite li da je dijeljenje kvadrata u ravnini jednostavnije od dijeljenja pravilnog četverokuta na sferi? Zašto?

Odgovori se nalaze na stranici 154.

2. radni listić: Kako možete izmjeriti površinu trokuta?

Ako konačnu figuru podijelite na dijelove, površina cijele figure mora biti jednaka zbroju površina dijelova.

- Dokažite da je to točno ako ravninski trokut podijelite na dva trokuta.
- Pronađite način da pomoću stupnjeva izmjerite površine trokuta na sferi. Ako je potrebno, promijenite svoju definiciju površine kako biste osigurali da je površina bilo kojeg trokuta jednaka zbroj površina njegovih dijelova

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako možete izmjeriti površinu trokuta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte trokut.
2. korak: Svoj trokut crtanjem podijelite na dva manja trokuta dužinom od jednog vrha do suprotne stranice.

1. a) Nađite površinu velikog trokuta.
   b) Odredite površine dvaju malih trokuta.
   c) Je li površina velikog trokuta jednaka zbroju površina tih dvaju malih trokuta?
2. Nacrtajte mnogokut s više od četiri stranice. Podijelite mnogokut na trokute. Objasnite zašto možete odrediti površinu bilo kojeg mnogokuta ako znate odrediti površinu trokuta.

Kako možete izmjeriti površinu trokuta na sferi?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte sferni trokut.

2. korak: Podijelite svoj trokut na dva manja trokuta crtanjem luka glavne kružnice od jednog vrha do suprotne stranice.

3. korak: Pronađite mjere kuta u velikom trokutu i dodajte njih gore.

4. korak: Odredite zbroj mjera kutova svakog od ta dva manja trokuta.

1. a) Zbrojite mjere kutova dva mala trokuta. Zbog toga je zbroj jednak zbroju mjera kutova velikog trokuta?

   b) Objasnite možemo li definirati površinu sfernog trokuta kao zbroj njegovih kutnih mjera.

2. Sferni eksces trokuta definiramo kao $180°$ manje zbroj mjera njegovih kutova. Svaki trokut na sferi ima mjere kutova koje se zbrajaju do najmanje $180°$. Sferni eksces je uvijek broj veći ili jednak nuli. Što je veći trokut, to je veći njegov sferni eksces.

   a) Uporabite svoja mjerenja kuta iz Konstrukcija na sferi za odrediti sferne ekscese svoja dva mala trokuta i velikog trokuta.

   b) Kakav je odnos između ova tri broja (ekscesa)?

3. a) Nacrtajte dva sferna trokuta, od kojih je jedan potpuno unutar drugog. Pronađite sferni eksces za svaki trokut. Izrazite svoj odgovor u stupnjevima.

   b) Kako se ova dva odgovora mogu usporediti?

4. Objasnite zašto je razumno definirati područje za sferni trokut kao njegov sferni eksces.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete izmjeriti površine u ravnini i izmjeriti površine na sferi.

2. Što mislite koja je površina jednostavnija u ovom slučaju: ravnina ili sfera? Zašto? I koja površina je zanimljivija?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto ste odabrali površinu gore koja je jednostavnija ili zanimljivija.

Odgovori se nalaze na stranici 155.

3. radni listić: Kako možete približno odrediti površinu kruga?

Ako u krug upišete pravilan mnogokut, površina mnogokuta manja je od površine kruga. Ako oko kruga opišete pravilan mnogokut, tada je površina mnogokuta veća od površine kruga.

Ako povećate broj stranica bilo kojeg od ovih pravilnih mnogokuta, površina mnogokuta je sve bliže i bliže površinu kruga.

- Uporabite upisane i opisane mnogokute kako biste dobili približnu vrijednost za područje ravninskog kruga.
- Uporabite istu metodu za aproksimaciju površine kruga na sferi.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako možete približno odrediti površinu kruga?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte kružnicu i zabilježite njezin polumjer.
2. korak: Upišite pravilan 12-erokut u krug.
3. korak: Opišite pravilan 12-erokut oko kruga.

1. Nađite površinu upisanog mnogokuta.
2. Odredite površinu opisanog mnogokuta.
3. Izračunajte prosjek površina upisanih i opisanih mnogokuta kako biste dobili dobru aproksimaciju površine vašeg kruga.
4. Provjerite svoju procjenu pronalaženjem točne površine kruga. Koliko ste bili blizu?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte kružnicu i zabilježite njen polumjer.
2. korak: Nacrtajte 12 polumjera kružnice tako da svaki par susjednih polumjera čini kut od $30°$.
3. korak: Upišite pravilni mnogokut s 12 stranica. Izmjerite kut.
4. korak: Opišite pravilni 12-erokut. Izmjerite kut.

1. Odredite površinu upisanog mnogokuta koristeći činjenicu da je površina sfernog trokuta jednak njegovom sfernom ekscesu. (Da biste pronašli sferni eksces trokuta zbrojite mjere unutarnjih kutove i oduzmite od 180°.)

2. Odredite površinu opisanog mnogokuta.

3. Izračunajte prosjek površina upisanih i opisanih mnogokuta kako biste dobili dobru aproksimaciju površine vašeg kruga.

4. Formula za površinu sfernog kruga u stupnjevima je $P = (1 - \cos r)$, gdje je r sferni radijus kruga. Uporabite ovu formulu da odredite točnu površinu vašeg kruga. Koliko je točna površina blizu aproksimacije koju ste napravili koristeći pravilni 12-erokut?

5. Površina polusfere je 360°. Odredite sferni radijus sfernog kruga s polovinom površine polusfere. Konstruirajte ovaj krug na svojoj sferi.

2.7. Sedmi problem: iznenađenja na sferi

- Što je posebno kod trokuta upisanih nad promjerom kružnice?
- Koja su neka svojstva trokuta upisanog u oktant?
- Kako možete konstruirati Napierov peterokut?

1. radni listić: Što je posebno kod trokuta upisanih nad promjerom kružnice?

- Upišite trokut u kružnicu **tako** da jedna stranica trokuta bude promjer kružnice. Zatim izmjerite kutove trokuta.
- Koja posebna svojstva imaju trokuti ove vrste u ravnini?
- Odredite vrijede li ova svojstva i za sferne trokute upisane u kružnicu.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Što je posebno kod trokuta upisanih na promjeru kruga?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Konstruirajte kružnicu sa središtem O. Konstruirajte promjer s krajnjim točkama A i B.

2. korak: Odaberite drugu točku C na kružnici i nacrtajte tetive $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$.

3. korak: Izmjeri kut ACB. Izmjerite kutove CAB i CBA i zbrojite njihove mjere.

4. korak: Odaberite drugu točku D na kružnici i ponovite postupak.

1. Ponovite za ostale točke na kružnici. Što opažate o kutovima ove vrste upisanog trokuta?

Hoće li ista svojstva vrijediti i na sferi?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Konstruirajte kružnicu sa središtem O. Konstruirajte promjer s krajnjim točkama A i B.

2. korak: Odaberite drugu točku C na kružnici i nacrtajte tetivu $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$.

3. korak: Izmjerite sferni kut ACB. Mjere sfernih kutove CAB i CBA zbrojite.

4. korak: Odaberite još dvije točke D i E na kružnici i ponovite 2. i 3. korake za svaku točku.

1. Ponovite za ostale točke na kružnici. Što opažate o kutovima ove vrste upisanog trokuta?

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete napraviti ovaj tip trokuta u ravnini i na sferi.

2. Što mislite koja je ploha jednostavnija u ovom slučaju: ravnina ili sfera? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto ste odabrali površinu gore da je jednostavnija.

Koja su neka svojstva upisanog trokuta u oktantu?

Odgovori se nalaze na stranici 156.

2. radni listić: Koja su neka svojstva upisanog trokuta u oktantu?

Sferni trokut s tri prava kuta naziva se *oktantom* jer je takvih trokuta osam i pokrivaju cijelu sferu bez praznina ili preklapanja. Oktant ima neke neobične značajke. Istražit ćete posebnu vrstu trokuta upisanog u oktant.

- Izvedite konstrukciju u nastavku. Zatim nagađajte o svojoj konstrukciji.
- Pokušajte dokazati svoje pretpostavke.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koja su neka svojstva upisanog trokuta u oktantu?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Konstruirajte oktant. Označite njegove vrhove K, L i M.
2. korak: Nacrtajte bilo koju točku O unutar trokuta $\triangle KLM$ i spojite ovu točku s tri vrha. Produžite svaki novi luk iza točke O dok ne presiječe suprotnu stranicu trokuta $\triangle KLM$. Označite točke sjecišta R, Q i R.
3. korak: Spojite točke R, Q i R kako biste konstruirali trokut $\triangle PQR$.

1. a) Izmjerite tri stranice trokuta $\triangle PQR$ i zbrojite njihove mjere.

   b) Zapišite sve pretpostavke koje možete napraviti o stranicama trokuta $\triangle FQR$.

2. a) Izmjerite sve kutove u točkama R, Q i R.

   b) Što možete reći o glavnim kružnicama KR, LQ i MR u trokutu $\triangle PQR$?

3. Pokušajte dokazati bilo koju pretpostavku koju ste uobličili u ovom listiću.

3. radni listić: Kako možete konstruirati Napierov peterokut[1]?

U peterokutu $PQRST$ postoji pet nesusjednih pari stranica: $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$, $\overline{QR}$ i $\overline{ST}$, $\overline{RS}$ i $\overline{TR}$, $\overline{ST}$ i $\overline{PQ}$ te $\overline{TP}$ i $\overline{QR}$.

---

[1] **John Napier** (1550.-1617.) bio je poznati škotski matematičar i izumitelj. U svojim istraživanjima sferne geometrije otkrio je ovaj neobičan oblik. Nazvao ga je *Pentagramma Mirificium*, što na latinskom znači "čudesna petokraka zvijezda". Što je čudesno u ovoj konstrukciji?

- Nacrtajte ravninski peterokut tako da se jedan od tih parova sastoji od dvije okomite stranice (recimo, $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$ su okomite jedna na drugu).

- Pokažite da možete u ravnini nacrtati peterokut sa svim tim parovima okomitih stranica.

- Pokažite da možete na sferi nacrtati peterokut koji se sastoji od svih ovih parova okomitih stranica.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako možete konstruirati Napierov peterokut?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. Nacrtajte peterokut $PQRST$ s nesusjednim stranicama $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$ međusobno okomitim.

2. Pokažite da možete nacrtati peterokut $PQRST$ sa svim sljedećim parovima međusobno okomitih susjednih stranica: $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$, $\overline{QR}$ i $\overline{ST}$, $\overline{RS}$ i $\overline{TR}$, $\overline{ST}$ i $\overline{PQ}$, $\overline{TP}$ i $\overline{QR}$.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte trokut $\triangle APQ$ s točno jednim pravim kutom u točki A.

2. korak: Produžite hipotenuzu PQ preko točke Q tako da udaljenost nove krajnje točke od točke P je $90°$. Označite ovu novu krajnju točku B.

3. korak: Produžite stranicu AQ preko točke Q. Zatim nacrtajte okomicu na glavnu kružnicu PB u točki B tako da siječe produženu stranicu AQ u točki R. Sada imate novi pravokutni trokut s oznakom $\triangle BQR$.

4. korak: Ponovite korake od 1. do 3. za trokut $\triangle BQR$. Sada imamo još jedan pravokutni trokut s oznakom $\triangle CRS$.

5. korak: Ponovite korake od 1. do 3. za trokut $\triangle CRS$.

6. korak: Nastavite ovaj proces stvaranja novih pravokutnih trokuta.

1. Opišite što se događa dok nastavljate ovaj proces konstruiranje novih pravokutnih trokuta.

2. Koliko ste pravokutnih trokuta konstruirali počevši od trokuta $\triangle APQ$?

3. Što možete reći o parovima nesusjednih stranica sfernog peterokuta $PQRST$?

2.8. Osmi problem: popločavanje

U ovom problemu razmotrit ćemo sljedeće:

- Koja su popločavanja na sferi?
- Kako možete konstruirati nogometnu loptu?
- Kako možete popločati sferu s tri različite vrste pravilnih mnogokuta?
- Kako možete upisati Platonova tijela u sferu?
- Kako možete "uvećati" Platonova tijela i popločati sferu?

1. radni listić: Koja su popločavanja na sferi?

Zatvoreni oblici tvore popločavanje površine ako oblici pokrivaju cijelu površina bez praznina ili preklapanja. Ove zatvorene oblike nazivamo pločicama. Popločavanje je čisto ako su mu sve pločice sukladne. Popločavanje je polučisto ako ima pločica koje nisu sukladne, ali ipak ima konačan broj različitih oblika pločica.

- Koristeći samo pravilne mnogokute, konstruirajte primjere čistih i polučistih popločavanja u ravnini i na sferi. Opišite svako popločavanje.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koja su popločavanja na sferi?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Postoje tri vrste čistih popločavanja u ravnini koje koriste pravilne mnogokute kao pločice. Skicirajte primjer svake vrste.
2. korak: Postoje mnoge vrste polučistog popločavanja u ravnini koje koriste samo pravilne mnogokute kao pločice. Skicirajte dvije vrste.
3. korak: Skicirajte popločavanje koje ne koristi mnogokute kao pločice.

1. Za svaki od šest popločavanja koje ste izradili odlučite koliko će pločica biti potrebno za popločiti cijelu ravninu.
2. Objasnite je li veličina pločica bitna kod popločavanja u ravnini.

Po čemu se popločavanje na sferi razlikuju od popločavanja u ravnini?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte luk $\widehat{OA}$ čija je mjera $70,5°$. Nacrtajte kružnicu sa središtem O i polumjerom $\overline{OA}$.

2. korak: Nacrtajte još dva radijusa $\overline{OB}$ i $\overline{OC}$ kružnice tako da kutovi između svakog para radijusa iznose $120°$.

3. korak: Konstruirajte suprotnu točku središta O i označite je D. Izbrišite sve na svojoj sferi osim točaka A, B, C i D.

4. korak: Smatrajte točku A polnom točkom i nacrtajte ekvator. Ponovite s točkama B, C i D. Mnogokuti koje stvaraju ova četiri ekvatora oblikuju popločavanje na sferi.

1. a) Opišite popločavanje koje tvore četiri ekvatora.
   b) Kakve pravilne sferne mnogokute nalazite u ovom popločavanju?
   c) Koliko je svake vrste pravilnih mnogokuta u vašem popločavanju?
   d) Bez stvarnog mjerenja, možete li odrediti mjeru stranica ovih mnogokuta?

2. Izmjerite neke stranicee pločica. Što ste pronašli?

3. Objasnite je li broj pločica bitan u popločavanju na sferi.

4. Objasnite je li veličina pločica bitna kod popločavanja na sferi.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete napraviti popločavanje u ravnini i popločavanje na sferi.

2. Mislite li da su popločavanja jednostavnije u ravnini ili na sferi? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto su popločavanja jednostavnija na površina koju niste odabrali gore.

Odgovori se nalaze na stranici 158.

2. radni listić: Kako možete konstruirati nogometnu loptu?

Pogledajte nogometnu loptu. Popločana je pravilnim peterokutima i šesterokutima.

- Konstruirajte popločavanje nogometne lopte na svojoj sferi.

Ovo izvanredno popločavanje koristi se za više od prekrivanja nogometnih lopti. Arhitekt iz Sjedinjenih Država **Buckminster Fuller** (1895. - 1983.) koristio je ovaj oblik za konstrukciju geodetskih kupola. Godine 1985. kemičari su otkrili molekulu C_{60}, sugerirajući da ima strukturu nogometne lopte i predložili naziv *buckminsterfulllerene* - ili *buckyball*, skraćeno - u znak priznanja arhitektu i njegovim kupolama. Kasnije, kada je C_{60} kristaliziran, predložena struktura je potvrđena i buckminsterfuleren je postao treći oblik kristalnog ugljika (dijamant i grafit su druga dva).

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako možete konstruirati nogometnu loptu?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija na sferi

Ova konstrukcija može trajati dugo. Koristite sve prečace koje nađete na putu. Korištenje markera s posebno finim vrhom može vam pomoći da točnije radite.

1. korak: Konstruirajte jednakostranični trokut sa stranicama mjere $63,4^\circ$. Cijelu sferu prekrijte s trokutima ove vrste, pazeći da se trokuti ne preklapaju i da između njih nema razmaka. (Mogući prečac je izrezati predložak iz komada prozirnice i zatim crtajte obris predloška dok ne pokrijete cijelu sferu.) Konstruirali ste sferni ikosaedar.

2. korak: Odaberite jedan od ovih trokuta i konstruirajte okomite simetrale svake stranice. Ovo dijeli trokut u šest manjih trokuta, svaki s jednim pravi kutom.

3. korak: Konstruirajte simetrale kutova šest centralnih kutova u jednakostraničnom trokutu. Označite točke u kojima simetrale kutova sijeku suprotne strane.

4. korak: Izvedite korake 2. i 3. u svih dvadeset jednakostraničnih trokuta.

5. korak: Uporabite markere jarkih boja za spajanje susjednih točaka presjeka. Napravite svoje popločavanje tako da izgleda poput prave nogometne lopte bojeći neke od područja.

3. radni listić: Kako možete popločati sferu s tri različite vrste pravilnih mnogokuta?

Nogometna lopta je sferno popločavanje koje rabi dva različita pravilna mnogokuta kao svoje pločice. Možete li napraviti sferno popločavanje koje rabi više pravilnih mnogokuta?

- Rabeći tri različite vrste pravilnih mnogokuta kao pločica, konstruirajte sferno popločavanje.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako možete popločatii sferu s tri različite vrste pravilnih mnogokuta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija na sferi

Ova konstrukcija ima mnogo koraka. Pronađite prečace i koristite ih! Možete rabiti markere različitih boja za uzastopne korake ove konstrukcije.

1. korak: Konstruirajte tri glavne kružnice tako da svaka bude okomita na druge dvije. Stvorili ste osam jednakostraničnih trokuta za pločice sfere. Svaki od ovih trokuta ima tri prava kuta.
2. korak: Pronađite središta stranica trokuta. Spojite sredinu svake stranice s njezinim nasuprotnim vrhom. Sad imate šest pravokutnih trokuta u svakom od jednakostranični trokuta.
3. korak: U svakom pravokutnom trokutu konstruirajte simetrale kutova i označite njihova sjecišta.
4. korak: Uporabite svijetli marker za spajanje svakog para susjednih sjecišta simetrala kutova. Spojite svako sjecište s još tri sjecišta. Vaše popločavanje je gotovo!

1. Koje vrste sfernih mnogokuta nalazite u svojem završnom popločavanju?
2. Koliko ste od svake vrste mnogokuta uporabili za popločavanje sfere?
3. Koje se vrste mnogokuta susreću u svakom vrhu popločavanja? Koliko?

4. radni listić: Kako možete upisati Platonova tijela u sferu?

Platonova[2] tijela su poliedri čije su sve strane sukladni pravilni mnogokuti i koji se sastaju u svakom vrhu na isti način. Čvrsto tijelo je upisano u sferu ako svaki njegov vrh leži na površini sfere.

[2]**Johannes Kepler** (1571. - 1630.) je poznati njemački matematičar i astronom. Pokušao je dokazati da sfere upisane i okolo opisane Platonovim tijelima opisuju orbite planeta oko Sunca. Kasnije je Kepler shvatio da su putanje planeta eliptične. Pročitajte o Keplerovim idejama i opišite ih pobliže.

- Izgradite pet Platonovih tijela tako da točno stanu unutar sfere.
- Ukrasite svoju učionicu tako što ćete objesiti svoja uspisana Platonova tijela.

Mreže u sljedećim konstrukcijama trebaju biti na tvrdom papiru. One se mogu konstruirati ručno, ali ih se mnogo lakše i brže konstruira korištenjem računalnog programa kao što je Sketchpad te ih se nakon toga isprinta.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako možete upisati Platonova tijela u sferu?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstruiranje tetraedra

1. korak: Napravite mrežu tetraedra s duljinom svake stranice približno $16,59$ cm.
2. korak: Izrežite mrežu i sastavite tijelo.

Konstruiranje heksaedra ili kocke

1. korak: Napravite mrežu heksaedra s duljinom svake stranice približno $10,16$ cm.
2. korak: Izrežite mrežu i sastavite tijelo.

Konstruiranje oktaedra

1. korak: Napravite mrežu oktaedra s duljinom svake stranice približno $14,38$ cm.
2. korak: Izrežite mrežu i sastavite tijelo.

Konstruiranje dodekaedra

1. korak: Napravite mrežu dodekaedra s duljinom svake stranice približno $7,24$ cm.
2. korak: Izrežite mrežu i sastavite tijelo.

Konstruiranje ikosaedra

1. korak: Napravite mrežu ikosaedra s duljinom svake stranice približno $10,67$ cm.
2. korak: Izrežite mrežu i sastavite tijelo.

1. Usporedite svoje metode za konstruiranje različitih Platonovih tijela.

2. Zamislite da možete napuhati svoja upisana Platonova tijela dok ne postanu sfernog oblika. Usporedite svoja tijela ravnih stranica s njihovim "napuhanim" parnjacima. Pronađite neke sličnosti i razlike među njima.

5. radni listić: Kako možete "uvećati" Platonova tijela i popločati sferu?

Postoji pet popločavanja sfere koja koriste točno jednu vrstu pravilnog mnogokuta kao pločicu. Ako zamislite napuhavanje Platonovih tijela dok ne postanu sferna, dobit ćete ideju o tome kako izgledaju. Svako popločavanje nazivamo prema odgovarajućcem čvrstom tijelu: sferni oktaedar, sferni heksaedar ili kocka, sferni tetraedar, sferni dodekaedar i sferni ikosaedar.

- Konstruirajte svih pet sfernih Platonovih tijela na svojoj sferi.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako možete "uvećati" Platonova tijela i popločati sferu?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija na sferi

Koristite drugu boju za svaku konstrukciju. Umjesto konstruiranja svih pet tijela na istoj sferi, možda ćete htjeti konstruirati prva tri na paru prozirnih folija i zadnja dva izravno na sferu ili na drugi par prozirnih folija.

1. korak: Sferni oktaedar: Nacrtajte tri glavne kružnice tako da je svaka glavna kružnica okomita na druge dvije. Ove tri glavne kružnice tvore sferni oktaedar.

2. korak: Sferni heksaedar ili kocka: Konstruirajte težište (sjecište težišnica) svakog trokuta u vašem sfernom oktaedru. Spojite svako težišta s tri susjedna težišta. Rezultat je sferni heksaedar ili kocka.

3. korak: Sferni tetraedar: Odaberite jednu stranu sferne kocke i označite dva dijagonalno nasuprotna vrha. Sada pogledajte suprotnu stranu i označite dva vrha koji ne leže na glavnoj kružnici prolazeći kroz već označene točke. Konačno, spojite svaku točku koju ste označili s druge tri. Konstruirali ste sferni tetraedar.

4. korak: Sferni dodekaedar: Uzmite jedan brid sferne kocke. (Ovaj brid trebao bi mjeriti približno $70,5°$.) Konstruirajte sferni jednakostranični trokut koji ima ovu stranicu. Konstruirajte težište ovog jednakostraničnog trokuta. Koristite olovku druge boje za nacrtati tri luka koji povezuju vrhove trokuta s njegovim težištem. Ovo su tri brida sfernog dodekaedra. Bilo koja dva susjedna brida ovog popločavanja imaju kut od $120°$ između sebe. Koristeći ove informacije i imajući na umu da su svi bridovi iste duljine, završite konstruiranje strana sfernog dodekaedra. Nastavite s ovim procesom na sferi za konstrukciju ostalih strana.

5. korak: Sferni ikosaedar: Konstruirajte okomite simetrale na svaki brid sfere dodekaedra tako da se sijeku u središtu svake strane sfernog dodekaedra. Vi ste konstruirali sferni ikosaedar.

2.9. Deveti problem: polarni trokuti

- Kako se konstruira polarni trokut?
- Kako su povezani kutovi i stranice u paru polarnih trokuta?
- Što je posebno o visinama polarnih trokuta?
- Što je posebno kod simetrala kutova u trokutu i okomitih simetrala njegovih stranica?
- Što je posebno kod linija kroz polovišta stranica trokuta?

1. radni listić: Kako se konstruira polarni trokut?

Za svaki trokut na sferi postoji srodni trokut koji se naziva polarni trokut. U ovom listiću konstruirat ćemo takav trokut.

- Nacrtajte sferni trokut. Svaka stranica vašeg sfernog trokuta dio je glavne kružnice koja ima dvije odgovarajuće polne točke. Za svaku stranicu vašeg sfernog trokuta, odaberite polnu točku koja je na istoj strani glavne kružnice kao i sam trokut. Spojite ove tri polne točke kako biste konstruirali polarni trokut.
- Koja zanimljiva svojstva možete otkriti o svom sfernom trokutu i njegovom odgovarajućem polarnom trokutu?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako se konstruira polarni trokut?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte trokut. Označite njegove vrhove A, B i C.

2. korak: Promotrimo stranicu $\overline{AB}$ i glavnu kružnicu kroz stranicu $\overline{AB}$. Primijetite da glavna kružnica dijeli cijelu sferu na dvije polusfere. Jedna od ovih polusfera sadrži trokut $\triangle ABC$. Druga polusfera je prazna. S glavnom kružnicom kao ekvatorom nacrtajte polarnu točku koja leži na polusferi koja sadrži trokut. Označite ovu polarnu točku C^*.

3. korak: Ponovite korak 2. za stranicu $\overline{BC}$. Označite polarnu točka A^*.

4. korak: Ponovite korak 2. za stranicu $\overline{CA}$. Označite polarnu točka B^*.

5. korak: Spojite točke A^*, B^* i C^*. Upravo ste konstruirali polarni trokut $\triangle A^*B^*C^*$ trokuta $\triangle ABC$.

1. Konstruirajte polarni trokut trokuta $\triangle A^*B^*C^*$. Što ste pronašli?

2. radni listić: Kako su kutovi i stranice povezani u paru polarnih trokuta?

U prethodnom listiću naučili ste kako konstruirati par polarnih trokuta.

- Istražite odnos između kutova i stranica trokuta i njemu odgovarajućeg polarnog trokuta.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako su kutovi i stranice povezani u paru polarnih trokuta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte sferni trokut $\triangle ABC$.

2. korak: Konstruirajte njegov polarni trokut $\triangle A^*B^*C^*$.

3. korak: Izmjerite sve kutove jednog trokuta.

4. korak: Izmjerite sve stranice drugog trokuta. i

5. korak: Odaberite jedan od kutova koji ste mjerili u prvom trokutu. Pronađite odgovarajući kut u drugom trokutu. Sada pronađite stranicu drugog trokuta koja je nasuprot ovom odgovarajućem kutu. Dodajte mjeru kuta iz prvog trokuta mjeri stranice iz drugog trokuta.

6. korak: Ponovite korak 5. za druga dva kuta u prvom trokutu.

1. Nagađajte o odnosu stranica i kutova u parovima polarnih trokuta.
2. Ponovite konstrukciju i mjerenja s trokutom različitog oblika. Je li se vaša pretpostavka još drži?

3. radni listić: Što je posebno u visinama polarnih trokuta?

Visina trokuta je pravac koji prolazi vrhom trokuta i okomit je na stranicu nasuprotnu vrhu.

- Istražite neka svojstva triju visina trokuta u ravnini.
- Konstruirajte i istražite tri visine sfernog trokuta i tri visine odgovarajućeg polarnog trokuta.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Što je posebno u visinama polarnih trokuta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

Nacrtajte trokut i njegove tri visine.

1. Što možete reći o tri visine? Zabilježite svoju pretpostavku.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte sferni trokut ABC i njegov polarni trokut $\triangle A^*B^*C^*$.

2. korak: Nacrtajte tri visine trokuta $\triangle ABC$.

3. korak: Nacrtajte tri visine trokuta $\triangle A^*B^*C^*$.

1. Zabilježite sve svoje pretpostavke o visinama sfernog trokuta i visinama njemu odgovarajućeg polarnog trokuta.
2. Je li korak 3. u konstrukciji bio neophodan?

4. radni listić: Što je posebno kod simetrala kutova u trokutu i za okomite simetrale njegovih stranica?

Simetrala stranice trokuta okomica je koja prolazi kroz njezino polovište. Simetrala kuta u trokutu je pravac koji prolazi kroz jedan od vrhove trokuta i raspolavlja kut u tom vrhu.

- Istražite svojstva simetrala kutova i simetrala stranice ravninskih i sfernih trokuta.
- Istražite ta svojstva u sfernim trokutima i njima odgovarajućim polarnim trokutima.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Što je posebno kod simetrala kutova u trokutu i za okomite simetrale njegovih stranica?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte trokut $\triangle ABC$ i tri simetrale njegovih stranica. Označite njihovu točku konkurencije[3] P.
2. korak: Izmjerite udaljenosti od točke P do svakog od vrhova A, B i C.
3. korak: Nacrtajte tri simetrale kutova u trokutu ABC. Označite njihovu točku konkurencije Q.
4. korak: Izmjerite udaljenosti od točke Q do svake od stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$.

1. Središte kružnice upisane u trokut zove se središte trokutu upisane kružnice. Središte kružnice opisane oko trokuta zove se središte trokutu opisane kružnice. Konstruirajte upisanu i opisanu kružnicu trokutu ABC.
2. Objasnite vezu između središta upisane kružnice, središta opisane kružnice, simetrala kutova i simetrala stranica trokuta.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte sferni trokut $\triangle ABC$ i njegov polarni trokut $\triangle A^*B^*C^*$.
2. korak: Nacrtajte tri simetrale kutova u trokutu $\triangle ABC$. Označite njihovu točku konkurencije Q.

1. Istražite ulogu ovih simetrala kutova u polarnom trokutu $\triangle A^*B^*C^*$. (Produžite simetrale kutova ako je potrebno.)
2. Opišite točku Q i njen odnos prema trokutu $\triangle ABC$ i trokutu $\triangle A^*B^*C^*$.

[3] Zajedničko sjecište 3 i više pravaca naziva se *konkurentnom točkom*.

3. Točkom Q nacrtajte trokutu $\triangle ABC$ upisanu kružnicu i opisanu kružnicu polarnog trokuta $\triangle A^*B^*C^*$.

5. radni listić: Što je posebno kod linija kroz polovišta stranica trokuta?

Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice trokuta.

- Istražite težišnice trokuta u ravnini i na sferi.
- Konstruirajte i istražite glavne kružnice koje povezuju polovišta stranica sfernog trokuta s odgovarajućim polovištima stranica njegovog polarnog partnera.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Što je posebno kod linija kroz polovišta stranica trokuta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte trokut $\triangle ABC$ i označite polovište svake stranice.
2. korak: Spojite svako polovište stranice sa suprotnim vrhom trokuta kako biste dobili tri težišnice trokuta.

1. Što možete reći o ove tri težišnice? Napišite svoju pretpostavku.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte sferni trokut $\triangle ABC$ i konstruirajte tri njegove težišnice. Vrijedi li vaša pretpostavka o težišnicama trokuta u ravnini i za sferne trokute?
2. korak: Konstruirajte polarni trokut $\triangle A^*B^*C^*$ trokuta $\triangle ABC$.
3. korak: Označite polovište svake stranice trokuta $\triangle A^*B^*C^*$.
4. korak: Nacrtajte glavnu kružnicu koja prolazi polovištima stranica AB i A^*B^*. Učinite isto za stranice BC i B^*C^* i za stranice CA i C^*A^*.

1. *Glavna kružnica* koja prolazi polovištima dviju odgovarajućih stranica u paru polarnih trokuta naziva se *srednjepolarnom*. Što možete reći o tri srednjepolarne kružnice za par polarnih trokuta? Objasnite svoju pretpostavku.

Usporedite ravninu i sferu

1. Jesu li polovišta stranica trokuta u ravnini i na sferi jednaka? Po čemu se razlikuju?

2.10. Deseti problem: reflektiranje na sferi

- Što se događa s točkom ako je reflektirate uzastopno preko tri okomite glavne kružnice?
- Koje oblike možete stvoriti ako reflektirate točku preko stranica oktanta?

1. radni listić: Što se događa s točkom ako se reflektira uzastopno preko tri okomite glavne kružnice?

- Konstruirajte tri glavne kružnice na sferi tako da svaka od njih je okomita na druge dvije. Istražite što se događa s točkom kada je uzastopno reflektirate preko svake od tri glavne kružnice.
- Što se događa s trokutom kada ga reflektirate uzastopno preko tri okomite glavne kružnice?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Što se događa s točkom ako se reflektira uzastopno preko tri okomite velike kružnice?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Konstruirajte tri glavne kružnice tako da svaka bude okomita na druge dvije. Označite ove glavne kružnice a, b i c.
2. korak: Nacrtajte točku P koja ne leži ni na jednoj od tri glavne kružnice. Reflektirajte ovu točku P preko glavne kružnice a i njezinu sliku označite točkom Q. Reflektirajte točku Q preko glavne kružnice b i označite njezinu sliku točkom R. Na kraju, reflektirajte točku R preko glavne kružnice c i njezinu sliku označite točkom P'.

1. Izmjerite udaljenost između točaka P i P' i opišite svoje rezultate.
2. Odaberite drugi redoslijed za tri glavne kružnice, recimo b, c, a. Reflektirajte točku P preko glavnih kružnica b, c i a tim redom. Označite krajnju točku S. Izmjerite udaljenost između točaka P i S. Što nalazite?

3. Odaberite drugu točku i pronađite njezinu sliku/točku nakon iste tri refleksije. Opišite svoje rezultate.

4. Rezimirajte svoje nalaze iz ovih konstrukcija.

2. radni listić: Koje oblike možete stvoriti ako reflektirate točku preko stranica oktanta?

Možda ste prije reflektirali oblike koristeći pravce kao svoja zrcala. Slijedite isti postupak za reflektiranje oblika preko glavne kružnice na sferi. U ovom listiću uporabitit ćete tri luka oktanta kao zrcala za preslikavanje u tri refleksije. Rezultati od ove refleksije pokazuju zanimljivo svojstvo oktanta.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koje oblike možete stvoriti ako reflektirate točku preko stranica oktanta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Konstruirajte oktant. Označite njegove vrhove K, L i M.

2. korak: Nacrtajte točku O unutar trokuta $\triangle KLM$ i spojite ovu točku s tri vrha K, L i M.

3. korak: Reflektirajte trokut $\triangle KLO$ preko stranice KL kako biste kreirali trokut $\triangle KLP$. Zatim reflektirajte trokut $\triangle LMO$ preko stranice LM kako biste kreirali trokut $\triangle LMQ$. Na kraju, reflektirajte trokut $\triangle MKO$ preko stranice MK za kreirati trokut $\triangle MKR$.

1. Izmjerite kutove u vrhovima K, L i M. Što možete reći o zbroju mjera kutova u ova tri vrha?

2. Je li PQR trokut ili je $PLQMRK$ šesterokut?

3. Izmjerite kutove u vrhovima P, Q i R. Koliki je zbroj ove tri mjere kutova?

4. Izmjerite dijelove na koje točka K dijeli stranicu PR. Učinite isto za točku L i stranicu QR i točku M i stranicu RQ. Što ste pronašli? Kakve su točke K, L i M u trokutu $\triangle PQR$?

3. Hrvatski kurikul sferne geometrije i trigonometrije

Anna Rybak na radionici

Sferna geometrija

a) Međunarodni kurikul

Predlažemo da se sferna geometrija, kao dio komparativne geometrije, uvrsti u nastavni plan i program matematike.

Postoji niz tema koje pripadaju gotovo svim nastavnim planovima i programima diljem svijeta, a koje se odnose na Euklidsku geometriju i geografiju. Ove zajedničke teme daju osnovu za uključivanje sferne geometrije u materijal.

Sljedeća tablica daje pregled koncepcije. Sfernu geometriju koristimo za objašnjenje osnovnih pojmova euklidske geometrije i geografskog koordinatnog sustava.

Donja tablica navodi teme iz područja geometrije koje se pojavljuju u kurikulu matematike u svakoj zemlji (prvi stupac tablice), drugi stupac predlaže odgovarajuće sadržaje iz područja sferne geometrije, treći predstavlja problemski pristup temi o kojoj je riječ, četvrti opisuje osnovne aktivnosti koje učenik radi kako bi riješio probleme navedene u trećem stupcu.

Ovdje dajemo samo ključne riječi jer su potpuni detalji izvan opsega ovog poglavlja.

"Školska" matematika (u većini slučajeva geometrija u ravnini)	*Sferna geometrija*	*Pristup temeljen na problemu (predloženi problemi - ako nije drugačije naznačeno, i u ravnini i na sferi)*	*Aktivnosti učenika (ako nije drugačije naznačeno, i u ravnini i na sferi)*
Točke, pravac, dužina	Točke, pravac, dužina	Što je *ravno*? Koliko pravaca prolazi kroz dvije točke? Koliko točaka dijele dva pravca? Koliko odsječaka čine dvije točke na pravcu?	Promatrajte Zemljinu sferu u usporedbi s ravnom površinom, crtajte figure i donosite zaključke.

Udaljenost	Udaljenost	Možemo li na jednak način mjeriti udaljenost točaka u ravnini i na sferi?	Naznačite dvije točke A i B. Spojite ih različitim crtama. Pronađite liniju koja pokazuje najkraći put između njih. Produžite ovu liniju koliko god možete. Izmjerite udaljenost A i B ravnim/sfernim ravnalom.
Što je *mjerenje*? Odnos između jedinice i broja jedinica potrebnih za mjerenje duljine predmeta	Što je *mjerenje*? Odnos između jedinice i broja jedinica potrebnih za mjerenje duljine predmeta	Različite jedinice za mjerenje udaljenosti.	Teme vezane uz geografiju i povijest.
Međusobni položaj, putanje kretanja	Međusobni položaj, putanje kretanja	Što je *daleko* ili *blizu*? Kako procijeniti međusobni položaj i kretanje?	Pokažite gradove na globusu i izmjerite njihovu udaljenost ravnalom. Izrazite približnu udaljenost između gradova u kilometrima.
Kružnice	Kružnice	Koliko središta ima kružnica? Postoji li najveća kružnica? Koliki je omjer ȯpsega i promjera kružnice?	Konstruirajte, mjerite, promatrajte i donosite zaključke.
Kutovi	Kutovi	Kakvi kutovi postoje? Možemo li na jednak način mjeriti kutove u ravnini i na sferi?	Nacrtajte točku i dvije zrake/meridijana iz ove točke. Oni dijele površinu na dva kutna područja. Opišite područja.

Paralele, okomice, sjecište	Paralele, okomice, sjecište	Koliko zajedničkih točaka dijele dva pravca? Koliki je kut presjeka?	Možete li pronaći okomite pravce na Zemljinoj sferi? Možete li pronaći paralelne linije? Sijeku li se dva pravca? Ako da, koliko zajedničkih točaka imaju?
Mnogokuti	Mnogokuti	Koliki je najmanji broj stranica mnogokuta?	Spojite dva pola sfernim segmentima. Što ste pronašli?
Trokuti	Trokuti, Eulerovi trokuti	Pronađite razlike i sličnosti između trokuta u ravnini i na sferi.	Eulerov i ne-Eulerov trokut. Zbroj unutarnjih kutova. Pravokutni trokuti. Tales i Lexell.
Simetrale kutova i okomite simetrale stranica	Simetrale kutova i okomite simetrale stranica	Definirajte simetrale stranica, simetrale kutova, visine i težišnice trokuta. Opiši njihov broj i svojstva u zadanom trokutu.	Učenici konstruiraju pravce i točke trokuta, vrijedne pažnje i izvode zaključke.
Sličnost i sukladnost trokuta	Sličnost i sukladnost trokuta	Koliko je podataka potrebno da se pokaže da su dva mnogokuta sukladna? Isto pitanje za trokute.	Učenici konstruiraju elemente mnogokuta/trokuta i izvode zaključke.
Četverokuti	Četverokuti	Razlike i sličnosti između postojanja i klasifikacije četverokuta u ravnini i na sferi.	Učenici konstruiraju u ravnini/na sferi: trapez, upisani trapez, paralelogram, romb, pravokutnik, kvadrat, deltoid, Khayyam-Saccherijev, Lambertov četverokut itd.

Popločavanje ravnine	Popločavanje sfere	Popločavanje ili pločice izrađene od ponavljajućih uzoraka geometrijskih likova istog oblika. Razlike i sličnosti između ravnih i sfernih pločica.	Učenici rade pokuse/eksperimentiraju i prezentiraju rezultate svog rada.
Mjerenje površine	Mjerenje površine	Kako izmjeriti površinu područja? Koja je mjerna jedinica? Kako izmjeriti površinu mnogokuta? Kako izmjeriti površinu krugova?	Procijeniti površinu područja u ravnini i na sferi; procijeniti površinu geografskih oblika na kugli zemaljskoj. Eksperimenti s mjerenjem površine na dvije površine.
Pitagorin poučak	Pitagorin poučak	Vrijedi li Pitagorin poučak na sferi?	Rasprava: Što Pitagorin poučak izražava u ravnini? Može li se ovaj poučak primijeniti na sferu? Ako da, kako? Ako ne, postoji li druga opcija?

Prijedlog da se sferna geometrija i trigonometrija uvrste u temeljni kurikul matematike u Hrvatskoj

Odredbe Hrvatskog temeljnog matematičkog kurikula dopuštaju ustvrditi da će uključivanje sferne geometrije i trigonometrije u realizirane sadržaje obogatiti provedbu ove osnove i pridonijeti potpunijem ostvarivanju nastavnih ciljeva.

U temeljnom nastavnom planu i programu za osnovnu i nižu srednju školu, između ostalog, čitamo: *Učenici uspostavljaju i razumiju veze i odnose među matematičkim objektima, idejama, pojmovima, prikazima i postupcima te oblikuju cjeline njihovim povezivanjem. Uspoređuju, grupiraju i klasificiraju objekte i pojave prema zadanome ili izabranom kriteriju. Povezuju matematiku s vlastitim iskustvom, prepoznaju ih na primjerima i iz blizine te primjenjuju na drugom području kurikula. Time ostvaruju jas-*

nost, pozitivan stav i otvorenost prema matematici te povezuju matematiku sa sadržajima ostalih predmeta i životom tijekom procesa cjeloživotnoga učenja. a opet simultano učenje geometrije u ravnini i na sferi omogućuje vam usporedbu svojstava matematičkih objekata i kombiniranje matematike s vlastitim iskustvima i zapažanjima.

Čitamo i: *Učenici smisleno prikazuju matematičke objekte, obrazlažu rezultate, objašnjavaju svoje ideje i bilježe postupke koje provode.* - razvoj takvih vještina poticat će se istraživačkim radom učenika koji se provodi u cilju otkrivanja svojstava likova na sferi.

Zanimljiv je i tekst: *Učenje matematike karakterizira razvoj i njegovanje logičkoga i apstraktnoga mišljenja. Poučavanjem i učenjem nastavnoga predmeta Matematika učenici se suočavaju s izazovnim problemima koji ih potiču na promišljanje, argumentiranje i dokazivanje te donošenje samostalnih zaključaka. Učenici postavljaju matematici svojstvena pitanja koja stvaraju i istražuju na njima zasnovane matematičke pretpostavke, uočene pravilnosti i odnose. Stvaraju i vrednuju lance matematičkih argumenata, zaključuju indukcijom i dedukcijom, analiziraju te primjenjuju analogiju, generalizaciju i specijalizaciju. Primjenjuju poznato u nepoznatim situacijama i prenose učenje iz jednoga konteksta u drugi. Razvijaju kritičko mišljenje te prepoznaju utjecaj ljudskih čimbenika i vlastitih uvjerenja na zaključivanje. Proces mišljenja razvijen nastavom matematike učinkovito primjenjuju u svome svakodnevnom životu.* - bavljenje geometrijom i sfernom trigonometrijom na istraživački način omogučit će učenicima razvijanje vještina analiziranja, zaključivanja i argumentiranja.

Zahvaljujući uvrštavanju sferne geometrije i trigonometrije u nastavni plan i program, učenici će također imati priliku češće raditi problemskom metodom i koristiti se informacijskom tehnologijom, posebice za izvođenje konstrukcija i računalnih simulacija u ravnini.

Teme za obiteljske razgovore

Naša iskustva na javnim manifestacijama popularizacije znanosti (Festivali znanosti, Znanstveni piknici, Znanstveni muzeji i dr.) pokazuju da je ovo područje znanja vrlo zanimljivo i izazovno, ne samo za mlade, već i za roditelje, bake i djedove. Imajući to u vidu, postavili smo neke teme za razgovor kod kuće, među članovima obitelji. Ove rasprave približavaju *Visoku znanost* ljudima koji se možda nikada nisu smatrali sposobnima za samostalno otkrivanje znanja.

Prijedlog 1. Gdje u našem okruženju promatramo različite geometrijske sustave? Možemo li jedan sustav zamijeniti drugim?

Prijedlog 2. Jesu li Bartolomeu Diasu, Vascu da Gami, Kolumbu, Magellanu na putovanjima bile potrebne matematika i fizika?

Prijedlog 3. Naš zrakoplov leti od Varšave, Poljska, do Chicaga, SAD. Vrijeme je vedro pa vidimo impresivnu ledenu masu Grenlanda ispod. Zašto naša ruta leta prolazi preko Grenlanda?

Prijedlog 4. Koja je razlika između papirnate i narančine geometrije? Objasni to svom bratu na kori znanstvene naranče.

Prijedlog 5. Objasnite svojoj mlađoj sestri zašto ne može zagladiti naljepnicu velike filmske zvijezde na površini staklene sfere bez ikakvih nabora.

b) Hrvatski kurikul

Sferna geometrija u osnovnoj školi

Prilikom implementacije sadržaja predstavljenih u tablicama, možete koristiti radne listove iz poglavlja 2. ili njihove fragmente. Na učiteljima je da odaberu radne listove koji će se koristiti u određenim satovima.

Tablice sadrže temeljne nastavne sadržaje iz Hrvatskog temeljnog nastavnog plana i programa za osnovnu školu uz prijedloge sadržaja iz područja sferne geometrije koji se mogu implementirati istovremeno s ovim natuknicama:

Matematika 1. razred - 140 sati godišnje

Odgojno-obrazovni ishodi	Sadržaj	Sadržaj sferne geometrije
MAT OŠ C.1.1. Izdvaja i imenuje geometrijska tijela i likove i povezuje ih s oblicima objekata u okružju.	Geometrijska tijela (kugla, valjak, kocka, kvadar, piramida, stožac) i likovi (trokut, kvadrat, pravokutnik, krug). Ravne i zakrivljene plohe.	Označava kugle i različito zakrivljene površine (npr. listove kelja, čips itd.) u njihovoj okolini. Opaža različito zakrivljene površine i razlikuje ih od ravnine.
MAT OŠ C.1.2. Crta i razlikuje ravne i zakrivljene crte.	Ravne i zakrivljene crte. Prošireni sadržaj: otvorene, zatvorene i izlomljene crte.	Crta crte na zakrivljenim plohama i govori po čemu se razlikuju od pravaca u ravnini.
MAT OŠ C.1.3. Prepoznaje i ističe točke.	Točka. Točka kao sjecište crta.	Označava točke na površini lopte flomasterima, čačkalicama, pribadačama i sl. Na površini lopte crta crte i označava točke sjecišta tih linija.

Matematika 2. razred - 140 sati godišnje

Odgojno-obrazovni ishodi	Sadržaj	Sadržaj sferne geometrije
MAT OŠ C.2.1. Opisuje i crta dužine.	Dužina kao najkraća spojnica dviju točaka. Krajnje točke. Stranice kvadrata, pravokutnika i trokuta. Bridovi geometrijskih tijela.	Traži najkraći put između točaka na sferi. Otkriva da je najkraći put sferni segment.
MAT OŠ D.2.2. Procjenjuje, mjeri i crta dužine zadane duljine.	Procjena i mjerenje duljine dužine. Računanje s jedinicama za mjerenje dužine (u skupu brojeva do 100).	Procjenjuje udaljenosti na sferi. Određuje (prema svojoj mašti) jedinicu za mjerenje udaljenosti na kugli i tom jedinicom mjeri.

Matematika 3. razred - 140 sati godišnje

Odgojno-obrazovni ishodi	Sadržaj	Sadržaj sferne geometrije
MAT OŠ C.3.1. Opisuje i crta točku, dužinu, polupravac i pravac te njihove odnose.	Pravac, polupravac i dužina kao dijelovi pravca.	Zadaje sfernu liniju, odnosno skup točaka koje sferu dijele na dva sukladna dijela. Uspoređuje sferni pravac s ravnim pravcem u ravnini. Označava sferne segmente na sfernoj ravnoj liniji,
MAT OŠ C.3.2. Prepoznaje i crta pravce u različitim međusobnim odnosima.	Pravci koji se sijeku. Crtanje usporednih i okomitih pravaca.	Ispituje međusobni položaj sfernih linija. Mogu li sferni pravci biti paralelni? A okomiti?
MAT OŠ C.3.3. Služi se šestarom u crtanju i konstruiranju.	Crtanje i konstruiranje šestarom (kružnica, pravokutnik i kvadrat). Prenošenje dužine zadane duljine.	Koristi sferno ravnalo i sferni šestar. Konstruira kružnice na sferi. Može li se na sferi konstruirati kvadrat? Zašto da ili zašto ne?
MAT OŠ D.3.1. Procjenjuje, mjeri i crta dužine zadane duljine.	Procjena, mjerenje i crtanje dužine zadane duljine. Jedinice za mjerenje dužine (mm, cm, dm, m, km). Računanje s jedinicama za mjerenje dužine (u skupu brojeva do 1000).	Crta linije određene duljine na sferi pomoću sfernog ravnala.

Matematika 4. razred - 140 sati godišnje

Odgojno-obrazovni ishodi	Sadržaj	Sadržaj sferne geometrije
MAT OŠ C.4.1. Određuje i crta kut.	Pravi, šiljasti i tupi kut. Crtanje kuta.	Crta kutove na sferi. Pokazuje kutove na globusu, npr. kutove između meridijana, s vrhom u polu, koji se kutovi mogu konstruirati na sferi (oštri, pravi, tupi)?
MAT OŠ C.4.2. Razlikuje i opisuje trokute prema duljinama stranica te pravokutni trokut.	Vrste trokuta prema duljini stranica (jednakostranični, raznostranični, jednakokračni). Pravokutni trokut.	Stvara trokute na sferi. Provjerava koje se vrste trokuta mogu oblikovati. Na sferi otkriva trokute koji ne postoje u ravnini, npr. na globusu pokazuje trokut s tri prava kuta, a na naranči gradi trokut s tri tupa kuta.
MAT OŠ C.4.3. Opisuje i konstruira krug i njegove elemente.	Krug i kružnica. Konstrukcija kruga i njegovih elemenata (kružnica, polumjer, središte).	Stvara (pomoću sfernog šestara) ili promatra (npr. paralelu na globusu) kružnicu na sferi i odgovara na sljedeća pitanja: *Koliki je polumjer sferne kružnice? Koliko dug može biti? Koliko središta ima sferna kružnica?*

Matematika 5. razred - 140 sati godišnje

Odgojno-obrazovni ishodi	Sadržaj	Sadržaj sferne geometrije
MAT OŠ C.5.1. Opisuje skupove točaka u ravnini te analizira i primjenjuje njihova svojstva i odnose	Skupovi točaka u ravnini: točka, pravac, polupravac, dužina, kut. Vrste kutova. Sukladne dužine. Sukladni kutovi. Simetrala dužine. Kutovi uz presječnicu usporednih pravaca.	Podsjeća na skupove točaka na sferi: ravna linija, segment, trokut. Postoji li na sferi simetričan isječak? Mogu li dva sferna pravca biti paralelna? Možete unijeti loksodromu.
MAT OŠ C.5.2. Opisuje i crta/konstruira geometrijske likove te stvara motive koristeći se njima.	Konstrukcija kvadrata. Konstrukcija pravokutnika. Konstrukcija jednakostraničnoga i jednakokračnoga trokuta. Konstrukcija kružnice i kruga. Dijelovi kružnice i kruga.	Pita se koji se od sljedećih likova može konstruirati na kugli. Stvara mozaike na sferi.
MAT OŠ C.5.3. Osnosimetrično i centralnosimetrično preslikava skupove točaka u ravnini.	Osna simetrija. Centralna simetrija.	Konstruira osnosimetrične i središnje simetrične figure na sferi. Određuje os simetrije i/ili središte simetrije (ako postoji) za figure na sferi.
MAT OŠ D.5.1. Mjeri i crta kutove, određuje mjere susjednih i vršnih kutova.	Mjera kuta. Klasifikacija kutova. Susjedni kutovi. Vršni kutovi.	Podsječa na pitanja o kutovima na sferi. Ispituje međusobnu ovisnost vršnih kutova na sferi. Istražuje međusobnu ovisnost susjednih kutova na sferi.

Matematika 6. razred - 140 sati godišnje

Odgojno-obrazovni ishodi	Sadržaj	Sadržaj sferne geometrije
MAT OŠ C.6.1. Konstruira kut i njegovu simetralu.	Kut. Simetrala kuta. Konstrukcije kutova $60°, 120°, 30°, 90°$. Prošireni sadržaj: Konstrukcija trokutu upisane kružnice.	Konstruira kut na sferi i njezinu simetralu. Provjerava može li se krug upisati u svaki sferni trokut.
MAT OŠ C.6.2. Konstruira trokute, analizira njihova svojstva i odnose.	Trokut. Odnosi stranica i kutova trokuta. Visina trokuta. Sukladnost trokuta. Tri osnovne konstrukcije trokuta.	Klasificira sferne trokute prema stranicama i kutovima. Ispituje zbroj mjera unutarnjih kutova u sfernom trokutu. Određuje značajke sukladnih trokuta na sferi.
MAT OŠ C.6.3. Konstruira četverokute, analizira njihova svojstva i odnose.	Četverokuti - konstrukcija kvadrata, pravokutnika, paralelograma i romba. Prošireni sadržaj: Skiciranje, crtanje/konstrukcija trapeza i deltoida.	Koje četverokute vidimo na globusu? Koji se četverokuti mogu konstruirati na sferi?
MAT OŠ D.6.2. Računa i primjenjuje opseg i površinu trokuta i četverokuta te mjeru kuta.	Površina i opseg trokuta i paralelograma. Zbroj mjera unutarnjih kutova trokuta i četverokuta.	Ispituje zbroj mjera unutarnjih kutova u trokutu i četverokutu na kugli. Pokušavam riješiti problem: kako izračunati površinu sfernog trokuta?

Matematika 7. razred - 140 sati godišnje

Odgojno-obrazovni ishodi	Sadržaj	Sadržaj sferne geometrije
MAT OŠ C.7.1. Crta i konstruira mnogokute i koristi se njima pri stvaranju složenijih geometrijskih motiva.	Mnogokuti. Pravilni mnogokuti.	Konstruira pravilne poligone na sferi, posebno pravilan četverokut. Postoji li mnogokut na sferi koji ima manje od tri stranice? Otkriva kocku na sferi.
MAT OŠ D.7.3. Odabire strategije za računanje opsega i površine mnogokuta.	Površina i opseg mnogokuta.	Slično kako izračunati površinu sfernog trokuta. Razvija strategiju za izračunavanje površine mnogokuta na sferi.
MAT OŠ D.7.4. Računa i primjenjuje opseg i površinu kruga i njegovih dijelova.	Opseg kruga. Površina kruga. Duljina kružnog luka. Površina kružnoga isječka i kružnoga vijenca.	Razmatra kako izračunati duljinu kruga i površinu kruga na sferi. Ispituje je li omjer duljine kružnice i njezinog promjera na sferi konstantan.

Geometrija i sferna trigonometrija u gimnaziji

Uvodna napomena:

Ako učenici koji ulaze u nižu srednju školu nisu u osnovnoj školi obrađivali teme vezane za sfernu geometriju, prije početka uvrštavanja sferne geometrije i trigonometrije u gimnazijski nastavni plan i program treba organizirati pripremnu nastavu na kojoj će učenici imati priliku upoznati se s nastavnim pomagalima i sprava za sfernu geometriju te otkriti temeljne pojmove geometrije na plohi sfere, osnovna svojstva geometrijskih likova na sferi te razlike između geometrije u ravnini i geometrije na sferi.

Savjeti su u odjeljku *Kako to izvesti u praksi?* stranica 80. te tabele u odjeljku *Sferna geometrija u osnovnoj školi* stranica 70.

Tablice sadrže programske stavke iz *Hrvatskog temeljnog kurikuluma* za gimnazije zajedno s prijedlozima sadržaja iz područja sferne geometrije i sferne trigonometrije koji se mogu provoditi istovremeno s ovim stavkama.

Gimnazija Matematika 1. razred - 105 sati godišnje

Odgojno-obrazovni ishodi	Sadržaj	Sadržaj sferne geometrije
MAT SŠ C.1.1. Konstruira i analizira položaj karakterističnih točaka trokuta.	Opisuje i konstruira simetralu dužine, težišnicu i težište trokuta te definira i konstruira središte trokutu opisane kružnice.	Na sferi konstruira simetrični isječak, težište i težište trokuta. Ispituje može li se na svakom sfernom trokutu opisati kružnica, a zatim definira i određuje središte kružnice opisane sfernom trokutu.
MAT SŠ C.1.2. MAT SŠ D.1.2. Primjenjuje Talesov poučak o proporcionalnosti dužina i sličnost trokuta.	Sukladnost trokuta. Talesov poučak o proporcionalnosti dužina. Sličnost trokuta. Primjene sukladnosti i sličnosti.	Određuje karakteristike podudarnosti sfernih trokuta. Određuje karakteristike sličnosti sfernih trokuta.
MAT SŠ D.1.3. Primjenjuje trigonometrijske omjere.	Trigonometrijski omjeri. Primjena trigonometrijskih omjera u planimetriji.	Istražuje i otkriva odnos središnjeg kuta u glavnoj kružnici koju čini ravnina koja prolazi središtem sfere s udaljenosti krajnjih točaka luka na koji se kut oslanja. Istražuje i otkriva odnos središnjeg kuta u glavnoj kružnici koju čini ravnina koja prolazi središtem sfere s odgovarajućim kutom na sferi.

Gimnazija Matematika 2. razred - 105 sati godišnje

Odgojno-obrazovni ishodi	Sadržaj	Sadržaj sferne geometrije
MAT SŠ C.2.3. MAT SŠ D.2.1. Primjenjuje znanja o kružnici i krugu.	Kružnica i krug. Kružni luk i kružni isječak. Poučak o obodnome i središnjemu kutu.	Stvara (pomoću sfernog šestara) ili promatra (npr. paralelu na globusu) kružnicu na sferi i odgovara na sljedeća pitanja: *Koliki je polumjer sferne kružnice? Koliko dug može biti? Koliko središta ima sferni krug?* Ispituje odnos između središnjeg kuta i upisanog kuta u sfernoj kružnici ako se temelje na istom luku.
MAT SŠ C.2.4. MAT SŠ D.2.2. Primjenjuje poučak o sinusima i poučak o kosinusu.	Poučak o sinusima. Poučak o kosinusu. Primjena u planimetriji.	Otkriva princip izračunavanja vrijednosti sinusa i kosinusa sfernih kutova pozivajući se na vrijednosti sinusa i kosinusa kutova u ravnini.

Gimnazija Matematika 3. razred - 105 sati godišnje

Gimnazija Matematika 4. razred - 96 sati godišnje

U 3. i 4. razredu ne uvode se novi sadržaji iz područja sferne geometrije, izvannastavne aktivnosti mogu se organizirati tako da nalikuju sfernoj geometriji i njezinim primjenama, npr. u zemljopisu, ako su učenici zainteresirani.

Gimnazija Matematika 1. razred - 140 sati godišnje

Gimnazija Matematika 2. razred - 140 sati godišnje

Predlaže se implementacija sadržaja sferne geometrije i trigonometrije kao u slučaju

Gimnazija Matematika 3. razred - 140 sati godišnje

Gimnazija Matematika 4. razred - 128 sati godišnje

Predlaže se implementacija sadržaja sferne geometrije i trigonometrije kao u slučaju

Gimnazija Matematika - 105 sati godišnje

Gimnazija Matematika 1. razred - 175 sati godišnje **Gimnazija Matematika 2. razred - 175 sati godišnje** Predlaže se implementacija sadržaja sferne geometrije i trigonometrije kao u slučaju **Gimnazija Matematika 1. razred - 105 sati godišnje** **Gimnazija Matematika 2. razred - 105 sati godišnje**

Gimnazija Matematika 3. razred - 175 sati godišnje Predlaže se implementacija sadržaja sferne geometrije i trigonometrije kao u slučaju **Gimnazija Matematika 3. razred - 105 sati godišnje** i:

Odgojno-obrazovni ishodi	Sadržaj	Sadržaj sferne geometrije
MAT SŠ B.3.8. MAT SŠ C.3.5. Primjenjuje trigonometrijske funkcije.	Primjena trigonometrijskih funkcija	Analizira gradivo koje se odnosi na Pitagorin poučak na sferi; koristi trigonometrijske funkcije na sferi i sferni ekvivalent Pitagorinog poučka za rješavanje problema; također iz područja zemljopisa.

Gimnazija Matematika 4. razred - 175 sati godišnje U 4. razredu praktički nema novih sadržaja iz područja sferne geometrije, izvannastavne aktivnosti mogu se organizirati tako da nalikuju sfernoj geometriji i njezinim primjenama, npr. u zemljopisu, ako su učenici zainteresirani.

Gimnazija Matematika 1. razred - 210 sati godišnje Predlaže se implementacija sadržaja sferne geometrije i trigonometrije kao u slučaju **Gimnazija Matematika 1. razred - 105 sati godišnje** i:		
Odgojno-obrazovni ishodi	Sadržaj	Sadržaj sferne geometrije
MAT SŠ C.1.1. Konstruira i analizira položaj karakterističnih točaka trokuta.	Karakteristične točke trokuta. Površina trokuta.	Razmatra problem izračunavanja površine sfernog trokuta. Izvodi formulu za površinu sfernog trokuta. Uči pojam sfernog ekscesa.

Gimnazija Matematika 2. razred - 210 sati godišnje **Gimnazija Matematika 3. razred - 210 sati godišnje** **Gimnazija Matematika 4. razred - 192 sata godišnje** Predlaže se implementacija sadržaja sferne geometrije i trigonometrije kao u slučaju **Gimnazija Matematika 2. razred - 105 sati godišnje** **Gimnazija Matematika 3. razred - 175 sati godišnje** **Gimnazija Matematika 4. razred - 105 sati godišnje**
Gimnazija Matematika 3. razred - 245 sati godišnje Predlaže se implementacija sadržaja sferne geometrije i trigonometrije kao u slučaju **Gimnazija Matematika 3. razred - 175 sati godišnje**
Gimnazija Matematika 4. razred - 224 sata godišnje U 4. razredu praktički nema novih sadržaja iz područja sferne geometrije, izvannastavne aktivnosti mogu se organizirati tako da nalikuju sfernoj geometriji i njezinim primjenama, npr. u zemljopisu, ako su učenici zainteresirani.

Kako to izvesti u praksi?

c) Nastavna sredstva

3.1. Nastavna sredstva

Zapravo, popis nastavnih sredstava koja podržavaju provedbu gore prikazanog koncepta ovisi o kreativnosti nastavnika i učenika. Autori predlažu sljedeći skup pomagala od kojih se može kreirati "zbirka" za rad:

- model Lénártove sfere i skup instrumenata

- "prirodna" pomagala

- globusi - raznih vrsta i veličina,
- kuglice, božične kuglice, baloni, lopte itd.
- sve fotografije i ilustracije koje prikazuju elemente neeuklidske geometrije u prirodi i učincima ljudske aktivnosti (umjetnost, uporabni predmeti, itd.)

Kao dio pribora za sfernu geometriju predlažemo prirodne objekte, tj. plodove jabuke, naranče, lubenice, dinje itd.

Rezanjem i izrezivanjem ovih plodova izravno dobivamo znanje o sfernim pojmovima.

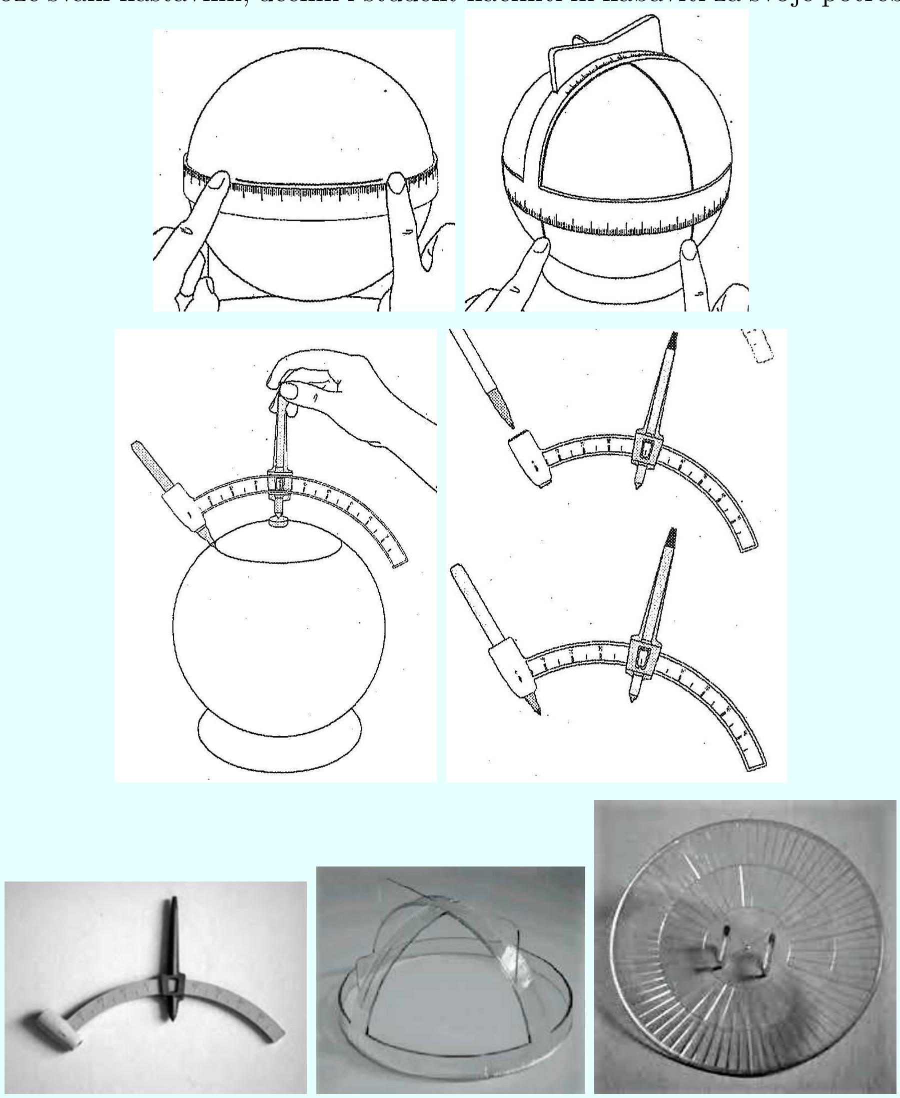
Naravno, predlažemo i različite veličine plastičnih i/ili staklenih lopti po kojima se mogu flomasterima u boji crtati i konstruirati sferni objekti pomoću sfernog šestara te mjeriti pomoću sfernog ravnala i kutomjera.

Uz realnu uporabu pribora predlažemo i virtualni pribor sadržan u priređenim Sketchpadovim datotekama za rad te uporabu Sketchpada u radu s radnim listićima i rješavanju zadataka.

3.2. Lénártove sfere i skup instrumenata za sfernu geometriju

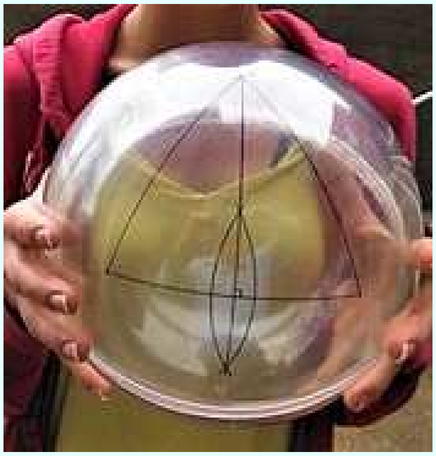
Lénártov pribor za sfernu geometriju

Ovdje prilažemo crteže i slike pribora koji je načinio István Lénárt i koje može svaki nastavnik, učenik i student načiniti ili nabaviti za svoje potrebe.



Lénártov pribor za crtanje i mjerenje na sferi

Pomoću ovog ili sličnog konstruiranog pribora konstruiraju se i mjere objekti na sferi. Jedan od takvih objekata konstruiran je na plastičnom modelu Lénártove sfere.



Jednakostranični trokut na Lénártovoj sferi

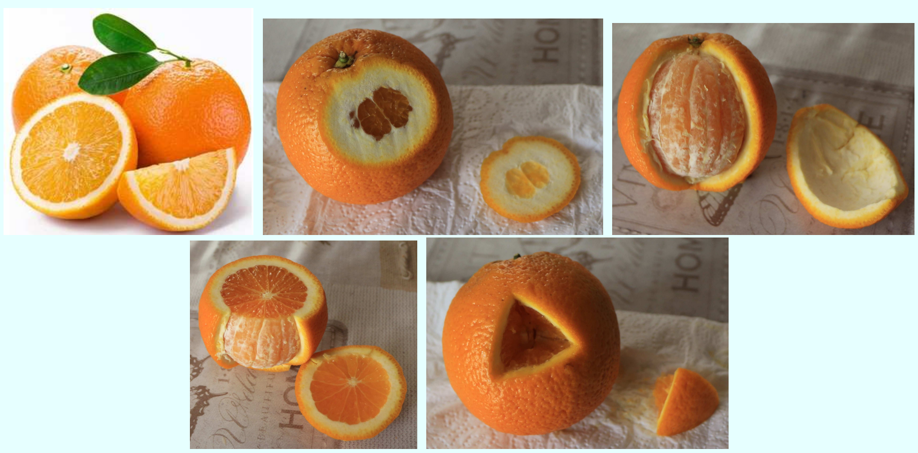
Voće kao pribor za sfernu geometriju

Evo nekoliko slika cijelih plodova i njihovog rezanja i izrezivanja.

Dinja i meridijani

Lubenica i meridijani

Jabuka i dvokut



Naranča

Nektarina

Pribor za crtanje i mjerenje objekata na sferi može se samostalno načiniti.

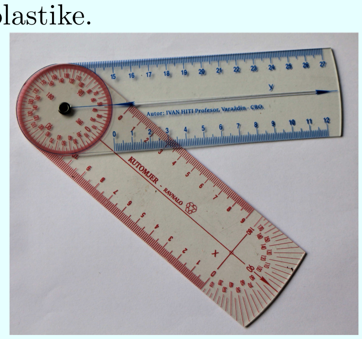
Primjeri klasičnih šestara

Evo primjera klasičnih euklidskih šestara koji se mogu uporabiti kao sferni šestari zamjenom/dodatkom na koji se onda stavlja olovka/flomaster/marker za crtanje kružnice na sferi.

Klasični šestari s dodatkom za uporabu na sferi

Ravnalo i kutomjer

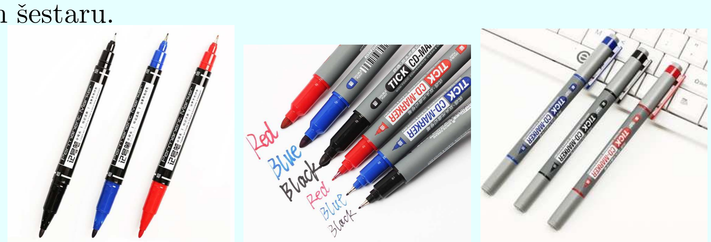
Kolega Ivan Hiti iz Varaždina načinio je ravnalo i kutomjer u jednom komadu. Pomoću njega se mogu mjeriti objekti u ravnini i na sferi jer je načinjen od savitljive plastike.



Ravnalo i kutomjer za mjerenje u ravnini i na sferi

Pisalice

Svaki korisnik koji uporabljuje realni pribor za crtanje po sferi lako može odabrati olovku, flomastre ili marker u boji. Ovdje ilustracije radi dajemo nekoliko slika tih pisalica koje se onda stavljaju u otvor dodatka na klasičnom šestaru.



Različite pisaljke

Krojački metar

Za mjerenje udaljenosti na sferi tj. na nacrtanim/konstruiranim objektima na realnom modelu sfere dovoljno je uzeti krojački metar ili neki drugi savitljivi alat koji se može pri mjerenju staviti na sferu.

Krojački metar

Vezice, gumice i čačkalice

Vezice, gumice i čačkalice služe za uporabu u označavanju na voću.

Plastične vezice, gumice i čačkalice

Plastična lopta i sfera

Plastična lopta

Postolje za sferu

Plastična prozirna sfera: dvije polusfere

Dodatak: klasični pribor za ravninsku geometriju

Klasični pribor za geometriju ravnine su dva trokuta, ravnalo, kutomjer i klasični šestar. Pomoću tih se alata crtaju/konstruiraju uobičajeni ravninski geometrijski objekti/likovi.

Pomoću štapića mogu se istraživati i prikazivati realni međusobni položaji pravaca u ravnini/na klupi.

Klasični pribor za geometriju: ravnalo, trokuti, kutomjer i šestar

Štapići kao modeli pravaca

3.3. Pribor za sfernu trigonometriju

Za potrebe izračunavanja u trigonometriji i sfernoj trigonometriji ovdje, informacije radi, navodimo neka džepna računala i softver.

Džepna računala

Džepna kvalitetna računala su proizveli *Casio, Texas Instruments* i *HP*. Njihovi proizvodi se mogu lako nabaviti. Softver *Photomath* se može pronaći na intertnetu i pomoću njega se mogu izračunavati pojedine veličine iz konkretnih zadataka.

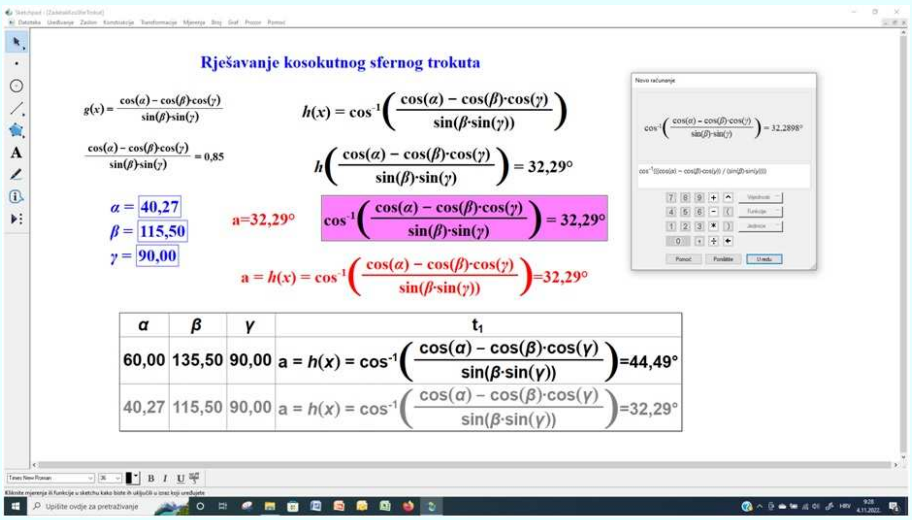
Na internetu se mogu pronaći mnogi virtualni kalkulatori za ove potrebe računanja.

U Windowsima je ugrađen kalkulator koji se također može uporabiti za izračune.

Na pametnim telefonima, primjerice na *iPhoneu* ili nekom drugom, postoje kvalitetni kalkulatori.

Džepna računala, Photomath, windows i iPhone kalkulator

Softver



Posebice spominjemo uporabu softvera *Sketchpad* u kojem se nalazi vrlo kvalitetno računalo povezano s ostalim svojstvima ovog softvera.

Evo jednog primjera uporabe u rješavanju kosokutnog sfernog trokuta. Mijenjajući parametre α, β i γ dobivaju se rješenja niza zadataka iste vrste koja se onda mogu dinamično istraživati i tabelirati.

Formule potrebne za izračunavanje trigonometrijskih vrijednosti u sfernoj (i u ravninskoj) trigonometriji lako se upisuju u Sketchpadovo računalo.

Na adresi `https://easelgeo.app/` nalazi se besplatan softver za crtanje i mjerenje objekata sferne geometrije.

Drugi softver koji se također može prilično učinkovito koristiti uz ovu knjigu je *Cinderella*, koja je dostupna (v. 2) kao besplatni softver na: `https://cinderella.de/tiki-index.php?page=Download+Cinderella.2&bl`

Ono što čini Cinderellu/Pepeljugu prilično jedinstvenom je to što se unutar softvera može prebaciti između načina euklidske, hiperbolične i eliptičke geometrije i jednostavno dinamički provjeriti i usporediti ono što ostaje nepromjenjivo u različitim načinima, a što se mijenja.

U mapi *GSP datoteke*, u kojoj su Sketchpadove datoteke za rad a koja se nalazi uz ovu knjigu, priređena je datoteka *Poincaréov model hiperbolične geometrije* pomoću koje se mogu crtati, mjeriti i dinamično istraživati objekti i veličine hiperboličke geometrije.

Mjesto

Čini se da bi bilo dobro da navedena nastavna sredstva budu stalno dostupna u nastavi. Stoga predlažemo da se u razredu uredi "interdisciplinarni kutak" u kojem će na stolu biti izloženi najraznovrsniji rekviziti, dok će fragment zidnih novina biti mjesto gdje ćete moći objesiti ilustracije, probleme za razmišljanje, grafički prikazati prezentirani rezultati rada učenika itd.

Ovo rješenje olakšava korištenje metode kompariranja u bilo kojem trenutku sata. Naravno, plastični modeli iz kompleta Lénártove sfere, namijenjeni istraživačkom radu učenika u skupinama, bit će postavljeni na prikladno mjesto.

3.4. Prijedlog organizacije nastave

Nastava komparativnom metodom može se organizirati u dva oblika:

- u obliku zajedničkog rada, pri čemu se može koristiti prezentacija pojedinačnih rekvizita, a pitanja koja formulira nastavnik potaknut će raspravu;

  Primjer: Kada pokazujete nogometnu loptu, možete postaviti pitanje: *Vidite li ovdje geometrijske figure? Ako je tako, koji su? Kako ćemo ih imenovati? Koje su njihove komponente? Sliče li ove figure figurama konstruiranim u ravnini? Što je slično? Što je drugačije?*

  Lopta može "kružiti" među učenicima (ili možda više različitih lopti?). Važno je da učenici javno istupaju, govore o svojim spoznajama bez straha da će biti ukoreni. Tema im je nova i čine prve korake u izgradnji novih znanja.

- u obliku grupnog rada (ili samostalnog rada, ako to broj nastavnih sredstava dopušta), gdje učenici izrađuju konstrukcije u ravnini i na sferi za rješavanje problema. Potom slijedi izlaganje rezultata rada i sažeta rasprava u kombinaciji s utvrđivanjem zaključaka.

4. Sferna trigonometrija

István Lénárt na predavanju studentima

Razmotrit ćemo 4 sljedeće teme:

1. Trigonometrijske funkcije u ravnini
2. Sferna udaljenost i euklidski kut; sferni kut i euklidski kut
3. Trigonometrijske funkcije na sferi
4. Pitagorin poučak na sferi

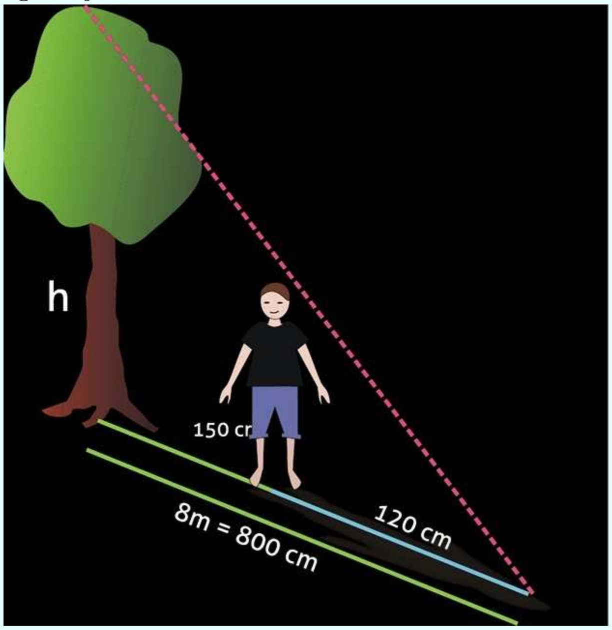
O sfernim ekvivalentima poučka o sinusu i poučka o kosinusu treba raspravljati u teorijskom dijelu o sfernoj trigonometriji.

Ako je ova podjela tema dobra, bit će četiri nastavna lista (radni listovi). U sljedećim prijedlozima listova ispravan tekst označen je crnom bojom, a komentari, prijedlozi, pitanja za raspravu - plavom bojom.

4.1. Prva tema: trigonometrijske funkcije u ravnini

1. radni listić: Postoje li odnosi između stranica i kutova u pravokutnom trokutu?

1. Znate da možete izračunati visinu stabla na temelju duljine njegove sjene. Pogledajte crtež:



Izvor: http://edudu.pl/sciaga-twierdzenie-talesa,43a28a1d6067e959dd85 i podsjetite se da možete koristiti omjer:

$$\frac{h}{8} = \frac{1,5}{1,2}.$$

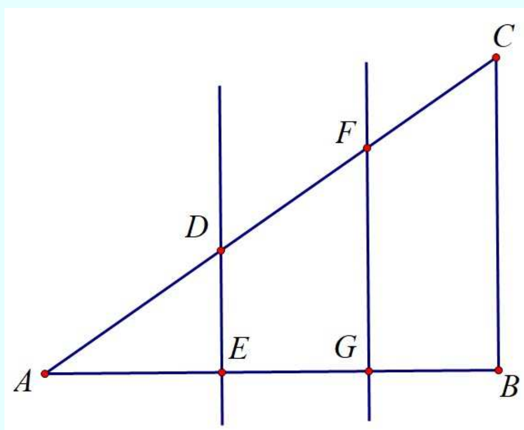
Imajte na umu da ne morate znati visinu čovjeka ili duljinu njegove sjene. Potrebno je znati samo omjer ove dvije veličine.

O čemu ovisi ovaj omjer?

2. Otvorite datoteku Sketchpada. (U datoteci je pravokutni trokut i učenik će stvoriti druge pravokutne trokute u ovom trokutu, kao što je prikazano na slici.)

   `Anna datoteka.gsp`.

3. Nacrtajte nekoliko pravokutnih trokuta "u jednom trokutu" kao što je prikazano na slici:



   Izvršite odgovarajuća mjerenja i ispunite tablicu:

Trokut	$\triangle ABC$	$\triangle AED$	$\triangle AFG$
Omjer	$\frac{\lvert BC\rvert}{\lvert AB\rvert} =$	$\frac{\lvert DE\rvert}{\lvert AE\rvert} =$	$\frac{\lvert FG\rvert}{\lvert AG\rvert} =$

4. Što uočavate?

5. Koji je kut zajednički svakom od razmatranih trokuta? Govori li nešto o ovom kutu ono što ste uočili dok ste ispunjavali tablicu?

6. Provjerite svoja zapažanja tako da konstruirate pravokutne trokute s drugim šiljastim kutovima (možete koristiti program Sketchpad) i napravite slične izračune kao u gornjoj tablici.

Omjer koji ste pronašli je **tangens šiljastog kuta, koji je uobičajen u trokutima koji se razmatraju**.

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta definirane su omjerima duljina stranica pravokutnog trokuta. Te omjere nazivamo sinus, kosinus i tangens šiljastog kuta.

Tangens šiljastog kuta u pravokutnom trokutu je omjer duljine nasuprotne i priležeće stranice trokuta.

Postoje i drugi omjeri: **sinus, kosinus** i **kotangens**. Informacije o tim funkcijama pronaći ćete u 10. poglavlju, gdje se raspravlja o teoretskim osnovama ravninske trigonometrije, ali ako želite, možete sami provjeriti koji su omjeri stranica u pravokutnim trokutima s istim šiljastim kutom konstantni. Na taj način možete sami definirati omjere za **sinus, kosinus** i **kotangens**.

4.2. Druga tema: sferna udaljenost i euklidski kut; sferni kut i euklidski kut

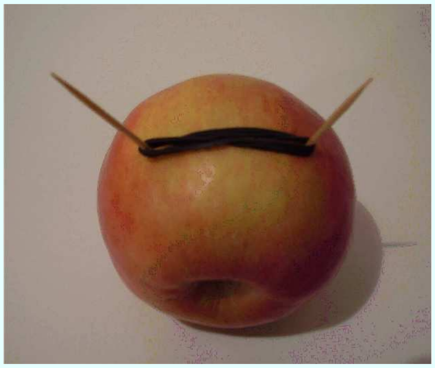
2. radni listić: trigonometrijske funkcije u sfernoj geometriji

Htjeli bismo koristiti trigonometrijske funkcije u sfernoj geometriji, ali te su funkcije definirane sa stajališta euklidske geometrije. Kako ih možemo koristiti na sferi?

1. Budući da trigonometrijske funkcije izražavaju odnose između kutova i duljina stranica pravokutnog trokuta u kojem se taj kut nalazi, potrebno je da sfernu udaljenost i sferni kut izrazimo udaljenostima (duljinama) i kutovima u ravnini.

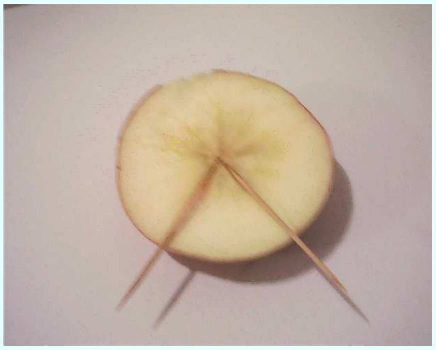
   Pripremite bilo koji kuglasti predmet u koji možete zabosti čačkalicu, pribadaču i sl. Takav predmet može biti npr. jabuka, naranča, polistirenska kuglica.

2. Zabodite dvije čačkalice u površinu pripremljenog predmeta i spojite ih gumicom.



Gumica predstavlja sferni segment. Njezina se duljina može mjeriti u sfernim jedinicama duljine. Prisjetite se jedinica u kojima mjerimo udaljenost na sferi. Ima li to veze s mjerenjem kutova? Pokušajte ovu sfernu udaljenost izraziti kutom u euklidskoj ravnini. Opišite svoju metodu.

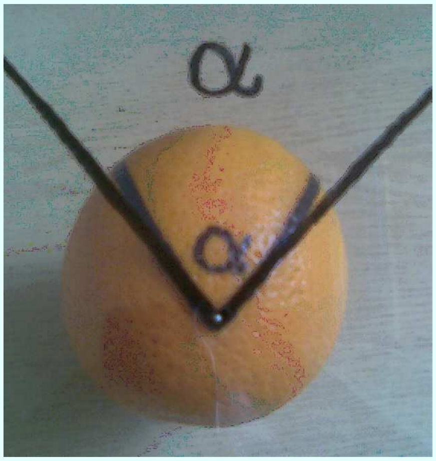
3. Možda ne će biti lako. Možda vam fotografija ispod može pomoći napraviti prijelaz između sfere i ravnine:



Kojem kutu odgovara cijeli glavni krug na kugli? Kako onda možete izraziti dio ove glavne kružnice, odnosno sferni segment koji ste označili u odnosu na kut kojem odgovara cijela glavna kružnica? U kojim ćete jedinicama mjeriti duljinu sfernog odsječka i pripadni ravninski kut? Razlikuju li se te mjere jedna od druge?

4. Sada pogledajmo kut na sferi i razmislimo ima li on ikakve veze s ravnim kutom. Na kori naranče nacrtajte sferni kut. Pokušajte ovaj sferni kut izraziti preko kuta u euklidskoj ravnini. (Tinta je na kori; nakon eksperimenta možete sigurno pojesti naranču.) Opišite svoju

metodu. Pogledajte fotografiju ispod:



5. Možete li sada otkriti što je zajedničko kutu na sferi i udaljenosti između dviju točaka na sferi, odnosno duljini sfernog segmenta?

   Naći ćete informacije o ovoj i dodatnim slikama u 5. poglavlju (stranica 116. - pogledajte crtež pod naslovom Udaljenost točaka A i B) i u 10. poglavlju, ali prvo pokušajte izvući vlastite zaključke.

6. Najvažniji zaključak iz ovog dijela vašeg istraživačkog rada je sljedeći:

   Na sferi se duljina sfernog segmenta (to jest, duljina luka) mjeri u stupnjevima i jednaka je mjeri središnjeg kuta koji pripada tom luku. Dakle, u sfernoj trigonometriji tražit ćemo vrijednosti trigonometrijske funkcije stranica ili kutova u sfernim trokutima. Ovo je malo teško za ljude koji su se do sada bavili samo geometrijom i trigonometrijom u ravnini, ali moramo imati na umu da je sfera potpuno drugačiji "geometrijski svijet" od ravnine.

4.3. Treća tema: trigonometrijske funkcije na sferi

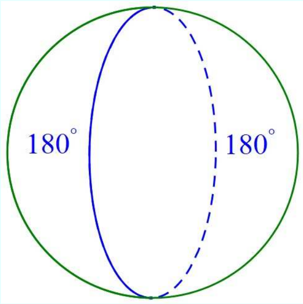
3. radni listić: trigonometrijske funkcije na sferi

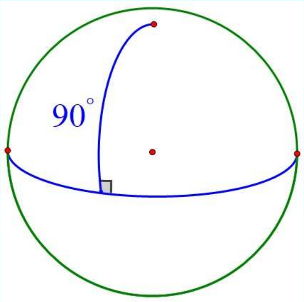
Ponovimo problem iz prethodnog radnog lista: Htjeli bismo koristiti trigonometrijske funkcije u sfernoj geometriji, ali će se te funkcije definirati sa stajališta Euklidske geometrije. Kako ih možemo koristiti na sferi?

1. Zapamtite: na sferi mjerimo i udaljenosti i kutove u stupnjevima. Već znate da se sferna udaljenost i sferni kut mogu izraziti preko ravninskih kutova. Možete izračunati trigonometrijske vrijednosti kutova u ravnini.

2. Dakle, pokušajmo izračunati vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova koji odgovaraju sfernim udaljenostima i kutovima.

   Pogledajte slike u nastavku.



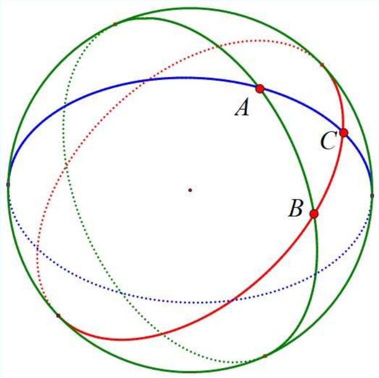
   i analizirajte donju tablicu:

udaljenost A	dio glavne kružnice	$\sin A$	$\cos A$
$180°$	pola	0	-1
$90°$	četvrtina	1	0

   Imajte na umu da smo ovdje izračunali vrijednosti trigonometrijske funkcije sfernih segmenata, koristeći odnos njihovih duljina s njihovim odgovarajućim ravninskim kutovima. Koristili smo znanje o vrijednostima trigonometrijskih funkcija polukuta i pravog kuta.

3. A što ako udaljenost nije takav dio glavne kružnice za koji možemo odmah naznačiti vrijednost trigonometrijskih funkcija?

   Sada pogledajte sliku ispod:

   a zatim na sferi nacrtajte bilo koji trokut koji imate na raspolaganju (narančina površina, kuglica od stiropora itd.), vrhove mu nazovite A, B, C, unutarnje kutove na tim vrhovima također označite kao A, B, C i stranice nasuprot ovim kutovima redom s a, b, c. Izmjerite stranice i kutove svog trokuta. Ako imate pribor za sfernu geometriju (Lénártov pribor za sferu ili drugi pribor), mjerenja će biti laka: koristit ćete sferni kutomjer za mjerenje kutova i sferno ravnalo za mjerenje stranica. Ako koristite naranču ili polistirensku kuglu, morat ćete se više potruditi: morate izračunati koji je dio glavne kružnice stranica trokuta i izraziti duljinu te stranice u stupnjevima, zatim morate izračunati koliki dio punog kuta je kut trokuta i izrazite mjeru tog kuta u stupnjevima.

Nakon izvršenih mjerenja i izračuna, ispunite donju tablicu pomoću vrijednosti trigonometrijskih funkcija i računanja vrijednosti s kalkulatorom:

Kut	Sinus kuta	Kosinus kuta	Tangens kuta	Stranica	Sinus stranice	Kosinus stranice	Tangens stranice
A				a			
B				b			
C				c			

Što uočavate?

4. Znate da postoje odnosi između trigonometrijskih funkcija istog kuta u ravnini. Najvažniji od njih su:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

gdje α označava kut.

Jesu li slični odnosi istiniti na sferi?

Stavite A, B, C redom za α i za svaki od ovih kutova provjerite jesu li gornje formule točne na sferi. Zatim stavite a, b, c umjesto α i napravite test koji ste radili za sferne kutove A, B, C.

Što uočavate?

O tome ćete saznati u 10. poglavlju, ali prvo pokušajte formulirati vlastite zaključke.

5. Odgovorite na pitanje: Koja je razlika između izračunavanja vrijednosti trigonometrijskih funkcija u ravnini i na sferi?

Pogledajte 10. poglavlje za sažetak, ali prvo pokušajte formulirati vlastiti odgovor.

4.4. Četvrta tema: Pitagorin poučak na sferi

4. radni listić: Pitagorin poučak na sferi

U ravnini možemo izračunati "nedostajuće" mjere kutova i duljina stranica pravokutnog trokuta koristeći trigonometrijske funkcije i Pitagorin poučak. Je li to moguće i na sferi? Postoje li odnosi između stranica sfernog pravokutnog trokuta ili između njegovih kutova koji omogućuju rješavanje takvih trokuta?

1. Konstruirajte pravokutni trokut u ravnini (u Sketchpadovoj datoteci), imenujte njegove stranice. Zapišite Pitagorin poučak koristeći oznake stranica koje ste napravili u konstruiranom trokutu. Pokušajte na bilo koji način opravdati napisani obrazac. Možete napraviti odgovarajuća mjerenja i izračune, a možete napraviti i "nacrtni" dokaz.

2. Razmislite i pokušajte planirati:

   Kako na sferi provjeriti je li Pitagorin poučak istinit? Može li "sferni" Pitagorin poučak poprimiti isti oblik kakav poznajemo iz geometrije ravnine?

   Prije nego što otvorite odgovor, pokušajte sami razmisliti o problemu.

   Dvije činjenice tvrde da možda i nije:

   a) Sferni trokut može imati više od jednog pravog kuta. Može se čak dogoditi da je sferni pravokutni trokut jednakostraničan trokut. Pitagorin poučak sigurno nije istinit u odnosu na takav trokut.

   b) Duljine stranica sfernih trokuta izražene su u stupnjevima. Dakle, kako možemo izračunati njihove kvadrate?

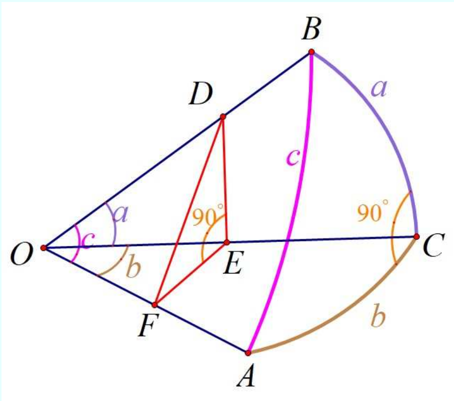
      Dakle, može se pretpostaviti da će odnos između stranica sfernog pravokutnog trokuta imati drugačiji oblik od odnosa između stranica pravokutnog trokuta u ravnini izraženog Pitagorinim poučkom.

3. Na modelu sfere nacrtajte sferni pravokutni trokut s jednim pravim kutom. Vrh s pravim kutom označimo slovom C, ostale vrhove slovima A i B. Hipotenuzu označimo slovom c, stranicu/katetu nasuprot vrhu A slovom a, a kut nasuprot vrhu B označimo slovom b.

4. Ispitajte obrazloženje u nastavku. Pokušajte sami dirigirati njegove fragmente, ako volite takve teorijske izazove.

   Pokušajmo pronaći odnos između stranica konstruiranog trokuta. Za ovo, razmotrimo cijelu sferu na kojoj ste konstruirali trokut $\triangle ABC$. Neka je točka O središte te sfere. Tada su odsječci $\overline{OA}, \overline{OB}$ i $\overline{OC}$ polumjeri sfere, a stranice a, b i c imaju iste mjere kao i kutovi $\angle BOC, \angle AOC$ i $\angle AOB$ (možemo to objasniti pomoću mjere kuta luka).

   To je prikazano na donjoj slici:



   Kroz bilo koju točku D na polumjeru $\overline{OB}$ povucimo ravninu DEF okomitu na $\overline{OA}$. Ona siječe tri ravnine OBC, OAC i OAB, a zajedničke su linije određene odsječcima $\overline{DE}, \overline{EF}$ i $\overline{FD}$. Tada su $\overline{DF}$ i $\overline{EF}$ okomite na $\overline{OA}$ (zašto?)

   Stoga je $\angle EFD = \sphericalangle A$.

   Ravnina DEF je okomita na ravninu OAC, a ravnina OBC je okomita na ravninu OAC. Stoga je njihovo sjecište $\overline{DE}$ okomito na ravninu OAC, a $\overline{DE}$ okomito na $\overline{OC}$ i na $\overline{EF}$. Dakle, imamo četiri prava kuta: $\angle OFD, \angle OFE, \angle OED$ i $\angle FED$.

   Uzmite u obzir kvocijent

$$\frac{|OF|}{|OD|}.$$

   Možemo ga transformirati u sljedeći oblik:

$$\frac{|OF|}{|OD|} = \frac{|OE|}{|OD|} \cdot \frac{|OF|}{|OE|}.$$

   Koristeći se definicijama trigonometrijskih omjera, uočavamo da je

$$\begin{aligned}\frac{|OF|}{|OD|} &= \cos c,\\ \frac{|OE|}{|OD|} &= \cos a,\\ \frac{|OF|}{|OE|} &= \cos b.\end{aligned}$$

Dakle, jednakost

$$\frac{|OF|}{|OD|} = \frac{|OE|}{|OD|} \cdot \frac{|OF|}{|OE|}$$

dovodi do jednakosti

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b$$

koji se smatra sfernom verzijom Pitagorinog poučka.

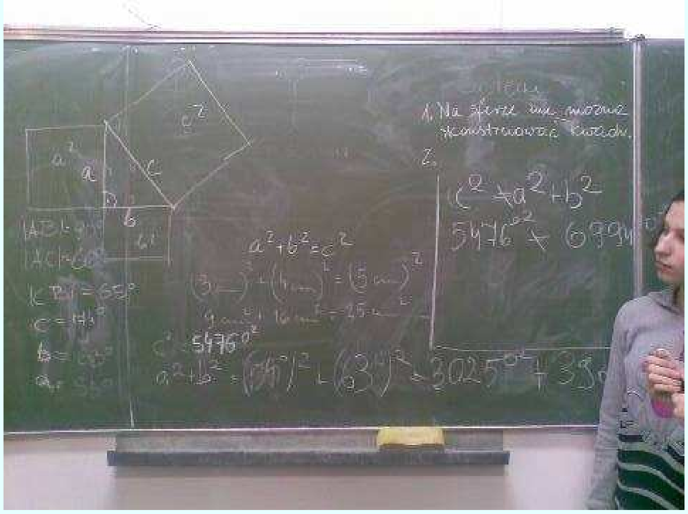
5. Odgovorite na pitanje: po čemu se Pitagorin poučak razlikuje u ravnini i na sferi?

   Pogledajte 10. poglavlje za sažetak, ali prvo pokušajte formulirati vlastiti odgovor.

Rad srednjoškolaca je na otkrivanju Pitagorinog poučka na sferi (točnije na pokazivanju da na sferi Pitagorin poučak nema oblik kao u ravnini).

Odgovarajuće konstrukcije, mjerenja i izračune napravili su učenici jedne od nižih srednjih škola u Białystoku tijekom nastave koja se izvodila na *Institutu za računalne znanosti* na Sveučilištu u Białystoku. Među ostalim, stvorene su takve strukture:

Ispisali su rezultate svojih istraživanja na školskoj ploči, potvrđujući hipotezu da Pitagorin poučak kakav poznajemo iz geometrije ravnine na sferi nije točan (v. sl.).



4.5. Peta tema: Primjeri sferne trigonometrije

U sljedećem listiću razmotrit ćemo pitanja i odgovore na:

Koliko je vaš grad udaljen od ...? U kojem smjeru morate skrenuti da stignete do ...?

5. radni listić: Primjeri sferne trigonometrije

Problem

Od nastanka muslimanske vjere, gdje god su živjeli sljedbenici islama, dakle prvenstveno na Bliskom istoku, sjevernoj Africi i Španjolskoj, bilo je vrlo važno odgovoriti na pitanja: *Gdje je Meka? U kojem smjeru da se okrenemo prema Meki?*

Kako bi odgovorili na ovo pitanje, arapski znanstvenici razvili su sfernu trigonometriju u 8. - 14. stoljeću.

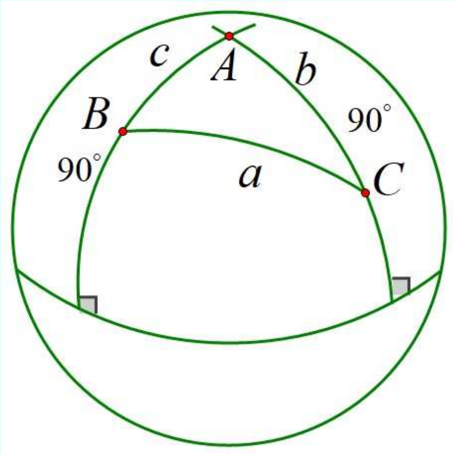
Primijenite naučene poučke - analizirajte primjere

U lekcijama posvećenim dokazivanju poučaka sferne trigonometrije razmatrali smo dvije metode rješavanja navigacijskih problema, odnosno onih vezanih uz putovanje - određivanje udaljenosti između točaka na globusu i smjerova kretanja: metode "nacrtaj i izmjeri" i metode "izračunavanja".

Gore postavljeni problem nije se - u vrijeme kada je nastao - mogao riješiti iscrtavanjem odgovarajućih putanja na sferi i mjerenjem kutova i udaljenosti. Stoga je riješen računalnim metodama, koristeći sferni poučak o sinusu i sferni poučak o kosinusu.

Primjer 1. *Koliko je udaljen London od Bagdada?*

Rješenje. Na našem pojednostavljenom crtežu neka točka B označava London, a točka C Bagdad.



Karta prikazuje približno geografske koordinate oba grada:
London $(51,30°S, 0,10°Z)$, Bagdad $(33,20°S, 44,26°I)$.

Tražimo duljinu luka a. Izračunavamo potrebne elemente trokuta ABC:
A - razlika geografskih širina oba grada: $A = 44,26°I + 0,10°Z = 44,36°$,
b - udaljenost Bagdada od Sjevernog pola: $b = 90° - 33,20° = 56,80°$,
c - udaljenost Londona od Sjevernog pola: $c = 90° - 51,30° = 38,70°$.
Prema sfernom poučku o kosinusa je

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Zamjenjujemo poznate vrijednosti i nakon računanja dobivamo

$$\cos a = 0,8014.$$

Pomoću trigonometrijskih tablica ili kalkulatora dobivamo:

$$a = 36,74°.$$

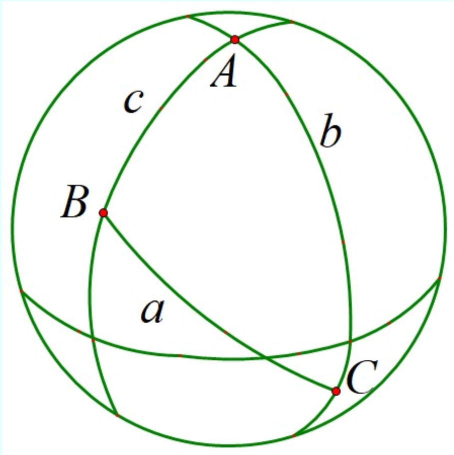
Dakle, duljina luka glavne kružnice koja povezuje London i Bagdad iznosi $36,74°$. Opseg Zemlje je 40074 km, što je $360°$, pa je udaljenost između Londona i Bagdada jednaka

$$40074 \text{ km} \cdot \frac{36,74}{360} = 4089 \text{ km}$$

.

Primjer 2. *U kojem se smjeru trebamo okrenuti prema Jakarti (u odnosu na sjever) da bismo se suočili s Mekom?*

Rješenje. Na našem crtežu neka točka B označava Meku, a točka C Jakartu. Geografske koordinate oba grada su sljedeće:
Meka $(21,26°S, 39,49°I)$, Jakarta $(6,08°J, 106,45°I)$.



Tražimo kut u vrhu C.

Prema poučku o sfernom sinusu imamo:

$$\sin C = \frac{\sin A}{\sin a} \cdot \sin c.$$

Izračunajmo potrebne elemente trokuta ABC:

$A = 106,45° - 39,49° = 66,96°$, $c = 90° - 21,26° = 68,74°$, $a = 71,08°$.

Ovo je udaljenost izmedu Meke i Jakarte, izračunata metodom razmatranom u prethodnom primjeru. Jednaka je 7912 km.

Uvrštavanjem izračunatih vrijednosti u formulu za $\sin C$ i sređivanjem, dobivamo:

$$\sin C = 0,9066,$$

a odavde je

$$C = 65,04° = 65°24'.$$

To znači da se treba u Jakarti okrenuti prema Meki prema sjeveru, a zatim okrenuti za $65,04°$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu (najjednostavnije opravdanje za smjer rotacije može biti promatranje nacrtanog crteža ili položaj medusobnih točaka kojima odgovaraju oba grada na globusu).

Istraživanje

1. Riješite navedene zadatke crtanjem na sferi i mjerenjem udaljenosti i kutova. Usporedite svoje rezultate mjerenja s dobivenim rezultatima izračuna.

2. Odaberite mjesto na zemaljskoj sferi koje biste jako voljeli posjetiti. Kolika je udaljenost vašeg grada do tog mjesta. Riješite ovaj problem metodom mjerenja i proračuna.

3. Pronađite Sao Tome, jezero Edward i Aleksandriju na karti. Navigirajte najkraćim putem od Aleksandrije do Sao Tomea.

5. Temeljni koncepti i pojmovi sferne geometrije

Michael de Villiers u radu s nastavnicima u Hrvatskoj

Pri proučavanju različitih grana matematike/geometrije uvijek se na početku moramo upoznati s temeljnim konceptima i pojmovima. Učinimo to i za sfernu geometriju.

Nabrojimo pojmove sferne geometrije o kojima će biti riječ u ovom i ostalim poglavljima (bez u ovom trenutku nekog sustavnog redanja):

sferna točka	središte sfere
sfera	radijus sfere
središte sfere	standardna sfera
dijametralno suprotne točke (primjerice Sjeverni i Južni pol)	glavna kružnica
longituda (geografska dužina)	antipodalna točka
latituda (geografska širina)	polusfera
lukovi glavne kružnice	sferna udaljenost
sferni luk	sferna krivulja
sferna udaljenost i mjerenje	ortodroma i loksodroma
ekvator i meridijan	mala kružnica
paralele i okomice	podnevnik
poligoni	polarne točke ili polovi
sličnost i sukladnost (kongruentnost)	kut dviju sfernih krivulja
kružnice	kut kursa
pojam površine	azimut
polarni trokuti: pravokutni, kosokutni	trobrid
presjek sfere i ravnine	probodište i diralište pravca i sfere
sferni dvokut	sferni trokut
zemljopisna širina i dužina	stranica sfernog trokuta
kut sfernog trokuta	pravokutni sferni trokut
Eulerov sferni trokut	polarni trokut
sferni kut	sferni eksces
polara	pol
...	

* * * * *

5.1. Aksiomi i neke tvrdnje sferne geometrije

Ravninska se geometrija temelji na aksiomima.

Pretpostavljamo da je čitatelj upoznat s aksiomima ravninske geometrije.

Prisjetimo se da u ravnini imamo nekoliko nedefiniranih pojmova koji su temelj na koji se aksiomatski sve nadograđuje. Postoje tri vrste izjava: *definicije, aksiomi* i *poučci*.

Definicija je izjava koja točno kaže što pojam znači.

Aksiom je izjava kojom se pretpostavlja istinitost činjenice o kojoj se raspravlja. Odnosno, aksiom je izjava čija se istinitost uzima zdravo za gotovo bez dokaza.

Aksiomi bi trebali postaviti neka temeljna svojstva sustava.

Poučak je iskaz čija se istinitost utvrđuje putem dokaza korištenjem aksioma i drugih poučaka koji su već dokazani.

(Nazivi *lema* i *korolar* odnose se na vrste poučaka. Izraz *propozicija* može se odnositi na poučak ili aksiom.)

Aksiom je ponekad izjava koja je očigledna.

Ponekad se moraju pretpostaviti izjave čija istinitost nije očita.

Čak i ako neki aksiomi nisu očiti, prikaz aksioma jasno pokazuje što su pretpostavke u raspravi. S druge strane, poučak je izjava čija istinitost nije očita i treba je dokazati.

Sada možemo sagledati i aksiomatiku sferne geometrije. Slično kao i u ravninskoj geometriji, i u sfernoj ćemo također imati nedefinirane pojmove: *točka, glavna kružnica* i *sfera*.

Naše razumijevanje ovih pojmova i njihova značenja doći će isključivo iz aksioma i našeg prethodnog znanja euklidske geometrije. Točka je isti pojam u obje geometrije. Glavna kružnica je analogon pravcu dok je sfera analogon ravnine.

Konkretno, pretpostavit ćemo da se sfera sastoji od točaka jednako udaljenih od jedne točke (središta) u prostoru.

Pretpostavit ćemo da je glavna kružnica presjek ravnine kroz središte sfere sa sferom.

Poučci se dokazuju isključivo na temelju pretpostavki iz aksioma i iz prethodno dokazanih poučaka.

Čitatelj se može zapitati zašto bismo to učinili. Postoji nekoliko odgovora.

Prvo, sva matematika koristi pretpostavke koje nisu dokazane. Jednostavno je lijepo biti eksplicitan o tome koje su te pretpostavke.

Drugo, sferna aksiomatika temeljit će se na pretpostavkama isključivo na intrinzičnim svojstvima sfere.

Kad imamo aksiome sferne geometrije, trebali bismo provjeriti zadovoljava li sfera polumjera r ove aksiome da bismo zaključili da poučci koji proizlaze iz aksioma vrijede za sferu radijusa r.

Za većinu aksioma ova će provjera biti jednostavna, ali u nekim slučajevima zahtijevat će malo posla.

Naš sustav aksioma pokušava minimizirati broj aksioma. Ovdje ćemo navesti aksiome kako ih je naznačio **Marshall Whittlesey** u knjizi *Spherical Geometry and Its Applications* [59].

Navest ćemo, bez dokaza, i neke poučke koje za vježbu treba dokazati. Ili prihvatiti kao istinite u daljnjoj uporabi kao dokazane.

U euklidskoj geometriji ravnine uzima se da je pravac model skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$.

Ovo poistovjećivanje točaka i realnih brojeva omogućuje definiranje pojma udaljenosti između točaka.

Glavna se kružnica, slično brojevnom pravcu u ravnini, rabi na sferi.

Za kružnicu polumjera 1 vrijedi da ako neku početnu točku označimo s 0 (ništicom), možemo se gibati po toj kružnici u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu koji se može smatrati pozitivnim smjerom, a drugi se može smatrati negativnim.

Svakoj točki kružnice možemo pridružiti pozitivni realni broj kad se gibamo u smjeru suprotnom od kazaljke na satu i negativni ako se krećemo u smjeru kazaljke na satu.

Ono što pridruživanje na kružnici čini drugačijim od pridruživanja na brojevnom pravca u ravnini je to što se nakon obilaska kružnice, tj. nakon $2r\pi$ (što je duljina kružnice) vraćamo na početnu točku 0.

Dakle, svakoj točki kružnice pridruženo je beskonačno brojeva oblika $x \pm k \cdot 2r\pi, k \in \mathbf{Z}$ dok je točki brojevnog pravca uvijek pridružen jedan jedini realni broj x.

Evo sfernih aksioma i nekih tvrdnji koji slijede iz aksioma. Ovdje ne dokazujemo navedene tvrdnje. To ostavljamo čitatelju za vježbu.

Aksiom (A-1) *Sfera i glavna kružnica su skupovi točaka. Postoje najmanje dvije točke na sferi.*

Aksiom (A-2) *Postoji pridruživanje između točaka glavne kružnice i točaka/realnih brojeva skupa* $\mathbf{R}$.

Ovaj aksiom omogućuje koordinate točaka na glavnoj kružnici.

Dvije točke na sferi koje su dijametralno suprotne su *antipodalne*.

Aksiom (A-3) *Točka na sferi nema više od jedne antipodalne točke.*

Tvrdnja. *Ako glavna kružnica sadrži točku, sadrži i antipodalnu točku.*

Aksiom (A-4) *Ako dvije različite točke na sferi nisu antipodalne, tada postoji jedinstvena glavna kružnica koju one definiraju.*

Tvrdnja. *Kroz bilo koju točku postoji barem jedna glavna kružnica.*

Tvrdnja. *Svaka točka ima antipodalnu točku.*

Aksiom (A-5) *Dvije različite glavne kružnice sijeku se u najmanje jednoj točki.*

Tvrdnja. *Dvije različite glavne kružnice sijeku se u točno dvije točke koje su antipodalne.*

Tvrdnja. *Ako je C između A i D i B između A i C, tada je B između A i D, a C je između B i D.*

Aksiom (A-6) *Za svaku glavnu kružnicu postoji takva točka da se glavna kružnica sastoji od točaka na sfernoj udaljenosti od jedne četvrtine opsega glavne kružnice od dane točke.*

Tvrdnja. *Antipod pola iz Aksiomu (A-6) je jedina druga točka koja zadovoljava isto svojstvo.*

Tvrdnja. *Glavna kružnica je skup svih točaka na sferi čija je sferna udaljenost jednaka četvrtini kružnice od njegovog pola.*

Tvrdnja. *Svaka točka je pol neke glavne kružnice.*

Aksiom (A-7) *Polusfera je sferno konveksna.*

Tvrdnja. *Ako su dvije točke na suprotnim stranama glavne kružnice i nisu antipodalne, tada luk između njih leži na glavnoj kružnici.*

Aksiom (A-8) *Pretpostavimo da za sferne kutove $\sphericalangle A_1B_1C_1$ i $\sphericalangle A_2B_2C_2$, vrijedi $\widehat{A_1B_1} \cong \widehat{A_2B_2}$.*

Tada je $\sphericalangle A_1B_1C_1 \cong \sphericalangle A_2B_2C_2$ ako i samo $\widehat{A_1B_1C_1} \cong \widehat{A_2B_2C_2}$.

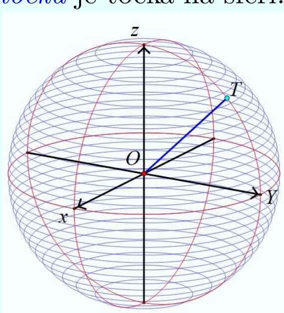
a) Sfera

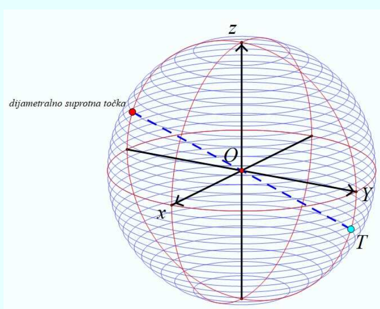
Sfera je skup svih točaka prostora koje su jednako udaljene od čvrste točke O koja se zove *središte sfere*, a ta je udaljenost *radijus* r ili *polumjer sfere*.

Dakle, sfera je skup $S(O, r) = \{T \in R^3 | d(O, T) = r, r \in \mathbf{R}^+\}$

Sfera sa središtem u ishodištu O prostornog koordinatnog sustava i polumjera 1 zove se *standardna sfera*.

Sferna točka je točka na sferi.





Svaka sferna točka određuje drugu sfernu točku koju zovemo *dijametralnom suprotnom točkom*.

Primjerice, Sjeverni i Južni pol su dijametralno suprotne točke.

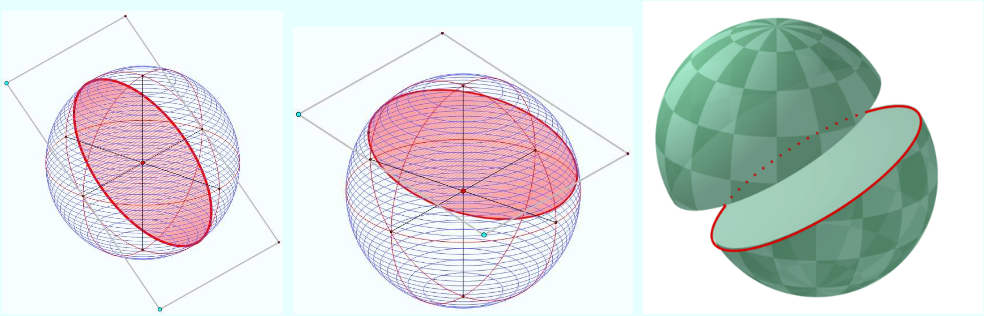
b) Krivulje, lukovi i kutovi na sferi

5.2. Sferne krivulje, glavne kružnice i kružnice

Krivulje koje leže na sferi zovemo *sfernim krivuljama*.

Sferne krivulje na dinji, lubenici i breskvi

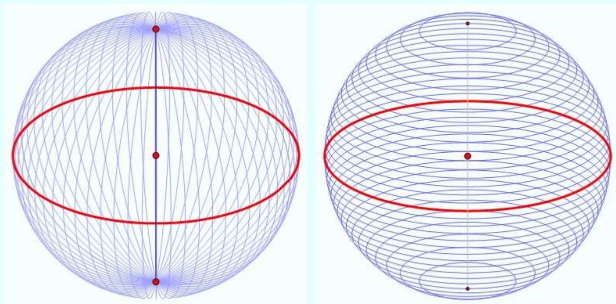
Posebno su važne sferne krivulje *glavne kružnice* ili *ortodrome* i *male kružnice*. One se dobiju kao *presjeci sfere ravninama*.



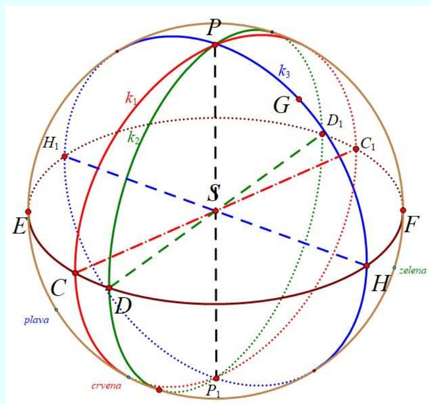
Glavna i mala kružnica, dvije polusfere

Ako sferu presiječemo ravninom kroz njezino središte, dobivamo *glavnu kružnicu* sfere.

Na globusu postoje *ekvator* (ili *polutar*) i *meridijani* (ili *podnevnici*). To su glavne polukružnice dok su *paralele* (ili *latitude*) male kružnice. Ekvator je glavna kružnica.



Ekvator, meridijani i paralele



Ekvator, tri meridijana, dijametralno suprotne točke

Pitanja:

1. Postoje li na sferi dvije usporedne glavne kružnice?
2. Koliko se može nacrtati glavnih kružnica kroz dvije dijametralno suprotne točke?
3. Koliko se može nacrtati glavnih kružnica kroz dvije točke koje nisu dijametralno suprotne?

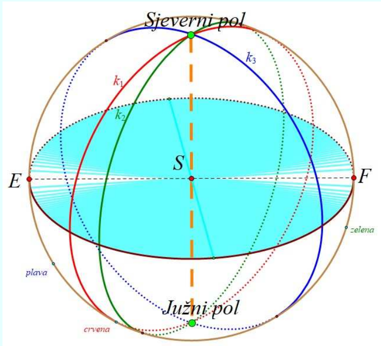
5.3. Sferna udaljenost

Kroz dvije točke A i B na sferi koje nisu dijametralno suprotne točke, tj. nisu krajnje točke promjera, prolazi beskonačno mnogo malih kružnica, ali samo jedna glavna kružnica. (Zašto? Obrazložite ovu tvrdnju!)

Svakoj glavnoj kružnici pridružujemo dvije točke na sferi koje zovemo *polarnim točkama* ili *polovima* glavne kružnice.

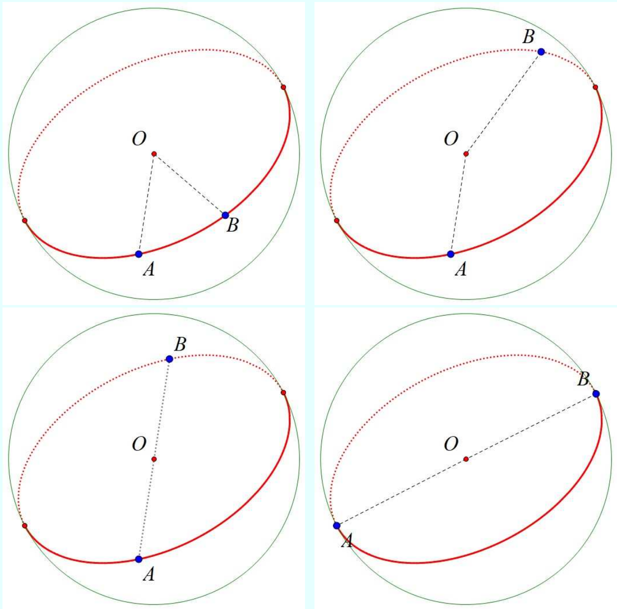
Te se točke nalaze na pravcu kroz središte sfere koji je okomit na ravninu glavne kružnice i njihova je međusobna udaljenost jednaka promjeru sfere.

Primjerice, ekvator je glavna kružnica kojoj su Sjeverni i Južni pol polarne točke.



Polarne točke: Sjeverni i Južni pol

Pod *sfernom udaljenošću* točaka A i B razumijevamo duljinu manjeg luka $\widehat{AB}$ glavne kružnice kroz A i B.

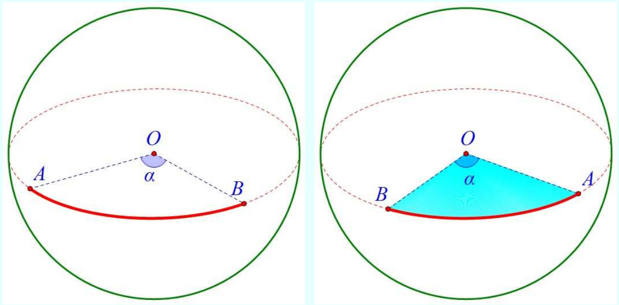


Udaljenost točaka A i B

Luku $\widehat{AB}$ pripada potpuno određen kut $\sphericalangle AOB = \alpha$.

Koristimo stupnjeve (ili radijane) za mjerenje udaljenosti duž glavne kružnice.

Ako su dvije točke dijametralno suprotne (nasuprotne), tada sferna udaljenost iznosi 180°.



Kut $\sphericalangle AOB = \alpha$ i duljina luka $|\widehat{AB}| = R \cdot \alpha$

Ako je kut izmjeren u radijanima, onda je duljina luka $\widehat{AB}$ dana s

$$|\widehat{AB}| = R \cdot \alpha.$$

Za preračunavanje jedne mjere u drugu i obrnuto vrijede

$$|\widehat{AB}| = R \cdot \text{arc } e = R \cdot \frac{e}{\varrho}, \ e = |\widehat{AB}| \cdot \frac{\varrho}{R}$$

pri tome je e kut u stupnjevima i arc e kut mjeren radijanima.

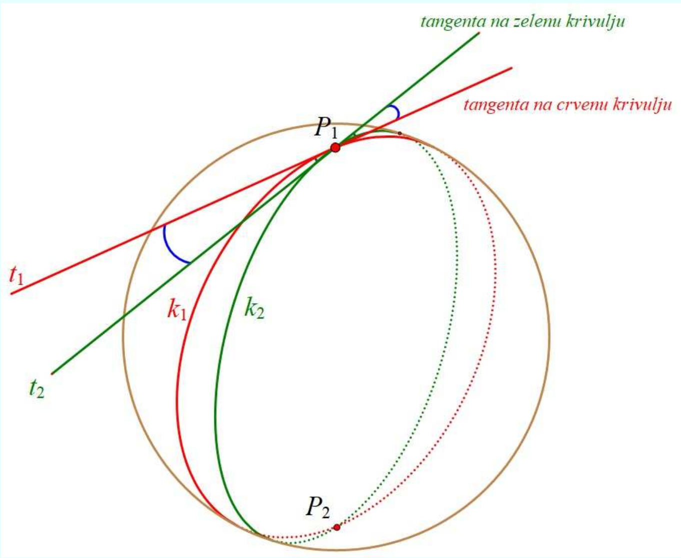
Za koeficijent preračunavanja ϱ vrijedi

$$\varrho = 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57,2958^\circ = 3438' = 206265''.$$

U sfernoj se geometriji rabi kutna mjera iako su mjere ravnopravne.

Primjer 1. *Sferna udaljenost između Dresdena i Petersburga iznosi* $\widehat{AB} = 1433$ km *ili* $e = \frac{1433 \text{ km}}{6371 \text{ km}} \cdot 57,3^\circ = 12,89^\circ = 12^\circ 53'$.
Srednji je polumjer Zemlje kao sfere 6371 *km.*

Pod *kutom dviju sfernih krivulja* razumijevamo kut koji zatvaraju njihove tangente u sjecištu P_1.



Kut između sfernih krivulja k_1 i k_2

Ako je jedna krivulja meridijan, onda se dio luka sjeverno od P_1 u navigaciji zove *kut kursa* α.

Smjer krivulje od P_1 prema P_2 mjeri se *azimutom* δ.

Azimut je ograničen na interval $0° \leq \delta < 360°$.

5.4. Paralelnost i okomitost

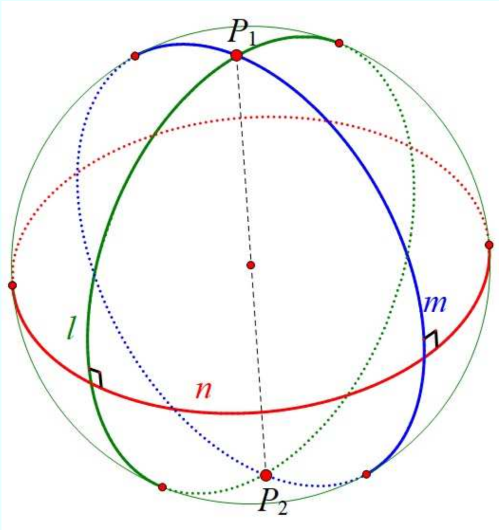
Glavne kružnice na sferi S su međusobno *okomite* ako su im *spojnice polova međusobno okomite (ortogonalne)*.

U euklidskoj je geometriji pramen paralelnih pravaca karakteriziran kao skup pravaca sa zajedničkom okomicom, dok u sfernoj geometriji, kako nema paralelnih glavnih kružnica, vrijedi sljedeća tvrdnja:

Neka su $l, m \in S$ različite glavne kružnice. Tada postoji jedinstvena glavna kružnica n koja je okomita na obje, $l \perp n, m \perp n$.

Pritom su točke P_1, P_2 presjeka od l i m polovi od n.

Za vježbu dokažite tvrdnju!

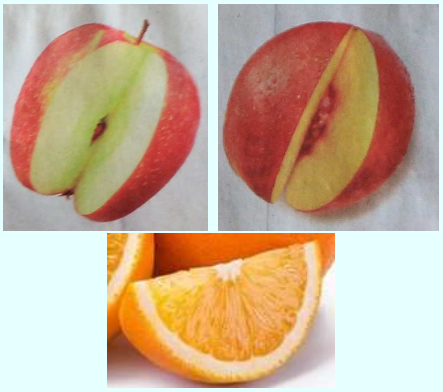


Glavna kružnica n okomita je na glavne kružnice m i l

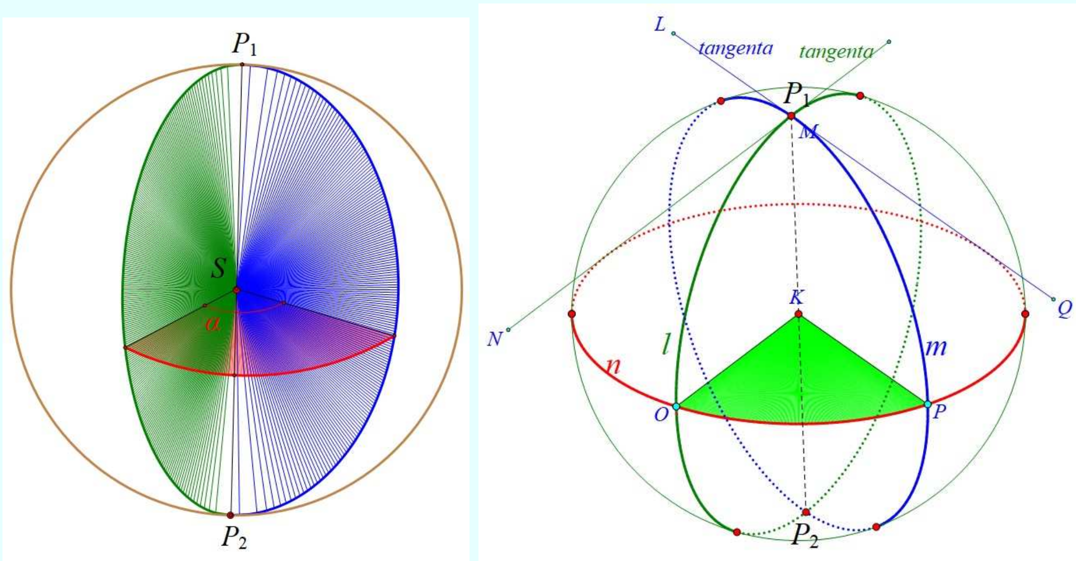
5.5. Sferni dvokut

Dio sfere omeđen s dvije glavne polukružnice zove se *sferni dvokut*.

Dvokut je omeđen svojim kutom između pripadnih glavnih kružnica, tj. pripadnih tangenata u točki presjeka na te kružnice. Taj kut zovemo *sferni kut dvokuta.*



Dvokuti na voću



Dvokut

Kut α dvokuta može biti bilo koji kut između 0 i π radijana ili 0° i 180°.

Dvije glavne kružnice određuju na sferi očito četiri dvokuta od kojih su po dva dijametralno suprotna te su kongruentna.

Površina P_α sfernog dvokuta s kutom α je razmjerna kutu α, tj. vrijedi

$$P_\alpha = k \cdot \alpha, \alpha \in \mathbf{R}^+.$$

Za $\alpha = \pi$ površina dvokuta je polusfera koja ima površinu

$$P_\pi = 2R^2\pi$$

pa je $k = 2R^2$.

Dakle, vrijedi

$$P_\alpha = 2R^2\alpha.$$

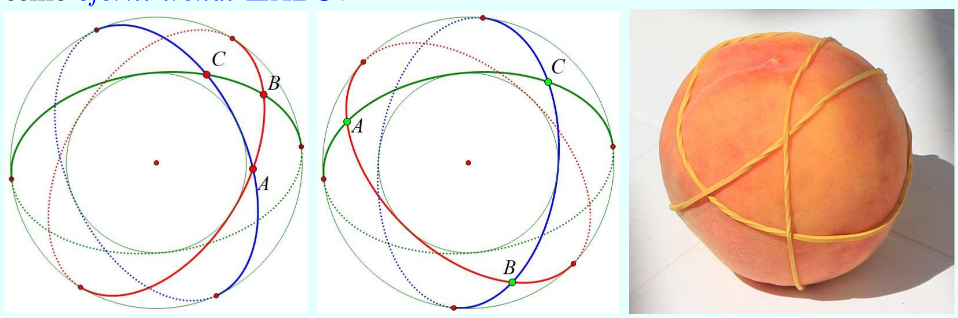
Sferna duljina mjerena na meridijanu Zemlje od ekvatora do mjesta M zove se *geografska širina* φ mjesta M.

5.6. Sferni trokut

Neka su A, B i C tri točke na sferi koje ne leže na jednoj istoj glavnoj kružnici.

Ako se svakim parom točaka položi glavna kružnica, tada će nastati tri dužine/luka $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ i $\widehat{BC}$. Bitno je da se uzima kraći od dva moguća luka.

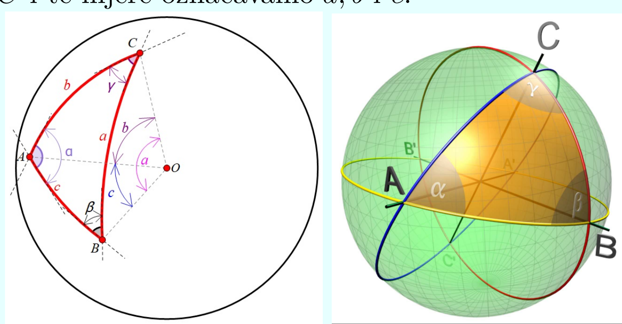
Ako lukom glavne kružnice povežemo po dvije od triju točaka, dobit ćemo *sferni trokut* $\triangle ABC$.



Sferni trokut $\triangle ABC$

Lukove tih glavnih kružnica zovemo *stranicama sfernog trokuta*.

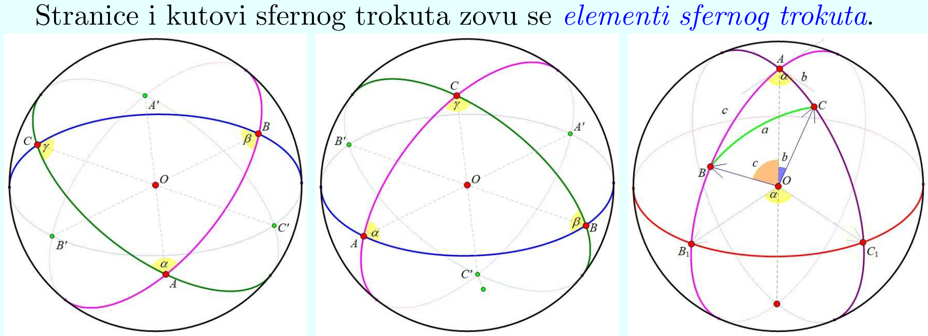
One u kutnoj mjeri predočuju kutove između svakog para polumjera $\overline{OA}, \overline{OB}$ i $\overline{OC}$ i te mjere označavamo a, b i c.



Sferni trokut $\triangle ABC$: stranice i kutovi

Kutovi sfernog trokuta su kutovi između dvije ravnine odgovarajućih glavnih kružnica i označavaju se s α, β i γ.

Stranice i kutovi sfernog trokuta zovu se *elementi sfernog trokuta*.

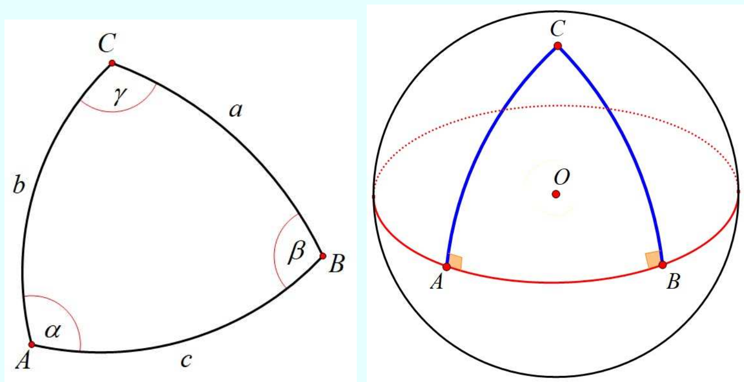


Elementi sfernog trokuta $\triangle ABC$

Sferni trokut kojemu je jedan kut 90° zove se *pravokutni sferni trokut*.

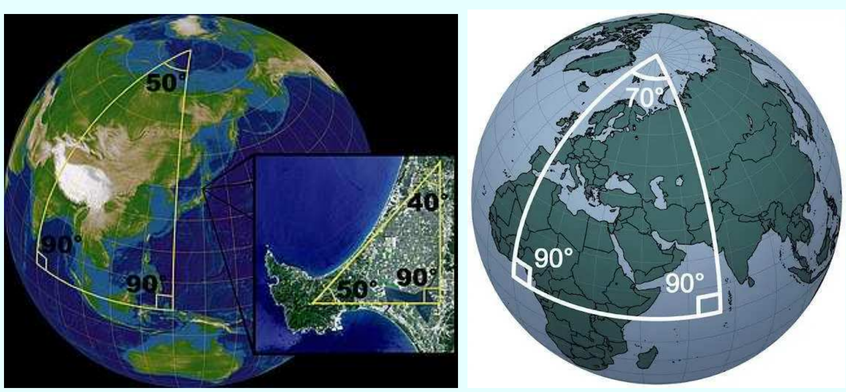
Stranica nasuprot pravog kuta je *hipotenuza c*, a stranice *a* i *b* su *katete*.

Sferni trokuti mogu biti *jednakokračni, jadnakostranični* ili *raznostranični*.



Pravokutni sferni trokut

Sferni trokut može imati jedan, dva ili tri prava kuta.



Primjeri pravokutnih sfernih i ravninskog trokuta na Zemlji

Eulerov trokut je sferni trokut kojemu su stranice kružni lukovi glavne kružnice manji od 180°.

Dva sferna trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ na sferi su *sukladna* ili *kongruentna* ako su im korespodentni elementi jednaki.

Iz definicije sfernog trokuta slijedi

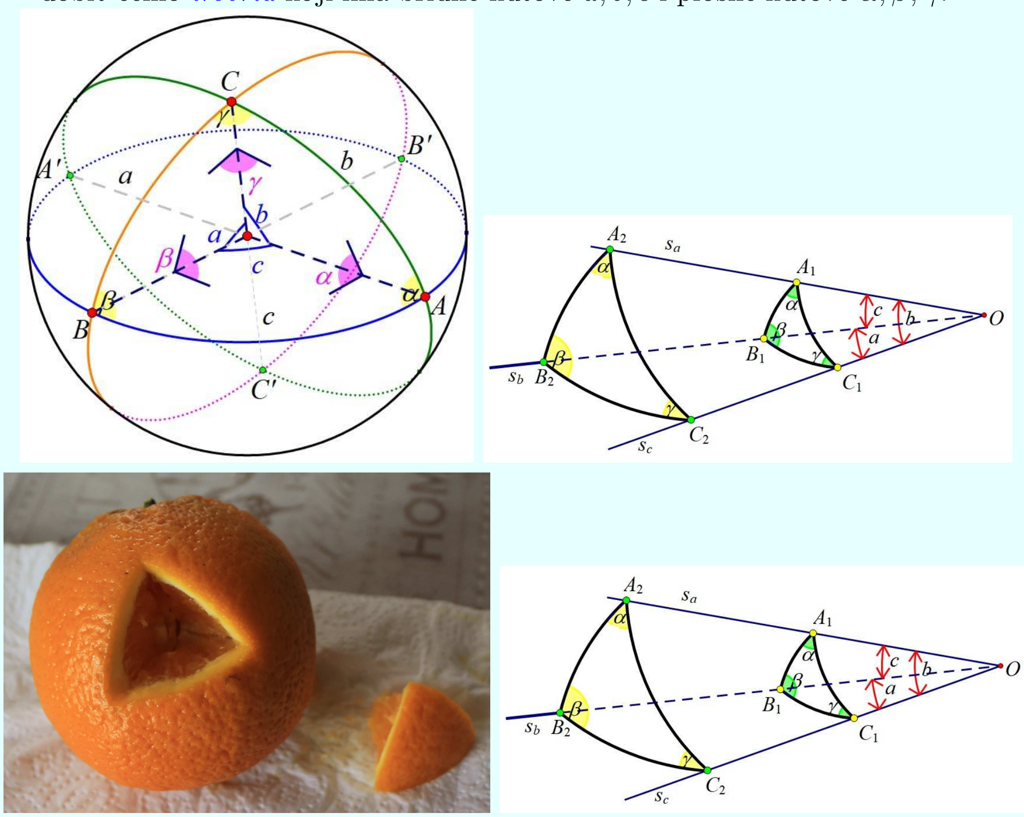
$$0 < a, b, c < R\pi$$

i

$$0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi.$$

5.7. Trobrid

Spojimo li vrhove A, B i C sfernog trokuta $\triangle ABC$ sa središtem sfere, dobit ćemo *trobrid* koji ima bridne kutove a, b, c i plošne kutove α, β, γ.



Trobrid

U sfernom trokutu $\triangle ABC$ jesu $\widehat{AB} = c$, $\widehat{AC} = b$ i $\widehat{BC} = a$ i zovu se *stranicama sfernog trokuta*.

Sferni kutovi trokuta $\triangle ABC$ bit će jednaki plošnim kutovima trobrida, tj. $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$ i $\sphericalangle C = \gamma$.

5.8. Glavna svojstva sfernog trokuta

Za Eulerov trokut sa stranicama a, b i c i nasuprotnim kutovima α, β i γ vrijedi:

1. $0^\circ < a + b + c < 360^\circ$

2. $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$

3. $a + b > c$ je nejednakost trokuta
   (zbroj duljina dviju stranica veći je od duljine treće stranice)

4. $|a - b| < c$
   (razlika duljina dviju stranica manja je od duljine treće stranice)

5. $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180°$ zove se *sferni eksces trokuta*

6. $\alpha + \beta = \gamma + 180°$

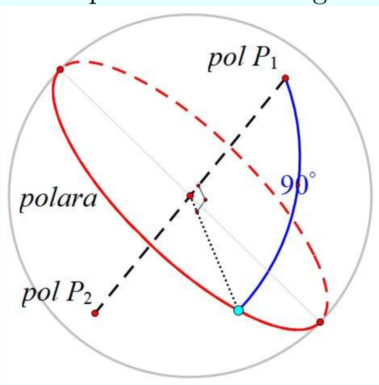
7. a) Nasuprot većeg kutu α leži dulja stranica i obrnuto.
   b) Jednakim su kutovima nasuprotne stranice jednakih duljina.

8. $P = \varepsilon \cdot R^2 \cdot \frac{\pi}{180°}$
   $= \frac{R^2 \varepsilon}{\varrho}$
   $= R^2 \text{arc } \varepsilon$

5.9. Polarni trokut zadanog trokuta

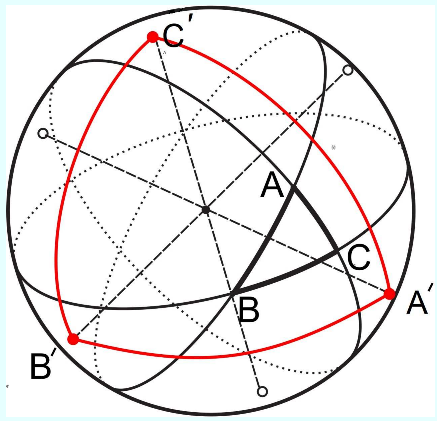
Krajnje točke P_1 i P_2 promjera sfere, koji je okomit na ravninu glavne kružnice nazvane *polara*, zovemo *polovima*.

Sferna udaljenost između pola i neke točke glavne kružnice iznosi 90°.



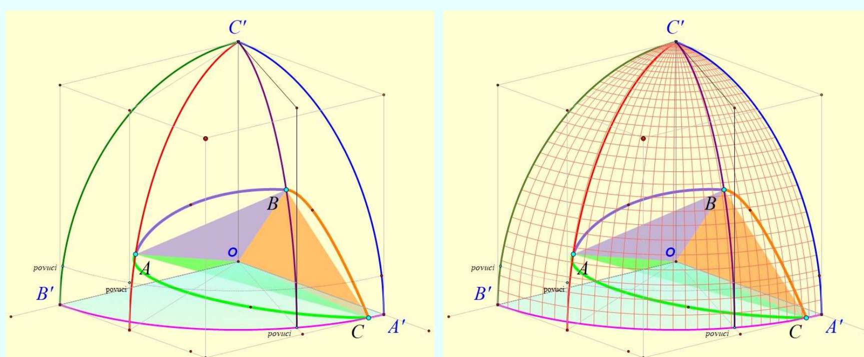
Pol, polara i udaljenost

Polarni trokut $\triangle A'B'C'$ pridružen sfernom trokutu $\triangle ABC$ zovemo sferni trokut kojemu su vrhovi polovi zadanog trokuta.



Polarni trokut $\triangle A'B'C'$ trokuta $\triangle ABC$

Svakom sfernom trokutu $\triangle ABC$ pridružen je njemu polarni trokut $\triangle A'B'C'$. I obratno!



Polarni trokut $\triangle A'B'C'$ trokuta $\triangle ABC$ u prvom oktantu

Kutovi sfernog trokuta i odgovarajuće stranice polarnog trokuta su suplementni isto kao što su suplementne stranice sfernog trokuta i njemu pridruženog polarnog trokuta.

Vrijedi:

$$a' = 180^\circ - \alpha, b' = 180^\circ - \beta, c' = 180^\circ - \gamma$$

$$\alpha' = 180^\circ - a, \beta' = 180^\circ - b, \gamma' = 180^\circ - c.$$

6. Ravninska geometrija nasuprot sferne geometrije

Lénártova radionica o sfernoj geometriji

U ovom poglavlju naznačit ćemo sličnosti i razlike te analogije između ravninske i sferne geometrije. Usporedba dviju geometrija i njihovih pojmova, problema i rješenja omogućit će bolje razumijevanje ravninske geometrije i prihvaćanje sferne geometrije.

Svaki odjeljak u kojem uspoređujemo ravninske i sferne objekte "strukturiran" je s četiri koraka:

a) Objekt u ravnini.

b) Objekt na sferi.

c) Usporedba ravninskog i sfernog objekta.

d) Dodatno istraživanje povezano sa zemljopisom.

Sastavni dio su radni listići u kojima će se precizirati pitanja i istraživanja te prateće Sketchpedove dinamične datoteke iz kojih će se dobiti odgovori ili otkriti činjenice.

6.1. Pravci

U ravnini su temeljni objekti točke, a linearni objekti su dužine, polupravci i pravci. Na sferi nema linearnih objekata, nego su objekti "zakrivljeni", tj. kružnica i njezini dijelovi su temeljni objekti uz točke.

Zadatak 1. *Zadane su dvije različite točke A i B u ravnini ili na sferi. Povežite točke A i B s tri različita pravca ili krivulje.*

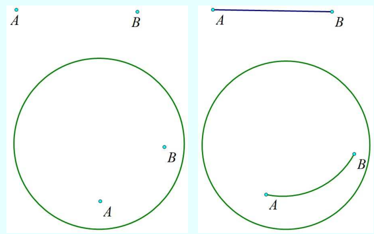
a) Koji objekt predočuje najkraći put u ravnini, a koji na sferi?

b) Na koliko i kakvih dijelova je točkama A i B podijeljen pravac ili odgovarajući objekt na sferi?

c) Koliko pravaca u ravnini ili kružnica na sferi određuju dvije točke?

Odgovore na ova i ostala pitanja i istraživanja/otkrića iz ovog dijela geometrije čitatelj će naći u radnom listiću i uporabom Sketchpada ili realnog pribora.

Sada samo naznačujemo da su dužina i luk kružnice korespodentni objekti u ravnini i na sferi, odnosno da su pravac i kružnica korespodentni pojmovi.



Najkraća udaljenost između točaka A i B

Pravci.gsp.

Usporedba 1. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	**Na sferi**
Pravac je beskonačan.	Glavna kružnica je konačna.
Pravac nema središte	Glavna kružnica ima, osim središta, 2 antipodalne točke (primjerice, ekvator ima Sjeverni i Južni pol)
Ako se gibamo po pravcu u ravnini, onda se ne možemo vratiti u polaznu točku.	Ako se gibamo po glavnoj kružnici sfere, onda se uvijek vraćamo na polaznu točku.
Jednim parom točaka određen je jedan jedini pravac. Te točke dijele pravac na 3 dijela: dva beskonačna polupravca i jednu konačnu dužinu.	Parom točaka koje nisu dijametralno suprotne određena je jedna jedina glavna kružnica. Dvije točke dijele glavnu kružnicu na dva konačna dijela (dva luka). Ako su točke nasuprotne, tada one određuju bezbroj glavnih kružnica.
Segment na pravcu je najkraći dio između dviju točaka.	Manji luk glavne kružnice je najkraći dio između dviju točaka na kružnici.
Dužina između A i B	Luk glavne kružnice između A i B
Pravac u ravnini	Glavna kružnica na sferi

Istražite dodatno 1. *Izaberite dva grada na globusu i jednoj od pripadajućih karata. Nacrtajte najkraću putanju zrakoplovom između tih gradova.*

Na globusu pronađite barem dva grada koji su jedan nasuprot drugome kao što su, primjerice, Ho Ši Min iz Vijetnama i Lima iz Perua.

Istražite kako se "ponaša" kapljica vode na ravnini, a kako na sferi.

Nađite dvije putanje između dva grada na globusu koje su jednake. Jesu li te putanje najkraće?

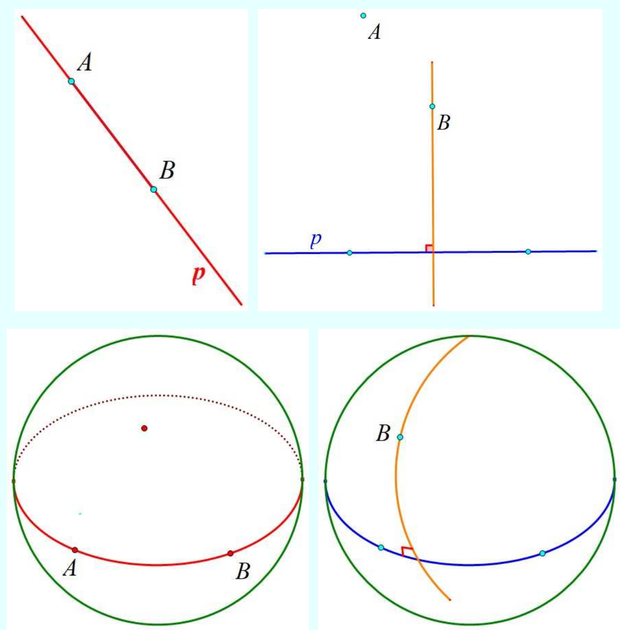
6.2. Mjerenje udaljenosti između 2 točaka ili točke i pravca

Zadatak 2. *Zadane su dvije različite točke A i B u ravnini ili na sferi. Zadan je pravac p u ravnini. Na sferi je zadana kružnica. Izmjerite međusobnu udaljenost ovih objekata u ravnini i na sferi.*

a) Koji objekt predočuje najkraću udaljenost u ravnini, a koji na sferi?

b) Na koliko i kakvih dijelova je točkama A i B podijeljen pravac ili korespodentni objekt na sferi? Kolike su duljine tih dijelova?

c) Kojim mjernim instrumentom mjerimo udaljenost u ravnini, a kojim na sferi?



Udaljenost između točaka A i B te pravca p ili točke i kružnice na sferi

Odgovore na ova i ostala pitanja i istraživanja/otkrića iz ovog dijela geometrije čitatelj će naći u radnom listiću i uporabom Sketchpada ili realnog pribora.

Sada samo naznačujemo kako se određuje udaljenost u ravnini, a kako na sferi.

`Udaljenost.gsp`.

Usporedba 2. *Usporedbe ravninskih i sferni pojmovah koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	Na sferi
Mjeri se udaljenost između 2 točaka na pravcu.	Mjeri se udaljenost između 2 točaka na glavnoj kružnici.
Dvije točke mogu biti na bilo kojoj udaljenosti. Nema najveće udaljenosti između točaka.	Najveća udaljenost između 2 točaka iznosi 180°. To je udaljenost nasuprotnih (dijametralno suprotnih) točaka glavne kružnice.
	Između 2 točaka koje nisu nasuprotne mjeri se duljina manjeg luka. Udaljenost je manja od 180°.
	Udaljenost između polova iznosi 180°.
	Udaljenost između pola i ekvatora je 90°.

Istražite dodatno 2. *a) Polumjer Zemlje je* $\approx$ 6400 *km. Označite dva grada na globusu i odredite udaljenost između njih. Odgovor zapišite u stupnjevima.*

Kolika je udaljenost u kilometrima?

b) Nađite na globusu mjesto koje je 90° *od vašeg doma.*

Koliko mjesta vi možete naći s tom udaljenošću. Izračunajte tu udaljenost u kilometrima.

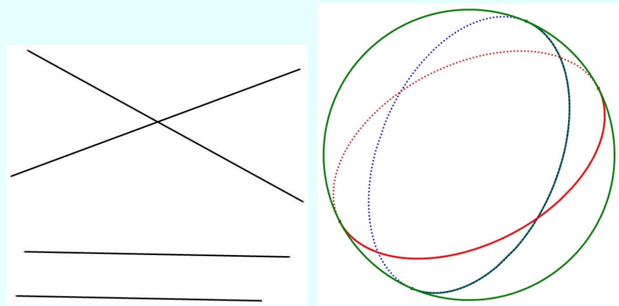
c) Najmanja udaljenost je nula centimetara u ravnini i nula stupnjeva na sferi. U tom je slučaju u ravnini točka na pravcu ili na kružnici na sferi.

Odredite kolika je najveća udaljenost na ravnini, a kolika je najveća udaljenost za izmjerenu udaljenost od 90° *stupnjeva na sferi.*

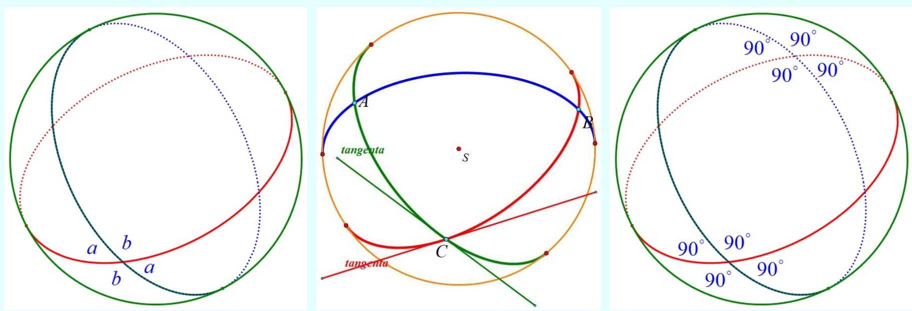
6.3. Presjek dva pravca

Zadatak 3. *Zadana su dva pravca u ravnini i dvije glavne kružnice na sferi.*

a) Koliko najviše presječnih točaka mogu imati dva pravca u ravnini, a koliko dvije glavne kružnice na sferi? b) Kad oni nemaju presjeka? c) Mogu li oni biti usporedni? d) Mogu li oni imati okomicu?



Presjeci pravaca u ravnini i glavnih kružnica na sferi



Dijelovi sfere i kutovi između glavnih kružnica

Odgovore na ova i ostala pitanja i istraživanja/otkrića iz ovog dijela geometrije čitatelj će naći u radnom listiću i uporabom Sketchpada ili realnog pribora.

Sada samo naznačujemo položaj nekih objekata.

Presjek pravaca.gsp.

Usporedba 3. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	Na sferi
Dva pravca bez zajedničkih točaka su usporedna	Dvije različite glavne kružnice nisu nikada usporedne jedna s drugom.
Dva pravca s točno jednom zajedničkom točkom se sijeku.	Dvije različite glavne kružnice nikada ne mogu imati točno jednu točku presjeka.
Dva različita pravca nikada ne mogu imati više od jedne točke presjeka.	Dvije glavne kružnice uvijek imaju točno dvije točke presjeka.
Dva pravca koja se sijeku nemaju zajedničke okomice.	Dvije glavne kružnice koje se sijeku imaju točno jednu okomicu.
Usporedni pravci imaju beskonačno zajedničkih okomica	Usporedne glavne kružnice ne postoje na sferi.
Par međusobno okomitih pravaca imaju samo 1 presjek i određuju 4 beskonačna (ali kongruentna) područja	Par okomitih glavnih kružnica imaju 2 presjeka i kreiraju 8 pravih kutova.
Par okomitih pravaca dijeli ravninu na 4 beskonačna (ali kongruentna) područja	Par okomitih glavnih kružnica dijele sferu na 4 konačna kongruentna područja.

Istražite dodatno 3. *Carl Friedrich Gauß, János Bolyai i Nikolai Lobachevsky razmatrajući problem paralelnosti pravca i drugog pravca točkom izvan pravca u ravnini zaključili su da se taj problem može riješiti samo aksiomatskom tvrdnjom. Razjasnite o čemu je riječ! Zašto se taj problem tisućama godina pokušavao dokazati? Kako glasi taj aksiom? Kako se zove geometrija u kojoj je taj aksiom zamijenio Euklidov Peti postulat?*

6.4. Dvije zrake (luka) sa zajedničkim početkom

Zadatak 4. *Mnogokut je zatvoreni objekt koji u svakom svojem vrhu ima definirani kut.*

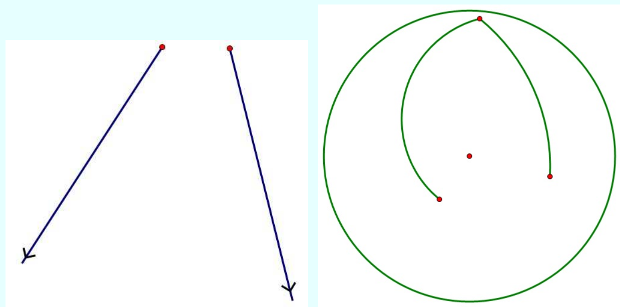
U ravnini su zadane dvije zrake, a na sferi dva luka.

a) *U kojem slučaju dvije zrake čine/zatvaraju kut?*

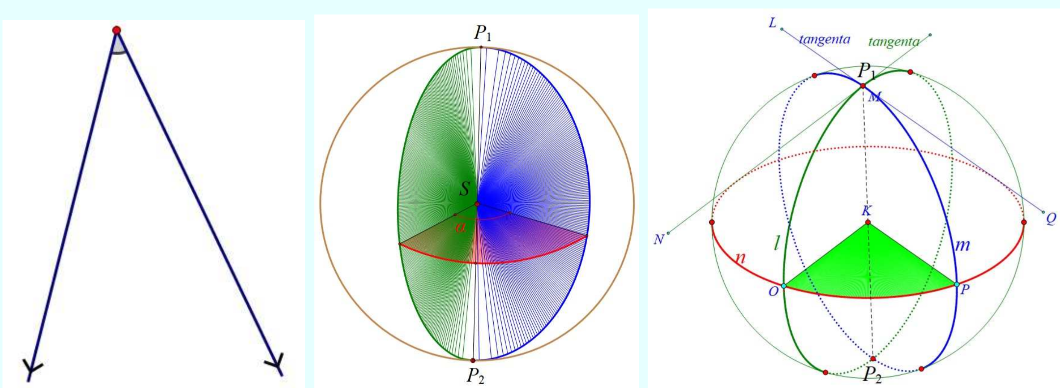
b) *Postoji li u ravnini mnogokut s dvije stranice? Koliko najmanje stranica mora imati mnogokut u ravnini?*

c) *Je li na sferi moguć mnogokut s dvije stranice? U kojem slučaju je to moguće?*

d) Kolika je duljina stranice dvokuta? Kako se zove stranica dvokuta?



Dvije zrake/polupravca i dva luka



Kut i dvokut

Dvije zrake.gsp.

Usporedba 4. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	Na sferi
Dvije zrake sa zajedničkim krajem ne mogu se konstruirati.	Dva luka glavnih kružnica u paru s polovima tvore dvokut.
Nemoguće je konstruirati poligon s dvije stranice.	Može se konstruirati dvostrani mnogokut koji se naziva dvokut. Svaki dvokut ima točno dva kongruentna kuta i dvije kongruentne stranice. Svaka stranica ima duljinu 180°. Stranicu nazivamo meridijanom.
Dvije zrake sa zajedničkim početkom dijele ravninu na dva beskonačna područja.	Dva meridijana s dva zajednička kraja dijele sferu na dva (konačna) dvokuta.

Istražite dodatno 4. *Pravilni mnogokut ima sve kutove jednake veličine i sve stranice jednake duljine.*

Objasnite zašto je svaki dvokut pravilan.

Je li moguće konstruirati jednokutni mnogokut?

6.5. Tri različita pravca

Zadatak 5. *U ravnini su zadana tri različita pravca. Na sferi su zadane tri glavne kružnice.*

a) *Koliko područja u ravnini i na koji ih način određuju ti pravci?*

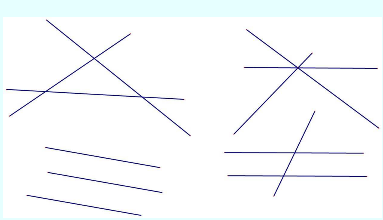
b) *U kojem slučaju u ravnini i koliko najviše trokuta kreiraju ti pravci?*

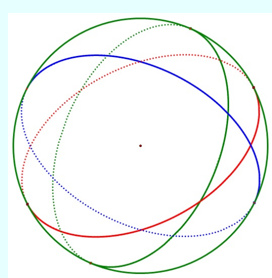
c) *Koliko područja na sferi i na koji ih način kreiraju te glavne kružnice?*

d) *Koliko trokuta na sferi kreiraju te glavne kružnice?*

e) *Ima li među trokutima kongruentnih?*

Tri pravca.gsp.





Usporedba 5. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	**Na sferi**
Ako tri pravca imaju zajednički presjek, onda oni kreiraju šest beskonačnih područja.	Ako tri glavne kružnice imaju zajednički presjek, tada one imaju drugi zajednički presjek i tada su te točke nasuprotni polovi. U ovom slučaju tri glavne kružnice definiraju šest konačnih dvokutnih područja.
Ako neki pravac presjeca druga dva pravca, ali sva tri nemaju zajedničkih presjeka, tada pravci definiraju šest beskonačnih područja i jedno konačno (trokutasto) područje.	Ako neka glavna kružnica presjeca druge dvije glavne kružnice, ali sve tri nemaju zajedničkog presjeka, tada one definiraju osam trokuta s konačnom površinom. Parovi trokuta na nasuprotnim stranicama sfere su refleksivni (kongruentni) trokuti. Tri glavne kružnice kreiraju četiri para refleksivnih (kongruentnih) trokuta.
Ako su dva pravca usporedna, tada tri pravca definiraju šest beskonačnih područja. Ako su sva tri pravca usporedna, tada kreiraju četiri beskonačna područja.	Glavne kružnice ne mogu biti usporedne.

Istražite dodatno 5. *Istražite maksimalan broj područja koji su kreirani s pravcima u ravnini te s glavnim kružnicama na sferi. Ispunite sljedeće rubrike u tablici.*

a)

Broj pravaca u ravnini	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*n*
Maksimalan broj područja koje definiraju pravci							

b)

Broj glavnih kružnica na sferi	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*n*
Maksimalan broj područja koje definiraju glavne kružnice							

c) *Odredite zakonitost/opću formulu $f(n)$ broja područja u zavisnosti od broja pravaca n, odnosno glavnih kružnica.*

(Odgovor: a) $f(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$; b) $f(n) = 2 + (n-1)n$.)

6.6. Trokuti

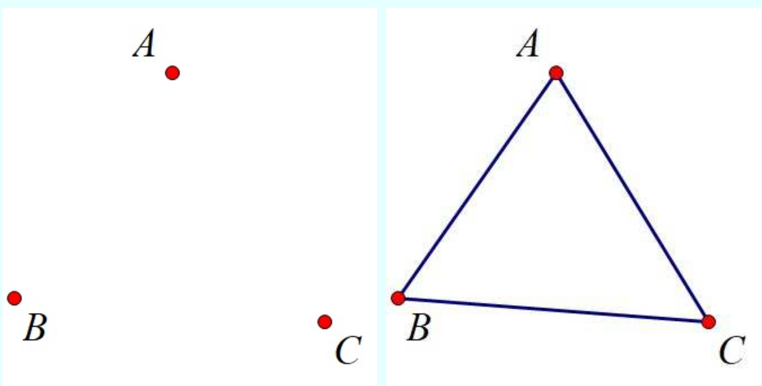
Zadatak 6. *U ravnini su zadane tri nekolinearne točke. Na sferi su zadane tri točke koje nisu na istoj glavnoj kružnici i koje nisu nasuprotne.*

a) *Koliko trokuta u ravnini definiraju te tri točke?*

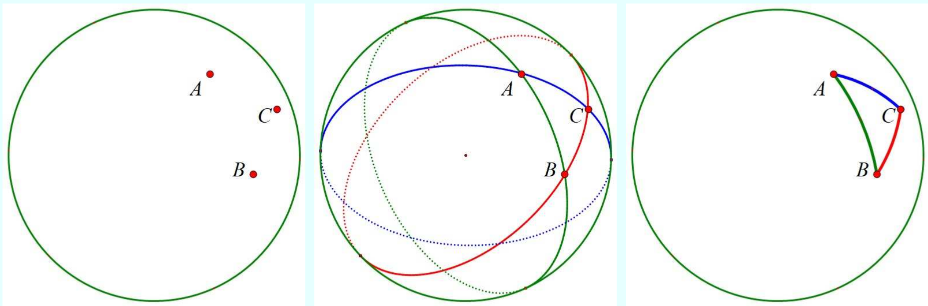
b) *Koliko sfernih trokuta određuju tri točke koje nisu nasuprotne?*

c) *Ako je stranica sfernog trokuta manji luk glavne kružnice, koliko onda sfernih trokuta određuju te stranice?*

d) *Ako su dvije od triju točaka na sferi polovi, koliko se onda može kreirati trokuta na sferi?*



Tri točke u ravnini



Tri točke na sferi

Trokut.gsp.

Usporedba 6. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	**Na sferi**
Svaki par točaka može se spojiti s točno jednom dužinom.	Svaki par točaka koje nisu nasuprotne može se povezati s dva različita luka glavne kružnice. Rezultat tri nekolinearne točke koje nisu nasuprotne određuje osam različitih sfernih trokuta.
Tri nekolinearne točke definiraju tri dužine. Tri nekolinearne točke kreiraju jedan jedini trokut.	Ako definiramo da je stranica sfernog trokuta kraći od dva luka, onda je situacija jednostavnija. Tada tri nekolinearne točke određuju jedinstveni sferni trokut.
	Dvije točke na sferi koje su nasuprotne ne određuju jedinstvenu glavnu kružnicu. Ako su dva od tri vrha polovi, onda te tri točke ne određuju jedinstveni sferni trokut.

Istražite dodatno 6. *Ako trokut na sferi ima dva nasuprotna vrha, istražite koliko ima lukova (meridijana) duljine* 180° *koji povezuju ta dva vrha.*

Koliki je broj trokuta definiranih u tom slučaju?

6.7. Zbroj izmjerenih kutova trokuta

Zadatak 7. *Zadani su trokut u ravnini i na sferi.*

a) Koliki je zbroj mjera unutarnjih kutova ravninskog trokuta?

b) Koliki je zbroj mjera kutova sfernog trokuta?

c) Je li zbroj mjera kutova konstantan?

d) Ako zbroj nije konstantan, koliki je onda najmanji, a koliki najveći zbroj kutova?

e) Za koji trokut je najmanji zbroj mjera kutova, a za koji je najveći?

`Zbroj kutova.gsp`.

Usporedba 7. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	**Na sferi**
Zbroj mjera unutarnjih kutova trokuta je 180°.	Zbroj mjera unutarnjih kutova trokuta ima različite vrijednosti stupnjeva ovisno o veličini trokuta.
	Najveći mogući trokut ima sve vrhove na istoj glavnoj kružnici. Ovaj trokut ima tri kuta od 180° pa je zbroj mjera kutova 540°. Ovo vrijedi i za degenerirani trokut kad su tri vrha kolinearna. Najmanji mogući trokut ima sva tri vrha na istoj glavnoj kružnici i jednu stranicu koja leži na druge dvije. Tada degenerirani trokut ima dva kuta od 0° i jedan od 180° pa je zbroj tih mjera kutova 180°. Dakle, zbroj mjera kutova trokuta veći je ili jednak 180° i manji ili jednak 540°. Za nedegenerirane trokute zbroj mjera kutova veći je od 180° i manji od 540°.

Istražite dodatno 7. *a) Nacrtajte luk duljine* 90° *i konstruirajte dvije okomice s njihovim presjekom. Istražite koliki je tada zbroj kutova sfernog trokuta.*

b) Za bilo koji konveksni sferni četverokut istražite koliki je tada najmanji i najveći zbroj kutova.

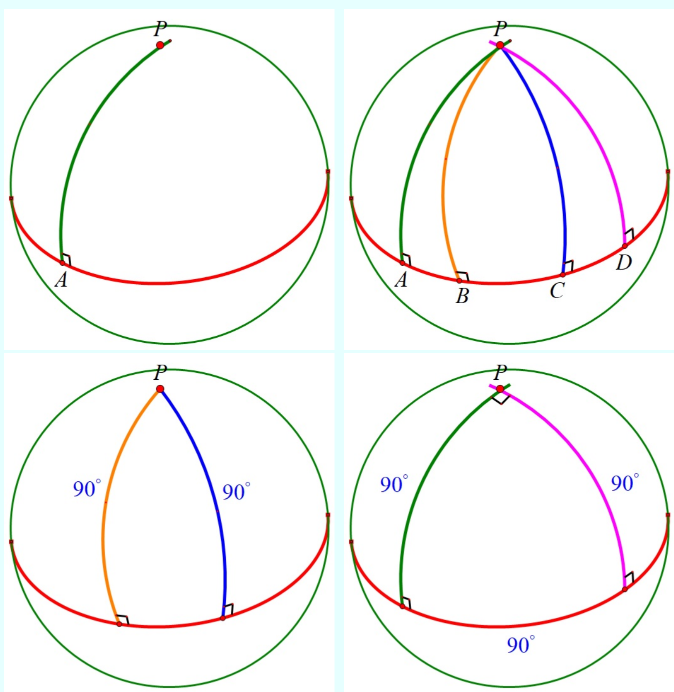
6.8. Trokuti s pravim kutom

Zadatak 8. *Zadani su pravokutan trokut u ravnini i na sferi.*

a) *Koliko ukupno pravih kutova mogu imati ovi trokuti?*

b) *Koji poučci o sukladnosti trokuta garantiraju da su dva ravninska trokuta sukladna?*

c) *Koji poučci o sukladnosti trokuta ne garantiraju sukladnost trokuta na sferi?*



Pravi kut i pravokutni sferni trokuti

Pravokutni trokut.gsp.

Usporedba 8. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	**Na sferi**
Trokut može imati najviše jedan pravi kut.	Trokut može imati jedan, dva ili tri prava kuta.
Poučak KKS garantira kad su dva trokuta kongruentna.	Poučak KKS ne može garantirati kad su dva trokuta kongruentna.
Poučak SSK garantira kad su svaka dva pravokutna trokuta kongruentna.	Poučak SSK ne može garantirati kad su dva trokuta kongruentna.

Istražite dodatno 8. *Razmotrite istinitost sljedećih tvrdnji:*

a) Pitagorin poučak ne vrijedi za pravokutne trokute na sferi, što jasno pokazuje trokut s tri prava kuta. Za jednakostranični trokut tada vrijedi, koje god mjerne jedinice koristimo, $a^2 + a^2 = a^2$ *i uvijek implicira da je* $a = 0$.

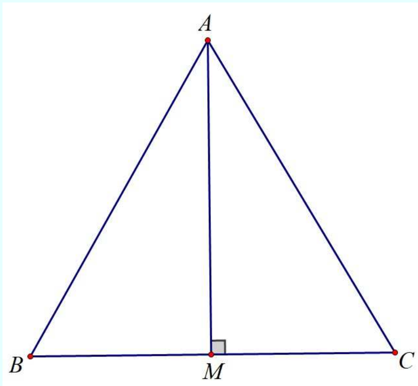
b) Os simetrije dijeli jednakokračni trokut na dva refleksivna pravokutna trokuta. Ovi refleksni trokuti imaju ista tri kuta pa su osnovni kutovi jednakokračnog trokuta sukladni.

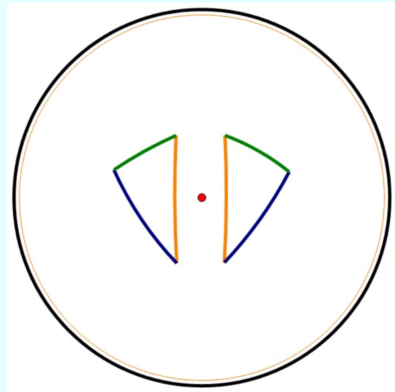
6.9. Sukladnost trokuta

Kada dva ravna trokuta nazivamo sukladnima?

Postoji nekoliko načina da se odgovori na ovo pitanje. Jedan od mogućih odgovora: *Dva ravninska trokuta nazivamo sukladnima ako se jedan može točno pokriti drugim.* S ovom definicijom refleksivni, zrcalni ravninski trokuti također se smatraju sukladnim. Da bismo pokrili dva refleksna trokuta jedan s drugim, moramo izaći iz ravnine u trodimenzijski prostor.

Evo, primjerice, trokuti $\triangle ACM$ i $\triangle ABM$ mogu se presavijati jedan na drugi u prostoru.

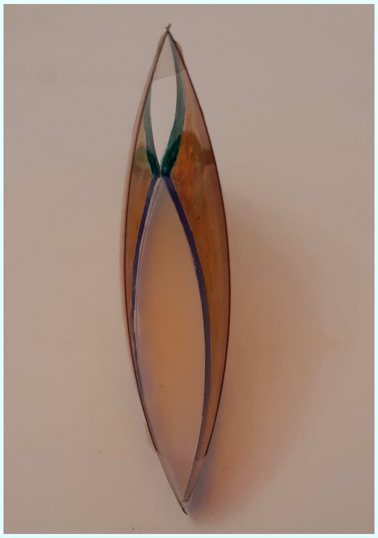




Kada dva sferna trokuta nazivamo sukladnima?

Na ovo pitanje može se odgovoriti na nekoliko načina. Mislite li da su ova dva sferna trokuta sukladna ili ne?

To su refleksni, zrcalni trokuti. Nije ih moguće točno pokriti jedne s drugima čak i ako izađemo u trodimenzijski prostor.

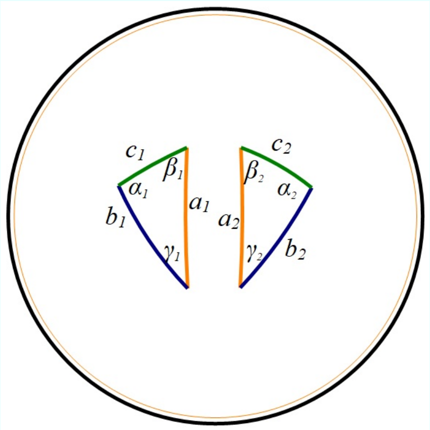


Ne možete ih baš ovako usporediti a ne možete ih ni ovako.

Postoje mnoge teme unutar i izvan matematike, kao što je kristalografija, gdje se one ne mogu smatrati sukladnima.

Ako ih želimo smatrati sukladnima ovdje i sada, tada moramo dati drugu definiciju sukladnosti.

Definicija: Dogovorimo se da se ovdje i sada dva trokuta u ravnini i na sferi nazivaju *sukladnima* ako se za svaku stranicu jednog trokuta u drugom trokutu nalazi stranica iste duljine, a za svaki kut kut od iste veličine nalazi se u drugom trokutu.



Prema ovoj definiciji, ako su šest podataka u dva trokuta ista, nazivaju se sukladnim.

Sljedeće pitanje je: Je li potrebno provjeriti svih šest podataka u dva trokuta da bismo bili sigurni da su sukladni?

Drugim riječima, moramo li usporediti sve tri stranice i tri kuta trokuta da bismo trokut jednoznačno (u smislu sukladnosti) definirali? Ili je za to dovoljno manje podataka - u ravnini i na sferi?

Pitanje: Što podrazumijevamo pod uspoređivanjem elemenata trokuta? Koje alate možemo koristiti?

U ravnini i na sferi: imamo ravno ravnalo s mjerilom, kojim možemo crtati i mjeriti ravnu crtu u ravnini ili na sferi; imamo šestar kojim možemo nacrtati kružnicu bilo koje veličine u ravnini ili na sferi; a imamo kutomjer kojim možemo izmjeriti bilo koji kut u ravnini ili na sferi.

Važna napomena: **nije** pitanje može li se iz tri podatka uopće nacrtati trokut! Ako su tri podatka navedena u ravnini 2 cm, 3 cm, 100 cm, tada se iz njih ne može nacrtati trokut. Pitanje je, ako je moguće nacrtati barem jedan trokut s tri podatka, je li moguće nacrtati **samo jedan** (u smislu sukladnosti)?

Obrazložite svoj odgovor, razmislite o izmjenama na ravnini i sferi! Ako smatrate da postoji više rješenja, navedite barem jedan protuprimjer, tj. dva trokuta koja se podudaraju u trima podatcima, ali nisu sukladna.

1. Stranica-stranica-stranica (SSS)?
2. Stranica-kut-stranica (dvije stranice i kut između njih: SKS)?
3. Kut-stranica-kut (jedna stranica i dva kuta na njoj: KSK)?
4. Kut-kut-stranica (stranica, kut na njoj i kut nasuprot stranici: KKS)?
5. Stranica-stranica-kut (dvije stranice i suprotni kut: SSK)?
6. Kut-kut-kut (unutarnji kutovi trokuta: KKK)?

7. Je li moguće da dva trokuta imaju jednaka četiri podatka, a opet nisu sukladni?

Odgovori se nalaze na stranici 171.

6.10. Sličnost

Dva su mnogokuta *slična* ako su im

(1) korespodentni kutovi kongruentni

(2) korespodentne stranice proporcionalne.

Zadatak 9. *Zadani su trokut na ravnini i sferni trokut na sferi.*

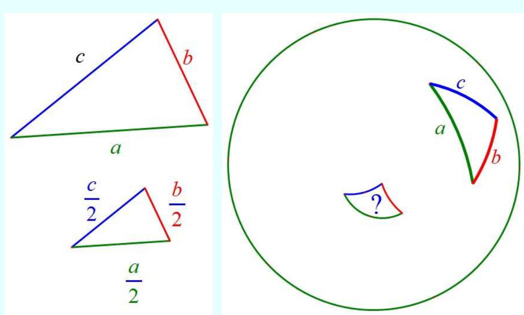
a) Nacrtajte/konstruirajte ravninski trokut s upola kraćim stranicama zadanog trokuta.

b) Nacrtajte/konstruirajte sferni trokut s upola kraćim stranicama zadanog trokuta.

c) Mogu li se na sferi nacrtati trokuti proporcionalnih duljina stranica i kutova koji nisu kongruentni?

d) Mogu li se na sferi nacrtati trokuti kongruentnih kutova i neproporcionalnih stranica?

e) Mogu li na sferi biti slični trokuti?



Slični trokuti

Sličnost.gsp.

Usporedba 9. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	Na sferi
Moguće je skalirati neki mnogokut na ravnini. Skalirani mnogokut istog je oblika, ali različite veličine. Korespodentni kutovi sličnih mnogokuta su jednakih mjera, a korespodentne stranice proporcionalne.	Ne postoje slični oblici na sferi koji nisu kongruentni. To je nemoguće za skalirane mnogokute na sferi. Kad se promijeni veličina figure, mijenja se i njezin oblik. Ako se kreiraju dva nekongruentna mnogokuta, tada mogu korespodentne stranice biti proporcionalne (primjerice, nekongruentni jednakostranični trokuti), a korespodentni kutovi ne će biti kongruentni.

Istražite dodatno 9. *Razmotrite sljedeće činjenice.*

a) *Istražite sličnost četverokuta u ravnini.*

b) *Konstruirajte na sferi dva četverokuta s kutovima* $90°, 90°, 90°$ *i* $120°$*, ali sa stranicama različitih duljina.*

c) *Konstruirajte na sferi dva nekongruentna četverokuta kojima su korespodentne stranice proporcionalne, ali korespodentni kutovi čeverokuta nisi kongruentni.*

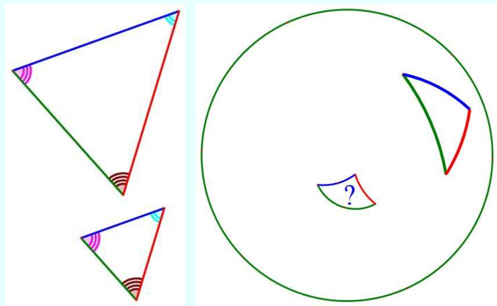
d) *Je li istinita tvrdnja da na sferi ne postoje slični poligoni? Obrazložite svoju tvrdnju!*

6.11. KKK uvjet za trokute

Zadatak 10. *Zadani su trokut na ravnini i sferni trokut na sferi.*

a) *Nacrtajte/konstruirajte u ravnini dva trokuta s jednakim korespodentnim kutovima. Jesu li oni kongruentni (sukladni) ili slični?*

b) *Nacrtajte/konstruirajte dva sferna trokuta s jednakim korespodentnim kutovima. Jesu li oni kongruentni ili slični?*



Trokuti s korespodentnim kutovima

`KKK uvjet.gsp`.

Usporedba 10. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	**Na sferi**
Poučak KKK ne garantira da su dva trokuta kongruentna.	Poučak KKK garantira da su dva trokuta kongruentna. Ako su trokuti refleksivni par, možda se isprva ne će činiti kongruentnima.
Poučak KKK garantira kad su dva trokuta slična.	Slični trokuti ne postoje na sferi (osim kad su kongruentni).

Istražite dodatno 10. *Ako zbroj kutova u trokutu nije točno jednak* $180°$*, može li se onda takav trokut konstruirati u ravnini?*

Ako je zbroj tri sferna kuta veći od $180°$*, može li se takav trokut nacrtati na sferi?*

6.12. Uvjeti koji garantiraju kongruenciju trokuta

Zadatak 11. *Istražite koji poučci o sukladnosti trokuta garantiraju kongruentnost (sukladnost) ravninskih, a koji sfernih trokuta?*

`KKK uvjet 01.gsp`.

Usporedba 11. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	Na sferi
Sljedeći poučci garantiraju kongruentnost trokuta: SSS, KKS, SKS i KSK.	Sljedeći poučci garantiraju kongruentnost trokuta: SSS, KKK, SKS i KSK.
Poučak SSK garantira kongruentnost samo za pravokutni trokut.	Poučak SSK ne garantira kongruentnost za bilo koji trokut.
Poučak KKK garantira kada su dva trokuta slična.	Ne postoje na sferi slični trokuti (osim kad su kongruentni).

Istražite dodatno 11. *Razmotrite sljedeće:*

1. *Nađite par sfernih trokuta takvih da zadovoljavaju sljedeća svojstva:*

   a) *Trokuti nemaju pravi kut.*

   b) *Trokuti zadovoljavaju SSK uvjete.*

   c) *Trokuti nisu kongruentni jedan drugom.*

2. *Istražite staze određene na sferi s dva pravokutna trokuta čije su stranice 1000 km i 50 km respektivno. Tada slučaj SKS garantira kongruentnost ova dva trokuta. Treća stranica mora također biti kongruentna i dvije staze moraju biti jednakih duljina.*

6.13. Kružnice

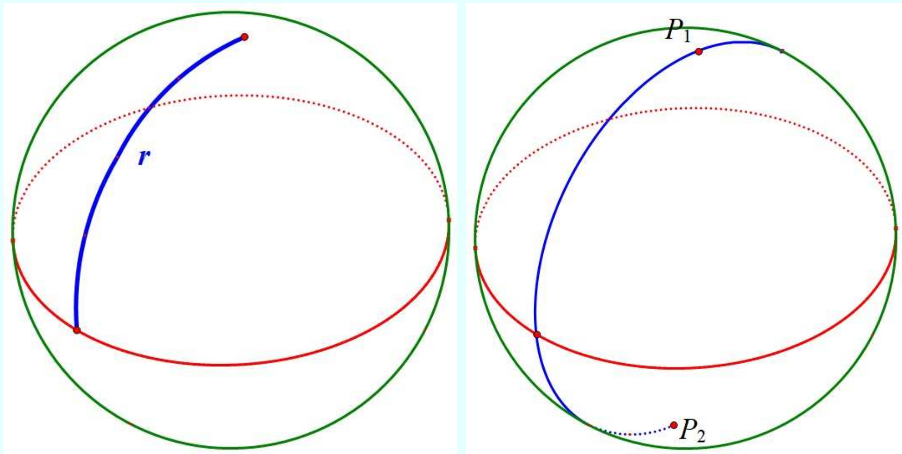
Zadatak 12. *Zadane su ravninska kružnica i sferna kružnica.*

a) *Kojim se jedinicama mjere promjer, polumjer i lukovi zadanih kružnica?*

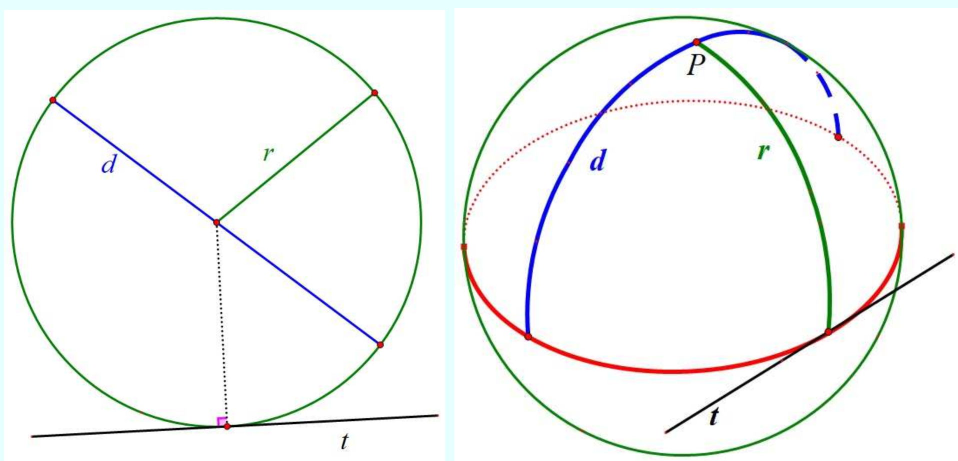
b) *Koliko središta ima svaka od zadanih kružnica?*

c) *Koliki kut zatvaraju tangenta i kružnica u diralištu?*

d) *Je li polumjer polovica promjera za obje vrste kružnica?*



Polumjer i središta sferne kružnice



Usporedba pojmova ravninske i sferne kružnice

Kružnice.gsp.

Usporedba 12. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	Na sferi
Kružnice imaju polumjer, promjer i lukove. Budući da su ovi oblici ravninski, mjere se linearnim jedinicama (primjerice, cm).	Kružnice imaju polumjere, promjere i lukove koji su na glavnoj kružnici. Mjere se stupnjevima ili radijanima.
Svaka kružnica ima jedno središte.	Svaka kružnica ima točno dva središta. Središta sferne kružnice su dva nasuprotna pola.
Polumjer kružnice je pola duljine promjera.	Polumjer kružnice je pola duljine promjera
Tangenta na kružnicu je okomica na polumjer u diralištu polumjera i kružnice.	Tangenta na kružnicu je okomica na polumjer u diralištu polumjera i kružnice.
	Mnoga će se druga svojstva ravninskih kružnica na sferi potvrditi, ali neka i ne će.

Istražite dodatno 12. *Istražite i obrazložite zašto ravninska kružnica ima jedno središe, a sferna kružnica dva.*

a) *Ima li pojam središta kružnice isto svojstvo u oba slučaja?*

b) *Ako je odgovor "da", koje je to svojstvo? Ako je odgovor "ne", u čemu se onda razlikuju ta dva pojma?*

6.14. Koncentrične kružnice

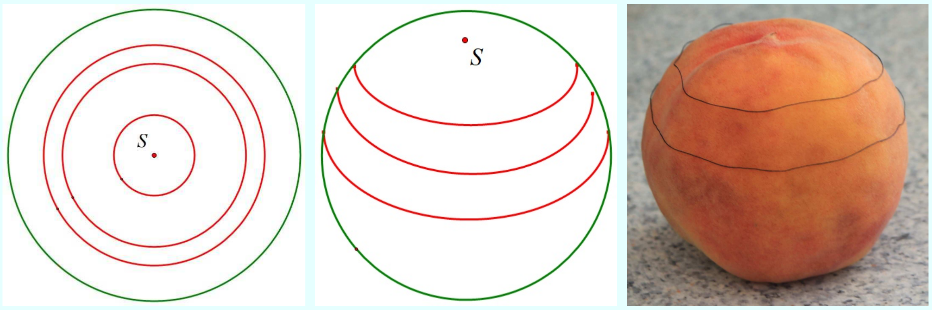
Zadatak 13. *Zadane su koncentrične kružnice u ravnini. Razmotrite sljedeća pitanja.*

a) *Postoji li među koncentričnim kružnicama u ravnini kružnica s najmanjim i s najvećim polumjerom? Ako postoje, koliki su tada polumjeri?*

b) *Postoji li među koncentričnim kružnicama na sferi kružnica s najmanjim i s najvećim polumjerom? Ako postoje, koliki su tada polumjeri?*

c) *Postoje li među koncentričnim kružnicama u ravnini dvije kongruentne?*

d) *Postoje li među koncentričnim sfernim kružnicama dvije kongruentne?*



Koncentrične kružnice u ravnini i na sferi

Koncentrične kružnice.gsp.

Usporedba 13. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	**Na sferi**
Polumjer kružnice je udaljenost od središta kružnice do bilo koje točke na kružnici.	Polumjer kružnice ne može biti veći od 180°.
Svaka skupina koncentričnih kružnica ima jednu kružnicu polumjera 0. Ta je kružnica točno središnja točka.	Svaka skupina koncentričnih kružnica ima jednu kružnicu polumjera 0° i jednu polumjera 180°. Dva središta su dva nasuprotna pola.
Nema kružnice tako velike da je pravac.	Kružnica s polumjerom 90° je glavna kružnica i sferni je ekvivalent pravca.
U skupini koncentričnih kružnica ne postoje dvije različite kružnice koje su kongruentne.	U skupini koncentričnih kružnica svaka kružnica ima kongruentnu na dugoj strani sfere. Ako je polumjer prve kružnice x stupnjeva, onda je polumjer kongruentne polumjera $180° - x$.

Istražite dodatno 13. *Neka je središte koncentričnih kružnica Sjeverni pol. Tada je njegova nasuprotna točka Južni pol. Glavna kružnica ovih koncentričnih kružnica je ekvator.*

Postoji beskonačno mnogo parova kongruentnih kružnica različitih polumjera. Dva primjera za to su Arktička kružnica i Antarktička kružnica. Navedite još neki par kongruentnih kružnica na Zemlji.

6.15. Omjer opsega i promjera kružnice

Povijesno je problem mjerenja opsega kružnice u ravnini bio i zanimljiv i izazovan. Uočivši da je duljina kružnice bitno povezana s duljinom njezina promjera, otkriveno je da je omjer tih veličina konstantan. Ta je konstanta broj π. Opseg kružnice s promjerom $2r$ je $o = 2r \cdot \pi$.

Zadatak 14. *Razmotrite omjer opsega i promjera na ravninskoj i sfernoj kružnici.*

a) Zadanoj ravninskoj kružnici opišite i upišite pravilni mnogokut. To učinite za trokut, kvadrat, pravilni peterokut, pravilni šesterokut itd. Izračunajte omjere opsega opisanih mnogokuta i promjera kružnice. To isto učinite za upisane mnogokute. Što možete uočiti o tim omjerima?

b) Koliko središta ima kružnica na sferi?

c) Koliki je omjer opsega male sferne kružnice i promjera?

d) Koliki je omjer opsega glavne (najveće) sferne kružnice i promjera?

Omjer.gsp.

Usporedba 14. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	Na sferi
Omjer opsega i promjera svake kružnice je π.	Omjer opsega i promjera kružnice varira u skladu s veličinom kružnice. Za sve male kružnice taj je omjer manji od π. Omjer raste što je kružnica veća. Za najveću moguću kružnicu (glavnu kružnicu) taj je omjer jednak 2

Istražite dodatno 14. *Istražite i odredite koliki je omjer opsega ekvatora i promjera.*

6.16. Dijeljenje kvadrata

Razmotrite, nacrtajte/konstruirajte i istražite pojam četverokuta i kvadrata u ravnini i na sferi.

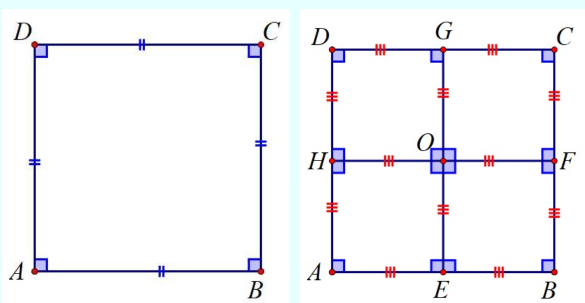
Kvadrat je četverokut s četiri kongruentne stranice i četiri prava kuta.

Zadatak 15. *a) Konstruirajte u ravnini kvadrat i podijelite ga na četiri sukladna/kongruentna kvadrata.*

b) Je li moguće konstruirati kvadrat na sferi?

c) Je li moguće podijeliti kvadrat na sferi na manje kongruentne kvadrate?

d) Je li moguće izmjeriti sfernu površinu kvadratnim jedinicama?



Kvadrat u ravnini i njegova podjela na kongruentne kvadrate

Dijeljenje kvadrata.gsp.

Usporedba 15. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	Na sferi
Moguće je konstruirati kvadrat.	Nemoguće je konstruirati kvadrat. Međutim, može se konstruirati četverokut s četiri kongruentne stranice i četiri kongruentna (ali ne prava) kuta.
Svaki se kvadrat može podijeliti na manje kvadrate tako da su svi kongruentni jedan drugom i slični velikom kvadratu.	Četverokut opisan gore može se podijeliti na manje kongruentne četverokute. Međutim, ovi manji četverokuti nemaju niti četiri kongruentna kuta ni četiri kongruentne stranice. Svaki ima tri prava kuta i jedan kut veći od $90°$. Manji četverokuti nisu slični velikom četverokutu.

Istražite dodatno 15. *Objasnite zašto je kvadrat dobar lik za mjeriti površinu područja u ravnini.*

Objasnite zašto je nemoguća uporaba kvadrata za točno mjeriti površine na sferi.

6.17. Površina

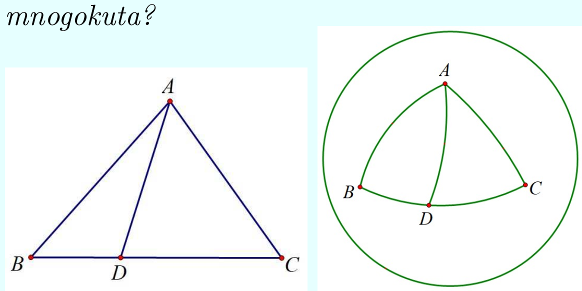
Zadatak 16. *Zadan je mnogokut u ravnini i na sferi.*

a) *Kojim se jedinicama mjeri površina mnogokuta u ravnini, a kojima na sferi?*

b) *Navedite formulu za računanje površine ravninskog trokuta.*

c) *Kako se određuje površina sfernog trokuta?*

d) *Vrijedi li triangulacija ravninskih i sfernih mnogokuta za određivanje površine mnogokuta?*



Određivanje površine mnogokuta

Površina.gsp.

Usporedba 16. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	**Na sferi**
Površina se može izmjeriti kvadratnim jedinicama	Površina se može izmjeriti stupnjevima.
Površina se trokuta može odrediti tako da se izmjeri osnovica i visina na nju te se njihove duljine pomnože i rezultat podijeli s 2.	Površina se trokuta određuje tako da se odredi zbroj kutova i oduzme od $180°$. Ovo se naziva sfernim ekscesom trokuta.
Površina se mnogokuta određuje tako da se mnogokut triangulira i da se zbroje zajedno površine tih trokuta.	Površina se mnogokuta određuje triangulacijom i zajedničkim zbrojem površina tih trokuta.

Istražite dodatno 16. *Formula za površinu sferne kružnice u stupnjevima je*

$$P = 1 - \cos r$$

gdje je r sferni polumjer.

a) Površina polusfere je $360°$. Izračunajte sferni polumjer sferne kružnice čija je površina polovica polusfere.

b) Ako je površina kružnice $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{5}$ površine polusfere koliki su polumjeri kružnice te površine?

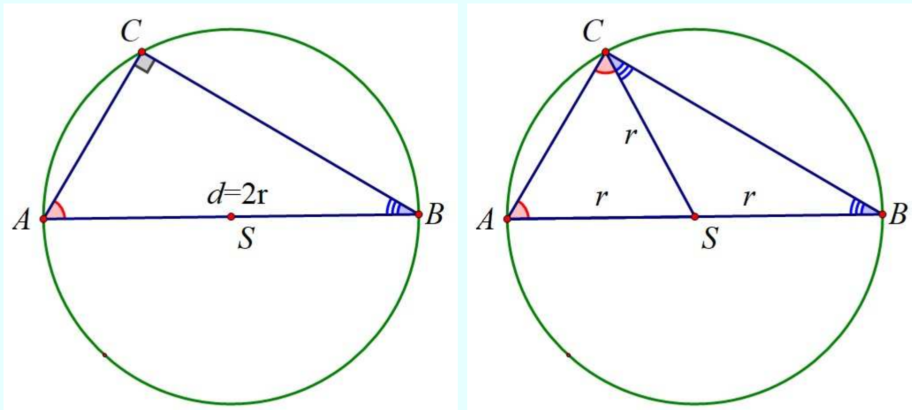
6.18. Trokuti upisani u kružnicu s jednom stranicom i promjerom

Zadatak 17. *a) Konstruirajte u ravnini pravokutni trokut kojemu je zadana jedna stranica (jedna kateta ili hipotenuza).*

b) Koji poučak je u "pozadini" konstrukcije?

c) Konstruirajte sfernu kružnicu sa središtem u točki P. Hipotenuza trokuta na sferi prolazi tokama A, B i središtem P sferne kružnice. Na toj sfernoj kružnici odaberimo točku C. Izmjerite sferne kutove $\sphericalangle ACB, \sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle CBA$.
Što možete uočiti?

d) Je li sferni trokut $\triangle ABC$ pravokutan?



Pravokutni trokut u kružnici

Trokuti upisani.gsp.

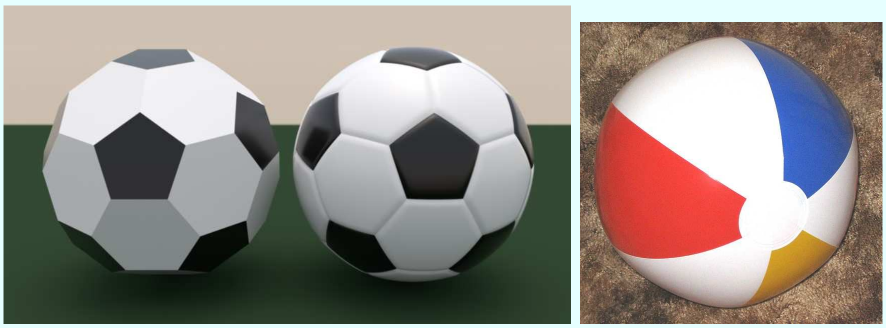
Usporedba 17. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	Na sferi
Trokut je pravokutan kad mu je hipotenuza promjer kružnice	Trokut nije pravokutan. Mjera kuta nasuprot hipotenuze je veća od 90°.
Mjere dva manja kuta zajedno daju 90°	Mjere dva manja kuta zajedno daju više od 90°.
Mjera najvećeg kuta je konstantna.	Mjera najvećeg kuta nije konstantna.
Ako se spoji središte kružnice sa suprotnim vrhom trokuta, dobiju se dva jednakokračna trokuta.	Ako se spoji središte kružnice sa suprotnim vrhom trokuta, dobiju se dva jednakokračna trokuta.

Istražite dodatno 17. *Istražite i odredite površinu trokuta $\triangle ABC$.*

6.19. Popločavanje

Problem popločavanja ilustrirat ćemo jednim Arhimedovim tijelom koje je uporabljeno u dizajnu nogometne lopte i primjerom obične dječje lopte na kojoj se vide dvokuti.



Popločavanje: Arhimedovo tijelo, nogometna i dječje lopta

Zadatak 18. *Zadana je ravnina i sfera.*

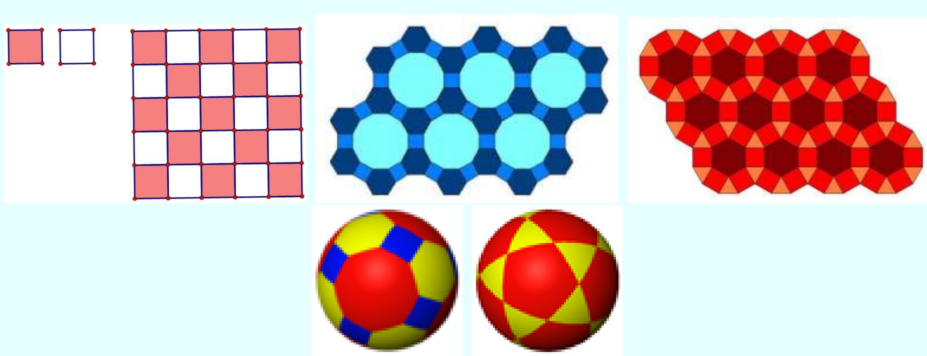
a) *Može li se ravnina popločati sukladnim ili sličnim likovima?*

b) *Postoji li neki uvjet/ograničenje za izgradnju poliedara pomoću mnogokuta? Ako postoji uvjet, onda ga navedite i obrazložite.*

c) *Može li se sfera popločati kongruentnim dvokutima?*

d) *Može li se sfera popločati sličnim sfernim likovima?*

e) *Može li se sfera popločati s više vrsta različitih kongruentnih sfernih likova?*



Popločavanje.gsp.

Primjeri popločavanja u ravnini i na sferi

Usporedba 18. *Usporedbe ravninskih i sfernih pojmova koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

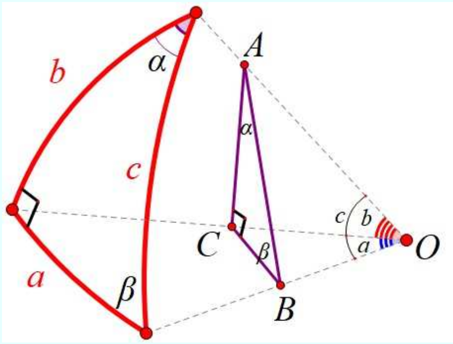
U ravnini	**Na sferi**
Potreban je beskonačan broj pločica za popločati ravninu pravilnim ili polupravilnim pločicama.	Za popločati sferu potreban je konačan broj pravilnih ili polupravilnih pločica. Broj pločica se mijenja u zavisnosti od popločavanja.
Ako imamo oblik popločavanja ravnine, onda će svaki oblik koji mu je geometrijski sličan također popločati ravninu s beskonačno mnogo pločica.	Na sferi nema sličnih oblika koji nisu sukladni. Dakle, ne možemo govoriti o popločavanju s pločicama drugog popločavanja. Međutim, možemo govoriti o pločicama iste vrste. Primjerice, ako na sferi postoji popločavanje s jednakostraničnim kongruentnim trokutima, ne slijedi da će jednakostranični kongruentni trokuti različitih veličina također proizvesti čisto popločavanje.
Na ravnini ne postoji dvostrani mnogokut pa tako nema popločavanja ravnine koja koristi dvostrane mnogokute.	Sfera se može popločati kongruentnim dvokutima (dvostranim mnogokutima) sve dok kut dvokuta dijeli 360°.

Istražite dodatno 18. *Načinite/nacrtajte nekoliko Arhimedovih tijela. Istražite za svako to tijelo može li se to popločavanje prenijeti na sferu.*

Konstruirajte svih pet Platonovih tijela na sferi.

6.20. Formule ravninske i sferne geometrije

Deset formula za sferni pravokutni trokut



Trobrid i pravokutni trokut $\triangle ABC$

Trobrid $OABC$ ima bridne kutove a, b i c, a plošni mu je kut na bridu OC jednak $90°$. Za pravokutni sferni trokut vrijede sljedeće formule:

1. $\cos c = \cos a \cdot \cos b$,
2. $\sin b = \sin c \cdot \sin \beta$,
3. $\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha$,
4. $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cdot \cos \beta$,
5. $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cdot \cos \alpha$,
6. $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} \beta \cdot \sin a$,
7. $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin b$,
8. $\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta$,
9. $\cos \alpha = \cos a \cdot \sin \beta$,
10. $\cos \beta = \cos b \cdot \sin \alpha$.

`Formule.gsp`.

Usporedba 19. *Usporedbe ravninskih i sfernih formula koje su zapisane u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

Druge formule za trokut

Zadatak 19. *Neka je zadan trokut $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i kutovima α, β, γ. Neka je opseg $o = a + b + c$, odnosno $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Kako glasi formula za:*

a) *površinu P trokuta,*

b) *duljinu visine v,*

c) *polumjer opisane kružnice r_o,*

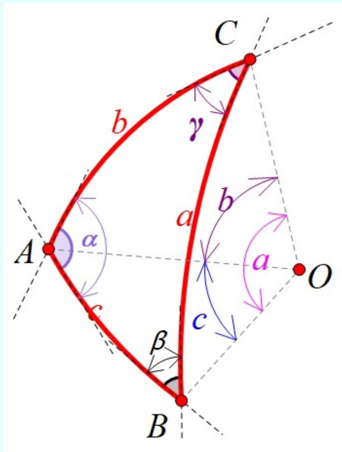
d) *polumjer upisane kružnice r_u?*

U ravnini	**Na sferi**
$P = \frac{1}{2}av_a,\ P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $P = r_u \cdot s$	$P = \frac{r^2\pi}{180^\circ}(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ)$, gdje je r polumjer sfere
$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}(\frac{s}{2})\operatorname{tg}(\frac{s-a}{2})\operatorname{tg}(\frac{s-b}{2})\operatorname{tg}(\frac{s-c}{2})}$ $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$ je sferni eksces
$v_a = b\sin\gamma$ $v = c\sin\beta$	$\sin v = \sin b \cdot \sin\gamma$ $\sin v = \sin c \cdot \sin\beta$
$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r_o$	
$r_u = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$	$\operatorname{tg} r_u = \sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$

Istražite dodatno 19. *I obrnuto!*
Istražite mogućnosti povezivanja formula za rješavanje ravninskih problema i formula za sferne probleme.

6.21. Poučci ravninske i sferne geometrije

Mnogi se poučci mogu prenijeti iz ravninske na sferne trokute. Na trobridu se to vrlo lako učava.



Trobrid

Zadatak 20. *a) Konstruirajte u ravnini crteže poznatih elementarnih geometrijskih poučaka: Euklidov, Menelajev, Cevain, Desarguesov, Papov, Brianchonov, Pascalov . . ..*

b) Koji poučak se može analogijom "otkriti" na sferi?

c) U čemu su razlike, a u čemu isti argumenti?

d) Koji poučci vrijede u obje geometrije, koji ne i koji su modificirani?

Poučci.gsp.

Usporedba 20. *Usporedbe ravninskih i sfernih poučaka koji su zapisani u tablici bit će u radnom listiću i pratećoj datoteci naznačene i "otkrivene". Ovdje ih navodimo zbog cjelovitosti usporedbe i mogućih odgovora na pitanja/zadatke u listićima.*

U ravnini	**Na sferi**
Nasuprot sukladnim stranicama leže sukladni kutovi. I obrnuto! $a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta$.	Nasuprot sukladnim stranicama leže sukladni kutovi. I obrnuto! $a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta$
Nasuprot većem kutu leži veća stranica. I obrnuto! $\alpha < \beta \Leftrightarrow a < b$.	Nasuprot većem kutu leži veća stranica. I obrnuto! $\alpha < \beta \Leftrightarrow a < b$.
Duljina stranice manja je od zbroja, a veća je od razlike duljina ostalih dviju stranica $c < a + b, c > \|a - b\|$	Duljina stranice manja je od zbroja, a veća je od razlike duljina ostalih dviju stranica $c < a + b, c > \|a - b\|$.
$\alpha + \beta + \gamma = \pi$	$\alpha + \beta < \gamma + \pi$ $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$ $0 < a + b + c < 2r\pi$
Trokut može imati 1 pravi kut.	Trokut može imati 1, 2 ili 3 prava kuta.
Zbroj kutova trokuta $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ je konstantan	Zbroj kutova trokuta $\alpha + \beta + \gamma$ nije konstantan
Sferni eksces $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ je $\varepsilon = 0$.	Sferni eksces $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ je $\varepsilon \neq 0$.

Poučak o sinusima ravninske i sferne geometrije

Zadatak 21. *Ako je u trokutu $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i kutovima α, β, γ kut $\gamma = 90°$, onda je trokut $\triangle ABC$ pravokutan.*

Istražite koja se tvrdnja dobiva iz poučka za ravninski pravokutan trokut.

U ravnini	**Na sferi**
Za trokut $\triangle ABC$ sa str. a, b, c i kutovima α, β, γ vrijedi: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.	Za trokut $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i kutovima α, β, γ vrijedi: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$	$\dfrac{\sin a}{\sin b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$
$\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$	$\dfrac{\sin a}{\sin c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$
$\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$	$\dfrac{\sin b}{\sin c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

Poučak o kosinusima ravninske i sferne geometrije

U ravnini	**Na sferi**
Za trokut $\triangle ABC$ sa str. a, b, c i kutovima α, β, γ vrijedi: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.	Za trokut $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i kutovima α, β, γ vrijedi: $\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma$, $\cos b = \cos c\cos a + \sin c\sin a\cos\beta$, $\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha$.
	$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$,
	$\cos\beta = -\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos b$,
	$\cos a = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$.

Istražite dodatno 20. *Istražite kako se dolazi do poučka o kosinusima za kutove.*

Pitagorin poučak ravninske i sferne geometrije

Zadatak 22. *Ako je u trokutu ABC sa stranicama a, b, c i kutovima α, β, γ kut $\gamma = 90^\circ$, onda je trokut ABC pravokutan i za njega vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$. I obatno!*

Kako glasi poučak iz kojeg slijedi ova tvrdnja?

Ili, kako glasi poopćenje Pitagorinog poučka u ravnini?

U ravnini	**Na sferi**
Za trokut $\triangle ABC$ sa str. a, b, c i kutovima α, β, γ vrijedi: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.	Za trokut $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c i kutovima α, β, γ vrijedi: $\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma$.
za $\gamma = 90^\circ \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$	za $\gamma = 90^\circ \Rightarrow \cos c = \cos a\cos b$

6.22. Poučci elementarne geometrije - istraživački projekti

Ovdje ćemo navesti nekoliko poznatih poučaka ravninske elementarne geometrije predlažući istraživanje kojim ćemo utvrditi koji od njih vrijede na sferi, koji ne vrijede i zašto ne vrijede te koji modificirani vrijede na sferi.

Istraživanje ovih poučaka predlažemo kao projekte koje će učenici nakon upoznavanja sa sfernom geometrijom razmotriti u ravnini i na sferi.

Prvo, u ravnini se konstruiraju pomoću Sketchpada zadani objekti i dinamičnim promjenama se postiže kako to kaže Polya:

`... nakon što smo potvrdili poučak u nekoliko posebnih slučajeva, prikupili smo jake induktivne dokaze za to.`

Induktivna faza nadvladala je našu početnu sumnju i dala nam čvrsto povjerenje u poučak. Bez takvog samopouzdanja jedva da bismo smogli hrabrosti poduzeti dokaz koji nije nimalo izgledao kao rutinski posao. Kad ste uvjereni da je poučak istinit, počnete ga dokazivati.

Uz tekstove poučaka konstruirane su Sketchpadove dinamične datoteke koje vizualiziraju ravninski prikaz i koje daju čvrsto povjerenje da je poučak istinit. Dokaz poučka nije u žarištu ove knjige i on se može naći u drugim knjigama, ali ga učenik treba u sklopu projekta elaborirati.

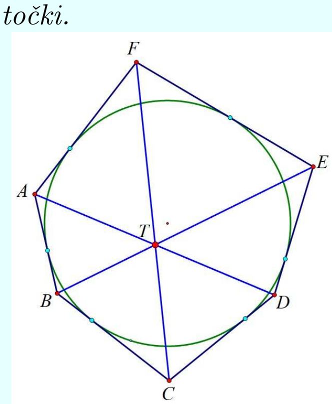
Drugo, predlažemo da se vizualiziraju/nacrtaju prikazi na realnoj sferi iz pribora i da se tako dobiju induktivni primjeri za ili protiv analognog sfernog poučka. Odgovarajuća tvrdnja, u slučaju projekta, treba biti čvrsto dokazana.

Dakle, uporabom virtualnog i realnog alata istražuju se neki ravninski poučci poznati iz povijesti matematike.

Sljedeće ćemo poučke razmotriti:

a) **Brianchonov[1] poučak**

Dijagonale koje spajaju nasuprotne vrhove tangencijalnog šesterokuta sijeku se u jednoj točki.



Brianchonov poučak u ravnini

Brianchon datoteka.gsp.

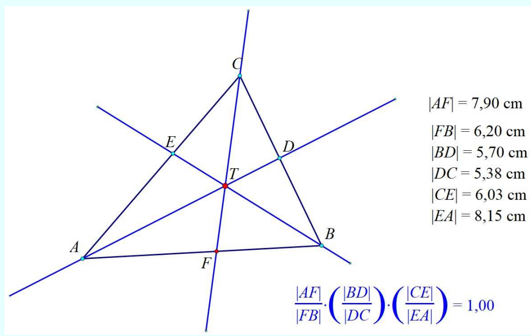
Istražite dodatno 21. *Istražite vrijedi li ovaj poučak na sferi.*

[1] C. J. Brianchon (1783. - 1864.) je francuski matematičar i kemičar.

b) Cevin[2] poučak

Neka su D, E *i* F *redom točke na stranicama* $\overline{BC}, \overline{CA}$ *i* $\overline{AB}$ *trokuta* $\triangle ABC$. *Pravci* AD, BE *i* CF *prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$



Cevin poučak u ravnini

Ceva datoteka.gsp.

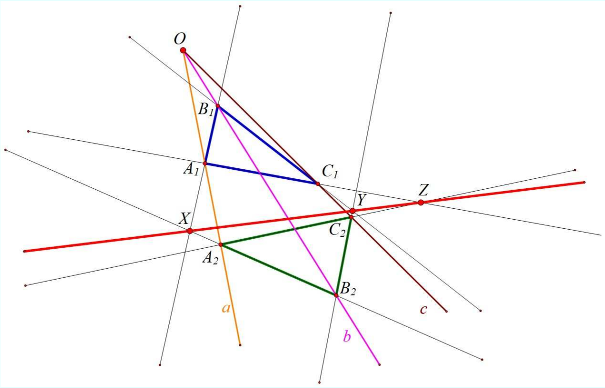
Napomena. Točka T je *konkurentna točka*, a pravci AD, BE i CF *konkurentni pravci*.[3]

c) Desarguesov[4] poučak

Točkom O *u ravnini prolaze tri pravca* a, b, c. *Na pravcu* a *zadane su točke* A_1 *i* A_2, *na* b *točke* B_1 *i* B_2, *a na* c *točke* C_1 *i* C_2. *Presjeci* X, Y, Z *redom pravaca* A_1B_1 *i* A_2B_2, B_1C_1 *i* B_2C_2 *te* C_1A_1 *i* C_2A_2 *su*

[2] G. Ceva (1647. - 1734.) talijanski matematičar.
[3] Za tri i više pravaca sa zajedničkim sjecištem kažemo da su *konkurentni.*
[4] G. Desargues (1591. - 1661.) francuski matematičar.

tri kolinearne točke.



Desarguesov poučak u ravnini

Desargues datoteka.gsp.

Istražite dodatno 22. *Istražite vrijedi li ovaj poučak na sferi.*

d) Menelajev poučak[5]

Neka su X, Y, Z redom točke na pravcima BC, AC, AB tako da su dvije od njih na stranici trokuta $\triangle ABC$, a treća je na produžetku stranice tog trokuta.

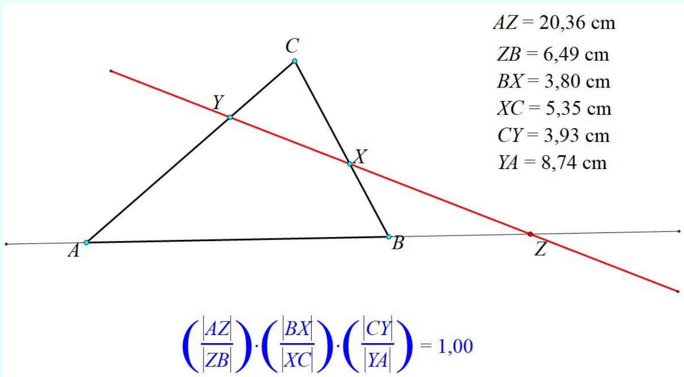
Točke X, Y i Z su kolinearne ako i samo ako (s orijentiranim dužinama) vrijedi

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = -1,$$

odnosno (bez orijentacije dužina)

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

[5]Menelaj (70. - 140.), starogrčki matematičar. Njegovo jedino sačuvano djelo je *Sphaerica*. Sadrži tri knjige u kojima se razvija teorija sfernih trokuta. U trećoj se knjizi nalazi ovaj poučak kojeg je dokazao u sfernoj geometriji.



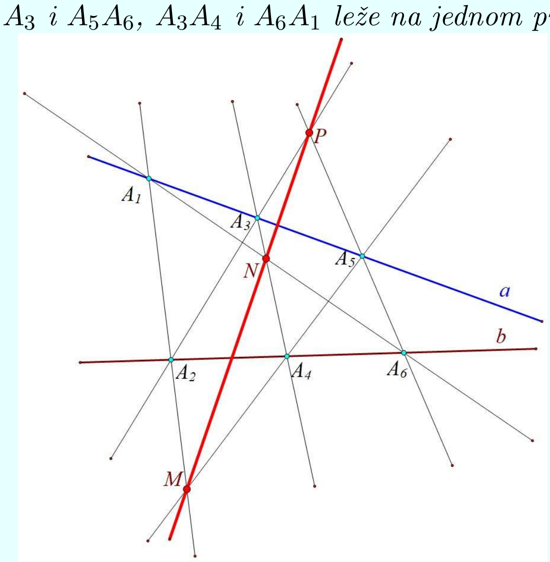
Menelajev poučak u ravnini

`Menelaj datoteka.gsp`.

Istražite dodatno 23. *Istražite kako izgleda ovaj poučak na sferi.*

e) **Papov[6] poučak**

Ako su A_1, A_3, A_5 tri točke na jednom pravcu ravnine, a A_2, A_4, A_6 tri točke na drugom pravcu te iste ravnine, onda sjecišta pravaca A_1A_2 i A_4A_5, A_2A_3 i A_5A_6, A_3A_4 i A_6A_1 leže na jednom pravcu.



Papov poučak u ravnini

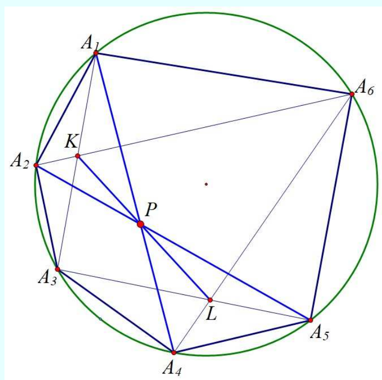
[6]Pap Aleksandrijski (oko 290. - oko 350. poslije Krista) antički matematičar.

Papova datoteka.gsp.

Istražite dodatno 24. *Istražite vrijedi li ovaj poučak na sferi.*

f) Pascalov[7] poučak

Ako su $A_i, i = 1, 2, \ldots, 6$ uzastopni vrhovi šesterokuta upisanog u kružnicu, K sjecište od $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{A_2A_6}$, L sjecište od $\overline{A_3A_5}$ i $\overline{A_4A_6}$, onda se dijagonale $\overline{A_1A_4}, \overline{A_2A_5}$ i pravac KL sijeku u jednoj točki, tj. konkurentni su.



Pascalov poučak u ravnini

Pascal datoteka.gsp.

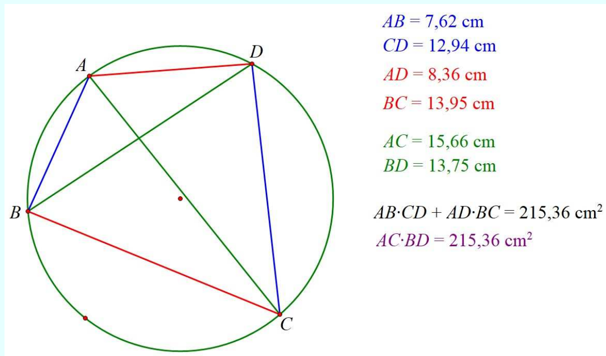
Istražite dodatno 25. *Istražite vrijedi li ovaj poučak na sferi.*

g) Ptolemejev[8] poučak

Četverokut je tetivni ako i samo ako je umožak duljina njegovih dijagonala jednak zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica.

[7] B. Pascal (1623. - 1662.) francuski matematičar i fizičar.

[8] K. Ptolemej (oko 100. - oko 170. poslije Krista) antički matematičar, astronom i geograf.



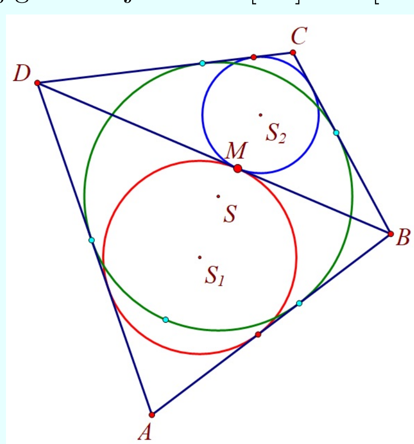
Ptolemejev poučak u ravnini

`Ptolemej datoteka.gsp`.

Istražite dodatno 26. *Istražite vrijedi li ovaj poučak na sferi.*

h) **Gusić - Mladinićev poučak**

Četverokut je tangencijalan ako i samo ako su kružnice upisane, u dva trokuta formirana dijagonalom, tangencijalne jedna drugoj. Dokazan je u Euklidovoj geometriji. Vidi u [15.] ili u [60.].

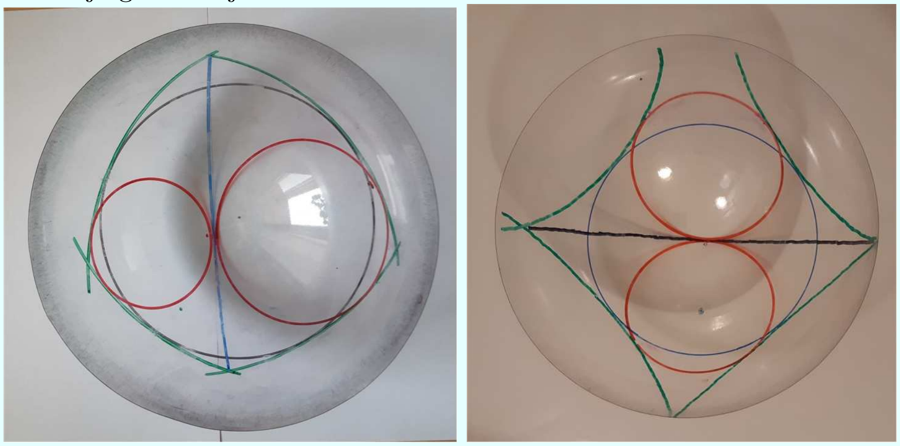


Gusić - Mladinićev poučak u ravnini

`Gusić-Mladinićeva datoteka.gsp`.

Istražite dodatno 27. *Istražite vrijedi li ovaj poučak na sferi.*

Prijedlog skiciranja. István Lénárt je predložio dvije skice poučka. Jedna je skica pomoću sferne geometrije, a druga je pomoću hiperbolične geometrije. Provjerite samostalno vrijedi li ovaj poučak u ove dvije geometrije!



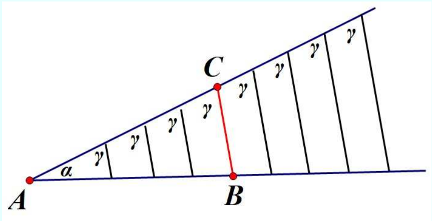
Lénártove skice Gusić - Mladinićevog poučka

Istražite dodatno 28. *Odaberite jedan poučak elementarne ravninske geometrije (primjerice, poučak o težišnicama, poučak o ortocentru, poučak o Eulerovom pravcu). Istražite vrijedi li odabrani poučak na sferi.*

Odgovori na pitanja o sukladnosti trokuta sa stranice 145.

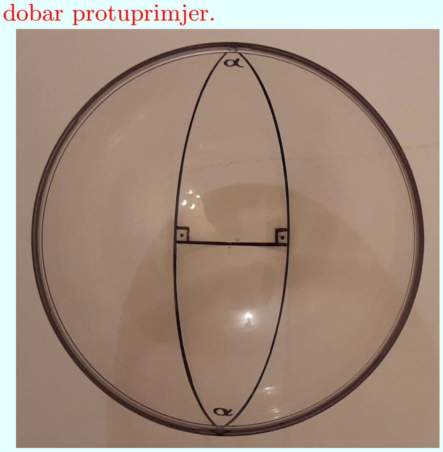
1. Strana-strana-strana ispunjena je i na ravnini i na sferi. Nacrtamo stranicu, s vrhovima na dva kraja kao središtima, nacrtamo dvije kružnice čiji je polumjer jednak duljini druge dvije stranice. Tamo gdje se kružnice sijeku nalazi se treći vrh trokuta! Postoje četiri rješenja, ali sva daju sukladne trokute prema našoj definiciji.
2. Stranica-kut-stranica ispunjena je i na ravnini i na sferi. Mjerimo raspon kuta i mjerimo duljine koje odgovaraju dvjema stranicama na dva kraka kuta. Spajanjem tako dobivenih krajnjih točaka dobivamo trokut.
3. Kut-stranica-kut ispunjen je i na ravnini i na sferi. Nacrtamo stranicu i izmjerimo dva kuta na njezine dvije krajnje točke. Tamo gdje se sijeku druga dva kraka kuta nalazi se treći vrh trokuta. Ovdje također postoje četiri rješenja, ali sva ona daju sukladne trokute prema našoj definiciji.
(Ovdje također možete vidjeti da možete unijeti podatke koji se uopće ne mogu koristiti za crtanje trokuta. Primjerice, ako su dva kuta na ravnini pravi kutovi, tada dva kraka drugog kuta nemaju presječnu točku.)

4. Kut-kut-stranica (stranica, kut na njoj i kut nasuprot stranici)? To se svakako postiže u ravnini, što se može vidjeti na više načina.
Zbroj kutova planarnog trokuta je konstantan, pa oduzimanjem zbroja dvaju zadanih kutova od $180°$ dobivamo treći kut, a time se problem može pratiti do slučaja 3. kut-stranica-kut.
Možemo razmišljati drugačije. Dana je stranica $\overline{AB}$ na kojoj je α kut, a nasuprot njoj γ kut. Mjerimo kut α na stranici $\overline{AB}$, a na drugom kraku kuta počevši od A povlačimo paralele koje s tim krakom kuta tvore kut γ. Budući da se presjek između dva kraka kuta stalno povećava, postojat će samo jedna paralela koja tvori kut γ s tim krakom kuta i siječe stranicu $\overline{AB}$ točno u krajnjoj točki B. Ova jedina paralela daje treću stranicu s krajnjom točkom C.



Pitanje je može li se bilo koja od dvije metode prenijeti na sferu?
Zbroj kutova sfernog trokuta nije konstantan, pa se prvim načinom ne može izračunati treći kut.
Što nije u redu s drugom metodom koja funkcionira u ravnini?
Raspon kutova u ravnini sve se više povećava/mijenja, tako da se određena duljina stranice može pojaviti samo jednom.
Raspon sfernih kutova, s druge strane, odgovara sfernom dvokutu, koji je najširi na ekvatoru, ali se sužava u oba smjera.
Ovdje se ne može isključiti da postoji nekoliko opcija.
Sve ovo samo dokazuje da ravninske metode nisu dobre na sferi, ali možda neka druga metoda može biti dobra, a ova tri podatka ipak definiraju sferni trokut.
Što je istina?
Ova tri podatka definiraju sferni trokut, samo moramo tražiti novu metodu kon-

strukcije, - ili tri podatka ne definiraju sferni trokut i moramo tražiti protuprimjer: dva trokuta koji su jednaki na jednoj stranici, kut na njemu i kut nasuprot, ali nisu li isti?
Uzmite sferni dvokut i izrežite ga na dva trokuta tako da linija rezanja bude okomita na jednu stranicu. Koliko je podataka istih za dva trokuta? Ako jednakokračnik prepolovimo točno po sredini, dobit ćemo dva potpuno ista trokuta. Dakle, ovo nije dobar protuprimjer.



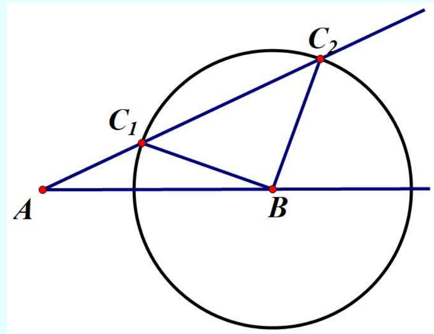
Ali ako ga prerežemo bilo gdje drugdje tako da rez bude okomit na jednu stranicu, dva su trokuta sukladna

- s jedne strane (duž reza),
- u kutu nasuprot odrezane stranice, budući da se u oba slučaja radi o dva jednaka kuta jednakokračnog,
- i također u kutu na reznoj liniji, jer su oba desno-lijevi kutovi!

(Dva kuta na drugom kraju linije rezanja nisu ista u ovom slučaju.)

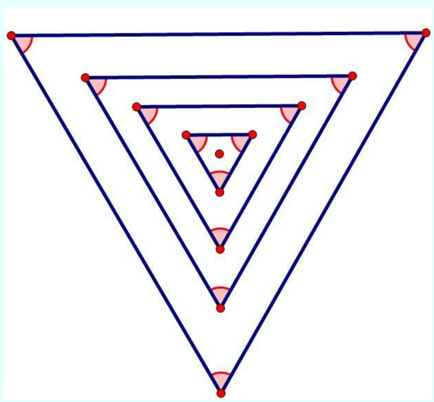
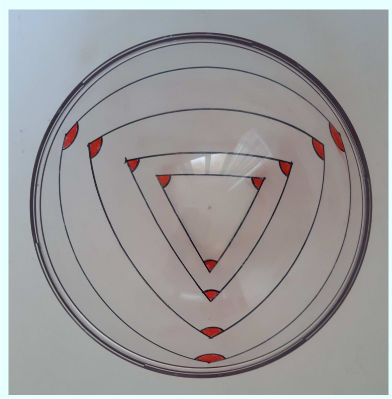
Ova tri podatka o sferi ne osiguravaju podudarnost! (Zanimljivo, teško pitanje: ovdje protuprimjer sadrži dva pravokutna trokuta. Je li moguće pronaći protuprimjer u kojem niti jedan od dva trokuta nije pravokutan?)

5. Stranica-stranica-kut (dvije stranice i kut nasuprot jednoj)? Ova tri podatka ne osiguravaju podudarnost ni na ravnini ni na sferi.



Dan je raspon kuta α s vrhom A, stranicom $\overline{AB}$ i stranicom $\overline{BC}$ nasuprot kutu α. Nacrtamo raspon α kuta, izmjerimo duljinu stranice $\overline{AB}$ na jednom od njezinih krakova i iz vrha B povučemo kružnicu polumjera $\overline{BC}$. Moguće je da je krak kuta AC tangenta na kružnicu polumjera $\overline{BC}$, u kojem slučaju postoji samo jedno rješenje. Medutim, može se dogoditi da kružnica siječe krak kuta na dva mjesta. U ovom slučaju, tri odgovarajuća podatka trokuta ABC_1 i ABC_2 su međusobno ista, ali ta dva trokuta nisu sukladna. Ovo uređivanje vrijedi i u ravnini i na sferi.

6. Kut-kut-kut (unutarnji kutovi trokuta)? Preporučljivo je ispitati pravilne trokute. Oni na najzorniji način prikazuju vezu navedenih kutova s dobivenim trokutom.

Ako znamo da je svaki kut ravnog trokuta 60°, još uvijek ne znamo koliki je trokut. Postoji beskonačno mnogo takvih trokuta koji imaju mnogo zajedničkih svojstava, ali nisu sukladni. Oni se nazivaju sličnim trokutima. (Ako kažemo da je svaki kut ravnog trokuta 59°, tada znamo da takav trokut ne postoji.) Ako je, s druge strane, svaki kut sfernog trokuta 70°, prvo moramo provjeriti pada li zbroj kutova između 180° i 540°. Ako je jedan kut pravilnog sfernog trokuta 70°, onda su i ostali jednaki, pa je zbroj kutova 210°. Dakle, takav sferni trokut postoji. Međutim, budući da sve veće stranice imaju sve veće kutove, samo jedan pravilni sferni trokut može imati zbroj kutova od 210°. Drugim riječima: svi sferni trokuti sa sva tri kuta od 70° su sukladni. Ova tvrdnja vrijedi za bilo koja tri zadana kuta. Dakle, vidimo da je sferni trokut točno određen sa svoja tri zadana kuta. Također možemo reći da na sferi nema sličnih, ali ne i identičnih trokuta: oblik trokuta se mijenja s povećanjem stranica. (Ako pogledamo u srebrni ukras za božićno drvce, osoba s dvostruko većim nosom gleda u nas, kao iz običnog ravnog zrcala.)

7. Je li moguće da dva trokuta imaju jednaka četiri podatka, a opet nisu sukladni? Vrlo je zanimljiv zadatak odabrati bilo koja tri od četiri podatka i dokazati da ta tri podatka osiguravaju sukladnost. Postoje samo dvije iznimke: na sferi dva kuta i

stranica nasuprot jednoj, te dvije stranice i kut nasuprot jednoj. Doista, dvostruko pravokutni trokuti imaju jednake dvije stranice i dva kuta (sva četiri podatka su 90°), ali nisu sukladni!

Još jedno pitanje: Što je s trokutima hiperboličke geometrije?

7. Koordinatni sustav u E^3

Michael de Villiers i Scott Steketee u Hrvatskoj

Koordinatni sustav u E^3 jest pravokutni Kartezijev sustav s pravokutnim koordinatama, cilindričnim koordinatnim prikazom i/ili sfernim koordinatama - koje su definirane i povezane. Razmotrit ćemo povezivanje GPS-a s određivanjem mjesta na sferi, sunčani sat, geografske koordinate, avio i morsku navigaciju.

7.1. Pravokutni koordinatni prikaz

Od koordinatnih sustava kojima se služimo u analitičkoj geometriji prostora najčešće se primjenjuje pravokutni Kartezijev koordinatni sustav.

Koordinatne osi su tri međusobno okomita usmjerena pravca Ox, Oy, Oz koji prolaze točkom O koju zovemo *ishodištem* koordinatnog sustava.

Pravac Ox zove se $x - os$ ili *os apscisa*, pravac Oy $y - os$ ili *os ordinata* i pravac Oz $z - os$ ili *os aplikata*.

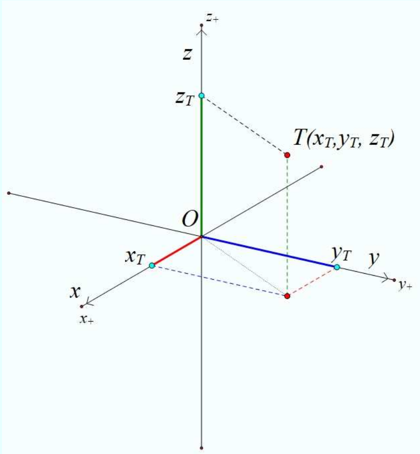
Ovdje ćemo koristiti *desni sustav*.

Na svakoj koordinatnoj osi nalazi se koordinatni sustav na pravcu, tj. svaka je os ujedno i *brojevni pravac*.

Koordinatne ravnine su ravnine određene s dva koordinatna pravca pa tako imamo *xy ravninu, yz ravninu* i *xz ravninu* (ili *tlocrtnu, nacrtnu* i *bokocrtnu ravninu*).

Svakoj točki T prostora (i obrnuto) pridružena je *uređena trojka* (x, y, z) realnih brojeva s koordinatnih pravaca.

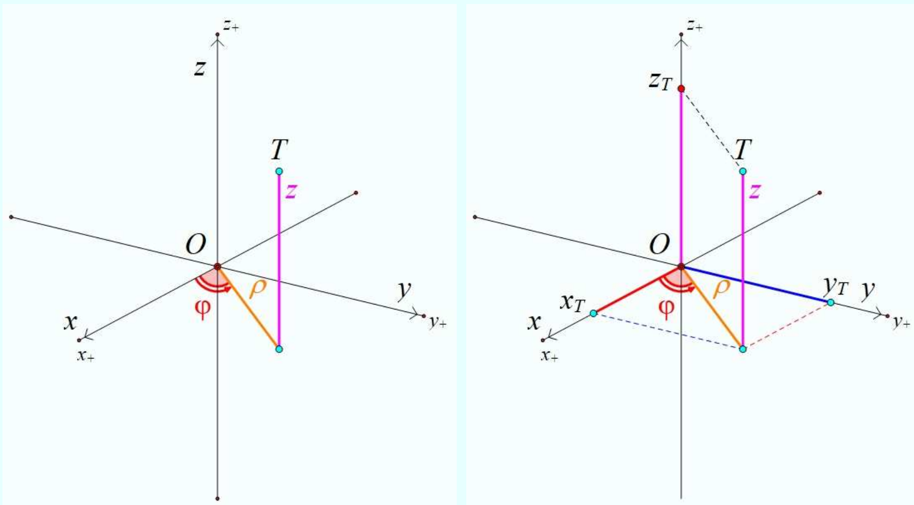
Realne brojeve x, y, z zovemo *koordinatama točke* T. Realni broj x zovemo *apscisom točke* T i označavamo x_T, realni broj y_T zovemo *ordinatom*, a z_T *aplikatom*.



Pravokutne Kartezijeve koordinate

7.2. Cilindrični koordinatni prikaz

Cilindrične koordinate čine *polarne koordinate* ϱ i φ projekcije točke T na ravninu xy (tlocrtnu ravninu) i *aplikata* z točke T, tj. $T(\varrho, \varphi, z)$.



Cilindrične koordinate i veza s Kartezijevim koordinatama

Veze između cilindričnih i Kartezijevih pravokutnih koordinata dane su sljedećim relacijama:

$$x = \varrho \cos \varphi,\ y = \varrho \sin \varphi, z = z,$$

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\rho},\ \text{za } x > 0.$$

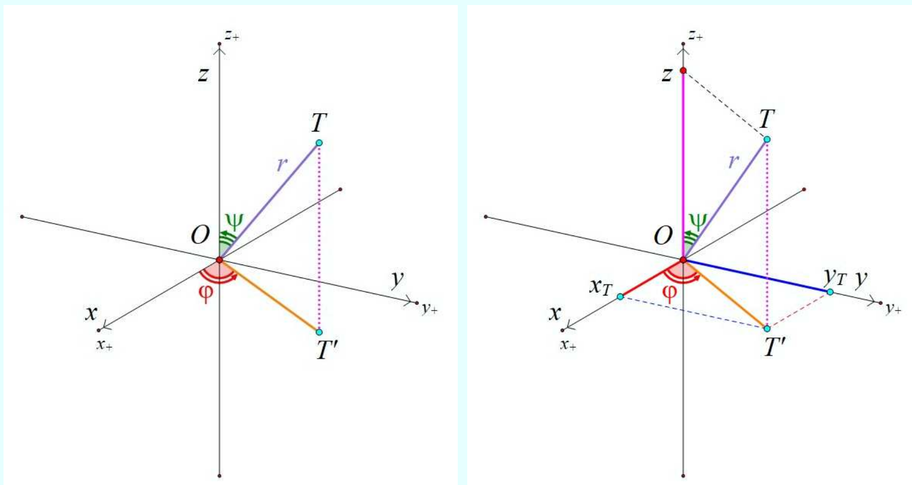
Zadatci. Evo nekoliko zadataka za vježbu preračunavanja koordinata točke iz jednog u drugi prikaz.

1. Točka T ima Kartezijeve koordinate $(3, 4, 5)$. Odredite cilindrične koordinate točke T.

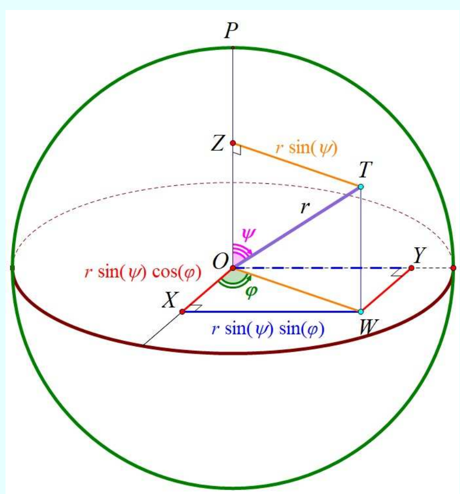
2. Točka T ima cilindrične koordinate $(5, 55°, 7)$. Odredite Kartezijeve koordinate točke T.

7.3. Sferne koordinate (prostorne polarne koordinate)

Sferne koordinate sastoje se od udaljenosti točke T od ishodišta O, kuta ψ između osi z i pravca OT kao i kuta φ između osi x i pravca OT' gdje je T' projekcija točke T na ravninu xy, tj. točki T pridružena je uređena trojka $T = (r, \varphi, \psi)$.



Sferne koordinate i veza s Kartezijevim koordinatama



Prikaz veze koordinata na sferi

Veze između sfernih i Kartezijevih pravokutnih koordinata dane su sljedećim relacijama:

$$x = r\sin\psi\cos\varphi,\ y = r\sin\psi\sin\varphi,\ z = r\cos\psi,$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z},\ \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Zadatci. Evo nekoliko zadataka za vježbu preračunavanja koordinata točke iz jednog u drugi prikaz.

1. Točka T ima Kartezijeve koordinate $(3, 4, 5)$. Odredite sferne koordinate točke T.

2. Točka T ima sferne koordinate $(5, 55°, 60°)$. Odredite Kartezijeve koordinate točke T.

7.4. Geografske koordinate

U *Zborniku 2. hrvatskog geografskog kongresa* M. Lapaine i N. Frančula u tekstu *Koordinatni sustavi u geografiji* pišu:

Često se za model Zemljine plohe uzima sfera. Jednadžba sfere sa središtem u ishodištu pravokutnog Kartezijevog sustava $Oxyz$ i polumjera R glasi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Takva se sfera naziva *Zemljinom sferom*. Točka s koordinatama $(0, 0, R)$ naziva se *Sjevernim polom*, a ona s koordinatama $(0, 0, -R)$ *Južnim polom*. Kružnica na sferi koja je jednako udaljna od polova naziva se *ekvatorom* ili *polutarom* i ona dijeli sferu na dvije *polusfere - polutke*. Pravac koji prolazi polovima naziva se *os Zemljine sfere*, a ravnina u kojoj se nalazi ekvator - *ekvatorskom ravninom*.

Kut koji zatvara normala (ujedno i radijusvektor) proizvoljne točke M na Zemljinoj sferi s ekvatorskom ravninom naziva se *geografskom širinom* i označava φ. Sve točke na Zemljinoj sferi koje imaju istu geografsku širinu leže na kružnici koja se naziva *paralelom* ili *usporednicom*.

Polukružnice na zemljinoj sferi koje spajaju Sjeverni i Južni pol nazivaju se *meridijanima* ili *podnevnicima*. Jedan među njima naziva se *početnim* ili *nultim meridijanom* ...

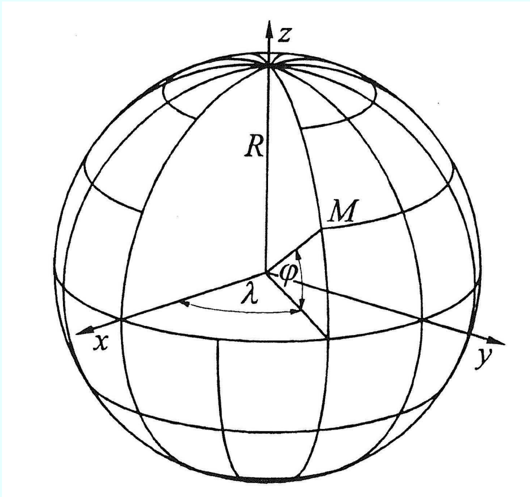
`Geografske koordinate` φ `i` λ `čine krivolinijski koordinatni sustav na sferi. Koordinatne krivulje su paralele i meridijani.`
...

Geografske koordinate su veličine koje određuju položaj točke na Zemljinoj površini.

Geografske koordinate su *geografska širina (*φ*)* i *geografska dužina (*λ*)*. Izražavaju se u stupnjevima, minutama i sekundama. Često su izražene u decimalnom prikazu stupnjeva (npr. $26°15'18''N = 26,255°N$).

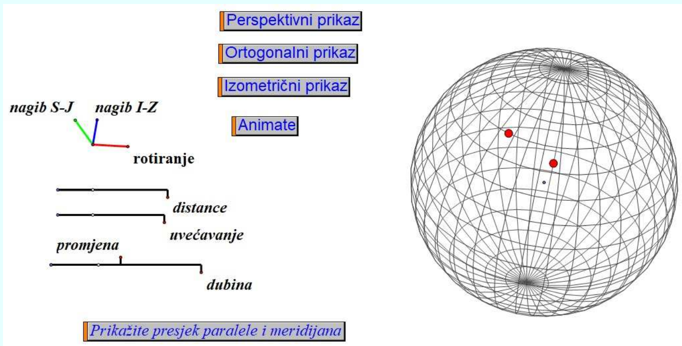
Geografska širina (φ*) točke* M kut je što ga zatvara normala N, povučena iz točke M na površinu *geoida*, s ravninom ekvatora. Računa se od ekvatora prema sjeveru ili jugu od $0°$ do $90°$.

Geografska dužina (λ*) točke* M kut je što ga zatvara ravnina početnog, nultog meridijana i meridijana točke M. Očitava se od početnog meridijana prema istoku ili zapadu od $0°$ do $180°$.



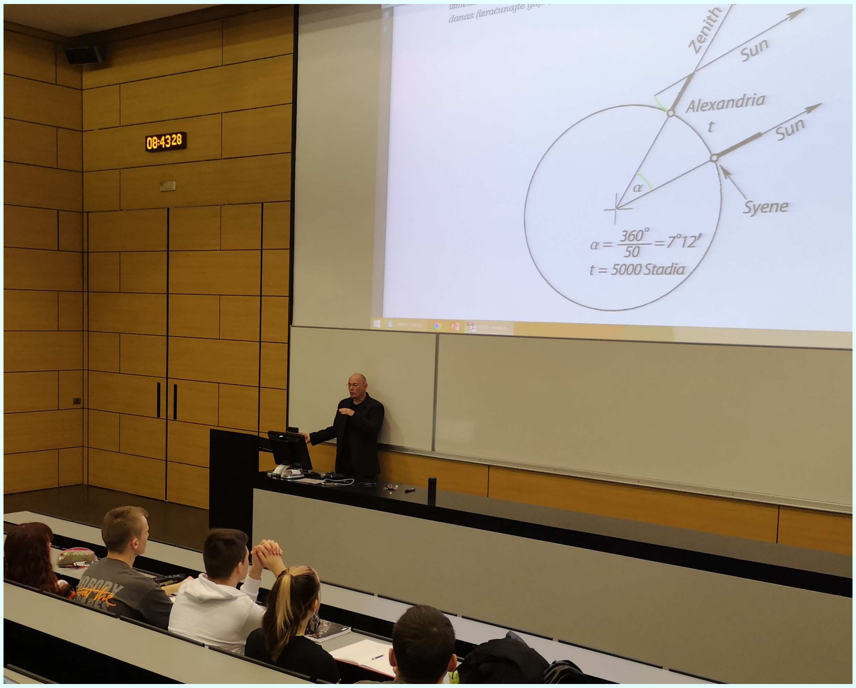
Geografske koordinate na Zemljinoj sferi

Ovdje prikazujemo sliku datoteke priređene za rad.



Zemljina sfera: paralele, meridijani, točke i polovi

8. Projekcije sfere i geografske karte



Mario Brkić na predavanju

U ovom poglavlju razmotrit ćemo projekcije sfere (geografske karte) na:

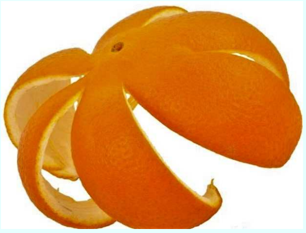
- ravninu (tj. stereografsku projekciju)
- plašt stošca (tj. konusnu projekciju)
- plašt valjka (tj. cilindričnu projekciju)

Problem prikazivanja sfere u ravnini

Problem prikazivanja sfere u ravnini je važan za klasičnu navigaciju koja uporabljuje geografske karte.

Matematičari su dokazali da se sfera ne može "razmotati/razdijeliti" i "zalijepiti" na ravninu, tj. da su sferna ploha i ravnina različite zakrivljenosti.

U to se lako možemo uvjeriti izrežemo li dvokute na naranči i pokušamo te dijelove"izravnati". Svaki se taj dio "slomi" kad ga pokušamo "izravnati".



Dvokuti na naranči

Budući da je Zemlja trodimenzionalno tijelo, površina cijelog planeta ne može biti prikazana bez iskrivljenja. Zbog toga većina karata prikazuje ograničeno područje za određenu namjenu. Karte svijeta mogu biti izrađene, ali je potrebno odabrati projekciju koja će najvjernije prikazati odnose dijela svijeta bitnog za sadržaj karte.

Karta je dvodimenzionalni, geometrijski pouzdan prikaz trodimenzionalnog prostora.

Sferni objekti ne mogu biti sukladni/kongruentni ravninskim objektima. Ti se objekti mogu projicirati na ravninu. Tada se čuvaju ili kutovi ili duljine (oblici).

Projiciranje sfere na ravninu na kojoj "stoji" sfera poznato je kao *stereografska projekcija*.

Projiciranje sfere na plašt valjka ili plašt stošca u kojima su upisane sfere daje različite karte.

Projiciranje sfere na ravninu ili zakrivljenu plohu (koja se onda "odmota" - na plašt valjka ili stošca) narušavaju neke odnose objekata koji su uspostavljeni na samoj sferi.

Ovdje samo naznačujemo kako se sfera i njezini objekti preslikavaju u ravninske objekte.

Ilustracije radi prikazat ćemo o čemu se radi kod prikazivanja i projiciranja Zemlje na ravninu.

Temeljno pitanje izrade karte

Kako možemo prikazati oblike globusa na ravnom listu, poput listova atlasa? Sferna površina i ravna površina ne mogu se točno preslikati jedna na drugu. To se može matematički dokazati, ali možemo i izravno ilustrirati.

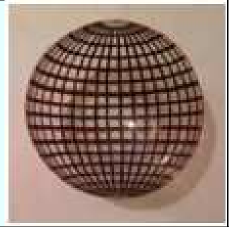
		
Papirnati ručnik se može zagladiti s kartonskog cilindra na stol bez gužvanja.	Papirnati ručnik se može zagladiti s kartonskog stošca na stol bez gužvanja.	Folija se ne može zagladiti po naranči ili čokoladnoj kuglici bez da se nabora. Ako na jednom mjestu izgleda glatko, na drugom će sigurno biti naborani.

Iz kartografske perspektive to znači da niti jedna planarna karta Zemlje ne može biti savršena. Postoje razne kartografske i projekcijske metode, ali su sve karte iskrivljene. Koju metodu odabrati ovisi o području uporabe.

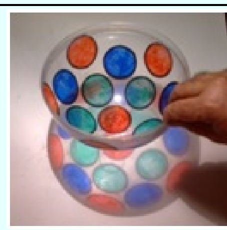
Projekcije se također mogu klasificirati prema tome je li sferna figura projicirana na ravninu, valjkastu plohu ili stožastu plohu.

Ako sfernu figuru nacrtamo na polusferi i postavimo polusferu na ravnu podlogu, projekcije na ravnu podlogu možemo isprobati s točkastim izvorom svjetlosti, poput reflektora ili svjetla mobilnog telefona.

Razmotrite ove sferne figure:

			
Sferne ravne linije, sferne glavne kružnice.	Jednake sferne kružnice.	Geografski koordinatni sustav.	Geografski oblici, kontinenti i otoci.

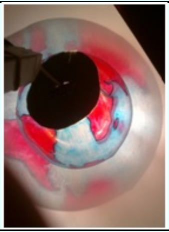
a) Izvor svjetlosti je vrlo daleko ("beskonačno") od sfere i ravnine. Svjetlosne zrake su približno okomite na stol. (Ortogonalna ili okomita projekcija.)

			
Sferne ravne linije su iskrivljene u zakrivljene linije na ravnini. Što je sferna linija bliža najdubljoj točki sfere, manja je distorzija.	Sferni kružnice su iskrivljene u elipse na ravnoj plohi, osim onih čije je središte najniža točka sfere gdje ona dodiruje ravnu plohu.	Većina okomitih linija geografskog koordinatnog sustava ne ostaje okomita na ravninu.	Oblik i veličina kopnenih masa također su iskrivljeni na ravninskoj projekciji. Što je sferna linija bliža najdubljoj točki sfere, manja je distorzija.

b) Izvor svjetlosti je točno nasuprot najniže točke sfere (stereografska projekcija).

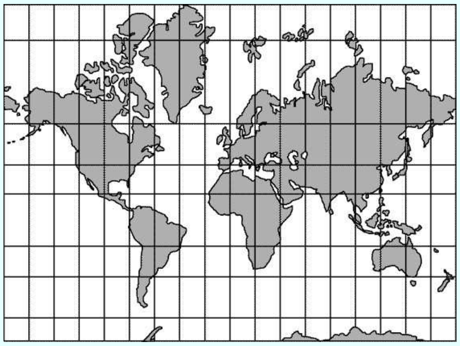
			
Sferne ravne linije su iskrivljene u zakrivljene linije na ravnini. Što je sferna linija bliža najdubljoj točki sfere, manja je distorzija.	Sferne kružnice ostaju kružnice čak i kada se projiciraju na ravnu površinu, osim onih koji prolaze kroz najvišu točku točno na mjestu izvora svjetlosti. Veličina kružnica se, međutim, mijenja: što su dalje od najniže točke, to su veće.	Pravi kutovi koordinatnog sustava također ostaju pravi kutovi na ravnini. Većina linija koordinatnog sustava je iskrivljena: projekcija geografske dužine obično nije ravna linija, projekcija kružnice geografske širine nije ravna kružnica.	Oblik kopnenih masa na ravnoj površini se ne iskrivljuje, ali se njihova veličina mijenja. Na slici se Južna Amerika čini puno većom od Afrike, iako je Afrika gotovo dvostruko veća od Južne Amerike.

c) Izvor svjetlosti je u središtu sfere. (Središnja ili gnomonska projekcija.)

			
Projekcija svih sfernih pravaca je pravac u ravnini, osim ekvatorijalnih točaka paralelnih s ravninom, koje nemaju projekcije na ravninu. Projekcije sfernih linija koje se sastaju na ekvatoru bit će paralelne.	Kružnice su iskrivljene u elipse, osim onih čije je središte najniža točka sfere.	Projekcije kružnica zemljopisne dužine bit će paralelne ravne linije, većina kružnica zemljopisne širine pretvorit će se u zakrivljene linije. Projekcije pravih kutova koordinatnog sustava najčešće ne ostaju pravi kutovi.	Na projekciji je iskrivljen oblik kontinenata.

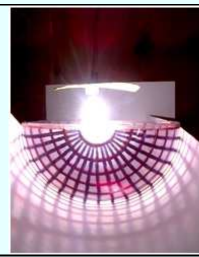
Postoji li projekcija u kojoj se i širina i dužina geografskog koordinatnog sustava mijenjaju u ravne linije na ravnini?

Povijesno gledano, Mercator je prvi na moderan način prikazao Zemlju na ravninu. Mercatorova projekcija (jedno od najvećih kartografskih otkrića



Mercatorova karta

u svjetskoj povijesti) temelji se na osnovnoj ideji da se sfera najprije projicira na cilindričnu površinu, zatim se ta projekcija izgladi u ravnu ploču, a zatim izračunima isprave distorzije.

Temeljna ideja Mercatorove projekcije: cilindrična projekcija.

Ova projekcija može se učiniti točnijom raznim izračunima, ali ne može biti ni potpuno točna. Velika je prednost što će kružnice zemljopisne širine i dužine također biti vodoravne linije. Ako plovite s kompasom[1], trebate samo povezati mjesto polaska i odredište ravnom linijom i držati se te linije tijekom plovidbe.

Lambertove konusne projekcije:

		
Jednostavna konusna projekcija.	Konusna projekcija sjeverne hemisfere.	Konusna projekcija južne hemisfere.

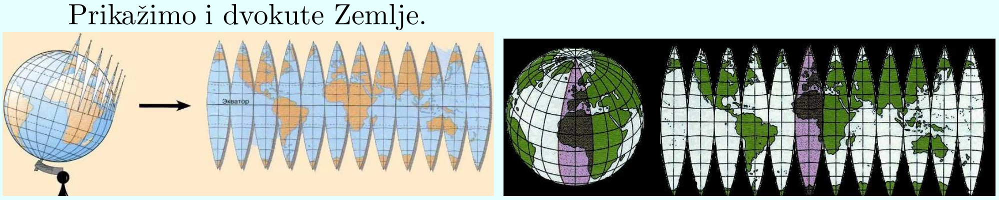
Temeljna ideja Mercatorove projekcije: konusna projekcija.

[1]To je samo približno tako u stvarnosti. Kompas uvijek pokazuje smjer magnetskog meridijana pa navedeno vrijedi samo onda kada se kompas poravna s geografskim meridijanom, tj. kada je magnetska deklinacija nula (ili zanemariva). A to je vrlo ograničeno i u prostoru i u vremenu. Da se geografski i geomagnetski sustav (definiran dipolom, a koji je prva aproksimacija stvarnog polja Zemlje) ne podudaraju ilustrira primjer *Priče o dva sferna sustava* str. 283. Za navigaciju uz pomoć karte i kompasa još treba i stvarna geomagnetska informacija, tj. deklinacija i njena godišnja promjena, a koje su funkcije i prostora i vremena.

Konusne projekcije koordinatnog sustava.

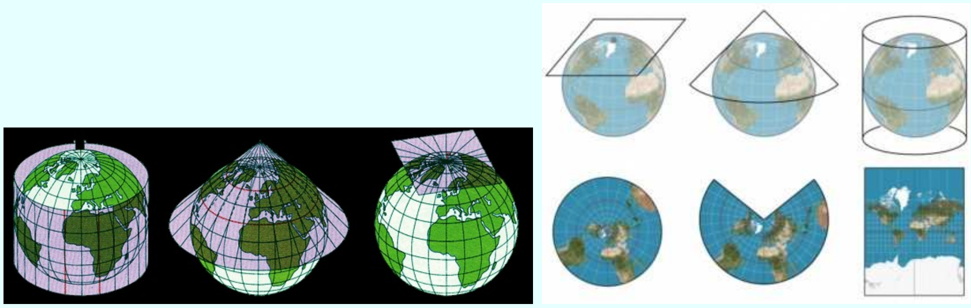
Lambertova tangencijalna konusna projekcija.

Prikažimo i dvokute Zemlje.



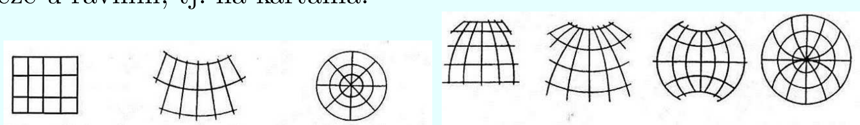
Dvokuti s meridijanima

Zemlja se može projicirati na plašt valjka, plašt stošca ili na tangencijalnu ravninu u Sjevernom polu. Te se projekcije zovu *valjkasta, stožasta* i *azimutna*.



Projiciranje sfere na ravninu

Projiciranje mreže paralela i meridijana na ravninu definira sljedeće mreže u ravnini, tj. na kartama.



Mreže na kartama

Zadatak. *Čitatelju ostavljamo kao zadatak razjasniti kojim projiciranjem sfere se dobiju gornje mreže na kartama.*

Stereografska projekcija

Detaljnije ćemo obrazložiti preslikavanje sfere na horizontalnu ravninu poznatu kao *steregrafska projekcija*.

Ovaj nam model omogućuju vizualizaciju *Riemannove sfere*[2]. Riemannova sfera je 3D model skupa kompleksnih brojeva **C**.

Probodište pravca i ravnine omogućuje *stereografsku projekciju* koja vizualizira vezu između Riemannove sfere i kompleksne ravnine (koja se još naziva *Gauß*[3] *- Argand*[4] *- Wesselova ravnina*[5]).

Svakoj točki sfere (osim "sjevernog" pola) pridružen je jedan kompleksan broj iz kompleksne ravnine. I obrnuto!

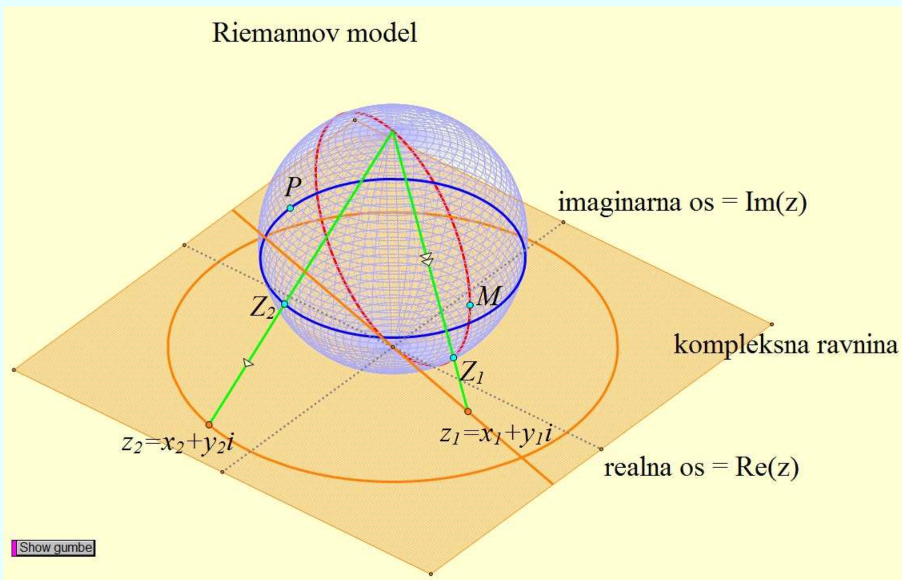
Zadatak 23. *Nacrtajte Riemannovu sferu. Gdje se u kompleksnoj ravnini nalaze točke jedne paralele? Gdje su točke meridijana?*

[2] **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826. - 1866.) njemački je matematičar.
[3] **Carl Friedrich Gauß** (1777. - 1855.), njemački matematičar
[4] **Jean Robert Argand** (1768. - 1822.), švicarski matematičar
[5] **Caspar Wessel** (1745. - 1818.), norveški matematičar

Rješenje. Sferu iskopirajmo i prilagodimo je našem zadatku.

Konstruirajmo polupravac definiran "sjevernim" polom i bilo kojom točkom Z_2 neke paralele. Konstruirajmo probodište z_2 tog polupravca s horizontalnom ravninom koja dodiruje sferu u "južnom" polu. Točka Z_2 na paraleli i probodište z_2 zrake s horizontalnom ravninom definiraju lokus (ili transformaciju!) koji crta sliku paralele tj. kružnicu probodišta (v. sl.).

Dakle, odgovarajuće točke nalaze se na kružnici sa središtem u "južnom" polu.



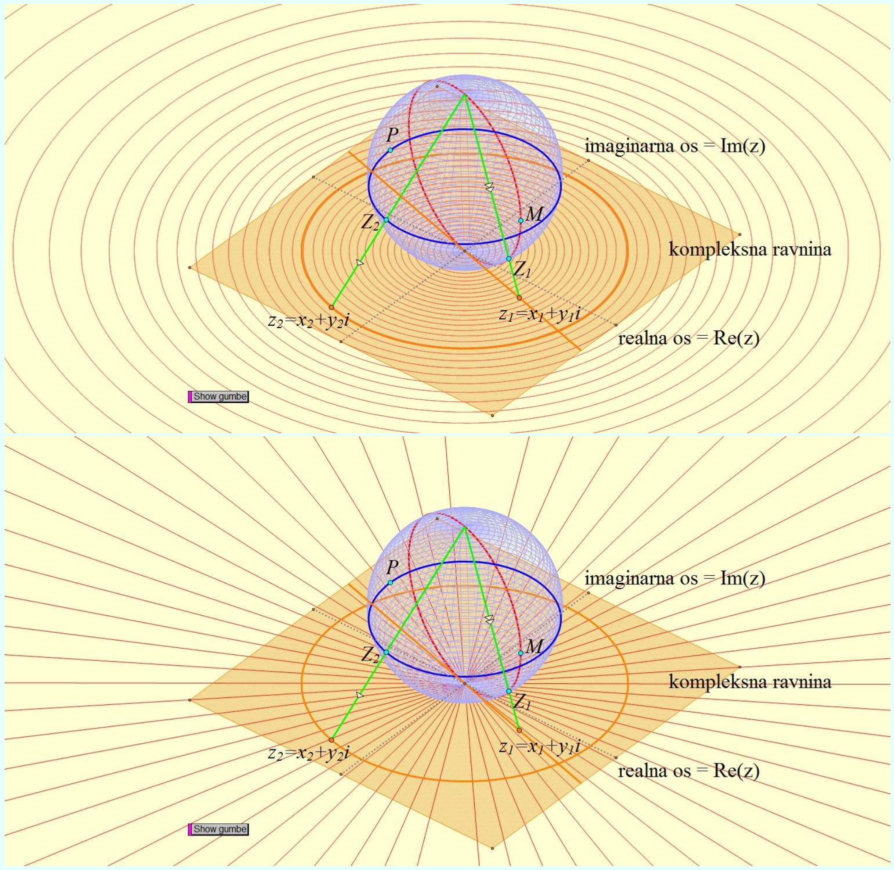
Riemannov model

Na sličan način, konstruirajmo polupravac definiran "sjevernim" polom i bilo kojom točkom Z_1 nekog meridijana. Konstruirajmo probodište z_1 tog polupravca s horizontalnom ravninom koja dodiruje sferu u "južnom" polu. Točka Z_1 na meridijanu i probodište z_1 zrake s horizontalnom ravninom definiraju lokus (ili transformaciju!) koji crta sliku meridijana tj. pravac probodišta (v. sl.).

Dakle, odgovarajuće točke nalaze se na pravcu koji prolazi "južnim" polom.

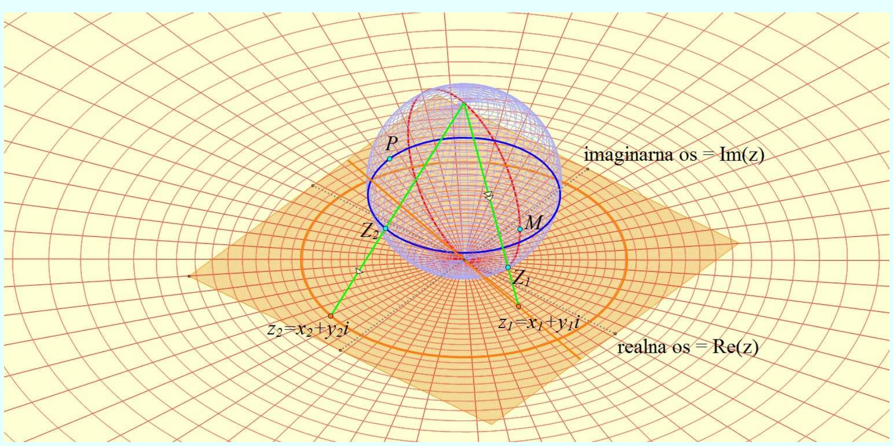
Zadatak 24. *Vizualizirajte stereografsku projekciju tj. preslikavanje sfere na ravninu.*

Rješenje. Očito je da se paralele preslikavaju u koncentrične kružnice, a meridijani u skup konkurentnih pravaca (v. sl.).



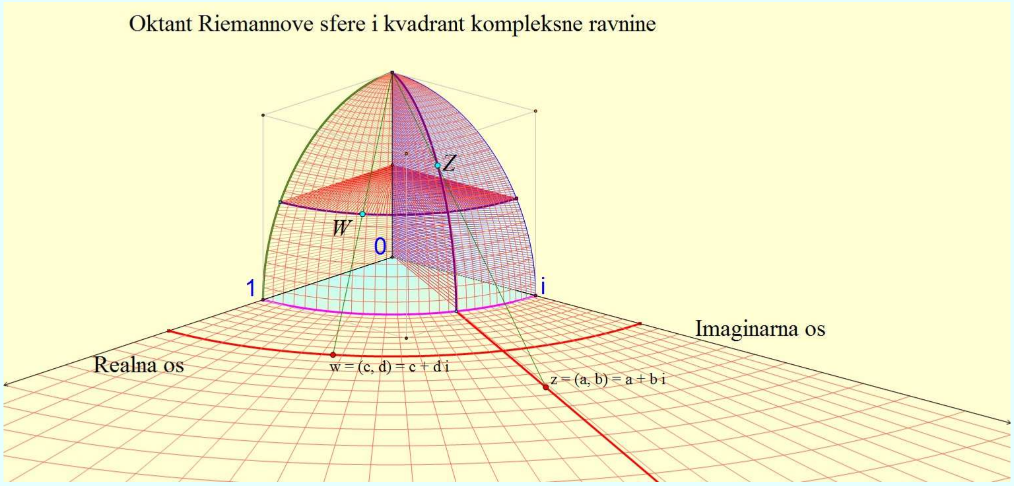
Projiciranje paralela i meridijana na ravninu

Složimo li ove dvije slike u jednu, dobivamo stereografsku projekciju (v. sl.):



Stereografska projekcija

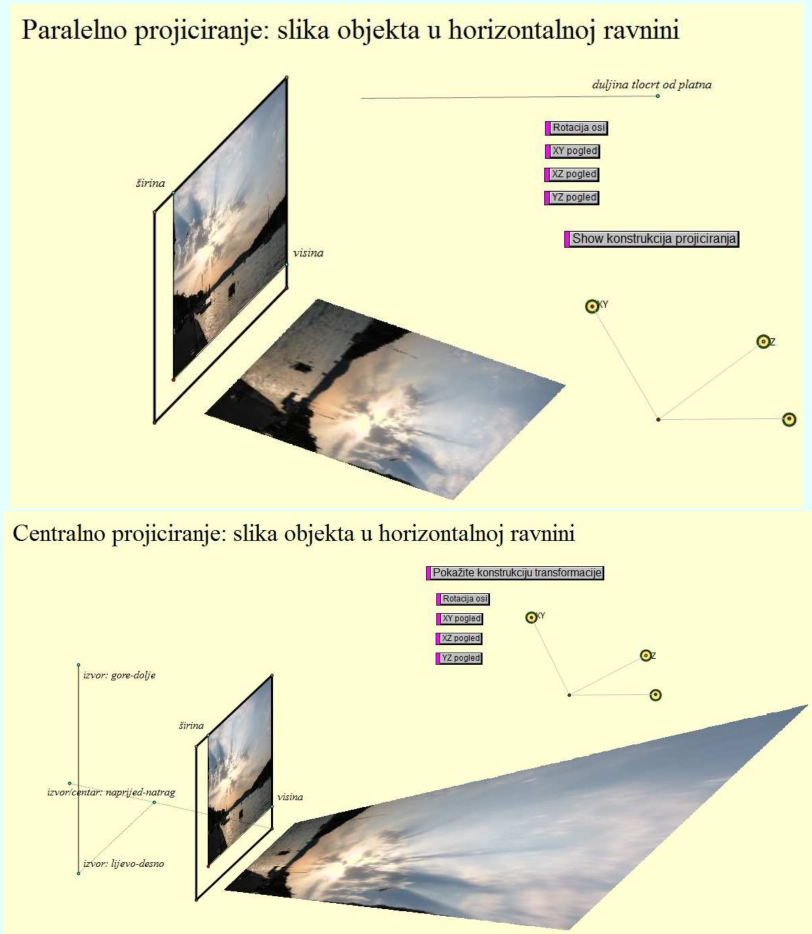
Postavimo kompleksnu ravninu središtem sfere tako da je ona tlocrtna ravnina. Tlocrtna, nacrtna i bokocrtna ravnina dijele sferu na osam dijelova. Vizualizirajmo I. kvadrant ravnine i u njemu pripadni dio (I. oktant) sfere. U ovom slučaju stereografska projekcija daje nešto drukčiju vizualizaciju skupova kompleksnih brojeva (v. sl.):



Oktant Riemannove sfere

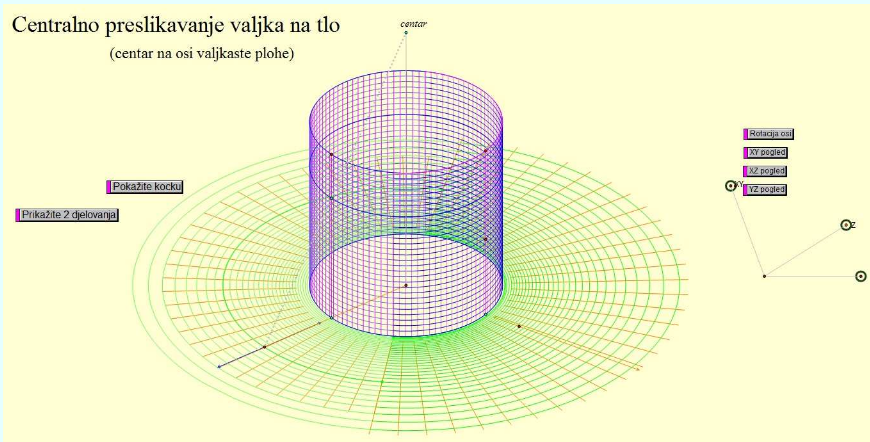
Paralelna i centralna projekcija

Ilustrirajmo paralelnu i centralnu projekciju vertikalne ravnine na horizontalnu ravninu. Nakon konstrukcije kojom se točka vertikalne ravnine preslikava na horizontalnu ravninu (konstrukcijom probodišta pravca koji definira paralelno ili centralno projiciranje) definira se transformacija kojom se uspješno preslikava fotografija (v. sl.).



Paralelno i centralno projiciranje na ravninu

Ilustrirajmo centralnu projekciju valjkaste plohe na horizontalnu ravninu. Nakon konstrukcije kojom se točka plašta preslikava na horizontalnu ravninu (konstrukcijom probodišta pravca koji definira centralno projiciranje) definira se transformacija kojom se uspješno preslikavaju izvodnice (mreža izvodnica) valjka (v.sl.).



Centralna projekcija valjkaste plohe

Veliki su slikari također uporabljivali ovakvo pridruživanje točaka valjkaste plohe i horizontalne ravnine. Njihove se slike mogu u potpunosti gledati nakon što se na sliku stavi cilindrično zrcalo.

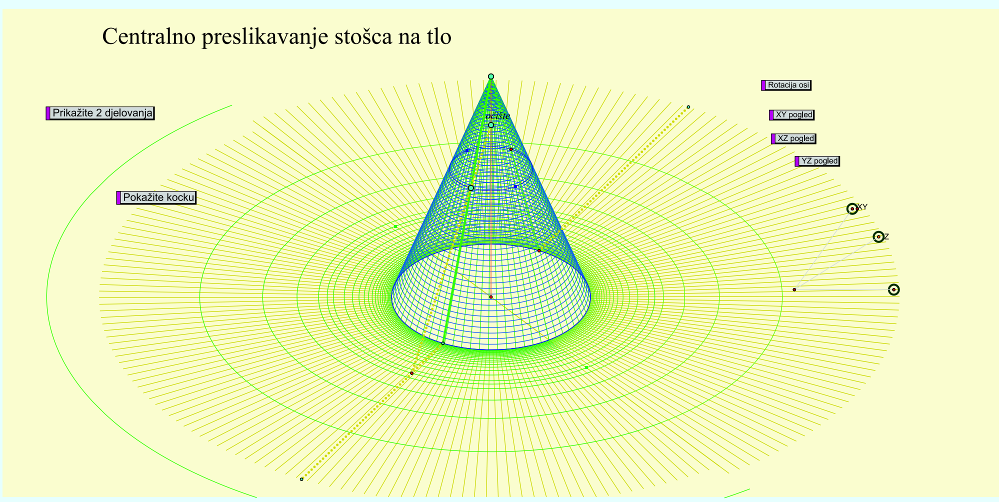
Jean Louis Vaulezard objavio je 1630. godine djelo *Perspective cilindrique et conique*. U svojem djelu razmatra slučaj kad je crtež postavljen horizontalno, a njegova se slika vidi u cilindričnomu zrcalu.

On je riješio sljedeći problem:

Treba odrediti dvije vrste krivulja u horizontalnoj ravnini tako da se u cilindričnom zrcalu vide kao odgovarajuća mreža vertikalnih i horizontalnih linija.

Tu njegovu ideju koriste mnogi slikari od 17. stoljeća pa do danas. Evo dva primjera: na slikama se vide autoportreti Mađara **Orosza** i Španjolca **Dalija**.

Ilustrirajmo centralnu projekciju stožaste plohe na horizontalnu ravninu. Nakon konstrukcije kojom se točka plašta stošca preslikava na horizontalnu ravninu (konstrukcijom probodišta pravca koji definira centralno projiciranje) definira se transformacija kojom se uspješno preslikavaju izvodnice (mreža izvodnica) stošca (v. sl.):



Centralna projekcija stožaste plohe

Problemima vizualizacije i preslikavanja točaka sfere, plašta valjka i plašta stošca na ravninu ili na zakrivljenu plohu bavi se kartografija.

Predlažemo čitatelju da kao projekt riješi sljedeći zadatak.

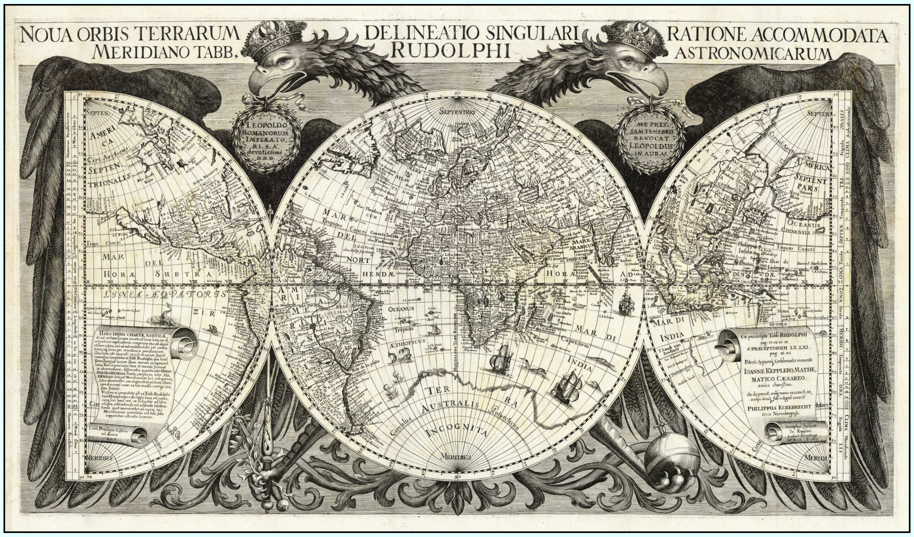
Zadatak 25. *Zadana je sfera na tlocrtnoj ravnini. Konstruirajte projekciju točaka sfere na plašt sferi opisanog:*

a) valjka,

b) stošca.

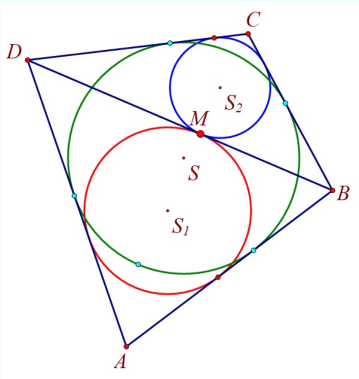
c) Kako se zovu zemljopisne karte koje se dobivaju preslikavanjem Zemlje (kao sfere) na valjak ili stožac?

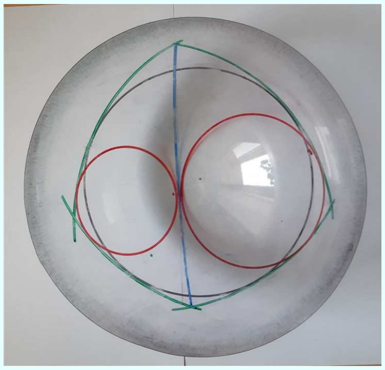
Zadatak 26. *Johanes Kepler objavio je sljedeću kartu.*

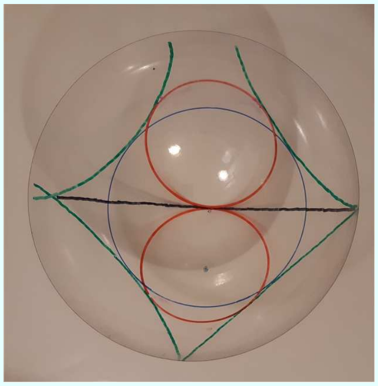


Koje preslikavanje sfere je ovdje naznačeno?

9. Hiperbolička geometrija







Poučak u tri geometrije: Euklidskoj, sfernoj i hiperboličkoj

1. Uvod

U prethodnim poglavljima bavili smo se geometrijom ravne i sferne plohe. Osnovne pojmove poznavali su već stari znanstvenici, a od njih su stvorili sustav ravninske i sferne geometrije. Ovi geometrijski sustavi spadaju među najveća dostignuća ljudskog uma i prisutni su u znanosti, umjetnosti i našem svakodnevnom životu.

Još od davnina matematičari su se bavili pitanjem postoje li osim geometrije ravnine i sfere još neke vrste geometrije koje se temelje na istim pojmovima kao geometrija ravnine i sfere (točka, dužina, pravac, udaljenost, kut, kružnice, površina itd.), ali se razlikuje i od ravnine i od sfere u nekim, vrlo važnim stvarima.

Sustavi temeljeni na ravnini i sferi bili su toliko savršeni da su matematičari stoljećima bili uvjereni da nijedan drugi sustav ne može postojati. To su više puta pokušavali bezuspješno dokazati.

Lambert, jedan od najvećih znanstvenika, napisao je (slobodno): *Kada pokušavam dokazati da takva geometrija ne može postojati, osjećam da samo mali korak nedostaje dokazu, ali onda shvatim da je ovaj korak poanta i da mogu početi ispočetka.*

Nakon dvije tisuće godina, prije dvjestotinjak godina, pojavila se ideja da doista postoji i treći sustav, ali mi smo toliko navikli na stare sustave da nam je teško prihvatiti drugačiji način razmišljanja. Trebalo je još sto godina da znanstveni svijet prihvati i primijeni treću geometriju: hiperboličku geometriju.

Ravninska geometrija koja se uči u školi toliko je ukorijenjena u nama da je čak i sferna geometrija većini nas čudna i neobična, iako nam je sferni oblik poznat svima, od voća do kuglice, od kuglice šljive do mjehurića sapunice. Hiperbolička geometrija do danas se većini ljudi čini neshvatljivom, suprotno zdravom razumu, koji samo odabrani mogu razumjeti.

János Bolyai imao je dvadeset godina kada je došao do osnovne ideje nove geometrije. U radosti otkrića, ocu je napisao: *Ni iz čega sam stvorio novi, drugačiji svijet.*

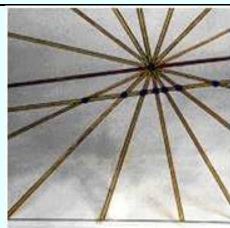
U ovom poglavlju upoznajemo ovaj novi svijet, nadovezujući se na sve što smo naučili o ravnini i sferi. Ovo može biti uspješno samo ako čitatelj prihvati naš vrlo važan zahtjev:

Samostalno odgovorite na pitanja! Ne tražite na internetu ili u knjigama, ne prepisujte tekstove koje ne razumijete, polovično ili uopće, nego idite putem koji vodi do pravog razumijevanja! Nastavite čitati samo ako ste već sami odgovorili na pitanje!

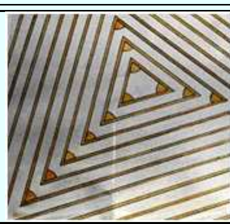
2. Pitanja koja vode do nove geometrije

Pretpostavimo da postoji treća geometrija u kojoj postoje točke i beskonačno duge linije, ali se paralelogrami, trokuti i četverokuti ponašaju drugačije nego na ravnini ili sferi.

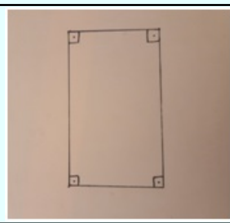
a) **Paralele**

		?
Slika 1. U ravnini, između pravaca koji prolaze točkom, samo je jedan pravac paralelan s vanjskim pravcem.	Slika 2. Na sferi među pravcima koji prolaze kroz točku nema pravca koji je paralelan s vanjskim pravcem.	Slika 3. U trećoj geometriji, koliko linija može biti paralelno s vanjskim pravcem?

b) **Zbroj kutova trokuta**

		?
Slika 4. Zbroj unutarnjih kutova svakog trokuta u ravnini je 180°.	Slika 5. Na sferi zbroj unutarnjih kutova trokuta stalno raste kako idemo od manjih prema većim.	Slika 6. U trećoj geometriji, koliki je zbroj kutova trokuta?

c) **Četvrti kut četverokuta**

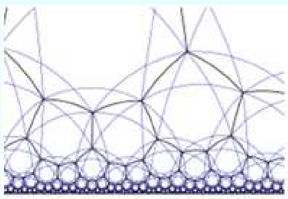
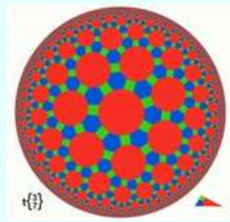
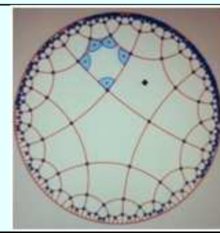
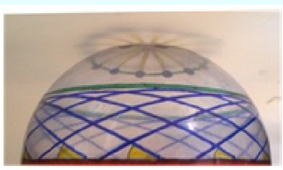
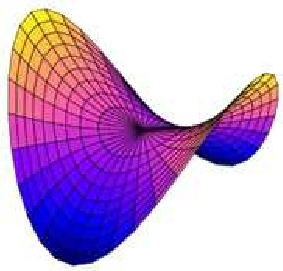
		
Slika 7. U ravnini, četverokutu čija su tri kuta prava kuta, četvrti kut je također pravi kut.	Slika 8. Na sferi, četverokutu čija su tri kuta pravi kutovi, četvrti kut je tupi kut.	Slika 9. U trećoj geometriji, kolika je veličina četvrtog kuta četverokuta koji sadrži tri prava kuta?

3. Koju plohu odabrati za treću geometriju?

Ravninska geometrija odvija se na beskonačnoj ravnini, a sferna geometrija na konačnoj sfernoj površini.

	
Slika 10. Apstraktni krajolik u geometrijskim uzorcima	Slika 11. **Dick Termes**: *Kockasti svemir*

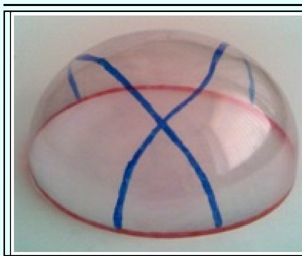
Pitanje: Postoji mnogo različitih modela hiperboličke geometrije. Što bi od sljedećeg Čitatelj izabrao?

		
Slika 12. Poincaréova gornja poluravnina. Točke donje rubne linije više ne pripadaju modelu.	Slika 13. Beltrami-Klein ravninski krug. Obodne točke kruga više ne pripadaju modelu.	Slika 14. Poincaréov ravninski krug. Obodne točke kruga više ne pripadaju modelu.
		
Slika 15. Poincaréova polutka. Obodne točke točaka ekvatora polutke više ne pripadaju modelu.	Slika 16. Beskonačna sedlasta površina.	Slika 17. Model pletenog tekstila Daina Taimina-Henderson može se nastaviti koliko god želite, on je beskrajan.

`Lenart - odgovor datoteka.gsp`.

Odgovor je na stranici 213.

Pitanje: Sijeku li se linije na polusferi?

		
Slika 18. Sijeku li se dvije linije?	Slika 19. Sijeku li se dvije linije?	Slika 20. Sijeku li se a i b? A a i c?

4. Što odabrati kao najjednostavniji element hiperboličke geometrije na polusfernoj plohi?

Odgovor je na stranici 213.

	
Slika 21. Točke na otvorenoj polusfernoj površini.	Slika 22. Točke na otvorenoj polusfernoj površini.

Otvorena površina polusfere znači da su točke ekvatora nedostupne stanovnicima polusfere.

5. Odlučujuće pitanje:
Kakva bi trebala biti ravna crta na polusfernoj plohi?

		
Slika 23. Možemo li pravce u ravnini izabrati kao pravce na polusferi?	Slika 24. Možemo li izabrati sferne crte kao ravne na polusferi?	Slika 25. Hiperbolične linije?

Pitanja:
Možemo li odabrati ravninu kao ravnu liniju na polusferi?
Možemo li odabrati sfernu liniju kao ravnu liniju na polusferi?
Možemo li izabrati polukružnice okomite na ekvator, koje podsjećaju na rezanje luka, kao ravne na polusferi?

`Lenart - odgovor datoteka.gsp`.

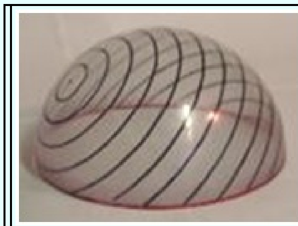
Odgovor je na stranici 213.

6. Koja je od ovih linija najduža?

Slika 26.

Odgovor je na stranici 213.

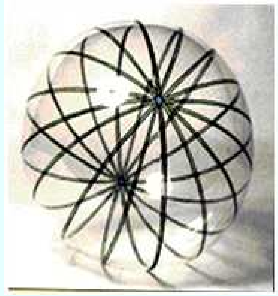
7. Koja je linija hiperbolična linija?

		
Slika 27. Koja je linija hiperbolična?	Slika 28. Koja je linija hiperbolična?	Slika 29. Koja je linija hiperbolična?
		
Slika 30. Koja je linija hiperbolična?	Slika 31. Koja je linija hiperbolična?	Slika 32. Koja je linija hiperbolična?

`Lenart - odgovor datoteka.gsp`.

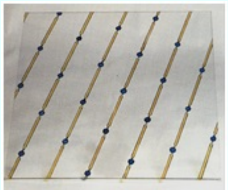
Odgovor je na stranici 213.

U sve tri geometrije, skup ravnih linija koje imaju jednu presječnu točku naziva se *pramenom pravaca* (ili zraka) ili *skupom konkurentnih pravaca*.

		
Slika 33. Planarni pramen pravaca.	Slika 34. Sferni pramen.	Slika 35 a) i b) Hiperbolički pramen.

8. Koje hiperbolične pravce trebamo nazvati paralelnim?

Sfera ne pomaže u odgovoru na pitanje jer nema paralelnih pravaca. Polazeći od paralelnih pravaca u ravnini, možemo birati izmedu dvije opcije za hiperbolične linije.

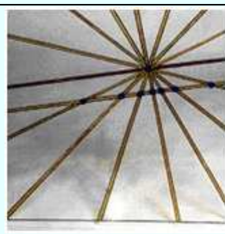
		
Slika 36. Ravni paralelni pravci.	Slika 37. Jesu li to paralelne hiperbolične linije?	Slika 38. Jesu li to paralelne hiperbolične linije?

Ovo je jedno od pitanja koje je zaokupljalo matematičare tisućama godina.

`Lenart - odgovor datoteka.gsp`.

Odgovor je na stranici 213.

9. Zadani su pravac pramena i pravac izvan njega:
Koliko se paralelnih pravaca koji ne sijeku vanjski pravac može naći u pramenu?

		
Slika 39. Ravninski pramen pravaca i vanjski pravac.	Slika 40. Sferni polumjeri i vanjska kružnica.	Slika 41. Hiperbolički pramen i vanjska linija.

`Lenart - odgovor datoteka.gsp`.

Odgovor je na stranici 213.

10. Mjerenje udaljenosti i kuta na hiperboličkoj polusferi

Mjerenje udaljenosti je manje intuitivno jer polazeći od jedne točke otvorene polusfere, nikada ne možemo doći do ekvatora. To je moguće samo ako se naši koraci vanjskom promatraču čine sve kraćima. Kutovi su, s druge strane, dobro predstavljeni polusferičnim modelom: kutovi koji se čine jednakima stvarno su jednaki, kutovi koji izgledaju kao pravi kutovi su stvarno pravi kutovi. Tako možemo vjerovati svojim očima kada mjerimo kutove, za razliku od mjerenja udaljenosti. Mnogi problemi hiperboličke geometrije postaju jasniji i lakši za razumijevanje ako problem pokušamo formulirati i riješiti s kutovima, a ne s udaljenostima.

11. Koliki je zbroj unutarnjih kutova trokuta?

Slike prikazuju pravilne trokute jer na najzorniji način prikazuju promjenu kutova.

		
Slika 42. Ravna linija zraka i vanjska linija.	Slika 43. Sferni polumjeri i vanjska ravna linija.	Slika 44. Hiperbolička zraka i vanjska linija.

`Lénárt - odgovor datoteka.gsp`.

Odgovor je na stranici 213.

12. Završne riječi

Ovaj kratki uvod može biti dovoljan za ublažiti vaše strahove o hiperboličkoj geometriji koja je puna uzbudljivih pitanja. Evo nekoliko takvih pitanja:

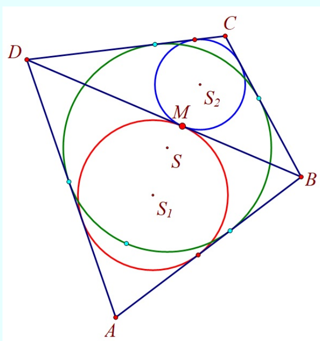
1. Kako izmjeriti površinu? Isto kao na ravnini ili sferi ili vam je potrebna drugačija metoda?
2. Što su hiperboličke kružnice? Jesu li iste kao na ravnini ili sferi ili su im oblici iskrivljeni kao kod jedinica za mjerenje udaljenosti?
3. Je li moguće imati kružnicu koja nije ravna, ali nema središte?
4. Koliko pravih kutova može imati hiperbolički mnogokut?
5. Kako izgleda pravilan hiperbolički poligon?
6. Postoji li hiperbolički Pitagorin poučak?
7. Postoji li hiperbolička trigonometrija koja se temelji na ravninskoj i sfernoj trigonometriji?

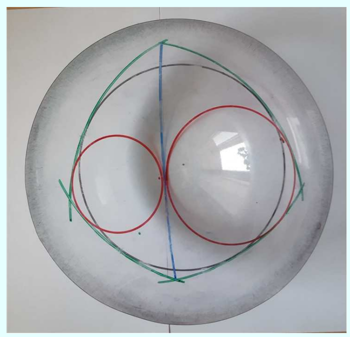
Primjer poučka iz apsolutne geometrije

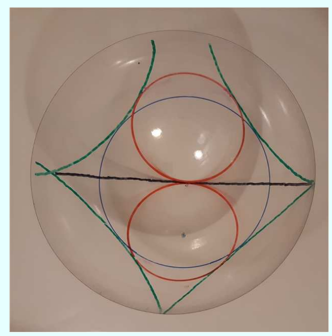
Evo tvrdnje poučka koji su otkrili i dokazali J. Gusić i P. Mladinić [15.]uz pomoć B. Pavkovića:

Četverokut je tangencijalan ako i samo ako su kružnice upisane, u dva trokuta formirana dijagonalom, tangencijalne jedna drugoj.
i za koji naslućujemo da vrijedi i u drugim geometrijama.

Istinitost tvrdnje poučka ilustrirana je na slikama dobivenima u Euklidovoj, sfernoj i hiperboličnoj geometriji.







Naravno da ovo naslućivanje treba strogo matematički dokazati u drugim geometrijama kao što je dokazana tvrdnja u Euklidovoj geometriji.

Tvrdnje/poučci koji vrijede u ove tri geometrije pripadaju *apsolutnoj geometriji*.

Dakle, ovo je primjer jednog mogućeg takvog poučka!

Odgovori na neka postavljena pitanja

Odgovori na neka postavljena pitanja nalaze se na `Lenart - odgovor datoteka.gsp` i na stranici 213.

Odgovori na pitanja

3. Koju plohu odabrati za treću geometriju?

Hiperbolička geometrija se može graditi na bilo kojem modelu, ovisno o tome koji nam je model razumljiviji i vizualniji. Kao prvi korak odabiremo **Poincaréov otvoreni polusferični model**, čija granična linija i ekvator više nisu dio modela. Za one koji žive na ovoj polusferi, ekvator je nedostižan, kao loviti dugu na nebu. U tom smislu, ekvator u ovom modelu predstavlja beskonačnost.

Pravci na slici 18. sijeku se unutar polusfere, imaju zajedničku točku. Pravci na slici 19. sijeku se samo na ekvatoru, tako da nemaju dodirnih točaka unutar modela. Slično, na slici 20., pravci a i b se sijeku, ali pravci a i c nemaju zajedničke točke.

4. Što odabrati kao najjednostavniji element hiperboličke geometrije na polusfernoj plohi?

Točku na otvorenoj polusfernoj plohi prihvaćamo kao najjednostavniji element. Taj izbor je potpuno proizvoljan, kao što je slučaj s ravninom i sferom. Prema suvremenoj geometriji biramo najjednostavniji element koji želimo (točku, par točaka, pravac, kružnicu itd.). Pitanje je koliko je uporabljiv geometrijski sustav koji gradimo na ovom osnovnom elementu.

5. Odlučujuće pitanje: Kakva bi trebala biti ravna crta na polusfernoj plohi?

Ravna linija (pravac) ne dolazi u obzir jer se ne može prilagoditi polusfernoj površini. Pola sferne crte bi stalo na sferu, ali na taj način bismo u biti stvorili geometriju sličnu klasičnoj sfernoj geometriji. Možemo pokušati sa sfernim polukružnicama, koje podsjećaju na rezanje luka, okomito na napušteni ekvator polusferične površine. Je li moguće izgraditi novu vrstu smislene geometrije s ravnim linija poput hiperboličkih?

6. Koja je od ovih linija najduža?

Sve su iste duljine: BESKONAČNO duge jer im krajnje točke padaju na ekvator čije točke više ne pripadaju modelu polusfere. Za hiperboličku geometriju, ove linije su nerazlučive. Ono što se čini najmanjim, jednako je dugo kao i ono što se čini najvećim: beskonačno dugo, baš kao i svaki pravac u ravnini!

7. Koja je linija hiperbolična linija?

(sl. 27.) Nijedna jer nijedna nije okomita na ekvator. (Jedino se točka može nazvati degeneriranom linijom!)

(sl. 28.) Samo geografska dužina; niti jedna geografska širina; niti ekvator jer ne pripada modelu.

(sl. 29.) Sve geografske širine, a jedina geografska dužina je ona koja prolazi središtem polusfere.

(sl. 30.) Sve sferne polukružnice na slici jer su sve okomite na ekvator.

(sl. 31.) Sve kružnice zemljopisne dužine jer su sve okomite na ekvator. Svaka od njih prolazi kroz točku na polusferi, središtu polusfere.

(sl. 32.) Sve polukružnice prikazane na slici jer su sve okomite na ekvator. Svaka od njih prolazi kroz neku točku na polusferi, iako ta točka nije središte polusfere.

Za vanjskog promatrača, linije koje prolaze kroz točku na slici 31. su ljepše i simetričnije od linija na slici 32. Međutim, sa stajališta hiperboličke geometrije, oblici na slikama 31. i 32. potpuno su identični i nerazlučivi.

8. Koje hiperbolične pravce trebamo nazvati paralelnim?

Hiperboličke linije drugog lika više podsjećaju na ravninske paralele prvog lika jer se ne sijeku i jednako su udaljene jedna od druge u sfernom smislu.

S hiperboličkom udaljenošću, međutim, ne možemo vjerovati svojim očima jer nikada ne

možemo doći do ekvatora, a kako se približavamo ekvatoru, hiperbolička udaljenost se povećava.
Za pravce na trećoj slici također vrijedi da se ne sijeku jer točka ekvatora u kojoj bi se sastajale više ne pripada modelu. S druge strane, udaljenost između dviju ravnih linija se smanjuje i približava nuli pa se ni tu ne može održati konstantna udaljenost.
Prednost pravaca na trećoj slici je u tome što idu u istom smjeru, prema beskonačno udaljenoj točki ekvatora, kao što idu u istom smjeru i ravni paralelni pravci na prvoj slici. Stoga ima smisla nazvati paralelnim linijama pravce koji idu u istom smjeru na trećoj slici, za razliku od divergentnih linija na drugoj slici.
To je bila tvrdnja koju mnogi matematičari nisu mogli prihvatiti: beskonačno duge ravne linije koje se stalno približavaju jedna drugoj, ali se nikada ne susreću!

9. Zadani su pramen pravaca i pravac izvan njega:
Koliko se paralelnih pravaca koji ne sijeku vanjski pravac može naći u pramenu?

U ravnini u pramenu nalazimo jedan pravac koji ne siječe vanjski pravac (sl. 39.). Sfera nema u pramenu polumjera niti jedan polumjer koji ne siječe vanjsku liniju (sl. 40). Pri ispitivanju hiperboličkog slučaja možemo poći od činjenice da su sve linije na slici hiperbolički pramen (sl. 41.). Ispitajmo koliko linija koje prolaze kroz zajedničku točku ne sijeku vanjsku liniju koja sadrži plave točke sjecišta.
Beskonačan broj linija siječe vanjsku liniju, od kojih se nekoliko može vidjeti na dijagramu. Krečući se prema ekvatoru, međutim, u oba smjera postojat će prva linija, koja bi sjekla vanjsku liniju u jednoj točki na ekvatoru, ali te točke više ne pripadaju modelu pa će te dvije linije biti "samo-ne-siječenje". Nijedna od hiperboličkih linija između dviju linija koje se "samo ne sijeku", u pojasu označenom narančastom bojom na slici, ne siječe vanjsku liniju!
U hiperboličkom primjeru postoji, dakle, beskonačan broj linija koje se sijeku i beskonačan broj linija koje se ne sijeku u odnosu na vanjsku liniju. Pravci koji se sijeku i pravci koji se ne sijeku odvojeni su dvama pravcima koji se "samo ne sijeku" u posebnom položaju, a koje se mogu nazvati *paralelnim* ili *asimptotskim pravcima.*

11. Koliki je zbroj unutarnjih kutova trokuta?

Zbroj kutova ravnog trokuta uvijek je 180°.
Zbroj kutova sfernog trokuta počinje od 180° skupljenog u točku i raste do 540° kada preraste u glavnu kružnicu.
Zbroj kutova hiperboličkog trokuta počinje od 180° skupljen do točke i smanjuje se do *graničnog trokuta* ili *asimptotskog trokuta* prema 0°.
Hiperbolički granični trokut nije pravi trokut, već degenerirani trokut. On nema vrhove jer vrhovi padaju na ekvator čije točke ne pripadaju modelu. Bilo koje dvije stranice su paralelne i dodiruju 0°. Zbroj kutova je dakle $0^\circ + 0^\circ + 0^\circ = 0^\circ$.

10. Sferna trigonometrija

Anna Rybak u radu s učenicima u Poljskoj

Kao što se odnosi trigonometrijskih funkcija uporabljuju za ravninske trokute, tako se oni mogu "prilagoditi" i za sferne trokute, tj. za sfernu trigonometriju.

Sferna se trigonometrija počela razvijati za potrebe navigacije, astronomskih promatranja kretanja nebeskih tijela itd. čak i ranije nego ravninska trigonometrija.

Na stranici 2. kratko smo citirali što je J. Majcen napisao o povijesnom razvoju sferne trigonometrije pa o tome ovdje ne ćemo elaborirati.

U ovom ćemo poglavlju obraditi numerički dio sferne geometrije.

Pojmove koji su definirani/opisani u prethodnim poglavljima ovdje ne ćemo ponavljati, nego ćemo ih nastaviti uporabljivati.

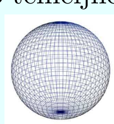
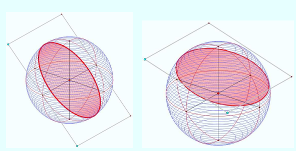
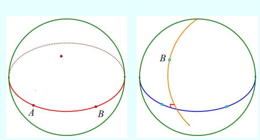
Nove pojmove i činjenice koje će nam trebati u elaboriranju sferne trigonometrije naznačit ćemo sukladno načinu u ovoj knjizi.

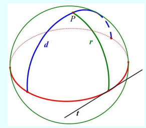
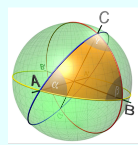
U knjizi ćemo uporabljivati elementarne formule sferne trigonometrije i načine rješavanja problema ne zadirući u specijalne formule koje su se razvile/otkrile tijekom povijesti sferne trigonometrije.

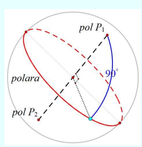
Ideja je da se ti postupci/rješavanja zadataka mogu uspoređivati s postupcima/rješavanjima zadataka u ravninskoj trigonometriji. Na taj se način dobiva dublji uvid u te trigonometrije: zašto je i što isto, zašto je i što slično i zašto je i što potpuno različito. Posebice će biti zanimljivo istražiti pod kojim uvjetima formule i tvrdnje sferne trigonometrije "prelaze" u formule i tvrdnje ravninske trigonometrije.

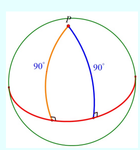
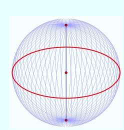
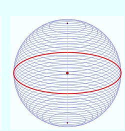
10.1. Temeljni pojmovi

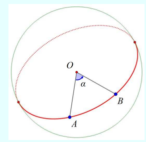
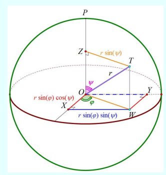
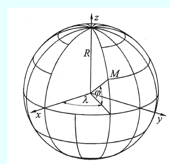
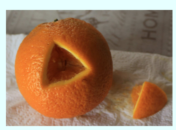
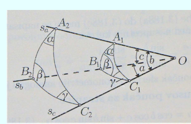
Nabrojimo temeljne pojmove (stare i nove) koje ćemo trebati:

- sfera 
- glavna i mala kružnica 
- antipodalne točke: *dvije točke koje su dijametralno suprotne*
- udaljenost točaka 

- sferne krivulje 
- polumjer, promjer i tangenta 
- dvokut 
- sferni trokut 
- kutovi i stranice sfernog trokuta 

- sukladnost ili kongruentnost sfernih trokuta
- pol i polara 

- sferni eksces sfernog trokuta: $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$
- Eulerov trokut: $0 < a, b, c < 180^\circ$ i $0 < \alpha, \beta, \gamma < 180^\circ$
- pravokutni sferni trokut 
- sferni Pitagorin poučak: $\cos c = \cos a \cos b$
- kosokutni sferni trokut
- ekvator, meridijani (podnevnici) i paralele  

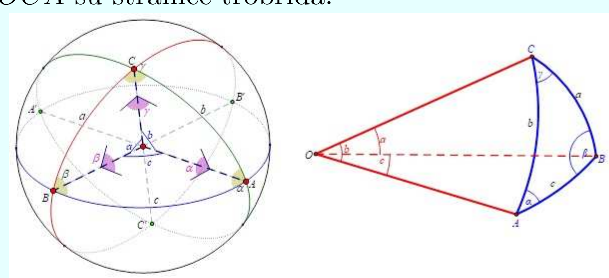
- ortodroma - *najkraća spojnica dviju točaka na sferi*
- loksodroma - *krivulja koja sve meridijane siječe pod istim kutom*
- kutna i dužinska mjera sferne udaljenosti 
- sferne i geografske koordinate 
- geografska duljina i širina 
- trobrid  
- zbroj stranica sfernog trokuta i zbroj dviju stranica:
  $0° < a + b + c < 360°$ i $a + b > c$
- zbroj kutova sfernog trokuta: $180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$
- zbroj dvaju kutova: $\alpha + \beta < \gamma + 180°$
- nasuprotne stranice i kutovi:
  većem kutu nasuprot leži veća stranica i obrnuto
- površina sfernog trokuta: $P = \varepsilon \cdot R^2 \cdot \frac{\pi}{180°}$
- sferni poučak o sinusu: $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$
- sferni poučak o kosinusu za stranice:
  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$
  $\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta$
  $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$
- sferni poučak o kosinusu za kutove:
  $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$
  $\cos \beta = -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b$
  $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c.$

10.2. Sferni poučak o sinusu

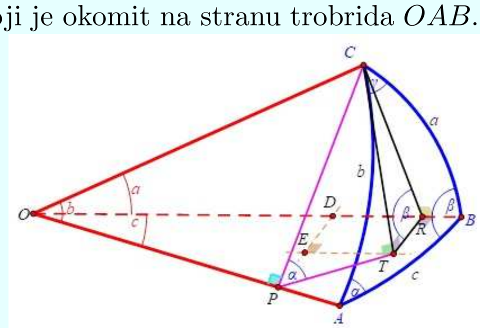
U literaturi se mogu naći različiti izvodi osnovnih formula za rješavanje sfernog trokuta. Budući da nas zanimaju njihove primjene, prikazat ćemo jedan od mogućih izvoda, pomoću trobrida.

Zadani su je jedinična sfera sa središtem u točki O, na njoj sferni trokut $\triangle ABC$ i pripadni trobrid.

Naime, ako se trobrid presiječe sferom, kojoj je središte u vrhu trobrida, presjek će biti sferni trokut. Bridovi trobrida probadaju sferu u vrhovima sfernog trokuta, a stranice trobrida sijeku sferu u glavnim kružnicama čiji lukovi omeđuju sferni trokut. OA, OB, OC su bridovi trobrida, a OAB, OBC, OCA su stranice trobrida.



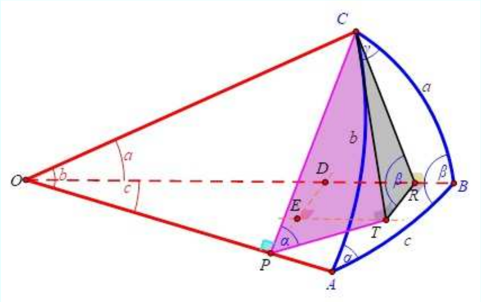
Vrhom C sfernog trokuta $\triangle ABC$ konstruirajmo/ nacrtajmo dvije ravnine okomite na bridove OA, OB trobrida. Te dvije ravnine se presijecaju duž pravca CT koji je okomit na stranu trobrida OAB.



Prema poučku o tri normale iz stereometrije koji glasi:

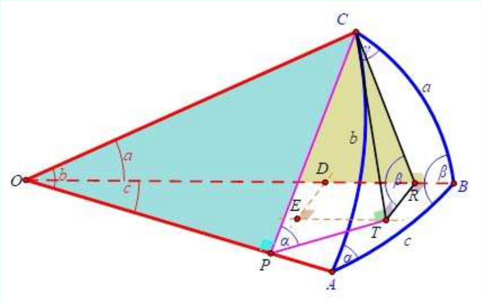
Ako je ortogonalna projekcija p' pravca p na ravninu α okomita na neki pravac q te ravnine, onda je i pravac p okomit na q i obratno $p \perp q$ povlači $p' \perp q$.

Mora biti $\overline{PT} \perp \overline{OA}$, odnosno $\overline{TR} \perp OB$. To će imati za posljedicu da su određeni kutovi identičnih veličina, tj. $|\angle CPT| = |\angle CAB| = \alpha$ i $|\angle CRT| = |\angle ABC| = \beta$.



Iz pravokutnih trokuta $\triangle PTC$ i $\triangle RTC$ (pogledajte sliku) vrijedi:
$$\sin\alpha = \frac{|CT|}{|CP|} \text{ i } \sin\beta = \frac{|CT|}{|CR|}.$$
Ako to zapišemo malo drugačije dobit ćemo da je

$$|CP| \cdot \sin\alpha = |CT| = |CR| \cdot \sin\beta. \qquad (*)$$



Pogledajmo pravokutne trokute $\triangle OPC$ i $\triangle OCR$. Vrijedi:
$$\sin b = \frac{|CP|}{|OC|} \text{ i } \sin a = \frac{|CR|}{|OC|}.$$
Odnosno, izraze $|CP| = |OC|\sin b$, $|CR| = |OC|\sin a$, uvrstimo u (*) pa dobijemo

$$|OC| \cdot \sin b \cdot \sin\alpha = |OC| \cdot \sin a \cdot \sin\beta$$

odnosno

$$\sin a \cdot \sin\beta = \sin b \cdot \sin\alpha \Rightarrow \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Cikličnom zamjenom elemenata sfernog trokuta dobit ćemo slijedeće izraze:

$$\frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \text{ i } \frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Spojivši sva tri razmjera pišemo:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Na ovaj način smo izveli **sferni poučak o sinusu** koji glasi:
Sinusi stranica sfernog trokuta odnose se kao sinusi onih kutova, koji su tim stranicama nasuprot.

Poučak o sinusu može se primijeniti, kad su od sfernog trokuta zadane:

1. Dvije stranice i kut, koji je nasuprot jednoj od njih, a traži se kut, koji je nasuprot drugoj stranici;

2. Dva kuta i stranica, koja je nasuprot jednom od njih, a traži se stranica, koja je nasuprot drugom kutu.

U mapi *GSP datoteka* u datoteci Primjena sfernog poučka o sinusu i kosinusu stranica dani su svi koraci rješavanja i komentari istih kroz upute za rješavanje.

Primjer 2. *Zadane su dvije stranice* $a = 33°1'45''$ *i* $b = 155°5'18''$ *kosokutnog sfernog trokuta i kut* $\alpha = 70°20'50''$. *Izračunajmo kut* β.

Rješenje. Zadane su dvije stranice i kut nasuprot jednoj, što sugerira primjenu sfernog poučka o sinusu. Uvrštavanjem zadanih elemenata sfernog trokuta u izraz sfernog poučka o sinusu slijedi da je $\sin\beta = \dfrac{\sin b \cdot \sin\alpha}{\sin a} = 0,727771797 < 1$, tj. postoji takav sferni kosokutni trokut i možemo dalje računati. Dobijamo da je $\beta_1 = 46°41'59,7''$ i $\beta_2 = 133°18'0,3''$ (zašto?). Medutim, kut β_2 je rješenje jer ispunjava uvjet: $a < b \Rightarrow \alpha < \beta$.

Primjer 3. *Zadane su dvije stranice* $a = 42°36'10''$ *i* $b = 127°19'30''$ *kosokutnog sfernog trokuta i kut* $\alpha = 37°18'40''$. *Izračunajmo kut* β.

Rješenje. Zadane su dvije stranice i kut nasuprot jednoj, što sugerira primjenu sfernog poučka o sinusu. Uvrštavanjem zadanih elemenata sfernog trokuta u izraz sfernog poučka o sinusu slijedi da je $\sin\beta = \dfrac{\sin b \cdot \sin\alpha}{\sin a} = 0,71207237 < 1$, tj. postoji takav sferni kosokutni trokut i možemo dalje računati. Dobijamo da je $\beta_1 = 45°24'14''$ i $\beta_2 = 134°35'46''$ (zašto?). Oba izračunata kuta bi mogla biti rješenje (zašto?). Kutovi β_1 i β_2 bit će rješenje ako ispunjavaju sljedeći uvjet:

$$a - b < 180° \;\Rightarrow\; \alpha + \beta < 180°.$$

Oba su kuta rješenje.

Primjer 4. *Zadane su dvije stranice* $a = 20°10'$ *i* $b = 127°19'30''$ *i kut* $\alpha = 37°18'40''$. *Izračunajmo kut* β.

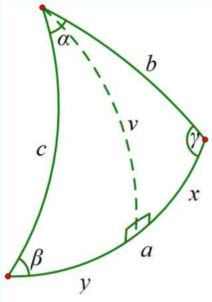
Rješenje. Zadane su dvije stranice i kut nasuprot jednoj, što sugerira primjenu sfernog poučka o sinusu. Uvrštavanjem zadanih elemenata sfernog trokuta u izraz sfernog poučka o sinusu slijedi da je $\sin\beta = \dfrac{\sin b \cdot \sin\alpha}{\sin a} = 1,398135127 > 1$ tj. ne postoji sferni kosokutni trokut sa zadanim elementima.

Primjer 5. *Zadana su dva kuta $\alpha = 46°37'36''$ i $\beta = 109°29'18''$ kosokutnog sfernog trokuta i stranica $a = 40°53'24''$. Izračunajmo stranicu b.*

Rješenje. Zadana su dva kuta i stranica nasuprot jednom kutu, što sugerira primjenu sfernog poučka o sinusu. Uvrštavanjem zadanih elemenata sfernog trokuta u izraz sfernog poučka o sinusu slijedi da je $\sin b = \dfrac{\sin b \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} = 0,848962371 < 1$, tj. postoji takav sferni kosokutni trokut i možemo dalje računati. Dobijamo da je $b_1 = 58°5'56''$ i $b_2 = 121°54'36''$ (zašto?). Obje izračunate stranice su rješenje (zašto?).

Dakle, možemo i ovako razmotriti ovaj poučak:

Položi li se vrhom A sfernoga trokuta $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ i središtem O pripadne sfere ravnina normalno na suprotnu stranicu OBC pripadnog trobrida, sjeći će ona sfernu plohu u glavnoj kružnici., od koje će onaj dio, koji pada u sferni trokut, biti *sferna visina* za stranicu a. Visina v dijeli trokut u dva pravokutna sferna trokuta, a stranicu a u dijelove x i y (v. sl.).



Sferni trokut i njegova visina

Za ovaj trokut vrijedi $\sin v = \sin c \cdot \sin\beta$ i $\sin v = \sin b \cdot \sin\gamma$, a odavde je $\sin b : \sin c = \sin\beta : \sin\gamma$.

Druga sferna visina, na stranicu b, dat će na isti način $\sin a : \sin c = \sin\alpha : \sin\gamma$.

Iz ove dvije formule slijedi *sferni poučak o sinusu*:

Za trokut $\triangle ABC$ *sa stranicama* a, b, c *i kutovima* α, β, γ *vrijedi*

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Ovaj se poučak može zapisati i u obliku

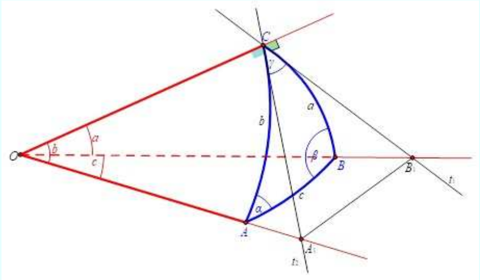
$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}.$$

Napomena: Za $\gamma = 90^\circ$ trokut je pravokutan. Uvrštavanjem dobivamo formule za pravokutni sferni trokut.

10.3. Sferni poučak o kosinusu stranica i Pitagorin poučak

Pogledajmo izvod još jednog važnog poučka. U ravnini nemamo toliku raznolikost poučaka. Neka su zadani jedinična sfera sa središtem u točki O., na njoj sferni trokut ABC i pripadni trobrid.

Vrhom C sfernog trokuta nacrtane/konstruirane su tangente t_1 i t_2. Tangente definiraju kut veličine γ i okomite su na polumjer sfere $\overline{OC}$.



Na trokut $\triangle CA_1B_1$ primijenimo poučak o kosinusu. Tada možemo pisati:

$$|A_1B_1|^2 = |CA_1|^2 + |CB_1|^2 - 2|CA_1|^2 \cdot |CB_1|^2 \cdot \cos c.$$

Odnosno: $|OA_1|^2 + |OB_1|^2 - 2|OA_1|^2 \cdot |OB_1|^2 \cdot \cos c = |CA_1|^2 + |CB_1|^2 - 2|CA_1|^2 \cdot |CB_1|^2 \cdot \cos\gamma$

ili

$$|OA_1|^2+|OB_1|^2-2|OA_1|^2\cdot|OB_1|^2\cdot\cos c = |CA_1|^2+|CB_1|^2-2|CA_1|^2\cdot|CB_1|^2\cdot\cos\gamma \qquad (**)$$

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutne trokute $\triangle COA_1$ i $\triangle COB_1$ dobijemo da je

$$|OA_1|^2 - |CA_1|^2 = |OC|^2 \text{ i } |OB_1|^2 - |CB_1|^2 = |OC|^2$$

koje uvrstimo u (**).

Možemo pisati:

$$2\cdot|OA_1|\cdot|OB_1|\cdot\cos c = \underbrace{|OA_1|^2 - |CA_1|^2}_{|OC|^2} + \underbrace{|OB_1|^2 - |CB_1|^2}_{|OC|^2} + 2\cdot|CA_1|\cdot|CB_1|\cdot\cos\gamma$$

$$= 2\cdot|OC|^2 + 2\cdot|CA_1|\cdot|CB_1|\cdot\cos\gamma.$$

Dijeljenjem čitavog izraza s $2\cdot|OA_1|\cdot|OB_1|$ slijedi da je:

$$\cos c = \frac{|OC|}{|OA_1|}\cdot\frac{|OC|}{|OB_1|} + 2\frac{|CA_1|}{|OA_1|}\cdot\frac{|CB_1|}{|OB_1|}\cdot\cos\gamma,$$

tj.

$$\cos c = \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b\cdot\cos\gamma.$$

Iz te jednadžbe cikličnom zamjenom elemenata sfernog trokuta slijedi:

$$\cos a = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a,$$

$$\cos b = \cos c\cos a + \sin c\sin a\cos\beta.$$

Odnos stranica sfernog trokuta i kuta, koji je nasuprot jednoj od njih, naziva se *sferni poučak o kosinusu stranica*:

Kosinus jedne stranice sfernog trokuta jednak je umnošku kosinusa drugih dviju stranica kojemu se pribroji umnožak sinusa tih stranica i kosinusa kuta koji je među njima.

Ovaj poučak možemo primijeniti, kad su sfernom trokutu zadani:

1. Dvije stranice i kut što ga određuju, a traži se treća stranica.

2. Tri stranice, a traže se kutovi.

Zadatak. Izvedite formulu za računanje kutova, ako su zadane tri stranice sfernog trokuta.

Primjer 6. *Zadane su dvije stranice* $a = 123°38'40''$ *i* $b = 20°47'17''$ *kosokutnog sfernog trokuta i kut* $\gamma = 104°38'4''$. *Izračunajmo stranicu* c.

Rješenje. Zadane su dvije stranice i kut što ga zatvaraju i traži se treća stranica, što sugerira primjenu sfernog poučka o kosinusu stranice. Uvrštavanjem zadanih elemenata sfernog trokuta u izraz sfernog poučka o kosinusu stranica $\cos c = \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b\cdot\cos\gamma$ slijedi da je $c = 103°25'13''$.

Primjer 7. *Zadane su tri stranice* $a = 66°12'30'', b = 119°47'17''$ *i* $c = 72°53'50''$ *kosokutnog sfernog trokuta. Izračunajmo kutove tog sfernog trokuta.*

Rješenje. Uvrštavanjem zadanih elemenata sfernog trokuta u izraz sfernog poučka o kosinusu stranica $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma$ slijedi da je $\cos\alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$.

Odavde slijedi da su $\alpha = 49°12'41', \beta = 133°38'45''$ i $\gamma = 52°15'56''$ traženi kutovi sfernog trokuta jer je ispunjeno: $a < c < b \Rightarrow \alpha < \gamma < \beta$.

Dakle, vrijede sljedeće činjenice.

Iskažimo tvrdnju *sfernog poučak o kosinusu*.

Za trokut $\triangle ABC$ *sa stranicama* a, b, c *i kutovima* α, β, γ *vrijedi*

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma,$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos\beta,$$

Iz te jednadžbe cikličnom zamjenom elemenata sfernog trokuta slijedi:

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c,$$

$$\cos\beta = -\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos b,$$

$$\cos a = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a.$$

Prve tri formule su tvrdnje poučka o kosinusu za stranice sfernog trokuta, a sljedeće tri su za kutove.

Zadatak. Uz oznake na gornjoj slici sfernog trokuta dokažite da vrijede formule sfernog poučka o kosinusu.

Za $\gamma = 90°$ trokut je pravokutan. Uvrštavanjem u prvu formulu dobivamo

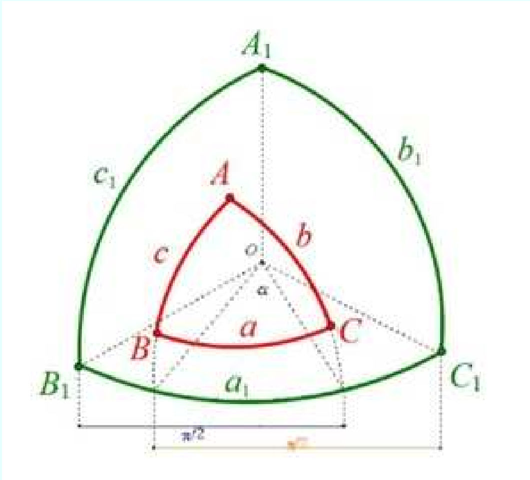
$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Ovo je *Pitagorin poučak za sferni pravokutni trokut*.

10.4. Sferni poučak o kosinusu kutova

Zadani su sferni trokut ABC i njegov polarni trokut $A_1B_1C_1$. Odgovarajući elementi su:

- stranice a, b, c; a_1, b_1, c_1
- kutovi: α, β, γ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.



Vrijedi:

$$
\begin{array}{ll}
\alpha + a_1 = \pi & \alpha_1 + a = \pi \\
\beta + b_1 = \pi & \beta_1 + b = \pi \\
\gamma + c_1 = \pi & \gamma_1 + c = \pi
\end{array}
$$

Primijenimo li *sferni poučak o kosinusu stranica* na polarni trokut $A_1B_1C_1$, dobit ćemo

$$\cos a_1 = \cos b_1 \cdot \cos c_1 + \sin b_1 \cdot \sin c_1 \cdot \cos \alpha_1$$

ili

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \cos(180^\circ - \beta) \cdot (180^\circ - \gamma) + \sin(180^{circ} - \beta) \cdot \sin(180^\circ - \gamma) \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

ili

$$-\cos \alpha = (-\cos \beta) \cdot (-\cos \gamma) + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot (-\cos a)$$

ili

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a.$$

Iz te jednadžbe cikličnom zamjenom elemenata sfernog trokuta, dobijemo:

$$\cos\beta = -\cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\alpha \cdot sin\gamma \cdot \cos b$$

$$\cos\gamma = -\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot sin\beta \cdot \cos c.$$

Odnos kutova sfernog trokuta i stranice, koja je nasuprot jednom od njih, zove se *sferni poučak o kosinusu kuta*.

Ovaj poučak možemo primijeniti, kad su zadani:

1. dva kuta i stranica na kojoj se oni nalaze, a traži se treći kut;
2. tri kuta, a traže se stranice.

Zadatak. Izvedite formulu za računanje stranica, ako su zadana tri kuta sfernog trokuta.

U stogodišnjoj literaturi mogu se naći mnogi poučci i formule koji nam omogućuju rješavanje sfernih trokuta. Informacije radi navedimo neke. Njihova uporaba detaljno je razrađena u literaturi i nije nam u fokusu ove knjige o komparativnoj geometriji osim u slučajevima koje smo iz određenih razloga prezentirali u ovoj knjizi.

Takvi su:

- sferni poučak o sinusu stranice i kosinusu kuta,
- sferni poučak o sinusu kuta i kosinusu stranice,
- prvi sferni poučak o kotangensima,
- drugi sferni poučak o kotangensima,
- Delambreove[1] jednadžbe,
- Napierove[2] jednadžbe.

[1] J. B. Delambre (1749. - 1822.) je francuski matematičar
[2] J. Napier (1550. - 1617.) je škotski matematičar

10.5. Rješavanje pravokutnog sfernog trokuta

Budući da je $\gamma = 90^\circ$ pravokutni trokut bit će određen s dva elementa: hipotenuzom c; katetama a, b; kutovima α, β.

Dakle, imamo tri tipa zadataka:

a) Zadane su dvije stranice

- zadatak I.: hipotenuza c i kateta a ili b,
- zadatak II.: obje katete a i b.

b) Zadane su stranica i jedan kut

- zadatak III.: hipotenuza c i kut *alpha* ili *beta*,
- zadatak IV.: kateta i priležeći kut,
- zadatak V.: kateta i suprotan kut

c) Zadana su dva kuta

- zadatak VI.: oba kuta.

Ilustracije radi pogledajmo sljedeće primjere i prijedlog formula za rješavanje.

Primjer 8. *U pravokutnom su trokutu poznate katete a i b.*

Formule $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}$ i $\cos c = \cos\alpha\cos b$ omogućit će nam izračun nepoznatih elemenata sfernog pravokutnog trokuta.

Napomena: Hipotenuza je šiljasti kut kad je $\cos c > 0$, a tupi kut kad je $\cos c < 0$.

Primjer 9. *U pravokutnom su trokutu poznate hipotenuza c i jedna kateta a.*

Formule $\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$ i $\cos\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$ omogućit će nam izračun nepoznatih elemenata sfernog pravokutnog trokuta.

Napomena: Rješenje je jednoznačno uz uvjet da je $\cos c < \cos a$, a šiljasti kut ili da je a tupi kut.

Primjer 10. *U pravokutnom su trokutu poznate hipotenuza c i α.*

Formule $\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos c$, $\operatorname{tg}\alpha = \cos\beta \cdot \operatorname{tg} c$ i $\operatorname{tg} b = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg} c$ omogućit će nam izračun nepoznatih elemenata sfernog pravokutnog trokuta.

Primjer 11. *U pravokutnom su trokutu poznate kateta a i bliži kut β.*

Rješenje je jednoznačno.

Formule $\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos\beta}$, $\operatorname{tg} b = \sin a \cdot \operatorname{tg}\beta$ i $\cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta$ omogućit će nam izračun nepoznatih elemenata sfernog pravokutnog trokuta.

Napomena: Ako je kut α malen, računat će se iz formule $\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$.

Primjer 12. *U pravokutnom su trokutu poznate kateta a i suprotan joj kut α.*

Dobit ćemo dvoznačno rješenje.

Formule $\sin c = \frac{\sin a}{\sin\alpha}$, $\operatorname{tg} b = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg} c$ i $\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos c$ omogućit će nam izračun nepoznatih elemenata sfernog pravokutnog trokuta.

Napomena: Uvjet za rješenje: $a < \alpha < 90°$ te a i α šiljasti kutovi ili $a > \alpha > 90°$, a i α tupi kutovi.

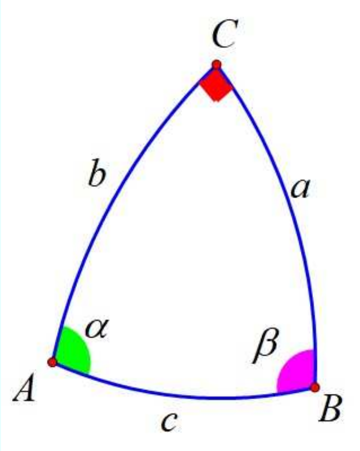
Primjer 13. *U pravokutnom su trokutu poznata oba kuta α i β za koje je $\alpha > \beta$.*

Formule $\cos c = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta$, $\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ i $\cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$ omogućit će nam izračun nepoznatih elemenata sfernog pravokutnog trokuta.

Napomena: Mora biti $\alpha + \beta > 90°$ i $\alpha - \beta < 90°$.

Pravokutni sferni trokut je sferni trokut koji ima bar jedan pravi kut. Iz planimetrije se prenose i nazivi: stranica nasuprot pravog kuta naziva se *hipotenuza*, a ostale dvije stranice su *katete*.

U pravokutnom sfernom trokutu (vidi sliku) katete ćemo označavati slovima a i b, hipotenuzu slovom c. Kutovi pravokutnog sfernog trokuta bit će α, β i $\gamma = 90°$.



Sve formule o kosokutnom sfernom trokutu, koje smo dosad upoznali, možemo primijeniti i na pravokutni sferni trokut, samo moramo pri tome uzeti u obzir da je $\gamma = 90°$, te da je $\cos\gamma = 0, \operatorname{ctg}\gamma = 1$ i $\sin\gamma = 1$. Od formula za kosokutni sferni trokut u obzir uzimamo samo one, u kojima poslije zamjene $\cos\gamma = 0, \operatorname{ctg}\gamma = 1$ i $\sin\gamma = 1$ ostaju po tri elementa.

Uz $\gamma = 90°$ potrebna su nam samo još dva elementa pravokutnog sfernog trokuta, da bi on bio određen. Mi ćemo ovdje navesti formule, a čitatelju ostavljamo mogućnost provođenja izvoda:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b$$

$$\sin a = \sin c \cdot \sin\alpha \quad \text{i} \quad \sin b = \sin c \cdot \sin\beta$$

$$\cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta \quad \text{i} \quad \cos\beta = \cos b \cdot \sin\alpha$$

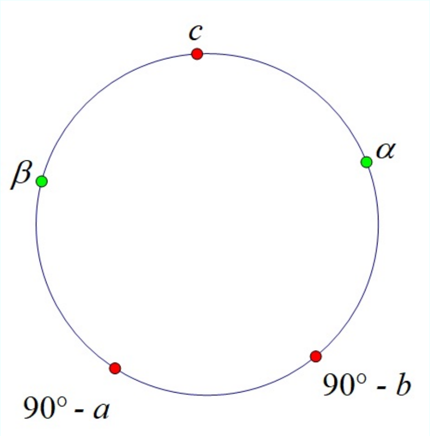
$$\cos\alpha = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} c \quad \text{i} \quad \cos\beta = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} c$$

$$\sin b = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg}\alpha \quad \text{i} \quad \sin a = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg}\beta 1$$

$$\cos c = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta.$$

Sve formule mogu se izreći po Napierovom pravilu za pravokutni sferni trokut:

Ako se na kružnici označe elementi pravokutnog sfernog trokuta onim redom kojim su prikazani u trokutu, a pri tome se izostavi pravi kut, te se umjesto kateta napišu njihovi komplementi, onda je kosinus svake od tihe pet veličina jednak umnošku kotangensa dvaju bližih veličina ili umnošku sinusu dvaju daljih veličina.



Zadatak. Zapišite 10 navedenih formula u obliku Napieovog pravila.

Neka svojstva pravokutnog sfernog trokuta

Sva navedena svojstva mogu se izvesti i dokazati. Mi ćemo ih navesti jer su potrebna za rješavanje zadataka o pravokutnom sfernom trokutu.

- Kateta i kut, koji je njoj nasuprot, uvijek su istovrsni, tj. oni su ili veći od $90°$, ili jednaki $90°$ ili manji od $90°$.
- Kateta je manja od kuta, koji je njoj nasuprot, kad su oni manji od $90°$, a veća od njega kad su oni veći od $90°$.
- Hipotenuza je po svojoj veličini uvijek između veličine jedne katete i veličine njezina suplementa.
- Hipotenuza je manja od $90°$, kad su katete istovrsne tj. kad su obje manje od $90°$, odnosno veće od $90°$.
- Hipotenuza je veća od $90°$, kad su katete raznovrsne, tj. kad je jedna manja, a druga veća od $90°$.
- Hipotenuza je jednaka pravom kutu, kad je jedna kateta jednaka pravom kutu.
- Pravokutni sferni trokut može imati dva, pa i tri prava kuta.
- U pravokutnom sfernom trokutu pravi je kut veći od razlike, a manji od zbroja ostalih dvaju kutova.
- Zbroj onih kutova pravokutnog sfernog trokuta, koji su nasuprot katetama, veći je od jednoga a manji od tri prava kuta.

Rješavanje pravokutnog sfernog trokuta

Pravokutni sferni trokut može se razriješiti, odnosno konstruirati, kada su zadani ovi njegovi elementi:

I. hipotenuza i jedna kateta,

II. dvije katete,

III. hipotenuza i jedan kut,

IV. kateta i "priležeći" kut,

V. kateta i kut nasuprot,

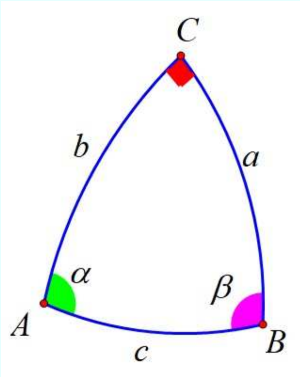
VI. kutovi nasuprot katetama.

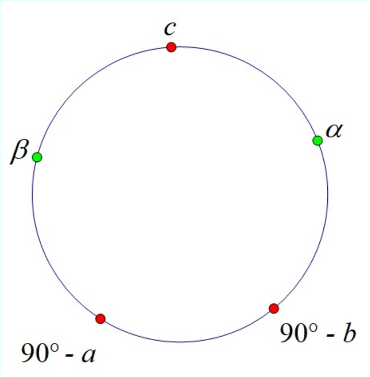
Pri rješavanju pravokutnog sfernog trokuta treba sve njegove nepoznate elemente izračunati samo pomoću ona dva elementa koji su poznati.

- Ako je traženi element (kut ili stranica) po veličini blizu 0° ili 180°, tada će izračunata vrijednost (kuta ili stranice) biti netočna ako se računa funkcijom kosinus.

- Ako je traženi element (kut ili stranica) po veličini blizu 90°, izračunata vrijednost (kuta ili stranice) bit će netočna ako se računa funkcijom sinus.

- **Vrijednosti traženih elementa (kutovi ili stranice) najtočnije je izračunati primjenom funkcija tangens ili kotangens**.





Slučaj I.

Neka su zadane hipotenuza i jedna kateta, primjerice stranice c i a.

Rješenje. (Napierovo pravilo) kut β je središnji element, susjedni element su: c i $90^\circ - a$.

$$\cos\beta = \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - a)$$

$$\cos\beta = \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{tg} a.$$

Nadalje je

$$\sin a = \cos(90^\circ - a) = \sin c \cdot \sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

Za kut α dobivaju se dvije suplementarne vrijednosti α_1 i α_2, ali je samo jedna rješenje. To je ona koja je istovrsna s katetom a, tj. kateta i njoj nasuprotni kut ili su oboje u I. ili u II. kvadrantu. Zadatak prema tome ima *jedno jedino* rješenje.

Da bi sferni trokut bio određen mora veličina zadane hipotenuze biti između katete i njezina suplementa (veća od katete a manja od suplementa), tj.

$$a < c < 180^\circ - a \quad \text{ili} \quad b < c < 180^\circ - b.$$

Primjer 14. *Zadan je pravokutni sferni trokut s hipotenuzom* $c = 85^\circ 11' 55''$ *i katetom* $a = 101^\circ 13' 36''$*. Izračunajmo katetu* b*, te kutove* α *i* β*.*

Rješenje. Budući da je veličina hipotenuze c između kateta a i njezina suplementa $180^\circ - a = 78^\circ 46' 24''$, to je zadanim elementima određen pravokutni sferni trokut.

Vrijede sljedeće formule, uvjeti i izračuni:

$$\cos\beta = \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{tg} a$$

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$$

$$\alpha_1 = 79^\circ 50' 23,8'', \;\; \alpha_2 = 100^\circ 9' 36,2''$$

$$b = 115^\circ 27' 46''$$

$$a > 90^\circ \Rightarrow \alpha > 90^\circ \Rightarrow \alpha_2.$$

Slučaj II.

Neka su zadane dvije katete, primjerice stranice a i b.

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

Primjenom Napierovog pravila na tri susjedne veličine $90^\circ - a$, $90^\circ - b$ i a dobije se

$$\cos(90^\circ - b) = \operatorname{ctg}(90^\circ - a) \cdot \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\sin b = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \sin b \cdot \operatorname{ctg} a.$$

Analogno vrijedi

$$\operatorname{ctg}\beta = \sin a \cdot \operatorname{ctg} b.$$

Nema ograničenja osim da svaka kateta bude veća od 0° i manja od 180°. Zadatak ima jedno rješenje.

Slučaj III.

Neka su zadane hipotenuza i jedan kut, primjerice stranice c i α.

Primjenom Napierovog pravila na tri susjedne veličine a, c, β dobivamo

$$\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta,$$

odnosno

$$\operatorname{ctg} \beta = \cos c \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Nadalje, primjenom Napierovog pravila na tri susjedne veličine c, α i $90^\circ - b$ slijedi

$$\cos \alpha = \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - b) = \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{tg} b$$

odnosno

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cdot \cos \alpha.$$

Primjenom Napierovog pravila na tri susjedne veličine $c, 90^\circ - b, \alpha$ dobivamo

$$\cos(90^\circ - a) = \sin c \cdot \sin \alpha$$

$$\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha.$$

Za katetu a primjenom funkcije sinus mogu se izračunati dvije suplementarne vrijednosti a_1, a_2.

Samo jedno od njih je rješenje: *ono koje je istovrsno sa zadanim kutom* α.

Slučaj IV.

Neka su zadane kateta i priležeći kut, primjerice stranice b i α.

Primjenom Napierovog pravila na tri susjedne veličine c, β i $90^\circ - a$ dobivamo

$$\cos \beta = \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - a) = \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{tg} a$$

odnosno

$$\operatorname{ctg} c = \operatorname{ctg} a \cdot \cos \beta.$$

Nadalje, primjenom Napierovog pravila na tri susjedne veličine $\beta, 90^\circ - a, 90^\circ - b$ dobivamo

$$\cos(90^\circ - a) = \operatorname{ctg}(90^\circ - a) \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

$$\sin a = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

$$\operatorname{tg} b = \sin a \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Primjenom Napierovog pravila na tri susjede veličine $90° - a, \alpha, \beta$ slijedilo bi:

$$\cos\alpha = \sin(90° - a) \cdot \sin\beta$$

$$\cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta.$$

Slučaj V.

Neka su zadane kateta i nasuprotni kut, primjerice stranice a i α.

Za tri susjedne veličine $90° - a, 90° - b, \alpha$ primjenom Napierovog pravila slijedi da je:

$$\cos(90° - b) = \operatorname{ctg}(90° - a)$$

$$\sin b = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg}\alpha.$$

Nadalje, primjenom Napierovog pravila na tri susjedne veličine $90° - a, \alpha, c$ dobivamo:

$$\cos(90° - a) = \sin c \cdot \sin\alpha$$

$$\sin a = \sin c \cdot \sin\alpha \Rightarrow \sin c = \frac{\sin a}{\sin\alpha}.$$

I na kraju za $\beta, 90° - a, \alpha$ dobivamo:

$$\cos\alpha = \sin(90° - a) \cdot \sin\beta$$

$$\cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos a}.$$

Pravokutan sferni trokut je određen zadanim elementima, ako su kateta a i suprotni kut α istovrsni.

Ako su a i α oštri kutovi, onda mora biti $a < \alpha$ jer će tada $\sin b, \sin c, \sin\beta$ po apsolutnoj vrijednosti biti manji od 1.

Ako su a i α tupi kutovi, onda mora biti $a > \alpha$ jer će tada $\sin b, \sin c, \sin\beta$ po apsolutnoj vrijednosti biti manji od 1. Za elemente b, c, β dobiju se po dvije suplementarne vrijednosti, tj. zadatak ima dva rješenja (postoje dva pravokutna sferna trokuta).

Primjer 15. *Zadan je pravokutni sferni trokut, kateta* $a = 75°24'16''$*, kut* $a = 78°19'41''$*. Izračunajmo katetu* b*, kut* β *te hipotenuzu* c*.*

Rješenje.

Uvrštavanjem zadanih elemenata u formule:

$$\sin b = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha}$$
$$\sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a}$$

dobivamo

$$b_1 = 52°29'50'', \quad b_2 = 127°30'10''$$
$$c_1 = 81°10'30,5'', \quad c_2 = 98°49'29,5''$$
$$\beta_1 = 53°24'3,24'', \quad \beta_2 = 126°35'57''.$$

Slučaj VI.
Neka su zadana oba kuta α i β.
Za rješavanje mogu se uporabiti formule

$$\cos c = ctg\alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta$$
$$\cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$$
$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}.$$

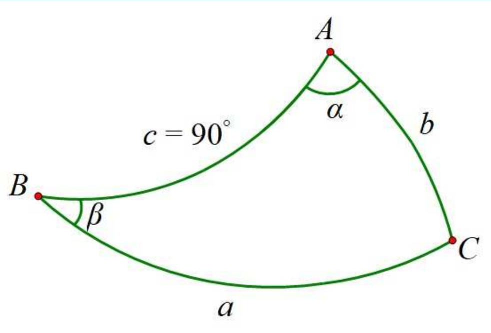
Zadani kutovi moraju ispunjavati dva uvjeta:

$$90° < \alpha + \beta < 270°$$
$$-90° < \beta - \alpha < 90°.$$

Kvadratni sferni trokut

Sferni trokut u kojemu je jedna stranica 90° zove se *kvadratni sferni trokut*.

Kvadratni sferni trokut je polarno pridružen pravokutnom sfernom trokutu.



Elementi kvadratnog sfernog trokuta su: $a, b, \alpha, \beta, \gamma, c = 90°$.

Kvadratni sferni trokut rješavamo tako da rješavamo odgovarajući polarni pravokutni trokut i primjenom Napierovog pravila za zadane elemente.

Zadatak. Postupkom sličnom onom koji je primjenjen za pravokutni sferni trokut, tj. odabirom onih formula kosokutnog sfernog trokuta u kojima se javljaju funkcije stranice c, uz supstitucije $\sin c = 1, \cos c = 0$, $\operatorname{ctg} c = 0$ izvedite formule za kvadratni sferni trokut.

Primjer 16. *Riješimo kvadratni sferni trokut ako su zadani* $a = 52°10'14''$ *i* $b = 62°58'4''$.

Rješenje. Primjenom Napierovog pravila dobivamo

$$\cos b = \sin a \cdot \sin(90° - \beta).$$

Odavde je

$$\cos b = \sin a \cdot \cos \beta,$$

odnosno $\beta = 54°52'14,8''$.

Na sličan način dobivamo $\gamma = 113°20'27''$ i $\alpha = 46°29'8,77''$.

10.6. Rješavanje kosokutnog sfernog trokuta

Pod rješavanjem kosokutnog sfernog trokuta podrazumijevamo izračunavanje svih nepoznatih elemenata trokuta, pomoću elemenata kojima je trokut zadan.

Da bi kosokutan sferni trokut mogli razriješiti, odnosno konstruirati, potrebno je da su zadana tri elementa, kao i za kosokutan trokut u ravnini. No, za rješavanje kosokutnog trokuta ravnine postoje 4 kombinacije njegovih elemenata, dok je za sferni trokut šest kombinacija jer ne vrijedi $\alpha+\beta+\gamma = 180°$.

Sferni kosokutni trokut može se razriješiti, odnosno konstruirati, kada su zadani ovi njegovi elementi:

I. tri stranice,

II. tri kuta,

III. dvije stranice i kut među njima,

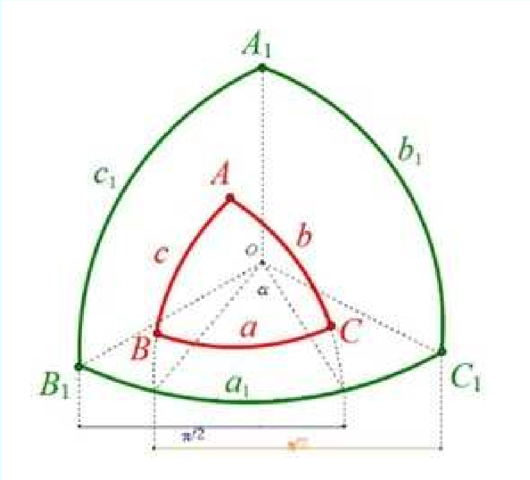
IV. dva kuta i "priležeća" stranica,

V. dvije stranice i kut, koji je nasuprot jednoj od stranica,

VI. dva kuta i stranica, koja je nasuprot jednom od tih kutova.

Od šest elemenata sfernog trokuta $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ uvijek po tri potpuno određuju sferni trokut (ukoliko zadovoljavaju još neke posebne uvjete).

S tri zadana elementa postoji 20 zadataka o trokutu. Kako svi zadatci s jednakim međusobnim položajem stranica i kutova čine isti tip zadatka preostaje samo 6 tipova različitih zadataka o trokutu. Od tih šest zadataka dva po dva odgovaraju polarno.



Za sferni kosokutni trokut ABC i njegov polarni sferni trokut $A_1B_1C_1$ slučajevi: $I.$ i $II.$; $III.$ i $IV.$; $V.$ i $VI.$ su međusobno polarni.

U mapi *GSP datoteka* u datoteci Rješavanje sfernog trokuta dani su svi koraci rješavanja i komentari istih kroz upute za rješavanje.

Ilustracije radi pogledajmo sljedeće primjere i prijedlog formula za rješavanje.

Primjer 17. *U sfernom su trokutu poznate stranice a, b i c.*

Formula $\cos\alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ omogućit će nam početak izračuna nepoznatih elemenata sfernog trokuta.

Uz $a+b+c = 2s$ dobivamo $a+b-c = 2(s-c)$, $a-b+c = 2(s-b)$, $-a+b+c = 2(s-a)$. Nakon

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c} \text{ i } \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}$$

dobiva se dijeljenjem

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \cdot \sin(s-a)}}$$

odnosno

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin(s-a)}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

Na posve isti način dobit će se još dvije formule za $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ i $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$

Primjer 18. *U sfernom su trokutu poznata sva tri kuta α, β i γ.*

Formula $\cos a = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$ omogućit će nam početak izračuna nepoznatih elemenata sfernog trokuta.

Primjer 19. *U sfernom su trokutu poznate dvije stranice a, b i kut među njima γ.*

Formula $\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma$ omogućit će nam početak izračuna nepoznatih elemenata sfernog trokuta.

Primjer 20. *U sfernom su trokutu poznata dva kuta α, β i stranica c koja je među njima.*

Formula $\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$ omogućit će nam početak izračuna nepoznatih elemenata sfernog trokuta.

Primjer 21. *U sfernom su trokutu poznate dvije stranice a, b i kut α nasuprot jednoj od njih.*

Formula $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha\sin b}{\sin a}$ omogućit će nam početak izračuna nepoznatih elemenata sfernog trokuta.

Napomena: Razlikovat ćemo nekoliko slučajeva: (a) $a < b$, (b) $a = b$ i (c) $a > b$.

Primjer 22. *U sfernom su trokutu poznata dva kuta α, β i stranica a koja je nasuprot jednom od njih.*

Napomena: Iz poučka o sinusima izračuna se stranica b, a onda se istim postupkom kao u zadatku V., izračunaju stranica c i kut γ.

Slučaj I.

Neka su zadane stranice a, b i c. Primjenom sfernog poučka o kosinusu stranica mogu se izračunati kutovi. No, treba provesti determinaciju. Da bi sferni trokut bio određen (determiniran) zadanim elementima mora vrijediti:

$$0^\circ < a - b - c < 360^\circ$$

$$a < b + c;\; b < a + c;\; c < a + b.$$

Ako su uvjeti ispunjeni trokut postoji i ima smisla dalje rješavati.

Primjer 23. *Zadane su tri stranice* $a = 66°12'30'', b = 119°40'$ *i* $c = 72°53'50''$ *kosokutnog sfernog trokuta. Izračunajmo kutove tog sfernog trokuta.*

Rješenje. Budući da je ispunjeno

$$0° < a + b + c = 258°7' < 360°$$

$$66°12'30'' = a < b + c = 191°54'30''$$

$$119°40'' = b < a + c = 139°6'20''$$

$$72°53'50'' = c < a + b = 185°13'10''$$

kosokutni sferni trokut postoji.

Primjenom sfernog poučka o kosinusu stranica, mogu se izračunati kutovi sfernog kosokutnog trokuta $\alpha = 51°21'47'', \beta = 131°16'31''$ i $\gamma = 52°15'55''$.

Slučaj II.

Zadana su tri kuta α, β, γ. Nepoznate su stranice. To su uvjeti za polarni Slučaj I. Stranice danog sfernog trokuta $A_1B_1C_1$ su: $a_1 = 180°$ - α, $b_1 = 180°$ - β, $c_1 = 180°$ - γ.

Primjenom Slučaja I. izračunaju se kutovi α_1, β_1 i γ_1 polarnog trokuta. Budući da vrijedi $a = 180°$ - α_1, $b = 180°$ - β_1, $c = 180°$ - γ_1 lako se izračunaju stranice sfernog trokuta. Drugi način je primjenom sfernog poučka o kosinusu kuta.

Da bi sferni trokut bio određen (determiniran) zadanim elementima mora vrijediti:

$$180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$$

$$\alpha + \beta < 180° + \gamma,\ \beta + \gamma < 180° + \alpha,\ \alpha + \gamma < 180° + \gamma.$$

Ako su uvjeti ispunjeni trokut postoji i ima smisla dalje rješavati.

Primjer 24. *Zadane su tri stranice* $\alpha = 49°12'41'', \beta = 133°38'40''$ *i* $\gamma = 52°15'55''$ *kosokutnog sfernog trokuta. Izračunajmo stranice tog sfernog trokuta.*

Rješenje. Kosokutni sferni trokut s ovim zadanim podatcima postoji.

Rješenja su stranice $a = 66°12'28'', b = 119°0'33''$ i $c = 72°53'47''$ kosokutnog sfernog trokuta jer je ispunjeno $\beta > \gamma > \alpha \Rightarrow b > c > a$.

Slučaj III.

Neka su zadane primjerice stranice a, b i kut γ. Nepoznata je stranica c i kutovi α i β. Primjenom sfernog poučka o kosinusu stranica izračunat ćemo stranicu c i sfernim poučakom o kotangensu mogu se izračunati nepoznati kutovi. Da bi trokut postojao, svi zadani elementi moraju biti manji od 180° tj. $a < 180°,\ b < 180°$ i $\gamma < 180°$.

Primjer 25. *Zadane su stranice* $a = 137°32'43'', b = 64°22'32''$ *i* $\gamma = 19°14'7''$ *kosokutnog sfernog trokuta. Izračunajmo stranicu* c *i kutove* α *i* β *tog sfernog trokuta.*

Rješenje. Primjenom poučaka dobijemo da je stranica $c = 75°11'35,45''$ i kutovi $\alpha = 165°42'7'',\ \beta = 16°53'37''$. No, ako za stranice sfernog trokuta vrijedi $c < b < a$ onda mora vrijediti i $\gamma < \beta < \alpha$.

Budući da to nije ispunjeno, ne postoji trokut.

Slučaj IV.

Neka su zadane primjerice stranica c i kutovi α i β. Nepoznate su stranice a i b te kut γ.

To su uvjeti polarnog Slučaja III. Stranice danog sfernog trokuta $A_1B_1C_1$ su: $a_1 = 180°$ - α, $b_1 = 180°$ - β, $\gamma_1 = 180°$ - c. Primjenom Slučaja III. izračunaju se kutovi α_1, β_1 i stranica c_1 polarnog trokuta.

Dakle, iz $a = 180°$ - α_1, $b = 180°$ - β_1, $\gamma = 180°$ - c_1 dobivamo kolike su stranice a, b i kut γ.

Slučaj V.

Neka su zadane primjerice stranice a i b i kut α. Nepoznata je stranica c i kutovi β i γ. Primjenom sfernog poučka o sinusu izračunat ćemo kut β i sfernim poučcima o kotangensu mogu se izračunati stranica c i kut γ.

Nema nekih posebnih uvjeta za elemente sfernog trokuta.

Primjer 26. *Zadane su stranice* $a = 74°33'37'', b = 84°21'39''$ *i* $\alpha = 11°13'26''$ *kosokutnog sfernog trokuta. Izračunajmo stranicu* c *i kutove* β *i* γ *tog sfernog trokuta.*

Rješenje. Primjenom sfernog poučka o sinusu slijedi da je $\beta_1 = 11°35'34''$ i $\beta_2 = 168°24'26''$. Provjerom kao u rješavanju Primjera 2. i Primjera 3. zaključujemo da su oba kuta rješenje.

Primjenom Prvog i Drugog sfernog poučka o tangensima slijedi: $c_1 = 158°30'22''$ i $c_2 = 9°59'46''$, $\gamma_1 = 175°45'27''$ i $\gamma_2 = 2°1'25''$.

Prisjetimo se koje uvjete moraju ispunjavati stranice i kutovi, te možemo zaključiti da postoje dva rješenja.

Slučaj VI.

Neka su zadane primjerice kutovi α i β te stranica a. Nepoznate su stranice b i c te kut γ.

To su polarni uvjeti u Slučaju V.

Vrijedi: $\alpha_1 = 180°$ - a, $b_1 = 180°$ - β, $a_1 = 180°$ - α.

Primjenom Slučaja V. izračunaju se kutovi i stranice polarnog trokuta, jer vrijedi:

$c = 180°$ - γ_1, $b = 180°$ - β_1, $\gamma = 180°$ - c_1.

10.7. Primjene sferne trigonometrije

Ovdje ćemo opisati, kao ilustraciju, primjenu sferne trigonometrije na nekoliko problema.

Upisana i opisana kružnica sfernom trokutu

Upisanoj kružnici sfernog trokuta polarno odgovara opisana kružnica polarnog trokuta. I obrnuto: opisanoj kružnici sfernog trokuta polarno odgovara upisana kružnica polarnom trokutu.

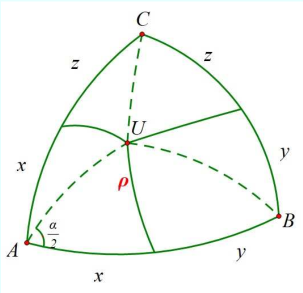
Riješit ćemo sljedeći primjer.

Primjer 27. *Odredimo polumjer ρ kružnice koja je sfernom trokutu upisana.*

Rješenje.

Zamislimo trobrid ABC i oko njega sferu. Ona trobrid siječe u sfernom trokutu ABC. Tri ravnine koje raspolavljaju plošne kutove trobrida presjecat će sferni trokut u tri luka $\overset{\frown}{AU}$, $\overset{\frown}{BU}$, $\overset{\frown}{CU}$ koji se sijeku u središtu U upisane kružnice (v. sl.). Neka je polumjer te kružnice ρ tako da je

$\rho \perp AB, \rho \perp AC, \rho \perp BC.$



Sferni trokut i središte upisane kružnice

Za oznake na slici vrijedi $2(x+y+z) = a+b+c = 2s$. Odavde je

$$x = s-(y+z) = s-a,$$

$$y = s-b,$$

$$z = s-c.$$

Iz pravkutnog sfernog trokuta kojemu je AU hipotenuza, a x i ρ su katete dobivamo

$$\operatorname{tg}\rho = \sin(s-a)\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Uvrstimo li ovdje formulu za $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ sa stranice 240. dobiva se

$$\operatorname{tg}\rho = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}.$$

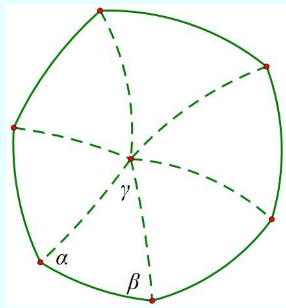
Pravilni poliedri

Poliedar omeđen sukladnim pravilnim mnogokutima zove se *pravilni poliedar*. Takvih je 5 poliedara koji su poznati kao *Platonova tijela*: tetraedar, heksaedar ili kocka, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar.

Ovdje ćemo razmotriti problem određivanja polumjera upisane i opisane sfere pravilnom poliedru.

U unutrašnjosti poliedra odaberimo bilo koju točku oko koje opišemo sferu tako velikog polumjera R tako da se cijeli poliedar nalazi u unutrašnjosti sfere. Povucima zrake iz središta sfere kroz vrhove poliedra i probodište tih zraka sa sferom spojimo lukovima glavnih kružnica. Time će površina sfere biti podijeljena na onoliko sfernih mnogokuta (v. sl.) koliko poliedar ima strana.

Svaki se sferni mnogokut dade rastaviti na onoliko sfernih trokuta koliko ima stranica.



Podjela sfernog mnogokuta na sferne trokute

Budući je površina jednog od tih trokuta jednaka

$$\frac{R^2\pi}{180^\circ}(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ),$$

zbrajanjem površina svih trokuta *površina sfernog mnogokuta* bit će jednaka

$$P = \frac{R^2\pi}{180^\circ}(k^\circ - (s-2)\cdot 180^\circ),$$

gdje je k° zbroj kutova sfernog mnogokuta, a s zbroj njegovih stranica.

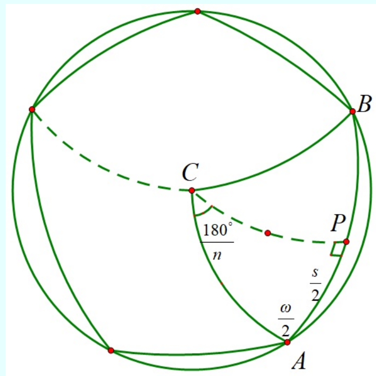
Poliedar je *upisan u sferu* ako su mu svi vrhovi na sferi. Poliedar je *opisan sferi* ako sfera dodiruje sve njegove bridove ili sve njegove strane.

Oko bilo kojeg vrha pravilnog poliedra zamislimo opisanu dovoljno malu sferu. Prostorni kut tog vrha pravilnog poliedra sjeći će sferu u *sfernom pravilnom n-terokutu* kojemu je svaka stranica jednaka

$$s = \frac{180^\circ}{m}(m-2)$$

gdje je m broj stranica mnogokuta.

Na slici je prikazan presjek sferom iz jednog vrha ikosaedra ($m = 3, n = 5$).



Presjek vrha ikosaedra sa sferom

Iz pravokutnog sfernog trokuta APC dobiva se

$$\cos\frac{180^\circ}{n} = \sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{s}{2}$$

odakle slijedi formula za *plošni kut pravilnog poliedra*

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\cos\frac{180^\circ}{n}}{\sin\frac{180^\circ}{m}}$$

Razmatranjem odnosa među veličinama pravilnog poliedra i sfere dobivaju se polumjeri r upisanog i R opisanog polidra sferi

$$r = R\cdot\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{m}\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$$

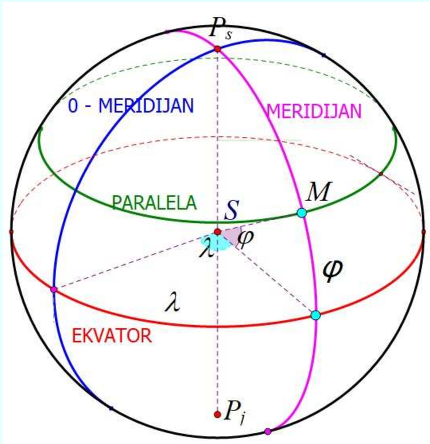
i

$$R = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$$

Nekoliko zadataka iz matematičke geografije

Položaj nekog mjesta na globusu određujemo dvjema koordinatama:

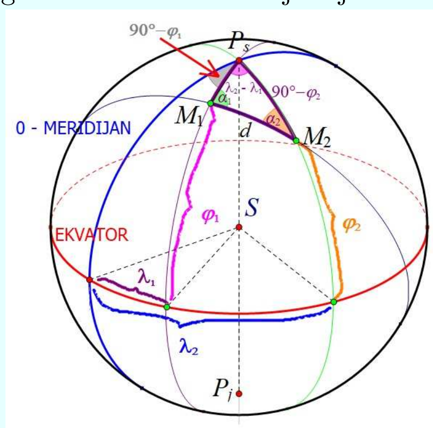
geografskom dužinom, tj. kutom između nultog meridijana i meridijana tog mjesta, koja se mjeri od 0° do 180° prema istoku (istočna duljina, istočno od Greenwicha) i od 0° do 180° prema zapadu (zapadna duljina, zapadno od Greenwicha), *geografskom širinom*, koja je sferna udaljenost mjesta od ekvatora, a mjeri se od 0° do 90° prema sjeveru (sjeverna širina) i od 0° do 90° prema jugu (južna širina).



Položaj mjesta na sferi

1. **Sferna udaljenost dvaju mjesta na globusu**

   Poznate su geografske koordinate dvaju mjesta $M_1(\lambda_1, \varphi_1), M_2(\lambda_2, \varphi_2)$.



Udaljenost dvaju mjesta na sferi

Sfernu udaljenost točaka M_1 i M_2 označimo s $d = |\widehat{M_1 M_2}|$. Nju ćemo izračunati iz sfernog trokuta $\triangle M_1 P_S M_2$ primjenom poučka o kosinusu. Na slici su označene veličine koje ćemo uporabiti u računu.

Vrijedi

$$\cos d = \cos(90^\circ - \varphi_1)\cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1)\sin(90^\circ - \varphi_2)\cos(\lambda_2 - \lambda_1)$$

odnosno

$$\cos d = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Ovo je sferna kutna udaljenost dvaju mjesta.

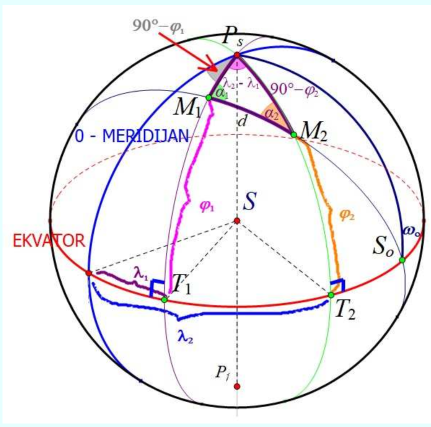
Udaljenost dvaju mjesta u kilometrima računamo pomoću formule na stranici 118.

Zadatak: *Odredite međusobne sferne udaljenosti Zagreba, Budimpešte i Varšave ako su njihove geografske koordinate:*

- *Zagreb:* $45^\circ 48' 43''$ *Sjever,* $15^\circ 58' 52''$ *Istok,*
- *Budimpešta:* $47^\circ 29' 54''$ *Sjever,* $19^\circ 02' 27''$ *Istok,*
- *Varšava:* $52^\circ 13' 56''$ *Sjever,* $21^\circ 0' 30''$ *Istok.*

2. **Glavna kružnica, ekvator i meridijan**

   Glavna kružnica točkama $M_1(\lambda_1, \varphi_1)$ i $M_2(\lambda_2, \varphi_2)$ siječe ekvator u točki S_0. Odredite meridijan λ_0 tog sjecišta i kut ω_0 te glavne kružnice s ekvatorom.

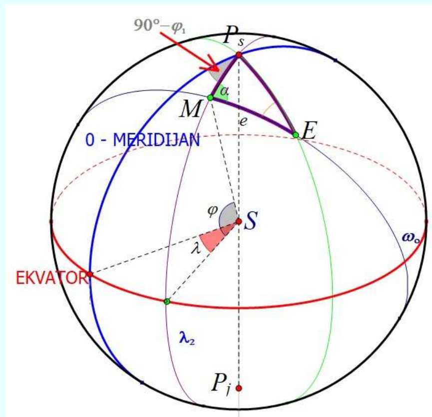


Presjek luka glavne kružnice s ekvatorom

Uputa. Iz trokuta $\triangle M_1 M_2 P_S$ izračunaju se kutovi α_1 i α_2 u vrhovima M_1 i M_2. Meridijan λ_0 i kut ω_0 izračunaju se iz pravokutnoh trokuta $\triangle S_0 T_1 M_1$ i $\triangle S_0 T_2 M_2$.

3. **Koordinate točke na luku glavne kružnice**

   Odredite geografske koordinate točke E na luku glavne kružnice koja prolazi mjestom $M(\lambda, \varphi)$, ako ta glavna kružnica siječe meridijan mjesta M pod kutom α i ako je sferna udaljenost točke E od mjesta M jednaka e.

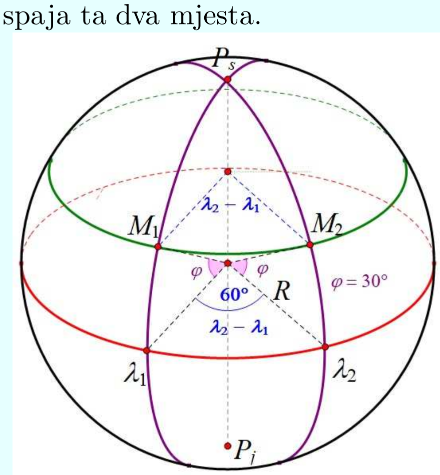


Koordinate točke na luku

   Uputa. Zadatak se svodi na rješavanje trokuta $\triangle MP_SE$ za koji je poznato $MP_S = 90° - \varphi, EMP_S = \alpha, ME = e$.

4. **Udaljenost dvaju mjesta na paraleli**

   Ako dva mjesta $M_1(\lambda_1, \varphi_1)$ i $M_2(\lambda_2, \varphi_2)$ leže na istoj paraleli odredite za koliko kilometara je duljina luka paralele veća od duljine luka glavne kružnice koja spaja ta dva mjesta.



   Uputa. Iz poučka o kosinusu slijedi $\cos d = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$.

Položaj mjesta na istoj paraleli

Za dva mjesta na paraleli s podatcima kao na slici $\varphi = 30°, \lambda_2 - \lambda_1 = 60°$ i polumjerom sfere $R = 6370$ km slijedi da je $d = 51°20'$ ili $d = 5705,1$ km te luk koji spaja ta dva mjesta iznosi $5776,9$ km. Razlika je $71,8$ km.

Zadatak: *Kolika je razlika za $\varphi = 60°$? Što možete uočiti iz ova dva primjera?*

(*Rješenje:* Razlika je $116,2$ km i razlika ovih duljina je manja što je paralela bliže ekvatoru.)

11. Primjeri sferne geometrije izvan matematike i u nastavi matematike

Petar Mladinić na primanju državne nagrade

Primjeri sferne geometrije u:

- fizici
- kemiji
- biologiji
- kristalografiji
- astronomiji
- navigaciji
- likovnoj umjetnosti (M. Escher, Dick Termes, Clifford Singer,...)
- industrijskom dizajnu
- ...

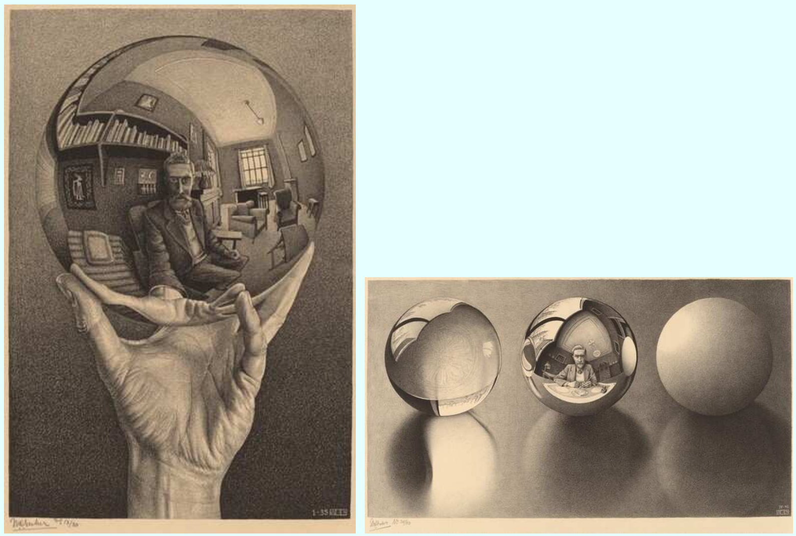
11.1. Primjeri u umjetnosti

Ilustracije radi pokazat ćemo neke radove nekoliko svjetskih umjetnika. U njihovim se radovima vidi matematika do koje su "stigli" na tri različita načina. Svaki od njih savršeno vlada geometrijskim pojmovima i svojstvima objekata koje prikazuju.

Maurits Cornelis Escher

Maurits Cornelis Escher (1898. - 1972.) nizozemski je grafičar. Poznatiji je kao M. C. Escher i poznat po svojim, najčeše matematikom inspiriranim bakropisima i drvorezima. Bavio se oslikavanjem realno nemogućih konstrukcija.

Ovdje prikazujemo dva njegova rada sa sferom.



M. C. Escher: autoportret na sferi

Dick Termes

Dick Termes američki je umjetnik koji koristi sustav perspektive u šest točaka koji je sam osmislio za stvaranje jedinstvenih slika na velikim sferama zvanim *Termespheres*. On je vodeći svjetski sferični umjetnik.

Termesfere su slike na kuglastom platnu koje hvataju cijeli okoliš (gore, dolje, lijevo, desno, naprijed i straga). Njihov stil inspiriran je Termesovom željom da "naslika cjelokupnu sliku". Termespheres su obično obješene malim lancima i rotirane električnim stropnim motorima kako bi se otkrio potpuni, zatvoreni svemir dok se sfere polako okreću.

Ubrzo nakon što je diplomirao na Black Hills State, Dick Termes napravio je pomak u svojim umjetničkim djelima koji je oduševio matematičare i umjetnike.

Evo nekoliko misli Dicka Termesa o tome kako stvara sferne slike, tj. kako povezuje slikarstvo i matematiku.

Za proučavanje perspektive pokušavao sam nabaviti veće kamere poput panoramske fotografije kako bih uhvatio pogled i shvatio sam da želim potpunu sliku - sve iz jedne točke u prostoru okreće se okolo, iznad vas, ispod vas i oko vas. Stavio sam svojih šest točaka perspektive na sferu, počeo pro-

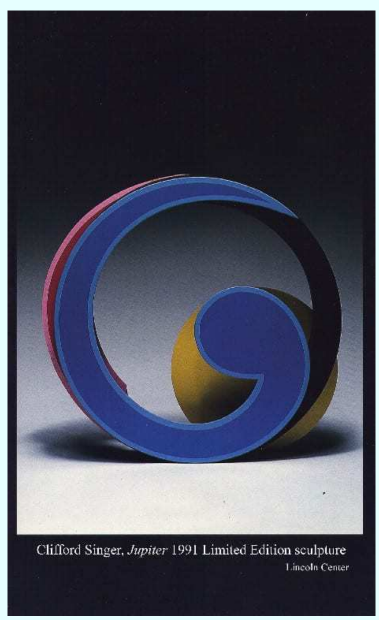
jicirati pravce i jednostavno je pristajalo kao savršeno.

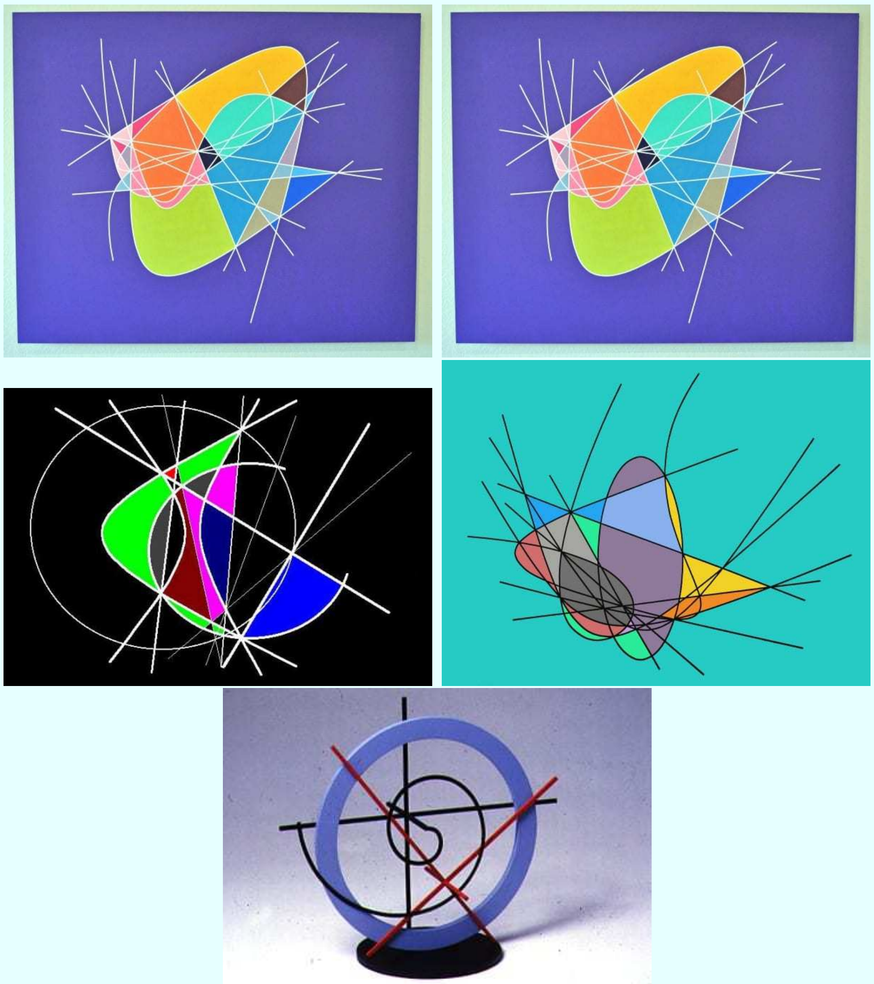
D. Termes i primjeri njegovih sfernih slika

Clifford Singer

Evo nekoliko misli **Clifforda Singera** američkog umjetnika o tome kako doživljava i uporabljuje matematiku u svojem radu.

Bez sumnje je ispravno reći da postoji određeni rječnik sastavljen od geometrijskih elemenata koji se dosljedno koristi u cijelom mom radu.
U osnovi, moj se rad sastoji od polja boja, pravaca (konvergirajućih, divergentnih, paralelnih ili asimptotski približavajućih), kružnica, elipsa, hiperbola i mnogih drugih klasičnih krivulja klasične i moderne matematike.
Nije važno smatraju li se konusnim presjecima, euklidskim konstrukcijama ili rješenjima sustava diferencijalnih jednadžbi. Svaku kompoziciju ili dovršenu konstrukciju s tim elementima smatram jedinstvenim umjetničkim izrazom.
Stoga koristim geometriju kao jezik za projektiranje svojih estetskih izraza.





Nekoliko radova C. Singera

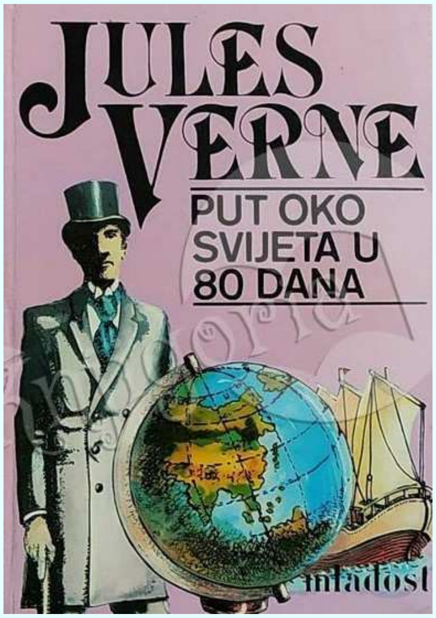
Evo i nekoliko misli Clifforda Singera kako spaja matematiku i svoje radove.

Budući da sam odabrao razne matematičke/geometrijske koncepte kao osnovu za rad, moja je namjera oblikovati složenu integraciju crtanjem refleksije s kolinearnim sjecištima i sjecištima na dijagonalnom iscrtavanju. *Serija* `Cut Space` *predstavlja matematičke koncepte korištenjem pravca, apriori primarna matematika za formaliziranje geometrijske konstrukcije.* *Postupci geometrijske konstrukcije u osnovi su algoritamski. Kolinearna sjecišta pokazuju i matematičke i vizualne istine u geometrijskom slikovnom polju.*

11.2. Primjeri u književnosti

Jules Verne

Francuski književnik **Jules Verne** (1828. - 1905.) napisao je pustolovni roman *Put oko svijeta u 80 dana*.



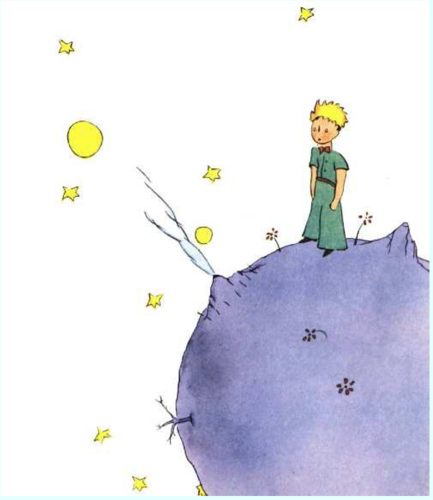
Roman je objavljen 1873. godine, a označava vrhunac putopisnih fikcija Julesa Verna. Glavna okosnica romana jest oklada izmedu engleskog džentlmena Philleasa Fogga i njegovih kolega iz kluba *Reform* u 20.000 funti da će Fogg, kao što i sam naslov sugerira, napraviti krug oko svijeta u 80 dana.

Fogga pokreće želja za izazovom i poriv da sam postigne nešto veliko.

Obišao je svijet i dobio okladu. Fogg je uštedio jedan dan, a da toga nije bio ni svjestan. Budući da je putovao prema istoku, dobio je jedan dan. Da je išao na zapad, izgubio bi ga.

Dakle, završna ideja i oklada utemeljene su na poznavanju ili nepoznavanju datumske granice i vremenskih zona na Zemlji.

Antoine de Saint-Exupéry



Asteroid/sfera na kojem živi Mali Princ

U romanu *Mali Princ* francuski književnik **Antoine de Saint-Exupéry** (1900. - 1944.) uzeo je sferu kao model na kojem živi Mali Princ i njegova Ruža.

E. A. Abbott & D. Burger

Knjige Engleza **E. Abbotta** i Nizozemca **D. Burgera** napisane su na različitim jezicima i u razmacima od gotovo jednog stoljeća.

Romani su danas najčešće citirani od strane autora ozbiljnih znanstvenih rasprava o višedimenzionalnoj geometriji i teoriji relativnosti.

Autori na fascinantan način uvode čitatelja u glavne tokove važnih geometrijskih ideja, kao što su dimenzija, koherentnost, zakrivljenost, demonstrirajući apstraktne objekte u raznim "svakodnevnim" situacijama.

Ovaj znanstveno-fantastični roman smatra se korisnim za ljude koji proučavaju, primjerice, pojmove o drugim prostornim dimenzijama ili hiperprostorima. Kao književno djelo, roman je cijenjen zbog satire na društvenu hijerarhiju viktorijanskog društva.

Isaac Asimov je u predgovoru jednom od brojnih izdanja romana napisao da je to *najbolji uvod u način sagledavanja dimenzija koji se može* *pronaći*.

Naslovnica ruskog prijevoda: Flatlandija i Sferlandija

11.3. Primjeri sunčanih ura

Sunčana ura je naprava koja pokazuje vrijeme uz pomoć sjene koju baca štap osvijetljen Suncem.

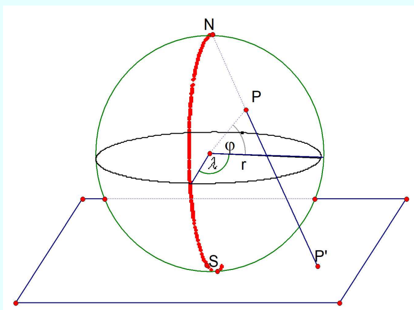
Horizontske projekcije

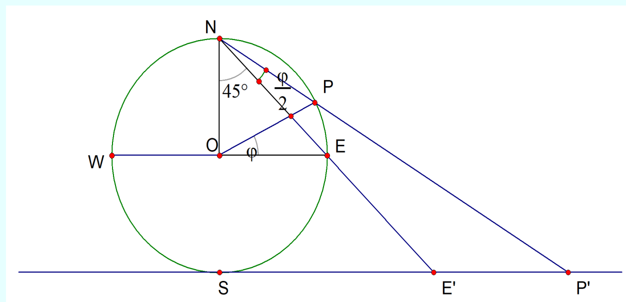
Horizontske projekcije nastaju prenošenjem sferne površine na ravninu koja je dodiruje u nekoj točki. Prema položaju te točke, projekcije mogu biti *ekvatorske, polarne* i *kose.*

Već je Hiparhu[1] bila poznata **stereografska projekcija**. Zamislimo da se Zemljin globus stavi na ravnu podlogu tako da je dodiruje u Južnom polu. Sa Sjevernog pola povlačimo zrake. Točka P' koju dobijemo u presjeku zrake koja prolazi točkom P na Zemljinoj površini i ravnine jeste stereografska projekcija točke P.

[1]Astronom i matematičar **Hiparh** iz Niceje (180.-125. g. pr. K.), osnivač je matematičke geografije. Napravio je prve trigonometrijske tablice tetiva, a sastavio je i zvjezdani katalog odredivši s velikom točnošću udaljenost Mjeseca od Zemlje. Uveo je i geografske koordinate – dužinu i širinu. Hiparhova djela do nas nisu došla, ali su mnoga od njih ušla u *Almagest*.

Stereografska projekcija preslikava sve meridijane u zrake koje polaze iz Južnog pola. Ekvator se preslikava u kružnicu. Cijela sjeverna hemisfera se preslikava izvan kružnice ekvatora, a južna unutar nje. Sjeverni pol nema projekciju.



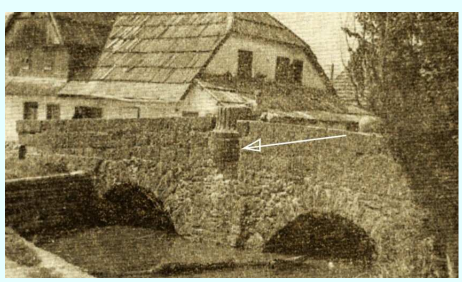


Sa slike vidimo da se točka P preslika u točku P' koja je od Južnog pola S udaljena $|SP'| = 2r\,\mathrm{tg}(45° + \frac{\varphi}{2})$. Pri ovoj projekciji kutovi ostaju nepromijenjeni, pa kontinenti na karti imaju isti oblik kao na Zemlji.

Sunčane ure

U svojem radu o **Jozefinskoj cesti** koja vodi od Karlovca do Senja Stjepan Szavitz Nossan piše: *... Da se putnicima po staroj Jozefini olakša vremensko orijentiranje postavljene su usput na više mjesta sunčane ure. ... Postamenti sunčanih ura sačuvani su danas još samo u: Mrežničkim poljicima, Generalskom stolu, Jezeranama, Brinju i Vratniku.*

Ilustracije radi pogledajmo sljedeće slike.




Slika ure na mostu kod Brinja i njezin postament

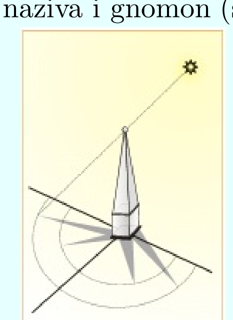
Za potrebe našeg razmatranja možemo reći da je Zemlja kugla[2] koju osvjetljavaju usporedne sunčeve zrake.

[2] Zemlja je "spljoštena" na polovima, a "ispupčena" na ekvatoru, tj. polovi su bliži središtu Zemlje od ekvatora.

Problem koji želimo ovdje razmotriti rješava se u okviru sferne geometrije i s njom povezane sferne trigonometrije, ali se može razmotriti i na drugi način. Promatranjem pravaca (štapa i njegove sjene) i ravnina (ekvatorijalne, horizontalne i vertikalne) problem ćemo svesti na određivanje elemenata piramide.

Sunčanik ili *Sunčana ura* (sat, dobnik) je astronomska naprava koja pokazuje/određuje doba dana (obdanice) na temelju smjera sjene štapa (*gnomona*).

Dva su glavna dijela sunčane ure: *brojčnik* najčešće sa satnom podjelom, dok na većim konstrukcijama postoji i minutna podjela i *kazaljka*, točnije štap koji se još naziva i gnomon (sjenopokazivač - onaj koji zna, znalac).



Sunčana ura nam pokazuje *pravo mjesno vrijeme* ili *pravo Sunčevo vrijeme*.

Prema položaju ravnine na koju pada sjena štapa razlikujemo: a) ekvatorsku, b) horizontalnu i c) vertikalnu sunčanu uru.

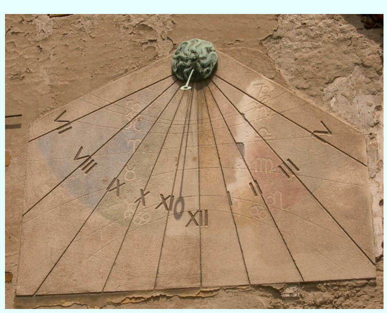
Horizontalna Sunčana ura

Evo ekvatorske Sunčane ure koja se nalazi ispred planinarske kuće Sv. Andrije na Visu a koju su projektirali i konstruirali Drago Špoljarić i Rudolf Schwabe.

Sunčane ure su inspiracija umjetnicima. Ovdje ćemo zbog ilustracije prikazati nekoliko ura.

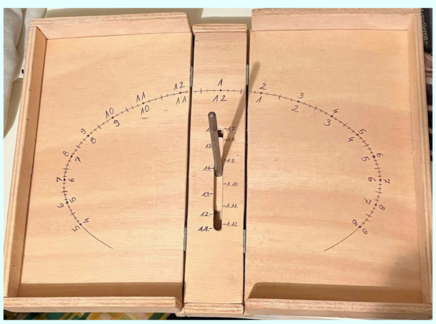
Ura Mali kaptol Sisak rad je akademskog slikara Slave Striegla

Dvije su klasične vertikalne ure na zidovima kuća u Zagrebu i u Milni, dok su tri umjetnički radovi u Zagrebu, Senju i Splitu.



Vertikalne ure iz Tkalčićeve ulice u Zagrebu i u Milni

Umjetnički radovi ura u Zagrebu, Senju i Splitu



Ovo je "portabl" sunčana ura koju je izradio Ilija Ćosić, učenik 2. razreda gimnazije kao godišnji seminarski rad.

Prema Justinijanoviću [20.], vrijeme koje proteče od jedne do druge gornje kulminacije Sunca, naziva se *pravim Sunčevim danom*.

Mjerenjem trajanja pravog Sunčevog dana utvrđeno je da ono ne traje uvijek jednako. Uzrok tome je činjenica da se Zemlja rotirajući oko svoje osi istodobno kreće po *ekliptici* (godišnjoj putanji) nejednolikom brzinom. Ta je putanja eliptična, tj. elipsa sa Suncem u jednom žarištu (fokusu), no kretanje oko Sunca nije jednoliko.

Prema 2. Keplerovom zakonu spojnica Zemlje i Sunca opisuje u jednakim vremenima, jednake površine. Naime, Zemlja zimi, kad je bliže Suncu, brže se kreće, nego ljeti, kada je od Sunca udaljenija.

Nejednoliko kretanje Zemlje oko Sunca ima za posljedicu nejednoliko prividno kretanje Sunca oko Zemlje. Kako pravi Sunčev dan ne traje uvijek jednako dugo, ne može se iz njega izvesti jedinica vremena, jer bi se ona iz dana u dan mijenjala.

Pravo Sunce putuje po ekliptici krečući se nejednoliko a zamišljeno srednje Sunce kreće se po nebeskom ekvatoru jednolikom brzinom.

Vrijeme koje proteče od jedne do druge gornje kulminacije srednjeg

Sunca zove se *srednji Sunčani dan* ili *srednji dan*.

Za 24 sata Zemlja se jedanput okrene oko svoje osi i opiše 360° (puni krug). Podijelimo prijeđeni put od 360° na 24 sata dobit ćemo da za 1 sat Zemlja zarotira 15°. Prema tomu Zemlja je podijeljena na 24 *vremenska pojasa (zone)* širine 15°.

Vremenska razlika između susjednih pojaseva iznosi 1 sat. Vrijeme u početnom pojasu nazivamo *zapadnoeuropsko vrijeme* ili *svjetsko vrijeme (Universal Time, UT)* a vrijeme u Hrvatskoj *srednjoeuropsko vrijeme*.

Sunce prividno putuje od istoka prema zapadu, tako da pri kretanju prema istoku, dodajemo 1 sat, a suprotno pri kretanju prema zapadu, oduzimamo 1 sat.

No, možemo reći i da je čitava Zemljina ploha (sfera) podijeljena na 24 sferna dvokuta, pri čemu granični meridijani određuju kut od 15°. To ima za posljedicu, da sva mjesta u dvokutu imaju isto vrijeme.

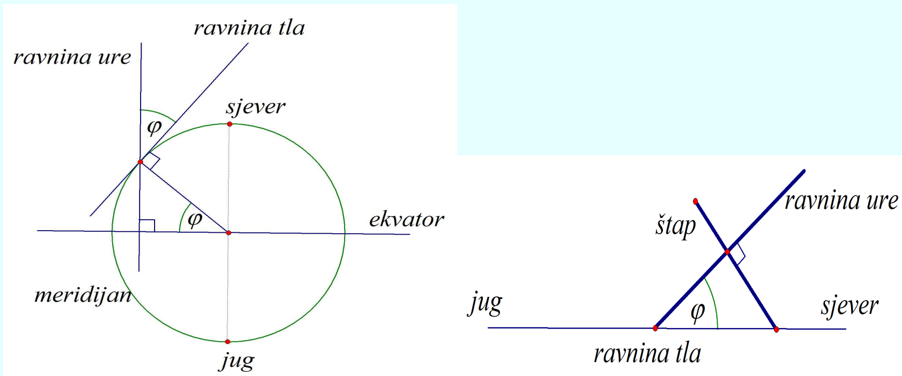
Ekvatorska ura

Nacrtajmo kazalo sati ekvatorske sunčane ure.

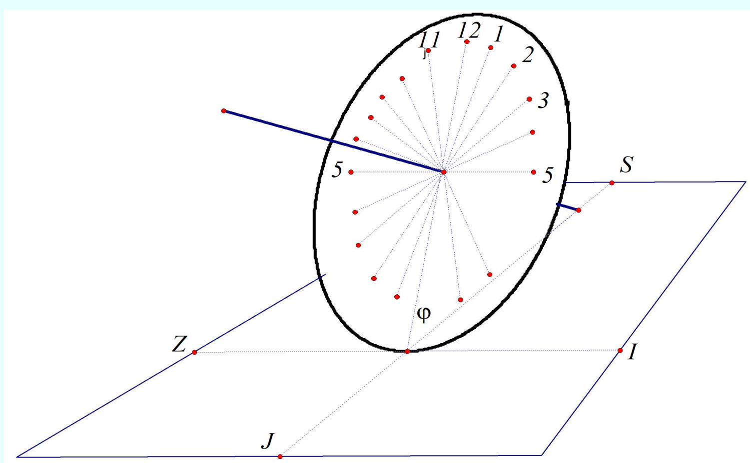
Krug sunčane ure se postavlja tako da s tlom zatvara, sa sjeverne strane, kut jednak geografskoj širini[3].

[3]Tlo je tangencijalna ravnina Zemljine sfere, a ravnina kazala ure je ravnina okomita na ravninu u kojoj leži Zemljin ekvator.

Središtem kruga položi se štap okomit na ravninu kruga.



Sunce se giba na nebeskom svodu prividno po kružnici. Suncem osvijetljen štap baca na krug sjenu koja se giba gotovo istom kutnom brzinom. Kako Suncu treba 24 sata za "obići" Zemlju, puni krug dijelimo na 24 jednaka dijela.

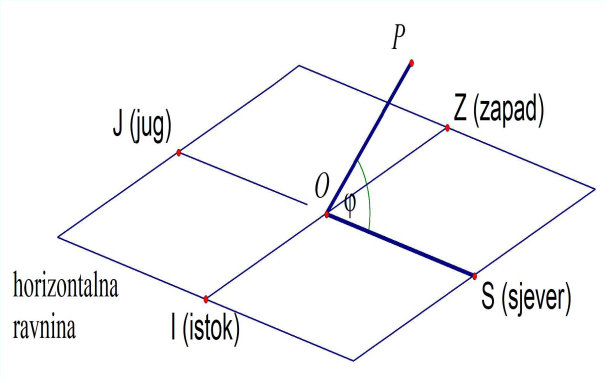


Kad Sunce prolazi kroz meridijan, sjena štapa jest u ravnini meridijana. Tada kraj sjene na uri označimo brojem 12. Sat kasnije sjena će pasti na sljedeću oznaku. Tijekom proljeća i ljeta sjene će se projicirati na donju polovicu kruga, a za vrijeme jeseni i zime na gornju.

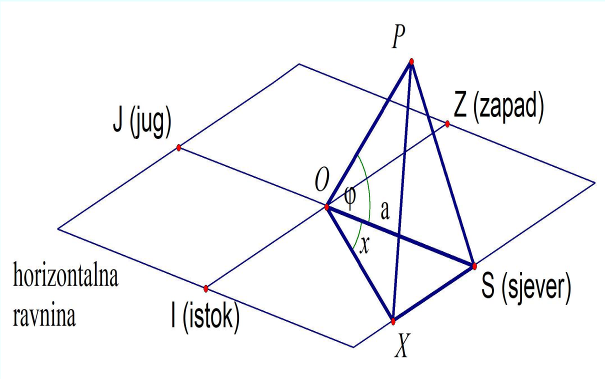
Zadatak. *Načinite od kartona i olovke ili nekog drugog materijala uru vašeg grada/mjesta. Provjerite njezinu točnost!*

Horizontalna ura

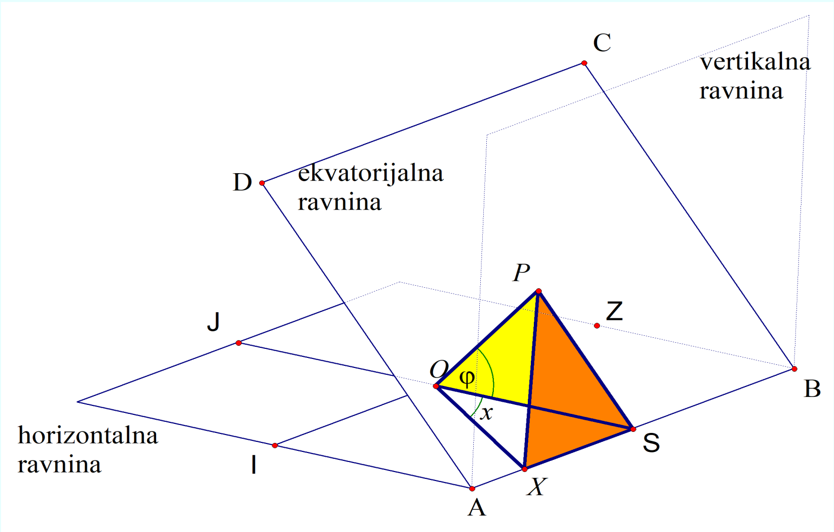
Štap sunčane ure baca sjenu na horizontalnu ravninu. Odredimo smjer meridijana i na tom pravcu izaberimo neku točku O u koju stavimo štap $\overline{OP}$ priklonjen za geografsku širinu φ prema horizontali i okrenut prema sjeveru.



Horizontalno kazalo sati je sad složenije načiniti nego u slučaju ekvatorijalne ure. Kad se Sunce nalazi u meridijanu, sjena štapa pada na pravac OS prema sjeveru. U tom trenutku je podne (12 sati). Nakon t sati sjena štapa će pasti na pravac OX. Odredimo kut x.



Vidimo da krajevi štapa, krajevi njegove sjene na uri u podne i t sati nakon podne određuju trostranu piramidu. Trebamo odrediti kut x u vrhu O piramide $OSXP$.



Pobočka XSP piramide je u ekvatorijalnoj[4] ravnini $ABCD$ koja je okomita na OP.

Iz pravokutnog trokuta $\triangle OPS$ (pravi je kut u vrhu P) slijedi da je

$$|PS| = |OS| \sin \varphi.$$

Za 1 sat Sunce "prijeđe" 24-ti dio punog kruga, tj. za 1 sat sjena prijeđe $\left(\frac{360}{24}\right)^{\circ} = 15^{\circ}$ pa zrake Sunca zatvaraju kut $15^{\circ} \cdot t$, što znači da je

$$\angle XPS = 15^{\circ} \cdot t.$$

Iz pravokutnog trokuta $\triangle PSX$ (pravi je kut u vrhu S) slijedi

$$\begin{aligned} |SX| &= |PS| \operatorname{tg}(15^{\circ} \cdot t) \\ &= |OS| \sin \varphi \operatorname{tg}(15^{\circ} \cdot t). \end{aligned}$$

Dakle, kut x koji zatvara sjena, u nekom mjestu geografske širine φ, sa sjenom nakon/prije t sati poslije/prije podne dobiva se iz pravokutnog trokuta XOS (pravi kut je u vrhu S). Vrijedi

$$\operatorname{tg} x = \frac{|OS| \sin \varphi \operatorname{tg}(15^{\circ} \cdot t)}{|OS|},$$

odnosno

[4]U njoj leži štap ekvatorijalne ure.

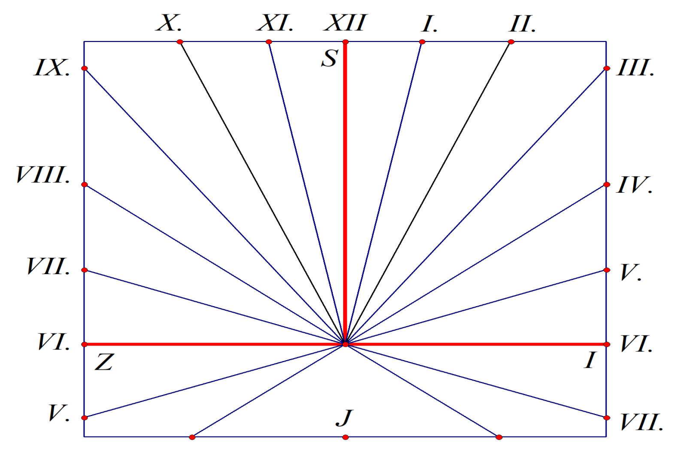
$$\boxed{\operatorname{tg} x = \sin \varphi \cdot \operatorname{tg}(15^\circ \cdot t).}$$

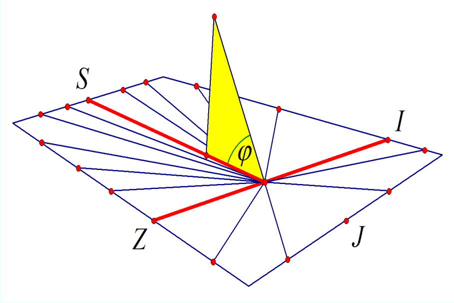
Primjer 28. *Nacrtajmo kazalo sati horizontalne sunčane ure u Zagrebu. (geografska širina Zagreba je $\varphi = 45°48'54''$)*

Izračunajmo kut x za koji se pomakne sjena za $\pm 1, \pm 2, \ldots \pm 6$ sati od podneva. Dobivamo sljedeće podatke.

t	1	2	3	4	5	6
x	$10°52'35''$	$22°29'25''$	$35°38'39''$	$51°9'42''$	$69°30'41''$	$90°$

Nacrtajmo kazalo!



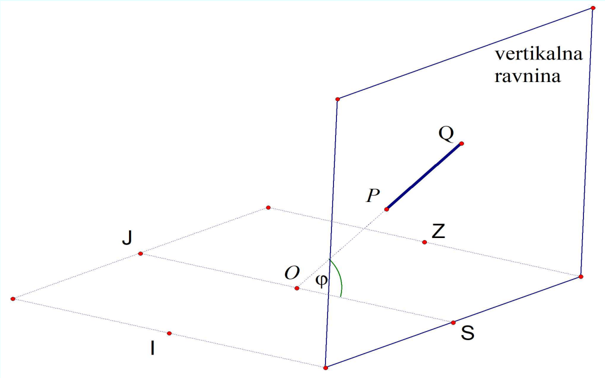


Zadatak. *Nacrtajte kazalo horizontalne sunčane ure u: a) Splitu ($\varphi = 43°30'29''$), b) Osijeku ($\varphi = 45°33'44''$), c) svojem mjestu.*

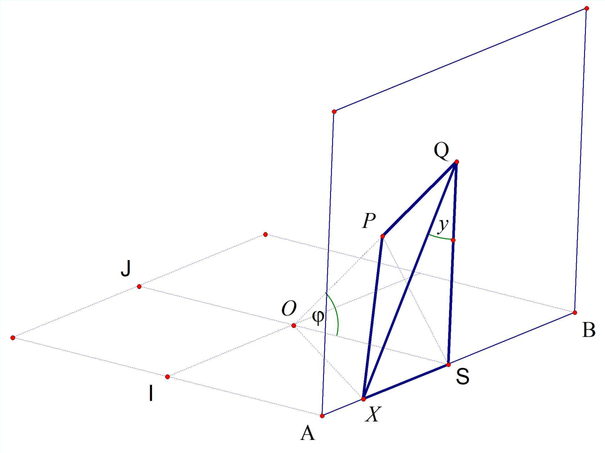
Vertikalna ura

Vertikalna sunčana ura konstruira se tako da se vertikalna ravnina kazala stavi u smjer "zapad – istok". Meridijan je u toj ravnini vertikalni pravac.

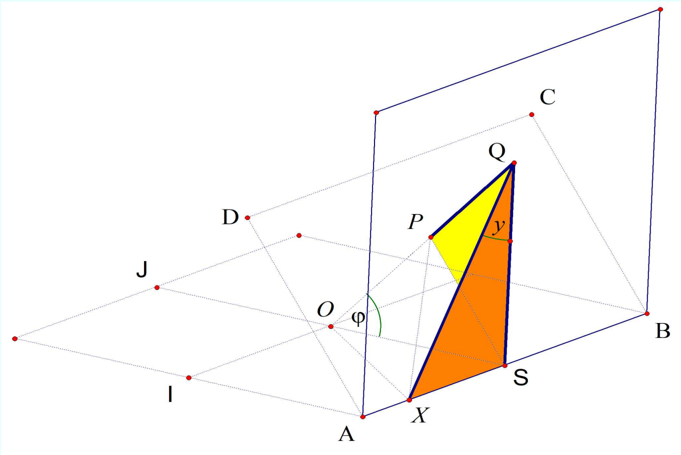
Štap $\overline{PQ}$ koji baca sjenu, okrenut je prema jugu i nagnut je opet prema horizontu (obzoru) za kut φ.



Kad je Sunce u meridijanu (u 12 sati) sjena štapa pada na QS. Nakon/prije t sati, sjena štapa je $\overline{QX}$. Tako štap, njegove sjene i zrake sunca $\overline{PS}$ i $\overline{PX}$ određuju piramidu $XSQP$.



U nekom mjestu geografske širine φ, kut y koji zatvara sjena s podnevnom sjenom nakon/prije t sati dobiva se iz pravokutnih trokuta $\triangle OSQ$, $\triangle PQS$ i $\triangle XSQ$.



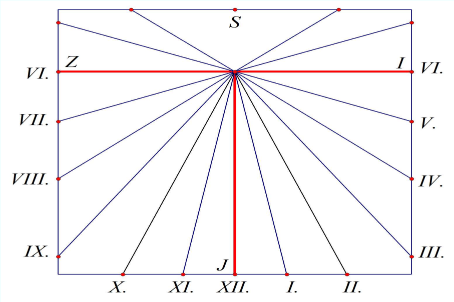
Zadatak. *Dokažite da je kut y zadan relacijom.*

$$\boxed{\operatorname{tg} y = \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}(15^\circ \cdot t).}$$

Zadatak. *Nacrtajte kazalo sati vertikalne sunčane ure u: a) Zagrebu, b) Splitu, c) Rijeci, d) svojem mjestu.*

(`Rješenje.`)a)

t	1	2	3	4	5	6
y	$10^\circ 34' 42''$	$21^\circ 55' 11''$	$34^\circ 52' 32''$	$50^\circ 21' 46''$	$68^\circ 58' 16''$	90°



11.4. Primjer iz kemije

U svojem diplomskom radu iz kemije student Toni Lijić je napisao i dao model sfere s glavnim kružnicama, polarama i polovima uporabljen u koordinacijskoj kemiji.

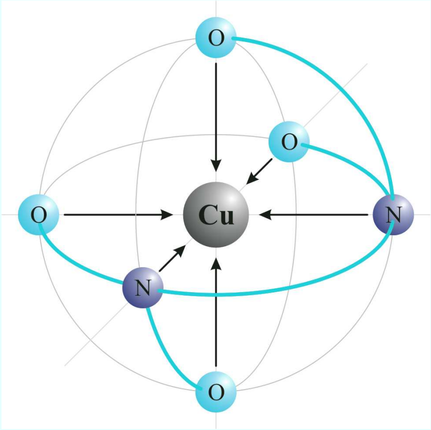
Godine 1893. Alfred Werner u svom je radu opisao oktaedarsku strukturu kompleksa prijelaznog metala te pritom postavio temelje za dodjeljivanje koordinacijskog broja te oksidacijskog stanja za spojeve koji su tada bili znani kao dvosoli.

Izraz "dvosol", proizašao je iz razloga što je primjećeno da prijelazni metal ne tvori vezu samo s anionskim ligandom kako bi se postigla neutralizacija naboja, već ju tvori i s drugim vrstama koje su se činile nepotrebnim jer je neutralnost spoja već bila postignuta.

Koordinacijski spojevi obično se dobivaju otapanjem soli metala i prekursora liganda u pogodnom otapalu.

Shvaćajući razloge preferiranja određenih koordinacijskih geometrija oko pojedinih metalnih centara pronađene su sintetske metode za određene kombinacije metala i liganada te je time započet razvoj moderne *koordinacijske kemije*.

U posljednjih stodevetnaest godina bilježi se ogroman napredak u koordinacijskoj kemiji općenito, no u posljednjih desetak godina bilježi se i nagli razvoj dvaju novih područja koordinacijske kemije, *metalo-organskih mreža* (MOF) te *supramolekulskih koordinacijskih kompleksa* (SCC).



Primjer koordinacijskog spoja: oktaedarski kompleks bakra s kelatnim ligandom etilentetratraoctenom kiselinom(EDTA)

11.5. Primjeri iz fizike i geofizike

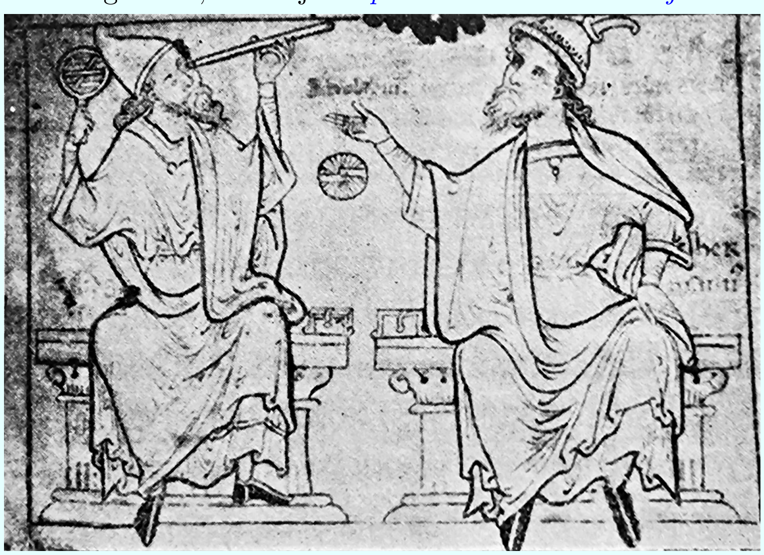
1. Je li naš prostor euklidski?

Klasična mehanika pretpostavlja da je *svemir euklidski prostor*. Euklidski prostor je apstraktni matematički prostor, definiran bez fizičkog svijeta, ali koristan za njegov opis. Navikli smo, od početaka znanosti, promatrati i opisivati naš svijet *euklidskom geometrijom* u kojoj vrijedi Pitagorin poučak, tj. da zbroj unutarnjih kutova trokuta iznosi 180°.

Fizika se služi matematikom u opisu svijeta, no svaka matematička tvrdnja nužno ne opisuje neko svojstvo stvarnosti.

Tek eksperimentom možemo ispitati je li omjer izmjerenog opsega odnosno promjera stvarnog kruga približno broj π.

U kojoj mjeri je euklidska geometrija prikladna u izmjeri i opisu prirode? Da bismo to odgovorili, nužno je *eksperimentalno istraživanje*.



Na slici iz XIII. st. prikazani su "otac geometrije" Euklid, lijevo, te Herman Dalmatin, prvi hrvatski filozof i znanstvenik

Mali Princ i sferno tijelo

Vjerujemo da vam je poznat Newtonov *Opći zakon gravitacije*. To je onaj koji govori o sveprisutnoj privlačnoj sili između tijela.

U mehanici, tijela obično svodimo na čestice ako stvarna veličina, oblik ili sastav tijela nisu presudni u rješavanju određenog problema.

Opći zakon gravitacije za čestice podrazumijeva da su mase - tijela - toliko udaljena da se mogu aproksimirati česticama. Posebni je slučaj gravitacijska sila između tijela sa sfernom simetrijom. Sferno tijelo može se zamijeniti česticom u kojoj zamišljamo da se nalazi sva masa tijela.

Kako sada npr. izraziti gravitacijsku silu između Zemlje i stolca na površini Zemlje?

Oblik Zemlje opisuje *sferoid* (rotacijska poha, slična plohi kugle) pa tijelo Zemlje aproksimiramo kuglom, a nju pak česticom u središtu kugle. Budući da je udaljenost središta Zemlje do površine puno veća od dimenzija stolca, tada i stolac smijemo aproksimirati česticom te primijeniti Newtonov opći zakon gravitacije.

Zadatak. *Poznajete li Malog Princa? Da je malo tijelo - planet - na koje se nedavno spustio sfernog oblika, očigledno mu je jer ga može cijelog obići pješice i vratiti se u početni položaj.*

No kako odrediti polumjer i masu planeta pa da ih može usporediti s vrijednostima iz tablica u udžbenicima fizike?

U džepu je Mali Princ ponio jabuku, metar i sat, a znao je univerzalnu gravitacijsku konstantu.

Mali Princ - istraživač sferoida

Mali Princ je ovako mogao istražiti planet. Neka je masa malog sfernog tijela M. Opseg sfernog tijela odgovara propješačenoj udaljenosti d natrag do početnog položaja.

Iz opsega slijedi polumjer sfernog tijela $R = \dfrac{d}{2\pi}$.

Ispuštena jabuka mase m, s metrom određene visine h (npr. 1 m) te satom izmjerenog vremena slobodnog pada t, određuju ubrzanje slobodnog pada $g = \frac{2h}{t^2}$.

To ubrzanje jabuci daje privlačna sila kojom sferno tijelo djeluje na jabuku, $mg = \frac{GMm}{R^2}$, gdje je G univerzalna gravitacijska konstanta.

Masa sfernog tijela po kojem je Mali Princ napravio *đir* iznosi $M = \frac{gR^2}{G}$.

Zadatak. *No Mali Princ se prethodno pripremio za istraživanje nebeskog tijela Plutona tako da je uz pomoć tablica pronašao njegov polumjer i masu pa je odredio opseg, ubrzanje slobodnog pada te vrijeme slobodnog pada s visine jednog metra.*

Koje vrijednosti je pronašao i odredio?

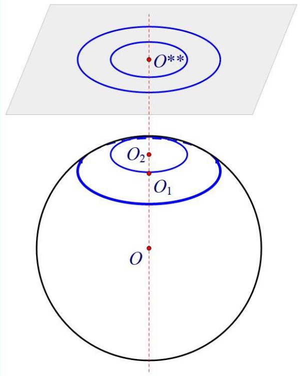
(`Uputa: Polumjer Plutona je` 1185 `km, a masa` $1,305 \cdot 10^{22}$ `kg.`)

Život na zakrivljenoj plohi

Malom Princu je bilo lako ustanoviti da je ploha nebeskog tijela sferoid. No, kako bi to bilo dvodimenzionalnim stvorenjima koja obitavaju na sferi?

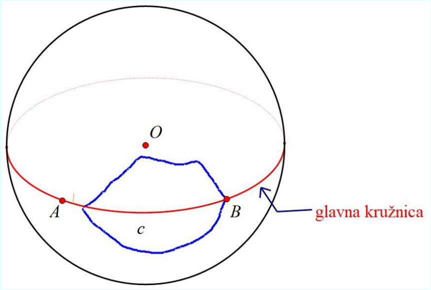
Mogu li se testirati Euklidovi poučci eksperimentima?

Da bi ispitala je li njihov životni prostor euklidski, dvodimenzionalna stvorenja mogu konstruirati dva kruga sa zajedničkim središtem: jedan vrlo mali, drugi veliki. Tada za euklidsku geometriju vrijedi da je omjer opsega dviju takvih kružnica jednak omjeru njihovih polumjera. Ako bi dvodimenzionalna stvorenja živjela na površini sfere vrlo velikog polumjera, otkrila bi da omjer opsega dviju kružnica sa zajedničkim središtem nije jednak omjeru polumjera, ako je jedan polumjer mali, a drugi veliki.



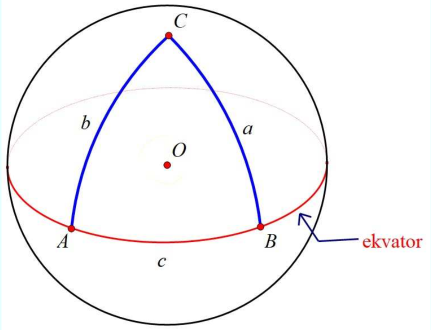
Omjeri opsega i polumjera kružnica na ravnini i sferi nisu jednaki

Nadalje, dvodimenzionalna stvorenja mogu konstruirati ravnu crtu kao najkraću stazu među bilo kojim dvjema točkama B i C na površini sfere, koja je dio glavne kružnice koja prolazi kroz te točke, a ne bilo koja druga staza s prikazana na slici.



Najkraća udaljenost na sferi

Već kod *malih* pravokutnih trokuta na sferi, kod kojih je svaka stranica mala u usporedbi s polumjerom sfere, može se ustanoviti da vrijedi $a^2 + b^2 \approx c^2$ te da je zbroj kutova u trokutu neznatno veći od 180°.

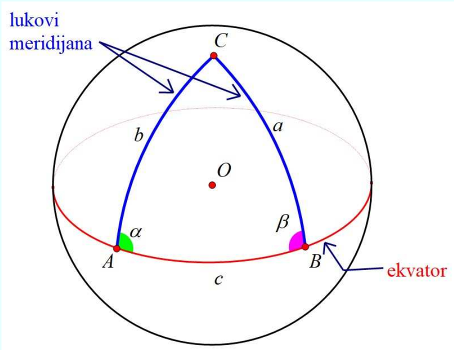


Pitagorin poučak na sferi vrijedi samo približno

Značajna odstupanja euklidske geometrije od stvarnosti javljaju se kod *velikih* trokuta na sferi. Ako se točke B i C nalaze na ekvatoru sfere, "pravac" koji ih spaja bit će dio ekvatorske kružnice. Najkraća staza od točke A na sjevernom polu do B na ekvatoru je staza (i dio meridijana) duljine c koja siječe ekvator BC pod pravim kutom α. Najkraća staza od A do C je crta jednake duljine b koja također siječe ekvator BC pod pravim kutom β. Time je određen pravokutni trokut u kojem je $b = c$ pa je Pitagorin poučak na sferi narušen jer $c^2 \neq a^2 + b^2$, a zbroj unutarnjih kutova trokuta $\triangle ABC$ je uvijek veći od 180°.

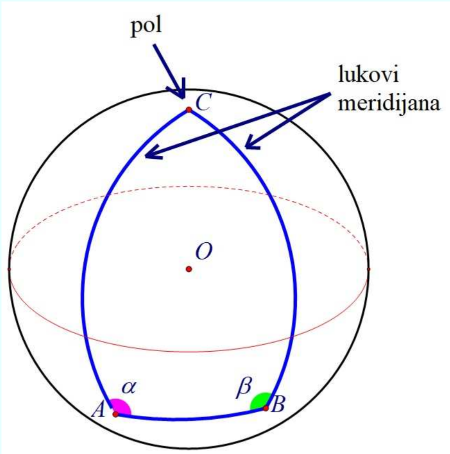
Tako su dvodimenzionalni stanovnici eksperimentom otkrili da zapravo žive na zakrivljenoj plohi, baš kao i Mali Princ.

Što su trokuti veći, zakrivljenost plohe na kojoj se nalaze je zamjetnija, a potreba za sfernom matematikom to veća.



Izmjera većih trokuta upućuje na tu izraženiju neprikladnost primjene euklidske geometrije na sferi.

Kod trokuta kod kojih su točke A i B ispod ekvatora, zbroj je unutarnjih kuteva $\alpha + \beta > 180°$. To se može objasniti jedino time da je dvodimenzionalna ploha zakrivljena u prostoru. *Polumjer zakrivljenosti* ovdje prikazane plohe je upravo polumjer sfere.



Zatupimo kutove α i β

Zadatak. *Napravite simulaciju sfernog trokuta, tako da se izborom parametara, npr. polumjera zakrivljenosti, stranica i/ili kutova trokuta, provjerava Pitagorin poučak odnosno zbroj unutarnjih kuteva!*

Kada je zbroj unutarnjih kutova trokuta manji od $180°$*?*

Princ matematike

Izmjera trokuta na sferi, različitim eksperimentima, trebala bi potvrditi objašnjenje odstupanja prostora od euklidske geometrije.

Princ matematike, astronom, geodet i geomagnetičar, **Carl Friedrich Gauß** provjeravao je euklidska svojstva našeg trodimenzionalnog prostora mjerenjem i određivanjem zbroja unutarnjih kutova u velikom trokutu.

Za zakrivljen trodimenzionalni prostor Gauß je očekivao da bi zbroj kutova u dovoljno velikom trokutu mogao biti znatno različit od 180° pa je početkom XIX. stoljeća *heliotropom* izmjerio trokut sa stranicama od 69 km, 85 km i 106 km, a kojeg čine planinski vrhunci Brocken, Hohehagen i Inselberg u Njemačkoj. Gauß je utvrdio da se zbroj unutarnjih kutova od 180° razlikuje manje od $1''$. Budući da je toliko odstupanje manje od pogreške mjerenja, Gauß je zaključio da je unutar točnosti opažanja, naš prostor euklidski.

Zadatak. *Uz pomoć Google Earth očitajte koordinate Gaußovih vrhova Brocken, Hohehagen i Inselberg. Pretpostavite da su očitane elipsoidne koordinate približno jednake sfernim.*

Izračunajte stranice i unutarnje kutove sfernog trokuta te ga skicirajte Sketchpedom.

Odredite zbroj unutrašnjih kutova.

Zakrivljenost svemira

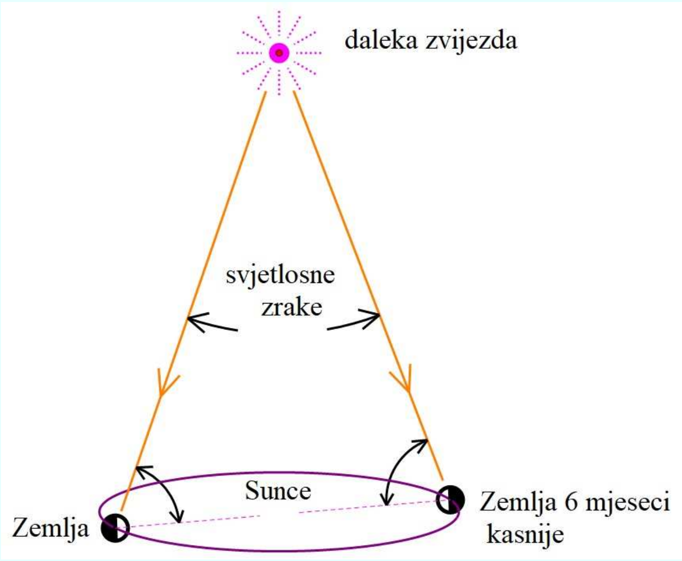
Da bismo utvrdili je li naš prostor euklidski, trebalo bi mjeriti vrlo velike trokute, čije bi vrhove činili Zemlja i udaljene zvijezde, galaksije, itd.

Analogno zakrivljenosti dvodimenzionalne plohe sfere, možemo zamisliti zakrivljenost prostora. Primjerice, neprotuslovnost astronomskih mjerenja unutar našeg Sunčeva sustava određuje prvu donju granicu polumjera zakrivljenosti našeg svemira.

Do otkrića *Neptuna* i *Plutona* dovela su mala odstupanja predviđenih putanja od astronomskih opažanja uz pomoć teleskopa, a što ne bi bilo moguće da geometrijski zakoni ne vrijede.

Zakrivljenost svemira može se procijeniti i *Schwarzschildovom metodom*, u kojoj se izvode opažanja *daleke zvijezde*, odnosno kuteva α i β u suprotnim položajima Zemlje u orbiti oko Sunca, vremenski udaljenim šest mjeseci (v.

sl.).



Na ravnoj plohi mora biti $\alpha + \beta < 180°$

Ako je prostor ravan, zbroj kutova je $\alpha + \beta < 180°$ te se približava toj vrijednosti što je zvijezda udaljenija.

No, kako smo vidjeli na prethodnoj slici, u zakrivljenom prostoru zbroj $\alpha+\beta$ ne mora biti manji od 180°. Astronomi moraju samo opažati sve dalje i dalje zvijezde i određivati kada zbroj $\alpha + \beta$ postaje veći od 180°.

Astronomska opažanja dalekih zvijezda nisu pokazala da vrijedi $\alpha+\beta >$ 180°.

Na najvećim skalama, baza ovakvog jednakokračnog trokuta sa Zemljom na vrhu ugrađena je u *kozmičku mikrovalnu pozadinu* pa je mjerenjima moguće ustanoviti zbroj kutova u trokutu, a time i zakrivljenost svemira.

Rezultat *eksperimenta* izvedenog 2000. godine otkrio je da je geometrija svemira ravna. No, gore opisana opažanja odnose se na *prosječan* polumjer zakrivljenosti svemira i nisu osjetljiva na *lokalna* izobličenja ili anomalije prostora u neposrednoj blizini pojedinih masa.

Euklid i Einstein

Euklidska geometrija je narušena i u *neinercijalnim sustavima. Zamislimo* brzo rotirajući disk s ucrtanim vrlo malim i vrlo velikim kružnicama sa zajedničkim središtem.

Vanjski promatrač može u svom, inercijalnom, sustavu nacrtati jednake kružnice koje miruju te se podudaraju s onima na disku pa ustanoviti da je omjer opsega jednak omjeru polumjera tj. da u njegovom sustavu vrijedi euklidska geometrija.

Unutarnji promatrač, na disku, mjerenjem polumjera i opsega malog kruga nalazi ih jednakim kao kod vanjskog promatrača, budući da dijelovi diska blizu središta imaju vrlo male brzine.

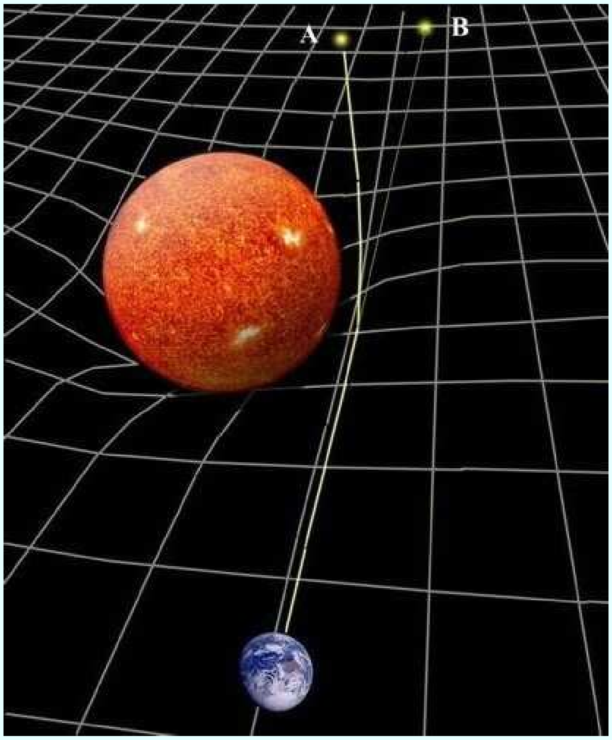
Mjerni štap jednake je duljine za vanjskog i unutarnjeg promatrača pa smijemo primijeniti klasičnu mehaniku i nije nam nužna *specijalna teorija relativnosti*. Budući da nema *relativističke kontrakcije* štapa pri mjerenjima polumjera jer je smjer gibanja okomit na mjerni štap, promatrač na disku nalazi polumjer velikog kruga, jednake duljine kao i vanjski promatrač.

No, zbog rotacije diska, opseg velikih kružnica bit će različit za ta dva promatrača! Stoga niti omjer dva polumjera ne može biti jednak omjeru dvaju opsega, za unutarnjeg odnosno vanjskog promatrača. Promatrač na disku ne može potvrditi valjanost euklidske geometrije u svom, neinercijalnom, sustavu.

Idealizirani eksperiment ukazuje da se *relativistička fizika* mora temeljiti na *općenitijoj* geometriji od euklidske.

U usporedbi sa općim zakonom gravitacije Newtona, tek će *jednadžbe opće teorije relativnosti Alberta Einsteina* razotkriti geometrijska svojstva prostor-vremena, a koja su oblikovana *masama* i njihovim *energijama*.

Primjerice, *lokalne anomalije* su u blizini našeg Sunca predviđene *Općom teorijom relativnosti* i eksperimentalno potvrđene pri pomrčini Sunca 29. svibnja 1919. Opažanjima zvijezda vidljivih blizu Sunčeva ruba za vrijeme potpune pomrčine ustanovljeno je da se svjetlosne zrake neznatno *savijaju* pri prolasku pored Sunca. Otklon zrake koja gotovo dotiče rub Sunca iznosi samo $1,75''$. Prostor oko Sunca je *zakrivljen*, svjetlost blizu Sunca putuje po *zakrivljenoj stazi* pa kako se Sunce kreće po nebu, izgleda kao da se zvijezde tik uz njegov rub neznatno radijalno odmiču od svojih normalnih položaja, kada bismo ih po danu mogli opažati.



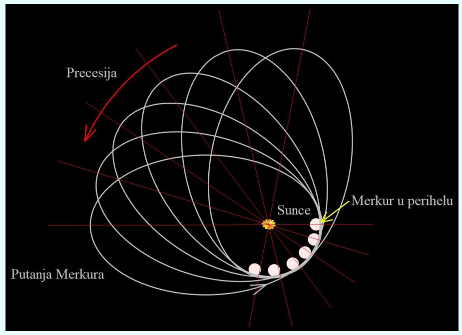
Izobličenje prostora u blizini velike mase

Izobličenje prostora u blizini velike mase savija zraku svjetlosti izvora A tako da se čini kao da dolazi iz B.

Izrazitija *odstupanja od Newtonovog zakona gravitacije* mogu se očekivati samo za razmjerno jake gravitacijske sile.

Privlačenje između Sunca i **Merkura** veće je nego između Sunca i bilo kojeg drugog planeta. Putanja Merkura, planeta koji je najbliži Suncu, malo se razlikuje od putanje koja se dobiva uz pomoć Newtonovih zakona gibanja i opće gravitacije. Merkur putuje oko Sunca, a elipsa koju opisuje precesira vrlo sporo u odnosu na sustav povezan sa Suncem. Merkurova elipsa izvršila bi potpunu precesiju za tri milijuna godina!

Einsteinove jednadžbe opisuju kako geometrija prostora oko Sunca utječe na Merkurovo gibanje.



Precesija perihela Merkura

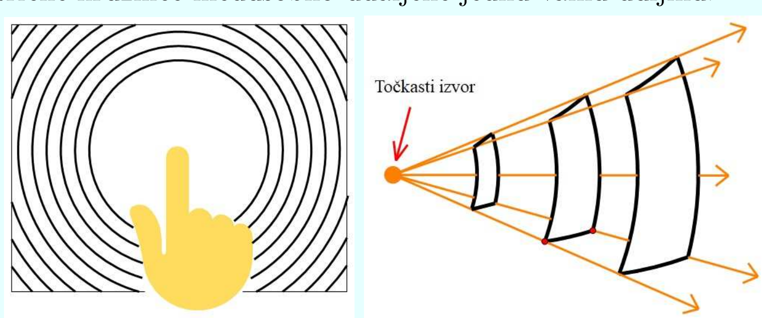
Einstein je 1915. predvidio *precesiju perihela Merkura*.
Pa, je li naš prostor onda euklidski ili ne?

- *Kak' se zeme* - odgovorili bi naši stari.

Eksperimenti pokazuju da je u praksi *euklidska geometrija* sasvim prikladna za opis položaja i gibanja unutar *malog* prostora npr. učionice, kao i na skali svemira, ali ne i lokalno u blizini masa, kao što su Zemlja ili Sunce.

2. Sferne plohe

Udarimo li prstom po vodi, val se širi od točke poremećaja radijalno na sve strane (lijeva slika). *Putujući valovi* na površini vode primjer su valova koji se šire u $2D$. Pojedini brijeg vala tvori valnu frontu - kružnicu čiji se polumjer neprekidno povećava kako se val širi. Valne fronte vide se kao koncentrične kružnice međusobno udaljene jednu valnu duljinu.



Sferne plohe

Kod *sfernih putujućih valova* u $3D$, kao npr. valova zvuka ili svjetlosti, valne fronte tvore *sferne plohe*. Desna slika prikazuje *odsječke* koncentričnih sfernih ploha, koji predstavljaju dijelove fronti valova izlazećih iz točkastog izvora. U *homogenom* sredstvu svaka valna fronta tvori potpunu sfernu plohu, a pravci koji se šire iz izvora prema van zovemo zrakama. One su okomite na valne fronte i pokazuju *smjer širenja vala*.

Zadatak. *Primjer 3D putujućih valova su i valovi potresa.*

Prilikom potresa, tzv. primarni P *i sekundarni* S *valovi šire se iz žarišta ili hipocentra, ispod epicentra potresa na površini Zemlje.*

Longitudinalni P *valovi potresa šire se brže od transverzalnih* S*, brzinama približno* $8\frac{km}{s}$ *odnosno* $5\frac{km}{s}$*.*

Kako detekcijom vremena dolazaka valova odrediti udaljenost do žarišta potresa?

Koliko je potrebno seizmografskih postaja da se jedinstveno locira žarište?

Opažamo li razliku vremena nailazaka valova $\Delta t = t_S - t_P$ na seizmografu koji je udaljen od hipocentra $r = v_S \cdot t_S = v_P \cdot t_P$, određujemo udaljenost

$$r = \Delta t \left(\frac{1}{v_S} - \frac{1}{v_P} \right)^{-1}$$

.

Dakle, udaljenost postavlja hipocentar na sferu u čijem je središtu jedna postaja. Analogno vrijedi za drugu postaju seizmografa. Sjecište dviju sfera daje kružnicu. Tek će podatci treće nekolinearne seizmografske postaje locirati žarište kao točku.

3. Priča o dva sferna sustava

U *geomagnetizmu* ponekad koristimo *geomagnetske* umjesto *geografskih* koordinata.

Geomagnetske koordinate definiraju *kolatitude* i *longitude* u sustavu *geomagnetskog dipola*, tj. omogućuju određivanje položaja točaka na Zemljinoj sferi u *geomagnetskom referentnom sustavu*.

Geomagnetske kolatitude Θ su kutovi prema osi geomagnetskog dipola, a *geomagnetske longitude* Λ definirane su u odnosu na *geomagnetski referentni meridijan*.

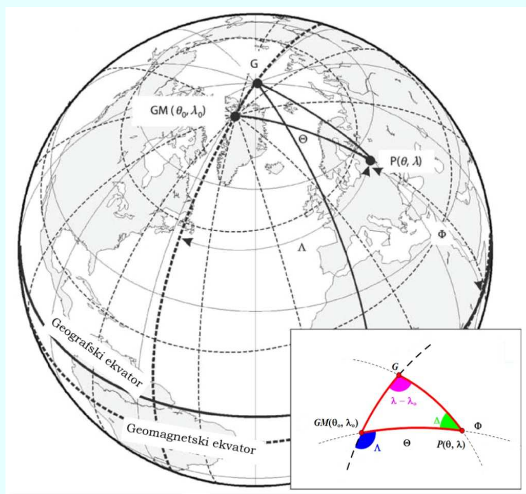
U geomagnetskom referentnom sustavu *sjeverni* i *južni geomagnetski pol* su točke gdje os idealiziranog centralnog dipola siječe Zemljinu sferu, a *geomagnetski ekvator* presjek sferne Zemlje, s ravninom koja prolazi kroz središte Zemlje i ortogonalna je na dipol.

Uz poznati položaj geomagnetskog pola, i iz zadanih *geografskih koordinata* θ, λ na površini Zemlje, uz pomoć poučka o kosinusu za stranice iz sferne trigonometrije, možemo odrediti *geomagnetsku kolatitudu* Θ

$$\cos\Theta = \cos\theta \cdot \cos\theta_0 + \sin\theta \cdot \sin\theta_0 \cdot \cos(\lambda - \lambda_0).$$

U određivanju geomagnetske longitude Λ, pozitivne prema istoku, najprije definiramo *geomagnetski referentni meridijan* tako da prolazi kroz geografski i geomagnetski pol, pa primjenom poučka o kosinusu na kut θ, slijedi

$$\cos\Lambda = \frac{\cos\Theta \cdot \cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin\Theta \cdot \sin\theta_0}.$$



Na slici se vide geografske i geomagnetske koordinate: G je geografski sjeverni pol, GM geomagnetski sjeverni pol, P točka na Zemljinoj površini, njene geomagnetske koordinate su geomagnetska kolatituda Θ odnosno latituda Φ te longituda Λ.

Pomoću poučka o sinusima odnos je kompletiran

$$\sin\Lambda = \frac{\sin(\lambda - \lambda_0) \cdot \sin\theta}{\sin\Theta}.$$

U točkama na površini Zemlje također možemo odrediti *geomagnetsku deklinaciju* Δ, kao kut u geomagnetskom sustavu između pravaca prema geografskom i geomagnetskom sjeveru

$$\sin\Delta = \frac{\sin(\lambda - \lambda_0) \cdot \sin\theta_0}{\sin\Theta}$$

s istim predznakom kao *magnetska* deklinacija D.

11.6. Zadaće

Riješite, razmislite, ...

1. Dokažite tvrdnje koje je Arhimed dokazao u svom djelu *O kugli i valjku*.

   a) *Oplošje sfere jednako je učetverstručenoj površini njezinog glavnoga kruga (tj.* $O = 4\pi R^2$*).*

   b) *Obujam kugle jednak je učetverostručenom obujmu stošca čija baza služi kao glavni krug, a visina kao polumjer kugle (tj.* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$*).*

   c) *Oplošje valjka, uključujući baze, jednako je* $\frac{3}{2}$ *oplošja upisane kugle.*

2. Oplošje sfere je 100 cm^2. Koliki joj je polumjer?

3. Kugla i valjak imaju promjer 5 cm. Ako im je isti obujam kolika je visina valjka?

4. Solnica je cilindričnog oblika: promjer i visina su joj 3 cm, zatvorena polusferom. U njoj je sol do visine 2,5 cm. Ako okrenemeo solnicu, koliko će nivo soli (pretpostavimo da je horizontalan) biti udaljen od baze solnice?

5. Juha se kuhala u valjkastom loncu promjera 15 cm. Nakon toga je prebačena u 6 posuda polusfernog oblika promjera 10 cm.

   a) Kolika je bila visina juhe u loncu?

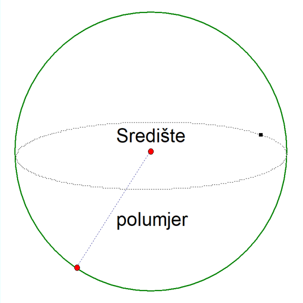
   b) Koliko se puta povećala površina juhe koja je u dodiru sa zrakom, nakon što je juha prelivena?

6. Kornet za sladoled ima polumjer 4 cm i dubinu 12 cm. U njemu je kuglica sladoleda polumjera 2,5 cm. Koliko je kuglica udaljena od vrha korneta?

Kugla

Kugla je tijelo omeđeno jednom zakrivljenom sfernom plohom. Sfernu plohu – **sferu** sačinjavaju sve točke prostora koje su od neke zadane točke udaljene za istu vrijednost. Stoga su sfera, odnosno kugla, zadane jednom točkom S –

središtem i pozitivnim brojem r – **polumjerom**. Sfera je skup svih točaka prostora koje su od točke S udaljene za r, a kugla je skup svih točaka prostora koje su od točke S udaljene za najviše r.

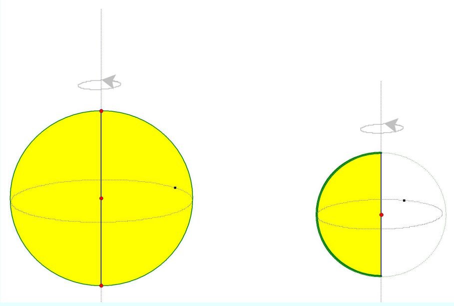


Kugla[5] nema mrežu u ravnini. Posljedica ove činjenice je da u ravnini ne možemo nacrtati vjerni prikaz Zemljine površine. Stoga je Zemljina površina na svakoj karti predočena "iskrivljeno".

Sfera/kugla je rotacijsko tijelo – može se dobiti rotacijom kružnice/kruga oko nekog promjera.

Slično kružnici i pravcu, sfera i ravnina mogu biti u 3 položaja: nemaju zajedničkih točaka, imaju jednu zajedničku točku i sijeku se.

Prvi je slučaj kad je ravnina od središta sfere udaljena za više od polumjera sfere.



U drugom slučaju udaljenost je jednaka polumjeru i tada kažemo da je ravnina *tangencijalna* na sferu. Tangencijalna je ravnina okomita na polumjer koji prolazi točkom dodira. U trećem je slučaju ravnina sekanta i njezina je udaljenost od središta manja od polumjera.

Primjer 29. *Što je presjek sfere i ravnine?*

[5]Vidimo da ono što je krug u ravnini, to je kugla u prostoru, dok kružnici u prostoru odgovara sfera.

U presjeku sfere i ravnine su sve točke ravnine koje su od središta S sfere udaljene za r.

Koliko su te točke udaljene od ortogonalne projekcije točke S na ravninu?

Označimo tu točku sa S'. Tada je $\overline{SS'}$ okomita na $\overline{S'T}$, gdje je T bilo koja točka presjeka. Stoga je trokut $\triangle SS'T$ pravokutan.

Kako svi ti trokuti imaju hipotenuzu jednaku polumjeru sfere r i katetu jednaku udaljenosti ravnine od središta sfere d, to je $|S'T| = \sqrt{r^2 - d^2}$ jednako za sve točke. Označimo taj broj s r_1.

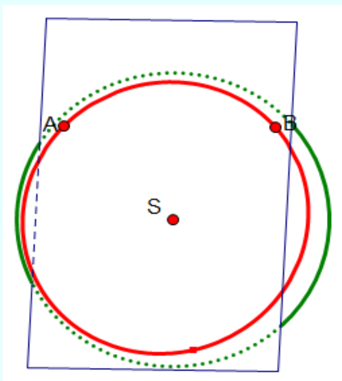
Dakle, sve su točke presjeka od točke S' udaljene za r_1 pa je presjek kružnica.

Zadatak. *Koliki je polumjer kruga koji je u presjeku kugle polumjera 5 cm i ravnine koja je od središta kugle udaljena 3 cm?*

(`Rješenje: 4 cm`)

Ako ravnina prolazi središtem, tada je presjek sfere/kugle i ravnine kružnica/krug čiji je polumjer jednak polumjeru sfere/kugle, $r_1 = r$. Ta se kružnica naziva *glavna kružnica* sfere/kugle.

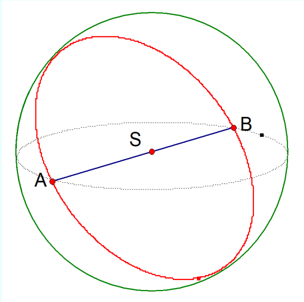
Primjer 30. *Pokažimo da kroz svake dvije točke sfere prolazi glavna kružnica.*



Neka su točke A i B bilo koje točke sfere. Tada točke A i B i središte sfere S određuju ravninu. Vidjeli smo da je presjek svake ravnine i sfere kružnica, a kako ova ravnina prolazi središtem, to je presjek glavna kružnica.

Zadatak. *Koliko glavnih kružnica prolazi krajnjim točkama promjera sfere?*

(`Rješenje: Beskonačno. Na slici su prikazane 2 glavne kružnice`)

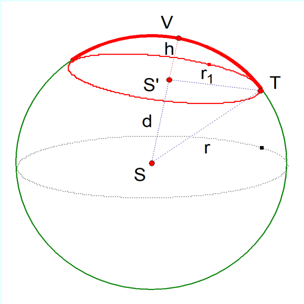


Na Zemlji su svi meridijani glavne polukružnice, dok je među paralelama jedina glavna kružnica ekvator.

Slično kao za krug, definiramo i dijelove kugle: kuglin odsječak i kuglin isječak.

Kuglin odsječak nastaje kad kuglu presiječemo ravninom. Dio sfere koji čini kuglin odsječak nazivamo **kapica** ili **kalota**. Kapica koja odgovara glavnoj kružnici je **polusfera**. Krug koji nastaje u presjeku je **baza** kuglinog odsječka, dok je dio okomice na bazu točkom S' do sfere – dužina $\overline{S'V}$ njegova **visina**.

Kuglin je odsječak potpuno određen udaljenošću ravnine od središta d ili svojom visinom h.



Primjer 31. *Odredimo polumjer kuglinog odječka čija je visina 4 cm, ako je polumjer kugle 7 cm.*

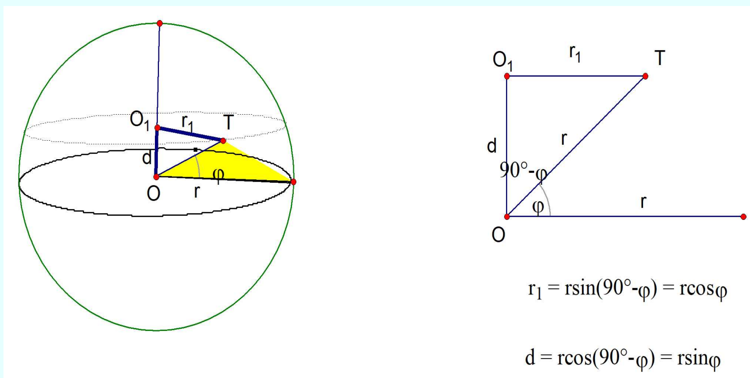
Imamo da je: $r_1 = \sqrt{7^2 - (7-4)^2} = 2\sqrt{10}$ cm

Zadatak. *Odredite polumjer kuglinog odječka čija je visina h cm, ako je polumjer kugle r cm.*

(`Rješenje:` $r_1 = \sqrt{2rh - h^2}$)

Primjer 32. *Odredimo polumjer kuglinog odsječka i udaljenost njegove* *baze od središta kugle ako je zadan kut φ koji spojnica točke na kružnici baze kuglinog odsječka i središta kugle zatvara s ravninom neke glavne kružnice.*

Sa slike vidimo da je polumjer baze jednak $r_1 = r\cos\varphi$, a udaljenost $d = r\sin\varphi$.



Sa slike vidimo da je polumjer baze jednak $r_1 = r\cos\varphi$, a udaljenost $d = r\sin\varphi$.

Zadatak. *U kugli polumjera 12 cm odredite polumjer kuglinog odsječka i udaljenost njegove baze od središta kugle ako je kut $\varphi = 32°45'$.*

(`Rješenje:` $r_1 \approx 10,09$ `cm,` $d \approx 6,49$ `cm`)

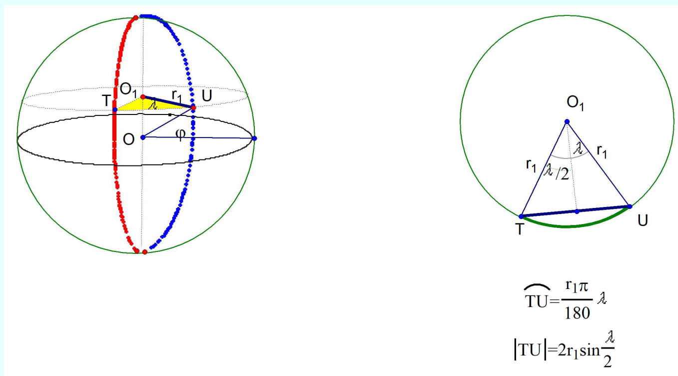
Primjer 33. *Odredimo udaljenost točaka T i U na obodu baze kružnog odsječka čiji je kut φ, ako se točke nalaze na glavnim kružnicama okomitim na bazu odsječka čije ravnine zatvaraju kut λ.*

Vidimo da točke T i U određuju luk mjere $\dfrac{r_1\pi\lambda}{180}$ i tetivu duljine $2r_1\sin\frac{\lambda}{2}$, odnosno, ako mjerimo njihovu udaljenost po sferi, tada je

$$\widehat{AB} = \frac{r\pi\lambda\cos\varphi}{180}.$$

Ako mjerimo u kugli, tada je

$$|TU| = 2r\cos\varphi\sin\frac{\lambda}{2}.$$



Vidimo da točke T i U određuju luk mjere $\dfrac{r_1\pi\lambda}{180}$ i tetivu duljine $2r_1\sin\frac{\lambda}{2}$, odnosno, ako mjerimo njihovu udaljenost po sferi, tada je

$$\widehat{AB} = \frac{r\pi\lambda\cos\varphi}{180}.$$

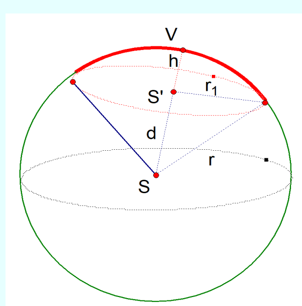
Ako mjerimo u kugli, tada je

$$|TU| = 2r\cos\varphi\sin\frac{\lambda}{2}.$$

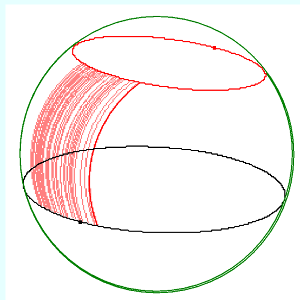
Zadatak. *U kugli polumjera 52 cm odredite udaljenost točaka* T *i* U *na obodu baze kružnog odsječka čiji je kut* $\varphi = 52°$, *ako se točke nalaze na glavnim kružnicama okomitim na bazu odsječka čije ravnine zatvaraju kut* $\lambda = 105°12'$.

(`Rješenje:` $\widehat{AB} = 58,78$ `cm,` $|TU| \approx 50,87$ `cm`)

Kuglin isječak je dio kugle omeđen kapicom i plaštom stošca kojemu je vrh u središtu kugle, a baza je baza kapice.



Dio kugle između dviju usporednih ravnina koje sijeku kuglu zove se **sloj**, a dio sfere zove se **pojas** ili **zona**.



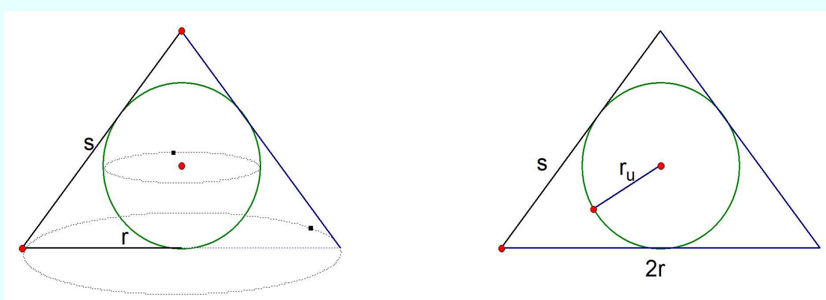
Primjer 34. *U uspravni stožac polumjera r, izvodnice s i visine h upišimo kuglu. Koliki joj je polumjer?*

Presijecimo stožac ravninom kroz vrh koja je okomita na bazu. Ta ravnina siječe kuglu po glavnoj kružnici. Glavna je kružnica upisana trokutu pa joj je polumjer najjednostavnije odrediti iz površine trokuta kojemu su stranice $s, s, 2r$. Vrijedi:

$$P_{\triangle} = \frac{2rh}{2} = r_u \frac{s+s+2r}{2},$$

pa je

$$r_u = \frac{rh}{r+s}.$$



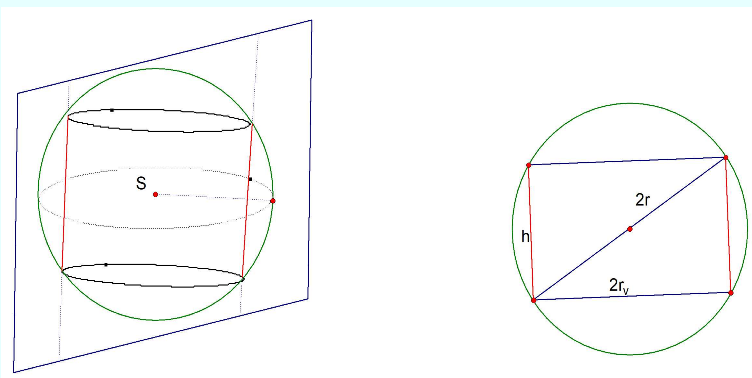
Zadatak. *Odredite polumjer sfere koja je opisana uspravnom stošcu polumjera r, izvodnice s i visine h.*
(`Rješenje:` $r_o = \frac{s^2}{2h}$)

Primjer 35. *Uspravni valjak visine h upisan je u sferu polumjera r. Koliki je polumjer baze valjka?*

Valjak je upisan u kuglu ako su kružnice njegovih baza na sferi. Ravnina osnog presjeka valjka prolazi središtem kugle pa je presjek te ravnine i sfere glavna kružnica. Stoga je kružnica polumjera r opisana pravokutniku sa stranicama h i $2r_v$. Vrijedi:

$$(2r)^2 = h^2 + (2r_v)^2$$

$$r_v = \frac{\sqrt{4r^2 - h^2}}{2}$$



Zadatak. *Odredite dimenzije kocke koja je upisana u sferu polumjera* r.

12. Zadatci

Nikol Radović na kongresu nastavnika

U ovom poglavlju navest ćemo niz zadataka koji se rješavaju uporabom činjenica, poučaka, primjera i formula elaboriranim u ranijim poglavljima ove knjige.

12.1. Sferna geometrija

Napišimo niz zadataka za sfernu geometriju.

1. Pretpostavimo da neka točka na glavnoj kružnici leži u unutrašnjosti male kružnice. Dokažite da te dvije kružnice imaju točno dvije zajedničke/presječne točke.

2. Pretpostavimo da mala kružnica sadrži barem jednu točku s obje strane velike kružnice. Dokažite da se dvije kružnice sastaju u točno dvije točke.

3. Dokažite da je u bilo kojem sfernom trokutu polovica zbroja bilo koja dva kuta šiljasta, prava ili tupa, ako i samo ako je polovica zbroja suprotnih stranica šiljasta, prava ili tupa.

4. Pretpostavimo da se tri male kružnice u parovima sijeku u dvije točke. Dokažite da sve tri velike kružnice koje prolaze kroz svaki par presječnih točaka prolaze i kroz par antipodalnih točaka.

5. Pretpostavimo da u sfernom trokutu konstruiramo tri luka od svakog vrha do suprotne stranice na način da raspolavljaju površinu trokuta. Dokažite da se ta tri luka sastaju u jednoj točki.

6. Dokažite da se tri sferne zrake koje raspolavljaju kutove sfernog trokuta (sferne simetrale kutova) sastaju u jednoj točki u unutrašnjosti trokuta.

7. Dokažite da ako sferni luk ima jednu krajnju točku u unutrašnjosti male kružnice i jednu krajnju točku u vanjštini iste male kružnice, tada neka točka luka leži na maloj kružnici.

8. Dokažite da ako mala kružnica siječe i unutrašnjost i vanjštinu druge male kružnice, tada male kružnice imaju neprazno sjecište.

9. Pokažite istinitost sljedećih tvrdnji:

   (a) Ako hipotenuza sfernog pravokutnog trokuta ima mjeru $\dfrac{\pi}{2}$, tada jedan od kutova nasuprot drugim stranicama mora biti pravi kut.

(b) Ako je hipotenuza sfernog pravokutnog trokuta šiljasta, tada druge stranice nisu prave i moraju biti obje šiljaste ili obje tupe.

(c) Ako je hipotenuza sfernog pravokutnog trokuta tupokutna, ostale stranice nisu prave, jedna mora biti šiljasta, a druga tupokutna.

10. Pretpostavimo da je u sfernom pravokutnom trokutu s pravim kutom u C, $a \neq 90°$. Dokažite da je $a < c < 180° - a$ ili $180° - a < c < a$.

11. Pretpostavimo da su u sfernom pravokutnom trokutu s pravim kutom u C, B i b komplementarni (to jest, $B + b = 90°$.) Pokažite da je $A = c$.

12. U sfernom pravokutnom trokutu s pravim kutom u C, pokažite da ako je A šiljast, onda je $a \leq A$, a ako je A tup, onda je $a \geq A$.

13. U sfernom pravokutnom trokutu s pravim kutom u C, pokažite da ako je $a = A$ tada je ili $a = A = 90°$ ili su sve ostale stranice i kutovi pravi.

14. Pretpostavimo da je u sfernom trokutu zbroj mjera dviju stranica manji od π. Promotrimo luk od njihovog zajedničkog vrha do suprotne stranice. Ako taj luk prepolovi kut, dokažite da je mjera luka manja od $\frac{\pi}{2}$. Nadalje, zaključite da je mjera luka manja od polovice zbroja mjera susjednih stranica.

15. Istražite kakav je sferni trokut, ako je njegov polarni trokut pravokutan.

12.2. Sferna trigonometrija

Sferna je trigonometrija bila obvezni dio poučavanja i učenja u srednjoj školi. Postoji veliki broj udžbenika s primjerima i zadatcima.

Ovdje ćemo prepisati niz zadataka iz ranije spomenutog udžbenika starijeg od sto godina [29.] koji su obojani plavom bojom, iz udžbenika [42.] crvenom, iz priručnika [5.] ljubičastom te narančastom iz vježbenice [57.]. Te zadatke i primjere navodimo zato što su vrlo kvalitetni pa ih ne treba prepustiti "zaboravu". Ostali zadatci koje ne prepuštamo zaboravu a nalaze se u citiranoj literaturi ili su zadatci autora ove knjige uobičajene su crne boje.

1. Pokaži da je površina sfernog dvokuta, koji ima sferni kut α, jednaka $P = \frac{r^2\pi}{90°}\alpha°$, gdje je r polumjer sfere.

2. Kolika je površina sfernog dvokuta što ga čine meridijani Zagreba ($15°58'59''$) i Osijeka ($18°42'0''$) istočno od Greenwicha?

3. Izračunaj površinu sfernog dvokuta što ga čine meridijani Rijeke ($14°26'44''$ istočno od Greenwicha) i New Yorka ($-745°0'24''$ zapadno od Greenwicha).

4. Ako sferni trokut ima 2 ili 3 prava kuta, što odatle slijedi za stranice?

5. Kada su dva sferna trokuta kongruentna, a kada simetrična? Promotrite pripadne trobride!

6. Može li sferni trokut imati dva ili tri tupa kuta?

7. Je li moguć pravokutan sferni trokut za koji je hipotenuza najmanja stranica? Razjasnite to skiciranjem na sferi.

8. Zadana su dva mjesta na Zemlji: M_1 (geografska širina $\varphi_1 = 4°35'43''$, geografska dužina $\lambda_1 = 11°14'42''$) i M_2 ($\varphi_2 = 12°46'$, $\lambda_2 = 101°14'42''$). Odredite sfernu udaljenost M_1M_2.

   Uputa: Kut što ga čine oba meridijana ima na sjevernom polu $90°$! Trokut je pravokutan; d izlazi iz $\cos d = \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2$.

   (Rezultat: $88°59'8''$*.)*

9. Riješite isti zadatak ako je zadano M_1 ($\varphi_1 = 51°14'45''$, $\lambda_1 = 112°43'26''$) i M_2 ($\varphi_2 = 33°51'20''$, $\lambda_2 = 22°43'26''$).

10. Jednakostranični sferni trokut ima stranice $s = 65°$. Koliki su kutovi?

    Napomena: Sferna visina dijeli taj trokut u dva pravokutna trokuta.

11. Od jednakostraničnog sfernog trokuta poznat je kut $\alpha = 65°31'49''$. Kolika je stranica s?

12. Zadana je hipotenuza $c = 75°27'14''$ sfernog pravokutnog trokuta i kut $\alpha = 50°30'27''$. Izračunajte ostale elementa sfernog trokuta.

    (Rezultat: $\beta = 73°3'2'', a = 48°19'45'', b = 67°48'16''$*.)*

13. Zadana je kateta sfernog pravokutnog trokuta $a = 136°49'37''$ i kut nasuprot nje $\alpha = 123°17'19''$. Izračunajte ostale elemente trokuta.

    (Rezultat: Zadatak ima dva rješenja: $c_1 = 54°56'7'', b_1 = 141°58'32'', \beta_1 = 131°11'7''$ *i* $c_2 = 125°3'53'', b_2 = 38°1'28'', \beta_2 = 48°48'53''$*.)*

14. Pokažite da u "pravokutnom" sfernom trokutu ne može nijedna stranica biti 90°.

    Napomena: "Pravokutan" trokut ima samo jedan pravi kut!

15. Što se može reći o stranicama sfernog trokuta koji ima dva prava kuta?

16. Kakve su stranice sfernog trokuta koji ima tri prava kuta?

17. Spustite li se iz vrha pravokutnog trokuta sferna visina h na hipotenuzu c tako da na c nastanu odsječci a_1 i b_1 uz katete a i b, pokažite da će biti

$$\operatorname{tg}^2 a = \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} a_1,$$

$$\operatorname{tg}^2 b = \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} b_1,$$

$$\sin^2 h = \operatorname{tg} a_1 \cdot \operatorname{tg} b_1.$$

18. Razriješite sferni trokut ako je zadano $c = 105°41'38''$, $b = 68°36'21''$. Nađite oba odsječka a_1 i b_1 na c. ($\gamma = 90°$)

19. Razriješite sferni trokut ako je zadano $b = 118°28'33''$, $\alpha = 140°20'13''$.

20. U pravokutnom je trokutu poznato $\beta = 31°12'33''$ i $c = 61°38'37''$. Nađite a, b i α.

21. Razriješite pravokutni trokut za koji je $a = 54°28'52''$, $b = 63°31'18''$.

22. Ako brod odlazi iz Sidneya ($\varphi = -33°51'41''$, $\lambda = 151°12'7''$) prema sjeveroistoku tako da smjer plovidbe čini s meridijanom za Sidney kut od $59°20'$, pod kojim će kutom brod sjeći ekvator, kolika je geografska dužina sjecišta i koliki je prevaljen put u km?

23. Razriješite pravokutan trokut za koji je $b = 50°27'31''$, $\beta = 73°44'30''$.

24. U pravokutnom su trokutu kutovi $\alpha = 112°30'28''$, $\beta = 62°24'41''$. Nađite c, a i b.

25. U jednakokračnom je sfernom trokutu krak $k = 69°18'23''$, osnovka $s = 118°34'9''$. Kolika je visina i kut na vrhu?

26. U pravokutnom je trokutu zadano c i $a+b = m$. Odredite a i b. Nađite $a-b$ iz identiteta $\cos c = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$.

27. U pravokutnom je trokutu poznato: $c = 85°18'37''$, $a - b = 52°18'17''$. Nađite α i β.

28. U trobridu je jedan bridni kut $c' = 90°$, a druga dva $a' = 59°28'16'', b' = 116°15'42''$. Nađite α' i β'. Uporabite polarni trobrid koji je pravokutan!

29. Izračunajte udaljenost od Praga ($\varphi = 50°5'16'', \lambda = 14°25'4''$) do Trsta ($\varphi = 45°38'45'', \lambda = 13°45'43''$) istočno od Greenwicha.

30. Izračunajte udaljenost od Zagreba ($\varphi = 45°48'54'', \lambda = 15°58'59''$) do Dubrovnika ($\varphi = 42°39'3'', \lambda = 18°6'49''$).

31. Izračunajte stranice trokuta što ga čine Osijek ($\varphi = 45°33'44'', \lambda = 18°42'0''$), Bakar ($\varphi = 45°18'19'', \lambda = 14°32'24''$) i Mostar ($\varphi = 43°20'23'', \lambda = 17°49'20''$).

32. Kolika je udaljenost od Zagreba ($\varphi = 45°48'54'', \lambda = 15°58'59''$) do Washingtona ($\varphi = 38°53'20'', \lambda = -77°0'36''$)?

33. Kolika je udaljenost od Krakova ($\varphi = 50°3'52'', \lambda = 19°57'34''$) do Zadra ($\varphi = 44°6'49'', \lambda = 15°13'58''$)?

34. Na Zemlji je zadan sferni trokut koji ima kutove $\alpha = 82°57'10'', \beta = 62°46'40'', \gamma = 76°20'9''$. Kolika je površina toga trokuta?

35. Izračunajte površinu jednakostraničnog sfernog trokuta koji ima stranice $s = 65°$ i nalazi se na sferi s polumjerom $r = 10,5$ m.

36. Izračunajte polumjer sfere na kojoj je jednakostranični sferni trokut koji ima kut $\alpha = 65°31'49''$ i koji ima površinu 3,5473 m^2.

    (Rezultat: $r = 3,5$ m.)

37. Izračunaj površinu pravokutnog sfernog trokuta od kojeg je zadana hipotenuza $c = 96°21'17''$ i kateta $b = 76°32'11''$ ako je polumjer sfere $r = 17,2$

38. Točka T na zapadnoj obali otoka Sumatre (gdje se siječe ekvator s meridijanom 100° istočno od Greenwicha) i Pariz (geografska širina $48°50'47''$, istočne dužine od Greenwicha $2°20'49''$) određuju luk glavne kružnice Zemlje.
    Koliki je središnji kut tog luka i kolika je duljina luka u km?
    Izračunajte površinu sfernog trokuta.

    (Rezultat: Udaljenost $|TP| = 10576,6$ km; duljina 1° na glavnoj kružnici iznosi 111,3 km, polumjer Zemlje je 6370 km.)

39. Izračunajte površinu pravokutnog sfernog trokuta, ako je poznata hipotenuza $c = 104°33'$ i kut $\beta = 63°17'48''$ i polumjer sfere $r = 9,8$.

40. Izračunajte površinu sfernog trokuta za koji su stranice $a = 66°20'41'', b = 20°16'38'', c = 56°19'40''$.

41. Izračunajte površine dvaju sfernih trokuta za koje je $a = 50°30'20'', b = 112°48', \alpha = 45°28'10''$.

42. Razriješite sferne trokute:

    a) $a = 65°44', b = 98°24', c = 122°31'$.
    b) $b = 47°55'32'', c = 77°46'29'', \alpha = 115°42'7''$.
    c) $\alpha = 73°24'33'', \beta = 88°46'57'', \gamma = 63°38'12''$.
    d) $a = 65°55'36'', \beta = 84°26'9'', \gamma = 79°44'14''$.
    e) $b = 73°40'32'', c = 102°47'35'', \beta = 83°27'17''$.
    f) $\alpha = 68°30'42'', \gamma = 57°35'52'', a = 55°24'39''$.

43. Od sfernog su trokuta poznate stranice $a = 120°53'47'', b = 118°22'28'', c = 103°11'35''$. Izračunajte sve tri sferne visine i odsječke na njima do zajedničkog sjecišta tih visina.

44. Izračunajte najkraću udaljenost između Dresdena ($\lambda_1 = 13°46', \varphi_1 = 51°16'$) i Alma Ate ($\lambda_2 = 76°55', \varphi_2 = 43°18'$)

    (Rezultat: 4694 km.)

45. Brodom plovimo po glavnoj kružnici iz Bombaja ($\lambda_1 = 72°48', \varphi_1 = 19°00'$) u Dar es Saalam ($\lambda_2 = 39°28', \varphi_2 = -6°49'$). Izračunajte smjer kuta δ_1 pri odlasku i δ_2 pri dolasku, te udaljenost tih mjesta u morskim miljama.

    (Rezultat: ≈ 2507 morskih milja; $1' \approx$ morska milja.)

46. Zadane su kateta b i nasuprotni kut β sfernog pravokutnog trokuta. Nađite c, a i α.

    Napomena: U općem slučaju zadatak ima dva različita rješenja.

47. Zadani su elementi sfernog trokuta a, b, α. Odredite ostale elemente c, β, γ.

48. Poznate su geografske koordinate dvaju mjesta A i B na Zemljinoj površini. Odredite njihovu udaljenost.

49. Riješite sferni trokut ako je zadano:

    a) $a = 20°, b = 35°, C = 76°$

b) $b = 80°, c = 85°, A = 170°$

c) $c = 175°, a = 170°, B = 160°$

d) $a = \frac{\pi}{4}, b = \frac{\pi}{4}, C = \frac{\pi}{2}$

50. Riješite sferni trokut ako je zadano:

a) $A = 60°, B = 40°, c = 110°$

b) $A = 50°, B = 40°, c = 170°$

c) $A = 60°, B = 140°, c = 70°$

d) $A = 60°, B = 140°, c = 70°$

e) $A = 60°, B = 140°, c = 170°$

51. Riješite sferni trokut ako je zadano:

a) $a = 70°, b = 40°, c = 76°$

b) $a = 105°, b = 45°, c = 80°$

c) $a = 130°, b = 140°, c = 35°$

d) $a = 115°, b = 30°, c = 125°$

e) $a = 130°, b = 40°, c = 155°$

f) $a = 80°, b = 115°, c = 155°$

g) $a = 130°, b = 80°, c = 155°$

h) $a = 80°, b = 65°, c = 150°$

52. Riješite sferni trokut ako je zadano:

a) $A = B = C = 120°$

b) $A = B = C = 720°$

c) $A = 100°, B = 110°, C = 140°$

d) $A = 60°, B = 70°, C = 100°$

53. Riješite sferni trokut ako je zadano:

a) $a = \frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}, A = \frac{\pi}{5}$

b) $a = 30°, b = 90°, A = 30°$

c) $a = 30°, b = 90°, A = 150°$

d) $a = 35°, b = 80°, A = 60°$

e) $a = 40°, b = 40°, A = 90°$

f) $a = 90°, b = 90°, A = 90°$

g) $a = 40°, b = 40°, A = 60°$

h) $a = 30°, b = 45°, A = 45°$

i) $a = 80°, b = 130°, A = 30°$

j) $a = 40°, b = 80°, A = 20°$

54. Početni položaj broda je $30°S, 130°Z$. Potreban je veliki kružni kurs čiji je početni smjer $J60°Z$. Ako je njegov konačni položaj na zemljopisnoj dužini $140°Z$, koliko je putovao i koji je njegov konačni položaj?

55. Početni položaj broda je $30°S, 130°Z$. Potreban je veliki kružni kurs čiji je početni smjer $60°Z$. Ako je njegov konačni smjer $80°Z$, koliko daleko je li putovao i koji mu je konačni položaj?

56. Početni položaj broda je $30°J, 135°Z$. Potreban je veliki kružni kurs s početnim smjerom $45°I$ i dolazi na položaj čija je geografska širina $45°J$. Koji je njegov konačni položaj?

57. Početni položaj broda je $30°J, 135°Z$. Potreban je veliki kružni kurs za 2000 milja i stiže na položaj čija je zemljopisna širina $45°J$. Koji je konačni položaj broda?

    Napomena: moguća su dva odgovora.

58. Otet putnički zrakoplov je točno sjeverno od borbenog zrakoplova. Putnički zrakoplov leti na kursu glavne kružnice u početku $S80°Z$ pri brzini 500 mph. Borbeni zrakoplov leti brzinom 1500 mph i treba presresti putnički zrakoplov unutar 15 minuta. Koliko bi južnije od putničkog zrakoplova mogao biti borbeni zrakoplov da bi ovo bilo moguće?

*****

Sljedeće je zadatke poslao István Lénárt koji se rješavaju i u ravnini i na sferi.

59. Na ravnini i sferi: Koliko stranica može imati pravilan mnogokut, čiji su svi unutarnji kutovi 120°?

60. Na ravnini i sferi: Koliko se pravaca može uporabiti za konstruiranje pramenaa u kojem su bilo koje dvije susjedne crte okomite jedna na drugu, uključujući prvu i posljednju?

61. Na ravnini i sferi: Postoje li tri točke od kojih su bilo koje dvije jednako udaljene? Postoje li četiri točke od kojih su bilo koje dvije jednako udaljene?

62. Na ravnini i na sferi: Koji su trokuti čija je barem jedna simetrala kuta ujedno i težišnica?

63. Na ravnini i sferi: Koliko simetrala stranica može biti okomito u trokutu?

64. Na ravnini i sferi: Koliko visina i nožišnih točaka može imati trokut?

65. Na ravnini i sferi: Određuju li tri kuta jasno trokut? Definiraju li njegova četiri kuta jasno četverokut?

66. Na ravnini i sferi: Mogu li dvije simetrale trokuta biti okomite jedna na drugu?

67. Na ravnini i sferi: Srednjica trokuta je isječak koji spaja polovišta dviju stranica. Koliki je omjer srednjice i duljine treće stranice?

68. Na ravnini i sferi: Koliko zajedničkih okomitih pravaca mogu imati dva pravca?

69. Trokut čija je jedna stranica promjer kružnice i upisan je kružnici zove se *Talesov trokut*. Koja posebna svojstva ima ovaj trokut u ravnini? Ostaju li ta svojstva važeća i na sferi?

70. Na ravnini i sferi: Trokut čiji su vrhovi polovišta stranica izvornog trokuta naziva se *središnjim trokutom*. Koliki je omjer površine trokuta i površine središnjeg trokuta?

71. Na ravnini i sferi: Koliki je zbroj suplementnih kutova trokuta? Koliki je zbroj suplementnih kutova četverokuta?

72. Na ravnini i sferi: U jednakokračnom trokutu pronašli smo kut od 60°. Koliki mogu biti druga dva kuta?

73. Na ravnini i sferi: U jednakokračnom trokutu pronašli smo kut od 90°. Koliki mogu biti druga dva kuta?

74. Na ravnini i sferi: Dan je trokut čiji su kutovi $a, a, 2a$. Koliki kut a može biti?

75. Na ravnini i sferi: Dan je trokut čiji su kutovi $a, 2a, 3a$. Koliki kut a može biti?

*****

Sljedeći zadatci su iz *Problemi u geometriji* Kutepova [24.] i *Zbornik zadač* Modenova [40.]:

76. Površina glavne i male kružnice su 225π cm^2 i 144π cm^2. Nađite udaljenost male kružnice i središta sfere.

    (*Rezultat:* 9 cm)

77. Latituda Moskve je $55°45'$. Izračunajte polumjer paralele na kojoj je Moskva ako je polumjer Zemlje 6370 km.

    (*Rezultat:* 3585 km)

78. Visina pravilnog tetraedra je promjer sfere a njezina površina jednaka je s. Izračunajte površinu onog dijela sfere koja se nalazi unutar danog tetraedra.

79. U sferu polumjera R upisan je pravilni tetraedar. Sve strane tetraedra se produlje do presjeka sa sferom. Dobivaju se 4 sferna trokuta i nekoliko sfernih dvokuta. Izračunajte površine svakog od tih dvokuta i trokuta.

    (*Rezultat:* 9 cm)

80. Dvije usporedne ravnine dijele promjer sfere na dijelove u omjeru $1 : 2 : 3$. Na kolike dijelove dijele te ravnine površinu sfere?
    (*Rezultat:* $5 : 9$)

81. Promjer sfere podijeljen je sa 7 točaka na 8 jednakih dijelova. Kroz prvu i petu točku okomito su na promjer položene ravnine. Koliko je puta površina jednog dijela veća od drugog?
    (*Rezultat:* $2\frac{1}{7}$)

82. Kut između dva polumjera sfere jednak je $60°$ i udaljenost između njegovih krajeva je 15 cm. Nađite najkraću udaljenost između polumjera mjereći duž luka na sferi.
    (*Rezultat:* $\approx 15,7$ cm)

83. Polumjer sfere jednak je $12,5$ cm. Presječna ravnina nacrtana je na udaljenosti od 9 cm od tangencijalne ravnine. Izračunajte polumjer presjeka.
    (*Rezultat:* 12 cm)

84. Dvije sfere jednakog polumjera R sijeku se tako da svaka prolazi središtem druge sfere. Odredite duljinu presječne krivulje.
    (*Rezultat:* $\pi \cdot R \cdot \sqrt{3}$)

85. S različitih strana središta sfere dvije je usporedne ravnine presjecaju tako da su njihove površine jednake 36π dm^2 i 64π dm^2, a udaljenost između njih je 8 dm. Izračunajte površinu sfere.
    (*Rezultat:* $\approx 867,8$ dm^2)

86. Brid kocke jednak je a. Nađite polumjere upisane i opisane sfere. (*Rezultat:* $\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}$)

87. Sfera dodiruje sve bridove kocke. Polumjer sfere jednak je R. Nađite površinu dijelova sfere koji su izvan kocke. (*Rezultat:* $2\pi R^2(3\sqrt{2}-4)$)

88. Za dani pravilni oktaedar odredite polumjere upisane i opisane mu sfere. (*Rezultat:* $\frac{a\sqrt{6}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}$)

*****

Sljedeći zadatci su iz *2000 Théorèmes et Problèmes de Géométrie avec Solutions* [9.]

89. Dan je konveksni sferni četverokut u kojem su suprotne stranice jednake. Dokažite:

    - Nasuprotni kutovi su jednaki.
    - Presjek dijagonala ih dijeli na međusobno jednake dijelove.
    - Sjecište dijagonala je pol luka glavne kružnice koja prolazi kroz točke suprotnih stranica.

90. U sfernom rombu dijagonale se sijeku u jednakim dijelovima, okomite su i raspolavljaju kutove romba.

91. U svakom sfernom četverokutu upisanom u malu kružnicu zbroj dva suprotna kuta jednak je zbroju druga dva.

92. U sfernom trokutu s tri luka glavnih kružnica dokažite da vrijedi:

    - Simetrale tri kuta su konkurentne.
    - Težišnice triju stranica su konkurentne.
    - Visine iz triju vrhova su konkurentne.

93. Zadan je trokut $\triangle ABC$ s fiksnom osnovicom $\overline{BC}$ koji je upisan u malu kružnicu, a treći vrh na maloj kružnici nije fiksan. Dokažite da je zbroj kutova na osnovici umanjen za kut na vrhu trokuta konstantan.

Pravokutni sferni trokut: rješavanje i primjena

a) Rješavanje pravokutnog sfernog trokuta

Kod pravokutnog sfernog trokuta a označuje hipotenuzu, b i c katete.

Neka se razriješi pravokutni sferni trokut, ako se znade:

94. a) $a = 57°51'39'', b = 36°17'40''$,
b) $a = 123°38'40'', c = 126°20'35''$.

(Rješenje: a) $c = 48°41'48'', \beta = 44°21'7'', \gamma = 72°31'20''$,
b) $b = 20°47'17'', \beta = 25°14'5'', \gamma = 104°38'4''$.*)*

95. $b = 68°37'10'', c = 103°44'32''$
(Rješenje: $a = 94°58'5'', \beta = 69°10'43'', \gamma = 102°49'49''$.*)*

96. a) $a = 79°3'31'', \beta = 46°48'7''$,
b) $a = 77°15'51'', \gamma = 103°38'36''$.
(Rješenje: a) $\gamma = 78°34'21'', b = 44°45'24'', c = 68°35'52''$,
b) $\beta = 132°14'48'', b = 124°18'32'', c = 111°5'42''$.*)*

97. a) $b = 86°59'9'', \gamma = 64°33'54''$,
b) $c = 108°34'53'', \beta = 132°14'48''$.

(Rješenje: a) $\beta = 87°16'42'', c = 61°32'4'', a = 88°42'16''$,
b) $\gamma = 103°38'36'', b = 133°46'37'', a = 77°15'51''$.*)*

98. a) $b = 75°24'16'', \beta = 78°19'41''$,
b) $c = 128°16'40'', \gamma = 115°24'20''$.
(Rješenje: a) $c = 52°29'48'', a = 81°10'29'', \gamma = 53°24'0''$ *ili*
$c_1 = 127°30'12'', a_1 = 98°49'31'', \gamma_1 = 126°36'0''$,
b) $b = 142°59'44'', a = 60°20'58'', \beta = 136°10'2''$ *ili*
$b_1 = 37°0'16'', a_1 = 119°39'2'', \beta_1 = 53°49'58''$.*)*

99. $\beta = 76°59'26'', \gamma = 162°16'25''$
(Rješenje: $a = 136°17'12'', b = 42°19'24'', c = 167°51'14''$.*)*

100. Ako je u sfernom trokutu stranica $a = 90°$ (tzv. *kvadrantni sferni trokut*), dokažite da onda vrijedi:
1.) $\cos\alpha = -\cos\beta$, 2.) $\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, 3.) $\cos b = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}$, 4.) $\operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\gamma}$,
5.) $\cos\beta = \frac{\cos b}{\sin c}$, 6.) $\cos\alpha = -\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c$.

Dokaz: Ako je u sfernom trokutu ABC stranica $a = 90°$, onda je u njegovom polarnom sfernom trokutu $A_1B_1C_1$ kut $\alpha = 90°$. Uporabom za tokut $A_1B_1C_1$ pravila za pravokutni sferni trokut, dobit ćemo navedene formule.

101. a) $a = 90°, b = 174°12'49'', c = 94°8'20''$,

b) $a = 90°, \beta = 110°47'50'', \gamma = 135°35'35''$.
(Rješenje: a) $\beta = 175°57'10'', \gamma = 135°42'55'', \alpha = 135°34'8''$,
b) $\alpha = 104°41'37'', b = 104°53'1'', c = 133°39'48''$.*)*

102. Riješite jednakokračni sferni trokut, ako je zadana osnovica b i krak a.
(*Rješenje: Pomoću visine dobijemo*
$\cos\alpha = \operatorname{tg}\frac{1}{2}b : \operatorname{tg}\alpha,\ \sin\frac{1}{2}\beta = \sin\frac{1}{2}b : \sin\alpha$*)*

103. Odredite kut jednakokračnog sfernog trokuta ako je zadana stranica a.
(*Rješenje:* $\sin\frac{1}{2}\alpha = 1 : 2\cos\frac{1}{2}a$*, ili* $\cos\alpha = \cos a : 2\cos^2\frac{a}{2}$.*)*

b) Primjena pravokutnog sfernog trokuta

104. Brod otplovi iz luke L ($\lambda = 80°$ istočno od Greenwicha, $\varphi = 6°45'$ sjeverne širine) po glavnoj kružnici, a kurs je broda $\omega = 25°30'$. Odredite zemljopisnu dužinu mjesta u kojem stigne na ekvator i duljinu d prevaljenog puta.
(*Rješenje:* $\lambda_1 = 76°47'28'', d = 7°28'15''$.*)*

105. Brod plovi iz New Yorka ($76°20'30''$ zapadne dužine, $40°42'40''$ sjeverne širine) po glavnoj kružnici do ekvatora i stigne tamo u točku kojoj je zapadna dužina $31°39'20''$. Koliki je prevaljeni put?
(*Rješenje:* $6387,5$ *km.)*

106. Dva mjesta na globusu imaju istu zemljopisnu širinu φ, a razlika njihovih zemljopisnih dužina jest α. Za koliko je luk na paraleli, na kojem su oba mjesta, veći od njihove sferne udaljenosti?
Primjerice, $\varphi = 45°, \alpha = 90°$.
(*Rješenje: Oba mjesta i sjeverni pol smatrat ćemo vrhovima jednakokračnog sfernog trokuta, kojemu je baza tražena sferna udaljenost d, krakovi pak lukovi* $90° - \varphi$. *Pomoću sferne visine raspada se taj jednakokračni trokut na dva pravokutna trokuta, te je* $\sin\frac{1}{2}d = \sin\frac{1}{2}\alpha\cos\varphi$.*)*

Kosokutni sferni trokut: rješavanje i primjena

a) Rješavanje kosokutnog sfernog trokuta

Riješite sferni trokut, ako je zadano:

107. a) $a = 35°41'28'', b = 56°16'40'', c = 29°18'10''$,
b) $a = 112°17'14'', b = 89°27'52'', c = 128°59'26''$.
(*Rješenje: a)* $\alpha = 36°18'30'', \beta = 122°25'9'', \gamma = 29°47'1''$,
b) $\alpha = 118°42'38'', \beta = 108°35'24'', \gamma = 132°32'46''$.*)*

108. a) $a = 47°30'41'', \beta = 108°24'56'', \gamma = 76°33'31''$,
b) $a = 38°11'23'', \beta = 37°22'38'', \gamma = 76°33'31''$,
c) $\alpha = \beta = \gamma = 120°$.
Rješenje: a) $a = 49°16'46'', b = 102°48'1'', c = 88°26'17''$,
b) $a = 108°, b = 60°, c = 60°$,
c) $a = b = c = 109°28'16''$.

109. a) $a = 90°, b = 89°, \gamma = 87°59'59''$,
b) $b = 112°39'44'', c = 43°53'55'', \alpha = 32°20'32''$,
c) $c = 122°27'10'', a = 55°25'26'', \beta = 112°19'16''$.
Rješenje: a) $\alpha = 90°2'6'', \beta = 88°59'58'', c = 88°$,
b) $\beta = 149°13'29'', \gamma = 22°36'40'', a = 74°45'15''$,
c) $\gamma = 108°24'56'', \alpha = 67°47'16'', b = 124°38'40''$.

110. $\alpha = 49°12'40'', \beta = 133°38'46, c = 72°53'50''$,
b) $\alpha = 105°14'45'', \gamma = 136°6'5'', b = 30°46'31''$.
Rješenje: a) $a = 66°12'30'', b = 119°0'40'', \gamma = 52°15'54''$,
b) $a = 117°39'30'', c = 157°23'22'', \beta = 67°20'16''$.

111. a) $a = 42°36'10'', b = 127°19'30'', \alpha = 37°18'40''$,
b) $b = 105°51'20'', c = 96°48'10'', \beta = 162°38'40''$,
c) $a = 75°24'10'', b = 48°36'20'', \alpha = 102°19'0''$,
d) $a = 112°17'17'', b = 112°16'16'', \alpha = 89°9'50''$.
Rješenje: a) $\beta = 45°24'10''$ *ili* $\beta = 134°35'50''$, $\gamma = 168°3'36''$ *ili* $\gamma = 61°32'20''$, $c = 166°38'30''$ *ili* $c = 100°56'14''$,
b) $\gamma = 17°56'0''$ *ili* $\gamma = 162°4'0''$, $\alpha = 2°43'52''$ *ili* $\alpha = 173°1'46''$, $a = 8°51'44''$ *ili* $a = 156°53'24''$
c) $\beta = 49°14'0'', \gamma = 55°25'54'', c = 54°39'8''$,
d) nema rješenja jer je $\sin b \sin\alpha > \sin a$.

112. a) $\alpha = 46°37'36'', \beta = 109°29'18'', a = 40°538'24''$,
b) $\alpha = 118°37'14'', \gamma = 76°45'38'', c = 54°47'22''$,
c) $\beta = 94°37'13'', \gamma = 152°48'26'', b = 128°34'55''$.
Rješenje: a) $b = 58°6'0''$ *ili* $b = 121°54'0''$, $c = 31°41'50''$ *ili* $c = 116°4'22''$, $\gamma = 35°41'2''$ *ili* $\gamma = 94°8'2''$,
b) $a = 132°32'29'', b = 131°49'10'', \beta = 117°23'26''$,
c) $c = 158°59'55'', a = 49°52'58'', \alpha = 77°10'55''$.

113. Koliki je kut jednakostraničnog sfernog trokuta kojemu je stranica $a = 76°34'24''$?
Rješenje: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\sin\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{3\alpha}{2}}$, $\alpha = 79°8'18''$.
Zašto treba biti $a < 120°$?

114. Kolika je stranica jednakokutnog sfernog trokuta kojemu je kut $\alpha = 82°14'10''$?
Rješenje: $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{-\cos\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{3\alpha}{2}}$, $a = 81°0'52''$.
Zašto treba biti $60° < \alpha < 180°$?

U sljedeća četiri zadataka riješite sferni trokut, ako je zadano:

115. Dvije stranice i zbroj (ili razlika) njegovih suprotnih kutova. Primjerice, $b, c, \beta + \gamma = \varphi$.
Rješenje: Uporabite Napierove analogije koje se može naći u [5]. na stranici 173. ili u nekom drugom priručniku.

116. Dvije stranice i zbroj (ili razlika) njegovih suprotnih kutova i treći kut.
Napomena: Analogne su zadaće ako se znaju razlike stranica ili kutova. Primjerice $a - b = 31°40', \alpha + \beta = 116°7'36'', \gamma = 82°24'8''$.
Rješenje: Pomoću D'Alembertovih formula koje se može naći u [5]. na stranici 173. ili u nekom drugom priručniku.
$c = 62°56'36'', \alpha = 81°12'54'', \beta = 34°54'42''$

117. Stranica, njoj suprotni kut i zbroj (ili razlika) njegovih dviju stranica. Primjerice, $a = 67°36'43'', \alpha = 67°24'4'', b + c = z = 206°31'45''$.

Rješenje: Pomoću D'Alemerovih formula koje se može naći u [5]. na stranici 173. ili u nekom drugom priručniku.
$b = 112°31'17'', \beta = 112°43'52'', \gamma = 84°53'46''$.

118. Opseg $a + b + c = 2s$ i dva kuta α, β.
Primjerice, $2s = 121°16'18'', \alpha = 36°18'30'', \beta = 122°25'9''$.
Napomena: Analogno se radi, ako je zadano $b + c - a, \alpha, \beta$.

Rješenje: $c = 29°18'10'', b = 56°16'40'', \gamma = 29°47'1''$

119. Izračunajte sferni polumjer r kružnice koja je opisana sfernom trokutu ABC s kutovima $\alpha = 76°18'20'', \beta = 79°12'16'', \gamma = 82°40'24''$.

Rješenje: $\operatorname{ctg} r = \sqrt{\dfrac{-\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)(\cos(\sigma-\gamma))}{\cos\sigma}}$,
$r = 46°0'31''$.

120. Izračunajte sferni polumjer ρ kružnice koja je upisana sfernom trokutu ABC sa stranicama $a = 100°, b = 128°45'24'', c = 71°14'36''$.

Rješenje: $\operatorname{tg}\rho = \sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)(\sin(s-c))}{\sin c}}$,
$\rho = 36°25'21''$.

121. Iz stranica a, b, c sfernog trokuta odredite mu sferne visine v_1, v_2, v_3.

Rješenje: $\sin v_1 = \dfrac{1}{\sin a}\sqrt{\sin s \cdot \sin(s-a) \cdot \sin((s-b)) \cdot \sin(s-c)}$ *itd.*

122. Izračunajte površinu sfernog trokuta iz njegovih kutova α, β, γ i polumjera ρ, ako je zadano:
a) $\alpha = 73°12'8'', \beta = 35°3'14'', \gamma = 32°9'16'', \rho = 1$
b) $\alpha = 67°47'16'', \beta = 112°19'16'', \gamma = 108°24'56'', \rho = 1''$,
c) $\alpha = 128°30', \beta = 95°56', \gamma = 84°58', \rho = 35$ cm,
d) $\alpha = \beta = \gamma = 80°45'44'', \rho = 3,56$ cm.

Rješenje: a) $P = 0,18593$, *b)* $P = 1,89412$, *c)* $P = 2766,6$ *cm*^{2},
d) $P = 13,778$ *cm*^{2}.

b) Primjena kosokutnog sfernog trokuta

123. Iz geografskih dužina (λ_1, λ_2) i širina (φ_1, φ_2) dvaju mjesta A i B na globusu izračunajte njihovu sfernu udaljenost. Zadano je:
a) Pariz $\lambda_1 = 20°, \varphi_1 = 48°50'11''$,
Petrograd $\lambda_2 = 47°58'12'', \varphi_2 = 59°56'30''$,
b) New York $\lambda_1 = 286°5'45''$ istočno od Geenwicha,$\varphi_1 = 40°42'45''$,
Sydney $\lambda_2 = 151°11'39''$ istočno od Geenwicha,$\varphi_2 = -33°51'40''$.

Rješenje: a) $\widehat{AB} = 19°28'30''$ *ili* $2167,6$ *km,*
b) $\widehat{AB} = 143°52'33''$ *ili* 16000 *km.*

124. Greenwich $\lambda_1 = 2°20'23''$ zapadno od Pariza $\varphi_1 = 51°28'38''$ sjeverne širine ima od New Yorka $\varphi_2 = 40°42'45''$ sjeverne širine sfernu udaljenost od 794 geografskih milja. Odredite geografsku dužinu (λ_2) New Yorka.

Rješenje: $\lambda_2 = 76°22'$ *zapadno od Pariza.*

Kazalo

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

R

Dodatak: Upute za nastavnike

Kako ideje Komparativne geometrije realizirati u postojećoj i nedovoljnoj satnici?

Jedna je od mogućnosti sljedeća aktivnost, tj. realizacija tri etape uporabe softvera:

1. crtanjem objekata uporabom softvera i na sferi,
2. mjerenjem (virualnim) objekata u Sketchpadovoj datoteci i realnim mjerenjem na sferi,
3. računanjem koje omogućuje Sketchpad te računanjem uporabom kalkulatora u konkretnoj formuli.

Kako bi se predložena aktivnost mogla provesti, potrebno je prije toga učiniti slijedeće:

1. učenici bi trebali elementarno "ovladati" / naučiti gdje se nalaze gumbi za crtanje, mjerenje i računanje u Sketchpadu. To je i inače potrebno za efikasnu i točnu uporabu Sketchpada.
2. učenici trebaju elementarno "ovladati"/naučiti kako se crta priborom na sferi i mjeri odgovarajućim priborom.

Sve potrebne upute za elementarno crtanje, mjerenje i primjer računanja pomoću Sketchpada koje je i u funkciji problema Euklidske geometrije možete naći u datotekama u mapi **GSP datoteke** u kojoj se nalaze datoteke za rad (uz ostale datoteke) uz ovu knjigu i naziva se **Crtanje, mjerenje, računanje i priručnik u GSP-u**.

Kako se u nastavi pojavljuju pojedini elementarni pojmovi tako ih se poučava/elaborira/uči pomoću Sketchpada. I nakon toga zadaje/ilustrira na sferi. Nakon toga se kompariraju vizualizacije tih pojmova.

Dakle, postupno i korak po korak.

Primjerice,

- crtaju se i mjere objekti: točke, dužine, pravci pomoću Sketchpada, a onda se crta i mjeri na sferi,
- crtaju se objekti: kružnice, trokuti, mnogokuti pomoću Sketchpada, a onda ih se mjeri pomoću Sketchpadovih alata. Nakon toga se to radi na sferi pomoću realnog sfernog alata za mjerenje,
- za računanje sfernih objekata primjenjujemo definirane formule i kalkulatore (bilo Sketchpada ili nekog drrugog kalkulatora).

  To računanje povezano je s trigonometrijom u srednjoj školi i s formulama koje nam omogućuju računanje za sferne objekte.

Sketchpad se može uporabiti i za to računanje definiranjem i "unosom" tih formula u njegov kalkulator.

Primjer takve uporabe se može vidjeti na stranici 90. i u datoteci ZadatakKosSferTrokut.gsp u mapi GSP datoteke.

U knjizi, primjerice, na stranicama 74., 75. i 323. nalaze se opisi iz službenog hrvatskog matematičkog kurikula.

Ovdje ih navodimo kako bismo ukazali da se ti pojmovi lako crtaju i mjere Sketchpadom te realnim priborom na sferi.

Nastavnik koji uporabljuje virtualni pribor (Sketchpad ili neki drugi softver) lako može osmisliti svoje radne listiće učenicima za rad sukladno uzrastu i sadržaju. Ili uporabiti/prilagoditi listiće koji su već priređeni u ovoj knjizi.

Matematika 5. razred - 140 sati godišnje

Odgojno-obrazovni ishodi	Sadržaj	Sadržaj sferne geometrije
MAT OŠ C.5.1. Opisuje skupove točaka u ravnini te analizira i primjenjuje njihova svojstva i odnose	Skupovi točaka u ravnini: točka, pravac, polupravac, dužina, kut. Vrste kutova. Sukladne dužine. Sukladni kutovi. Simetrala dužine. Kutovi uz presjecnicu usporednih pravaca.	Podsjeća na skupove točaka na sferi: ravna linija, segment, trokut. Postoji li na sferi simetričan isječak? Mogu li dva sferna pravca biti paralelna? Možete unijeti loksodromu.
MAT OŠ C.5.2. Opisuje i crta/konstruira geometrijske likove te stvara motive koristeći se njima.	Konstrukcija kvadrata. Konstrukcija pravokutnika. Konstrukcija jednakostraničnoga i jednakokračnoga trokuta. Konstrukcija kružnice i kruga. Dijelovi kružnice i kruga.	Pita se koji se od sljedećih likova može konstruirati na kugli. Stvara mozaike na sferi.
MAT OŠ C.5.3. Osnosimetrično i centralnosimetrično preslikava skupove točaka u ravnini.	Osna simetrija. Centralna simetrija.	Konstruira osnosimetrične i središnje simetrične figure na sferi. Određuje os simetrije i/ili središte simetrije (ako postoji) za figure na sferi.
MAT OŠ D.5.1. Mjeri i crta kutove, određuje mjere susjednih i vršnih kutova.	Mjera kuta. Klasifikacija kutova. Susjedni kutovi. Vršni kutovi.	Podsječa na pitanja o kutovima na sferi. Ispituje međusobnu ovisnost vršnih kutova na sferi. Istražuje međusobnu ovisnost susjednih kutova na sferi.

Matematika 6. razred - 140 sati godišnje

Odgojno-obrazovni ishodi	Sadržaj	Sadržaj sferne geometrije
MAT OŠ C.6.1. Konstruira kut i njegovu simetralu.	Kut. Simetrala kuta. Konstrukcije kutova $60°, 120°, 30°, 90°$. Prošireni sadržaj: Konstrukcija trokutu upisane kružnice.	Konstruira kut na sferi i njezinu simetralu. Provjerava može li se krug upisati u svaki sferni trokut.
MAT OŠ C.6.2. Konstruira trokute, analizira njihova svojstva i odnose. 75	Trokut. Odnosi stranica i kutova trokuta. Visina trokuta. Sukladnost trokuta. Tri osnovne konstrukcije trokuta.	Klasificira sferne trokute prema stranicama i kutovima. Ispituje zbroj mjera unutarnjih kutova u sfernom trokutu. Određuje značajke sukladnih trokuta na sferi.
MAT OŠ C.6.3. Konstruira četverokute, analizira njihova svojstva i odnose.	Četverokuti - konstrukcija kvadrata, pravokutnika, paralelograma i romba. Prošireni sadržaj: Skiciranje, crtanje/konstrukcija trapeza i deltoida.	Koje četverokute vidimo na globusu? Koji se četverokuti mogu konstruirati na sferi?
MAT OŠ D.6.2. Računa i primjenjuje opseg i površinu trokuta i četverokuta te mjeru kuta.	Površina i opseg trokuta i paralelograma. Zbroj mjera unutarnjih kutova trokuta i četverokuta.	Ispituje zbroj mjera unutarnjih kutova u trokutu i četverokutu na kugli. Pokušavam riješiti problem: kako izračunati površinu sfernog trokuta?

Matematika 7. razred - 140 sati godišnje

Odgojno-obrazovni ishodi	Sadržaj	Sadržaj sferne geometrije
MAT OŠ C.7.1. Crta i konstruira mnogokute i koristi se njima pri stvaranju složenijih geometrijskih motiva.	Mnogokuti. Pravilni mnogokuti.	Konstruiranje pravilnih poligona na sferi, posebno pravilnog četverokuta. Postoji li mnogokut na sferi koji ima manje od tri stranice? Otkrivanje kocku na sferi.
MAT OŠ D.7.3. Odabire strategije za računanje opsega i površine mnogokuta.	Površina i opseg mnogokuta.	Slično kako izračunati površinu sfernog trokuta. Razvija strategiju za izračunavanje površine mnogokuta na sferi.
MAT OŠ D.7.4. Računa i primjenjuje opseg i površinu kruga i njegovih dijelova.	Opseg kruga. Površina kruga. Duljina kružnog luka. Površina kružnoga isječka i kružnoga vijenca.	Razmatra kako izračunati duljinu kruga i površinu kruga na sferi. Ispituje je li omjer duljine kružnice i njezinog promjera na sferi konstantan.

Sadržaje ostalih razreda može se pogledati u *Hrvatski kurikul* na stranici 70.

Dakle, kompariranje Euklidskih i sfernih pojmova ne trebaju posebnu satnicu nego se mogu uklopiti u redovno/uobičajeno poučavanje Euklidskih pojmova pomoću Sketchpada. A sferni se problemi mogu zadavati kao "izazovni" projekti koji traže zaključivanje/tvrdnje o toj usporedbi ravninskih i sfernih pojmova.

Ovdje predlažemo, primjerice, nastavnicima realizaciju komparativne geometrije uz poučavanje Euklidske u 5. razredu, 6. razredu i 7. razredu (i unutar ovih sati) sukladno službenom matematičkom kurikulu (koji je dan u gornjim tablicama).

Slično ovim prijedlozima svaki nastavnik može samostalno kreirati broj sati i sadržaje za ostale teme etablirane u kurikulu za pojedini razred osnovne i srednje škole.

Sadržaje i broj sati koje ovdje predlažemo za realizaciju su iz uobičajene godišnje satnice koju nastavnici samostalno kreiraju i odlučuju kada će ih realizirati tijekom nastavne godine.

Zadatci za realizaciju ovih sadržaja nalaze se u udžbenicima koje nastavnici inače uporabljuju, a za sferne pojmove nalaze se u ovoj knjizi (i u radnim listićima).

Matematika 5. razred

Tema: Pravac, polupravac, dužina i kut

sat	nastavna jedinica
1. - 2.	Pravac, polupravac i dužina
3.	Okomitost i paralelnost
4. - 5.	Kut. Vrste kutova
6. - 7.	Mjerenje kutova
8.	Crtanje kutova
9.	Sukuti
10.	Vršni kutovi
11.	Ponavljanje i provjeravanje usvojenosti ishoda

Tema: Geometrijski likovi i simetrije

sat	nastavna jedinica
1. - 2.	Kružnica i krug
3. - 4.	Trokut
5.	Pravokutnik
6.	Kvadrat
7. - 8.	Mjerne jedinice za duljinu
9. - 10.	Mjerenje površine
11.	Mjerenje obujma
12. - 13.	Simetrala dužine
14. - 15.	Osnosimetrični likovi
16. - 17.	Centralnosimetrični likovi
18.	Osnosimetrični i centralnosimetrični likovi
19.	Ponavljanje i provjeravanje usvojenosti ishoda
20. - 21.	Usustavljivanje gradiva

Matematika 6. razred

Tema: Trokut

sat	nastavna jedinica
1.	Trokut i vrste trokuta
2. - 4.	Zbroj veličina kutova u trokutu
5.	Vanjski kutovi trokuta
6. - 7.	Odnosi stranica i kutova u trokutu
8. - 9.	Sukladnost trokuta
10.	Simetrala kuta
11.	Konstrukcija nekih kutova
12. - 14.	Tri osnovne konstrukcije trokuta
15.	Visina trokuta
16. - 18.	Površina trokuta
19. - 20.	Usustavljivanje gradiva

Tema: Četverokut

sat	nastavna jedinica
1.	Pojam četverokuta
2. - 4.	Vrste četverokuta (1)
5.	Zbroj veličina kutova u četverokutu
6.	Vrste četverokuta (2)
7. - 9.	Konstrukcije paralelograma
10. - 13.	Površina paralelograma
14. - 15.	Usustavljivanje gradiva

Matematika 7. razred

Tema: Mnogokuti, kružnice i krug

sat	nastavna jedinica
1.	Pojam mnogokuta
2. - 4.	Dijagonale i kutovi mnogokuta
5. - 6.	Pravilni mnogokuti
7. - 8.	Konstrukcije pravilnih mnogokuta
9.	Ponavljanje i provjeravanje usvojenih ishoda
10. - 12.	Opseg i površina mnogokuta
13.	Ponavljanje i provjeravanje usvojenih ishoda
14.	Kružnica i krug
15. - 16.	Međusobni položaj dviju kružnica
17. - 19.	Duljina kružnice i kružnog luka
20.	Ponavljanje i provjeravanje usvojenih ishoda
21. - 23.	Površina kruga i kružnog isječka
24.	Ponavljanje i provjeravanje usvojenih ishoda
25. - 26.	Usustavljivanje gradiva

Nastavnici koji uspiju zainteresirati učenike za rad izvan redovne satnice (grupe, projekti, istraživanja ...) i ovih usporednih komparacija u standardnoj satnici mogu samostalno izabrati radne listiće koji su u ovoj knjizi priređeni za rad, tj. sukladno okolnostima mogu ih lako složiti u "svoj" godišnji kurikul.

Dodatak A: Radni listići za printanje

István Lénárt na predavanju studentima

Ovdje se nalaze radni listići s pitanjima prema Lénártovoj ideji i pitanjima iz njegove knjige *Non-Euclidean Adventures on the Lénaárt Sphere - Investigations in Planar and Spherical Geometry* [26.].

Svaki se listić nalazi na svojoj stranici kako bi se mogao cjelovit isprintati za rad.

Odgovore na pitanja postavljena u listićima naći ćete na stranici 127. i dalje (u tablicama) u poglavlju 6. *Ravninska geometrija nasuprot sferne geometrije*.

Prvi problem: temeljni elementi

1. radni listić: Koji je najjednostavniji oblik?

Vrijeme rada: 20 - 40 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koji je najjednostavniji oblik?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

1. Otvorite Sketchpadovu datoteku `Koji je najjednostavniji oblik?.gsp` i priredite model sfere.

2. Na Sketchpadovoj datoteci nacrtajte u ravnini elemente za koje smatrate da su najjednostavniji. Iste te elemente nacrtajte na sferi.

3. Argumentirajte zašto ih smatrate najjednostavnijim elementima geometrije.

4. Koji su to elementi? Nabrojite ih!

5. Koji objekti u ravnini odgovaraju objektima na sferi?

6. Što je isto, a što različito tim objektima u ravnini i na sferi? Zašto je to tako?

7. Kako se ti elementi definiraju u ravnini, a kako na sferi?

Usporedite ravninu i sferu

1. a) Nacrtajte barem dva oblika na svojoj sferi koja ne možete crtati u ravnini.

   b) Opišite oblike i objasnite zašto ne možete nacrtati ove oblike u ravnini.

2. a) Na svojoj sferi nacrtajte najmanje dva oblika koja možete nacrtati u ravnini.

   b) Opišite oblike i objasnite zašto ih možete nacrtati u ravnini.

3. Raspravite o svojim nalazima sa svojim partnerom ili grupom. Pogledajte koliko razlika možete naći između ravnine i sfere.

2. radni listić: Može li se nacrtati pravac na sferi?

Vrijeme rada: 30 - 45 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Može li se nacrtati pravac na sferi?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Otvorite Sketchpadovu datoteku `Može li se nacrtati pravac na sferi?.gsp` i priredite model sfere.

Na Sketchpadovoj datoteci nacrtajte u ravnini dvije različite točke A i B. Iste te elemente nacrtajte na sferi.

Konstrukcija u ravnini

1. Nacrtajte dvije različite točke u ravnini. Označite ih A i B.
2. Spojite točke A i B s tri različita pravca ili krivulje.
3. Nacrtajte najkraći put između točaka A i B ako to još niste učinili. Uporabite ravnalo da produžite svoju najkraću stazu dok ne dosegne rubove svojeg papira.
4. Kad biste mogli zauvijek produljiti krajeve svojeg pravca, bi li se ikada sreli?
5. Po čemu se najkraći put između točaka A i B razlikuje od ostalih putova koje si nacrtao?
6. a) Na koliko dijelova točke A i B dijele vaš pravac?
   b) Koliko je od ovih odsječaka konačno dugo?
   c) Koliko ih je beskonačno dugih?
7. Koliko različitih pravaca možete nacrtati kroz jednu točku u ravnini?
8. Koliko različitih pravaca možete nacrtati kroz dvije točke u ravnini?

Konstrukcija na sferi

1. Kakav ćete oblik dobiti kada dvije točke na sferi spojite najkraćim mogućom stazom?
2. Što će se dogoditi kada ovu putanju produžite u oba smjera oko sfere?
3. Nacrtajte dvije različite točke na svojoj sferi. Označite ih A i B.
4. Razapnite konac na sferi između dviju točaka A i B kako biste pronašli najkraći put između točaka. Nacrtajte crtu duž napete uzice pomoću markera.

5. Pokušajte ravnalom "spojiti" ove točke na sferi. Što opažate?

6. Nacrtajte liniju između točaka A i B pomoću sfernog ravnala i proširite je što je više moguće u oba smjera.

7. Upravo ste stvorili glavnu kružnicu na sferi. Opišite je!

8. a) Na koliko lukova točke A i B dijele vašu glavnu kružnicu?
   b) Koliko je od ovih lukova konačnih?
   c) Koliko ih je beskonačno dugih?

9. Odredite koji rubovi vašeg sfernog ravnala ocrtavaju lukove glavnih kružnica, a koji ne.

10. Koliko glavnih kružnica možete nacrtati kroz jednu točku na sferi?
    a) Koliko glavnih kružnica možete nacrtati kroz dvije točke na sferi?
    b) Je li vaš odgovor točan za bilo koje dvije točke na sferi?

Usporedite ravninu i sferu

1. Koliko činjenica možete uočiti o pravcima u ravnini i o glavnoj kružnici na sferi?

2. Odlučite što mislite da je jednostavnije: pravci u ravnini ili glavne kružnice na sferi. Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto su linije jednostavnije na površini koju niste izabrali gore.

3. radni listić: Kako mjeriti udaljenost?

Vrijeme rada: 25 - 40 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako mjeriti udaljenost?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Otvorite Sketchpadovu datoteku `Kako mjeriti udaljenost?.gsp` i priredite model sfere.

Često morate izmjeriti udaljenost između dvije figure.

- Opišite kako mjeriti udaljenost u ravnini.
- Opišite kako se mjeri udaljenost na sferi.
- U svakom slučaju objasnite koje mjerne jedinice možete koristiti.

Konstrukcija u ravnini

1. Nacrtajte dvije različite točke u ravnini. Označite ih A i B.
2. Izmjerite udaljenost između točaka A i B.
3. Nacrtajte stazu kojom ste izmjerili udaljenost.
4. Zašto je ovo jedina staza po kojoj možete mjeriti udaljenost između točaka A i B?

Konstrukcija na sferi

Kako možete izmjeriti udaljenost između dviju točaka na sferi?

1. Nacrtajte dvije različite točke na svojoj sferi. Označite ih A i B.
2. Nacrtajte cijelu glavnu kružnicu koja sadrži ove dvije točke.
3. a) Koliko lukova spaja točke A i B?
   b) Uporabite oznake stupnjeva na vašem sfernom ravnalu kako biste izmjerili duljinu svakog od njih u stupnjevima.
   c) Kolika je udaljenost izmedu točaka A i B?
   d) Koju ste mjeru luka odabrali kao udaljenost? Objasnite zašto ste odabrali ovu mjeru.
4. a) Opišite par točaka na sferi između kojih je moguće mjeriti najkraća udaljenost duž više od jednog luka.
   b) Postoji li par točaka u ravnini između kojih je moguće mjeriti udaljenost duž više od jednog segmenta?

5. a) Kolika je najveća moguća udaljenost između dviju točaka u ravnini?
   b) Kolika je najveća moguća udaljenost između dviju točaka na sferi?
   c) Kolika je najkraća moguća udaljenost između dviju točaka u ravnini?
   d) Kolika je najkraća moguća udaljenost između dviju točaka na sferi?

Usporedite ravninu i sferu

1. Što možete uočiti o mjerenju udaljenosti u ravnini i na sferi?
2. Mislite li da je mjerenje udaljenosti jednostavnije u ravnini ili na sferi? Zašto?
3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto je mjerenje udaljenosti jednostavnije na površini koju nisi izabrao gore.

Odgovori se nalaze na stranici 132.

4. radni listić: Kako se mogu konstruirati ekvator i polarne točke?

Vrijeme rada: 25 - 40 minuta

Priredite model sfere i pribor.

Ekvator Zemlje otprilike je glavna kružnica. Ova glavna kružnica ima dva središta ili polarne točke: Sjeverni i Južni pol. Na sferi nazivamo veliku kružnicu ekvatorom, a polarne točke glavne kružnice nazivamo njezinim polovima.

Slijede tri odvojene konstrukcije na sferi. Svaku konstrukciju započnite s čistom sferom.

1. konstrukcija: Nacrtajte točku na svojoj sferi. Ovo će biti polarna točka (pol). Uporabite svoje sferno ravnalo i šestar za konstruiranje ekvatora koji odgovara ovoj polarnoj točki (polu). Opišite svoju konstruktivnu metodu.

2. konstrukcija: Nacrtajte točku na svojoj sferi. Ovo će biti tvoja prva polarna točka (pol). Pronađite način da konstruirate suprotnu polarnu točku (pol). Opišite svoju metodu.

3. konstrukcija: Nacrtajte glavnu kružnicu. Pronađite način da konstruirate polarne točke (polove) koji odgovaraju ovoj glavnoj kružnici. Opišite svoju metodu.

1. Usporedite svoje metode konstruiranja s drugima u tvojem razredu.

2. Kolika je udaljenost između bilo kojeg para polova?

3. Kolika je udaljenost između pola i ekvatora?

4. Pretpostavimo da je grad u kojem živite pol Zemlje.

   a) Opišite mjesto vašeg suprotnog pola.

   b) Opiši ekvator svog rodnog grada.

5. Pronađite Greenwički meridijan (0° zemljopisne dužine) na globusu. Gdje su polarne točke glavne kružnice koje uključuju ovaj meridijan?

Usporedite ravninu i sferu

Ima li smisla u ovom slučaju napraviti usporednu tablicu između ravnine i sfere kao što smo radili u prethodnim listićima? Zašto da ili zašto ne?

5. radni listić: Kako se može koristiti kutomjer za mjerenje kutova na sferi?

Vrijeme rada: 35 - 50 minuta

Znadete koristiti kutomjer za mjerenje kutova u ravnini. Možete li koristiti taj kutomjer za mjerenje kutova na sferi?

Uporabite komad sferne prozirne folije za napraviti kutomjer kojim se može mjeriti kutovi na sferi.

Izrada sfernog kutomjera

Samo jedna grupa u vašem razredu treba napraviti 1. korak.

1. korak: Morate izrezati prozirnu foliju na komade **tako** da svaka grupa u vašem razredu može napraviti vlastiti kutomjer. Stavite prozirnicu na vašu sferu. Uporabite svoj sferni šestar za nacrtati kružnicu koja ima rupu na prozirnici kao njezino središte i polumjer 25°. Označite točku otprilike na sredini između kružnice i ruba prozirnice. Koristite ovu točku kao središte i nacrtajte drugu kružnicu polumjera 25°. Označite dodatne točke kao središta i uporabite svako središte da nacrtate kružnicu koja ima radijus od 25°. Odaberite središnje točke tako da kružnice budu blizu jedan drugoj ali da se ne dodiruju. Uklonite prozirnu foliju sa sfere i uporabite škare za pažljivo je izrezati na komade tako da je na svakom komadu po jedna kružnica. Podijelite jedan od ovih prozirnih dijelove svakoj grupi u vašem razredu. Ako je potrebno, uporabite drugu prozirnu foliju za izradu dodatnih komada.

Svaka grupa u vašem razredu treba izvesti preostale korake.

2. korak: Označite polarnu točku na svojoj sferi. Uporabite svoje sferno ravnalo za crtanje odgovarajućeg ekvatora. Zatim označite svaki deseti stupanj duž ekvatora.

3. korak: Pretvorite svoj komad prozirnice u disk tako da pažljivo skroz obrežete vanjski rub kruga. Zatim zalijepite omču od prozirne trake ovog diska na sferu tako da se njegova središnja točka poklapa s polom koji ste označili na sferi.

4. korak: Uparabite svoje ravnalo da poravnate svaki par nasuprot oznake na ekvatoru sfere sa središnjom točka diska. Zatim nacrtajte tanke crtice svakih deset stupnjeva po disku.

5. korak: Odaberite par okomitih lukova i podebljajte ih. Dovršite svoj praktični kutomjer s diskom probijanjem male rupe točno u središtu.

6. korak: (Neobavezno) Kako bi kutomjer trajao dulje, uporabite ravnalo i marker da prati tvoje lukove. (Nastojte da ne ostane trajna tinta na vašoj sferi. Možete linije obrisati alkoholom.)

1. Na vašoj sferi nacrtajte dva luka glavnih kružnica koje imaju zajedničku krajnju točka. Uporabite kutomjer za mjerenje za oba formirana sferna kuta. Što uočavate za ove kutove?

2. Uporabite svoj disk kutomjer i svoje sferno ravnalo za konstruirati kut od 50°. Konstruirajte kut od 100°, kut od 200° i 3. kut od 300°.

3. a) Kako možete uporabiti svoje sferno ravnalo za mjerenje bilo kojeg kuta?
   b) Koje su praktične prednosti manjeg kutomjera s diskom koji ste upravo napravili?

Usporedite ravninu i sferu

Usporedite metode mjerenja kutova u ravnini i na sferi? Što je zanimljivije?

Drugi problem: paralelnost i okomitost

1. radni listić: Koliko točaka mogu dijeliti dvije linije?

Vrijeme rada: 25 - 40 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koliko točaka mogu dijeliti dvije linije?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte pravac. Označite ga l.
2. korak: Pokušajte nacrtati drugi pravac koji nema zajedničku točku s pravcem l. Označite ga a.
3. korak: Pokušajte nacrtati pravac koja ima točno jednu točku zajedničku s l. Označite ga b.
4. korak: Pokušajte nacrtati pravac koji ima točno dvije točke zajedničke s pravcem l. Označite ga c.
5. korak: Pokušajte nacrtati pravac koji ima više od dvije zajedničke točke s pravcem l. Označite ga d.

1. Koje su konstrukcije bile moguće u ravnini?
2. Koji su vaši pravci paralelni? Zašto?
3. Opišite sve različite načine na koje se dva različita pravca mogu presijecati u ravnini.

Konstrukcija na sferi

Hoće li vaši zaključci biti isti za glavne kružnice na sferi?

1. Izvedite iste korake na sferi kao što ste u ravnini, zamjenjujući pravce s glavnim kružnicama. Pratite koje su konstrukcije moguće na sferi.
2. Opišite sve načine za koje se dvije glavne kružnice mogu sjeći na sferi.
3. Mogu li dvije glavne kružnice ikada biti paralelne?

Usporedite ravninu i sferu

1. Vidite koliko sjecište imaju dva pravca u ravnini a koliko sjecišta dviju glavnih kružnica na sfera.

2. Mislite li da je sjecište dvaju pravaca jednostavnije u ravnini ili na sferi? Koji je slučaj intrigantniji? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto je sjecište dviju linija jednostavnije ili intrigantnije na površini koju odaberete gore.

Odgovori se nalaze na stranici 134.

2. radni listić: Kako izgledaju okomite crte na sferi?

Vrijeme rada: 25 - 40 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako izgledaju okomite crte na sferi?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Okomite se linije sijeku na poseban način u ravnini i na sferi.

- Opišite dva okomita pravca u ravnini.
- Opišite dvije okomite glavne kružnice na sferi.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte dva pravca koja se sijeku i dijele ravninu na područja koja su sva sukladna.
2. korak: Izmjerite i označite sve kutove u svakoj točki sjecišta ovih dvaju pravaca.

1. Dva pravca koje ste konstruirali su okomita jedan na drugog. Uočite što možete zaključiti o okomitim pravcima u ravnini.

Kako izgledaju okomice na sferi?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte dvije glavne kružnice koje dijele vašu sferu na područja koja su sva kongruentna.
2. korak: Izmjerite i označite sve kutove u svakoj točki presjeka ovih dviju okomitih glavnih kružnica.

1. Dvije glavne kružnice koje ste konstruirali su okomite jedna na drugu. Zabilježite sva zapažanja koja možete napraviti za okomite glavne kružnice na sferi.

Odgovori se nalaze na stranici 134.

Usporedite ravninu i sferu

1. Koliko činjenica možete uočiti za okomite pravce u ravninu i za okomite glavne kružnice na sferi?
2. Mislite li da su okomite crte zanimljivije u ravnini ili na sferi? Zašto?
3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto su okomite linije zanimljivije na površini koju niste odabrali gore.

3. radni listić: Koliko zajedničkih okomica mogu imati dva pravca?

Vrijeme rada: 25 - 40 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koliko zajedničkih okomica mogu imati dva pravca?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Ako je pravac okomit na dva druga pravca odjednom, onda je on zajednička okomica za te pravce.

- Istražite zajedničke okomice dvaju pravaca u ravnini.
- Istražite zajedničke okomice dviju glavnih kružnica na sferi.

1. Koliko zajedničkih okomica možete nacrtati u 1. koraku?
2. Koliko biste zajedničkih okomica mogli nacrtati u 2. koraku?

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte dva pravca koji se sijeku. Zatim pokušajte nacrtati neke pravce koji su okomiti na oba.
2. korak: Nacrtajte dva paralelna pravca. Zatim pokušajte nacrtati neki pravac koji je okomit na oba.

Hoće li vaši zaključci o zajedničkim okomicama biti isti na sferi?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte dvije različita glavne kružnice.
2. korak: Izmjerite i označite sve kutove u svakoj točki presjeka ovih dviju okomitih glavnih kružnica.

1. Koliko zajedničkih okomice znadete nacrtati na bilo koje dvije glavne kružnice ?

Usporedite ravninu i sferu

1. Koliko činjenica možete uočiti o zajedničkim okomicama u ravnini i o zajedničkim okomicama na sferi?
2. Mislite li da su uobičajene okomice jednostavnije u ravnini ili na sferi? Zašto?
3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto su zajedničke okomice jednostavnije na površini koju niste odabrali gore.

Odgovori se nalaze na stranici 136.

Treći problem: mnogokuti

1. radni listić: Je li moguće nacrtati mnogokut sa samo dvije stranice?

Vrijeme rada: 25 - 45 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Je li moguće nacrtati mnogokut sa samo dvije stranice?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Nacrtali ste mnogo različitih mnogokuta, kao što su trokuti, četverokuti, peterokuti i šesterokuti.

Odredite je li moguće nacrtati dvostrani mnogokut.

Konstrukcija u ravnini

Nacrtaj dvije zrake/polupravca sa zajedničkom početnom točkom.

1. Hoće li se dvije zrake sastati u nekoj drugoj točki ako ih produžimo?
2. Dvije zrake dijele ravninu na različita područja. Opišite veličinu i oblik područja.
3. Mnogokut je zatvoreni lik s ravnim stranicama. Objasnite da li je moguće stvoriti dvostrani mnogokut u ravnini.

Konstrukcija na sferi

Možete li napraviti dvostrani mnogokut na sferi?

Nacrtajte lukove dviju različitih glavnih kružnica počevši od iste točke na vašoj sferi.

1. Proširite dva luka. Sastaju li se dva luka u još jednoj točki?
2. Dva luka dijele sferu na različita područja. Opišite veličinu i oblik područja.
3. a) Napišite definiciju mnogokuta na sferi.
   b) Jesu li neka od područja koje ste stvorili na svojoj sferi mnogokuti?
4. Mnogokut na sferi koji ima točno dva kuta naziva se dvokut. Mjera svakog kuta u mnogokutu ne može biti veća od 180°. Šrafiraj jedan dvokut na tvojoj sferi.
5. Izmjerite oba kuta dvokuta i opišite svojstvo koje vrijedi za kutove bilo kojeg dvokuta.

6. Izmjerite obje stranice dvokuta i opišite dva svojstva koja vrijede za stranice bilo kojeg dvokuta.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete nacrtati dvije zrake sa zajedničkom početnom točkom u ravnini i dva luka glavnih kružnica sa zajedničkom početnom točkom na sferi.

2. Što mislite koja je površina jednostavnija u ovom slučaju: ravnina ili sfera? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti argument. Navedite razloge zašto bi moglo biti jednostavnije.

Odgovori se nalaze na stranici 136.

2. radni listić: Koja područja možete stvoriti pomoću tri linije?

Vrijeme rada: 30 - 50 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koja područja možete stvoriti pomoću tri linije?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Kada se tri linije sijeku, one dijele površinu na nekoliko područja.

- Istražite područja koja možete stvoriti koristeći tri pravca u ravnini.
- Istražite područja koja možete stvoriti pomoću tri glavne kružnice na sferi.

Konstrukcija u ravnini

Svaki par različitih pravaca u ravnini je paralelan ili se siječe. Napravite crteže za demonstraciju svakog mogućeg slučaja za tri različita pravca u ravnini.

1. *Za svaki* crtež odredite koliko područja stvaraju tri pravca.
2. Za svaki crtež odredite koliko područja ima konačnu površinu, a koliko područja imaju beskonačnu.

Koje vrste područja možete stvoriti s tri glavne kružnice na sferi?

Konstrukcija na sferi

Nacrtajte tri glavne kružnice na svojoj sferi.

1. Koliko područja možete stvoriti s tri različite glavne kružnice na sferi? Navedite sve moguće odgovore na ovo pitanje.
2. Za svaki primjer koji ste naveli u gornjem odgovoru odredite koliko područja ima konačnu površinu a koliko imaju beskonačnu.
3. U jednom od gornjih slučajeva stvorili ste područja koja su trokuti. Trokuti su sukladni ako im su odgovarajuće stranice sukladne i odgovarajući kutovi sukladni. Koristite svoj crtež napravljen za ovaj slučaj i pronađite par sukladnih trokuta na suprotnim stranama vaše sfere.
   a) Označite svaki takav par trokuta na svojem crtežu s različitim bojama.
   b) Koliko takvih parova trokuta stvaraju vaše tri glavne kržnice?
4. Nacrtajte jedan od ovih trokuta na prozirnu foliju.

a) Slaže li se trokut točno na svojeg sukladnog partnera?

b) Objasnite kako možete to točno uklopiti.

c) Takav par trokuta zove se *refleksni par trokuta*. Objasnite zašto je ovaj naziv dobar za ove parove trokuta.

Usporedite ravninu i sferu

1. Koliko slučajeva možete napraviti s tri različita pravca u ravnini i s tri glavne kružnice na sferi.

2. Što mislite da je jednostavnije: tri pravca u ravnini ili tri glavne kružnice na sferi? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto tri linije su jednostavnije na površini koju odaberete gore.

Odgovori se nalaze na stranici 137.

3. radni listić: Koliko trokuta može imati ista tri vrha?

Vrijeme rada: 30 - 50 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koliko trokuta može imati ista tri vrha?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Pretpostavimo da odaberete tri točke.

- Istražite koliko različitih trokuta možete dobiti spajanjem točaka u ravnini pomoću dužina.
- Istražite koliko različitih trokuta možete dobiti spajanjem točaka na sferi pomoću lukova.

Konstrukcija u ravnini

Nacrtajte tri nekolinearne točke u ravnini. Konstruirati trokut s te tri točke kao vrhovima.

1. Koliko različitih dužina možete nacrtati između dviju točaka u ravnini?
2. Koliko različitih trokuta možete nacrtati s tri ista vrha?

Na koliko različitih načina možete spojiti tri točke na sferi za nacrtati trokut?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte tri točke na svojoj sferi, pazeći da sve tri točke nisu na istoj glavnoj kružnici i da nijedna od tri točke nije jedna nasuprot ostalima. Označite svoje točke A, B i C.
2. korak: Konstruirajte sferni trokut s točkama A, B i C kao vrhovima.

1. Koliko različitih lukova glavne kružnice možete nacrtati između dviju točaka, pod pretpostavkom da točke nisu jedna nasuprot drugoj?
2. Pokažite da točke A, B i C u vašoj konstrukciji ne određuju jedinstveni trokut na istoj sferi. Uporabite markere različitih boja kako biste prikazali različite trokute određene s ove tri točke.
3. a) Koliko različitih sfernih trokuta možete nacrtati s točkama A, B i C kao vrhovima?

   b) Objasnite kako ste odredili taj broj.

4. Dvije točke na sferi dijele glavnu kružnicu koja prolazi kroz njih na dva luka. Uvijek izaberemo kraći od dva luka kada konstruiramo sferni trokut.

   a) Navedite primjer sfernog trokuta koji se pridržava ove nove definicije.
   b) Objasnite kako će ova nova definicija pojednostavniti vaše daljnje istraživanje trokuta na sferi.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite koliko možete napraviti trokuta u ravnini i trokuta na sferi.
2. Mislite li da su trokuti jednostavniji u ravnini ili na sferi? Zašto?
3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto su trokuti jednostavniji na površini koju odaberete gore.

Odgovori se nalaze na stranici 139.

4. radni listić: Koliki je zbroj kutnih mjera u trokutu?

Vrijeme rada: 30 - 60 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koliki je zbroj kutnih mjera u trokutu?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Ako zbrojite mjere kutova trokuta, dobivate li uvijek istu vrijednost?

- Istražite zbroj mjera kutova ravninskih trokuta.
- Istražite zbroj mjera kutova sfernih trokuta.

Konstrukcija u ravnini

Nacrtajte dva trokuta tako da je jedan potpuno u drugom. Izmjerite unutarnje kutove svakog trokuta.

1. Objasnite zašto je zbroj mjera unutarnjih kutovi ravninskog trokuta uvijek isti.

Koliki je zbroj mjera unutarnjih kutova sfernog trokuta?

Konstrukcija na sferi

Nacrtajte tri trokuta: prvi trokut potpuno unutra drugog i drugi potpuno unutar trećeg. Izmjerite unutarnje kutove svakog trokuta.

1. Nađite zbroj mjera kutova svakog od svojih sfernih trokuta.
2. Objasnite zašto dobivate različite odgovore za različite trokute.
3. a) Što mislite koji je najmanji mogući zbroj kutnih mjera za sferni trokut?
   b) A koji je najveći? Objasnite svoje razmišljanje.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete odrediti zbroj mjera kutova trokuta u ravnini i na sferi.
2. Mislite li da je zbroj mjera kutova za ravninski trokut jednostavniji ili za sferni? Zašto? Koji slučaj je zanimljiviji? Koji će slučaj vjerojatnije potaknuti veze između mjerenja kuta i drugih svojstava trokuta?
3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto ste odabrali površinu koju ste odabrali gore da je jednostavnije ili zanimljivije određivanje zbroja mjera.

Odgovori se nalaze na stranici 140.

5. radni listić: Može li trokut imati više od jednog pravog kuta?

Vrijeme rada: 25 - 45 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Može li trokut imati više od jednog pravog kuta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Možda ste već naučili neka posebna svojstva pravokutnih trokuta.

- Provjerite možete li konstruirati trokut s više od jednog pravog kuta.

Konstrukcija u ravnini

Konstruiraj pravokutni trokut u ravnini.

1. Objasnite zašto je nemoguće da trokut u ravnini ima više od jednog pravog kuta.

Može li trokut na sferi imati više od jednog pravog kuta?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte točku P. Zatim nacrtajte ekvatorijalnu veliku kružnicu koji ima P kao polnu točku.
2. korak: Iz točke P povuci okomicu na svoj ekvator.
3. korak: Nacrtajte tri druge okomice. Označite točke sjecišta na ekvatoru A, B, C, i D.
4. korak: Izmjerite kutove trokuta $\triangle PAB, \triangle PAC$, i $\triangle PAD$.
5. korak: Izmjerite stranice trokuta $\triangle PAB, \triangle PAC$, i $\triangle PAD$.

1. a) Odredite zbroj mjera triju kutova u svakom od ovih trokuta. Je li zbroj mjera unutarnjih kutova sfernih trokuta uvijek $180°$?
   b) Opišite svaki odnos koji ste uočili između površina ovih trokuta i zbroja njihovih kutnih mjera.
2. Nacrtajte trokut koji ima točno tri prava kuta. Zabilježite duljine njegovih stranica i zbroj njegovih kutova.
3. Dva trokuta zadovoljavaju uvjet KKS (kut-kut-stranica) ako su dva para odgovarajućih kutova sukladna i par odgovarajućih stranica nije uključen u sukladnost kutova. Svaki par trokuta u ravnini mora biti sukladan ako zadovoljavaju KKS uvjet. Uporabite pravokutne trokute koje ste nacrtali u ovoj istrazi i objasnite zašto KKS uvjet ne jamči sukladnost za trokute na sferi.

4. Dva trokuta zadovoljavaju uvjet SSK (stranica-stranica-kut) ako su dva para odgovarajućih stranica sukladna i par odgovarajućih kutova koji nisu uključeni u ove stranice su sukladni. Na ravnini SSK uvjet jamči sukladnost samo za određene parove trokuta. Primjerice, ako su oba trokuta pravokutni trokuti, tada uvjet SSK jamči njihovu sukladnost.Uporabite pravokutne trokute koje ste nacrtali za ovu istragu kako biste objasnili zašto SSK uvjet ne jamči sukladnost za pravokutne trokute na sferi.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete nacrtati trokute s pravim kutom u ravnini i s pravim kutovima na sferi.
2. Mislite li da su trokuti s pravim kutom jednostavniji u ravnini ili na sferi? Zašto?
3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto niste odabrali površinu koja je gore jednostavnija.

Odgovori se nalaze na stranici 142.

Četvrti problem: sličnost i kongruencija/sukladnost

1. radni listić: Možete li konstruirati slične mnogokute?

Vrijeme rada: 25 - 45 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Možete li konstruirati slične mnogokute?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Dva su mnogokuta slična ako su im odgovarajući kutovi sukladni i njihove odgovarajuće stranice proporcionalne.

- Odlučite možete li nacrtati slične mnogokute u ravnini i na sferi.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Konstruirajte trokut.

2. korak: Konstruirajte drugi trokut sa stranicama upola kraćim od odgovarajućih stranica vašeg prvog trokuta.

3. korak: Izmjerite i označite sve stranice i kutove u svakom trokutu.

1. Objasnite zašto su vaša dva trokuta slični trokuti.

Možete li nacrtati par sličcnih trokuta na svojoj sferi?

Konstrukcija na sferi

Slijedite iste korake koje ste učinili u konstruiranju u ravnini. Počnite s prilično velikim trokutom.

1. Jesu li trokuti koje ste nacrtali na svojoj sferi slični trokuti? Zašto da ili zašto ne?

2. Dva mnogokuta su slična ako i samo ako su (1.) svi odgovarajući kutovi jednake mjere i (2.) sve odgovarajuće stranice proporcionalne.

   a) Odredite je li moguće nacrtati par mnogokuta na vašoj sferi koji zadovoljava prvi dio ove definicije. Nacrtajte primjere.

   b) Odredite je li moguće nacrtati par mnogokuta na vašoj sferi koji zadovoljava drugi dio ove definicije. Nacrtajte primjere.

   c) Što možete zaključiti o sličnim mnogokutima na sferi?

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete nacrtati sličnost u ravnini i sličnost na sferi.

2. Mislite li da je sličnost jednostavnija u ravnini ili na sferi? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto je sličnost jednostavnija na površinu koju ste odabrali gore.

Odgovori se nalaze na stranici 146.

2. radni listić: Što je posebno kod dva trokuta čiji su odgovarajući kutovi sukladni?

Vrijeme rada: 35 - 60 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Što je posebno kod dva trokuta čiji su odgovarajući kutovi sukladni?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

- Istražite moraju li dva trokuta biti slična ako su odgovarajući kutovi sukladni.
- Istražite moraju li dva trokuta biti sukladna ako su odgovarajući kutovi sukladni.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte trokut na jednom komadu papira. Označite svaki kut u blizini njegovog vrha.
2. korak: Odrežite svaki od tri kuta vašeg trokuta.
3. korak: Pomaknite kutove kako biste pokušali stvoriti još jedan trokut koji imaju iste kutove ali sa stranicama koje imaju različite duljine od duljina stranica prvog trokuta.

1. Koliko različitih trokuta možete napraviti pomoću ta ista tri kuta?
2. Ako dva trokuta imaju sva tri para odgovarajućih kutova sukladna, tada kažemoo da trokuti zadovoljavaju uvjet KKK (kut-kut-kut). Što je posebno o dva ravninska trokuta koji zadovoljavaju uvjet KKK?
3. Ako par ravninskih trokuta zadovoljava KKK uvjet, jamči li to da su ta dva trokuta sukladna?

Hoće li uvjet KKK jamčiti ili sličnost ili sukladnost trokuta na sferi?

Konstrukcija na sferi

Morat ćete izrezati barem jednu prozirnicu da biste napravili ovu konstrukciju.

1. korak: Nacrtajte trokut na svojoj sferi. Kako biste kasnije pratili kutove, označite svaki kut u blizini njegovog vrha drugom bojom ili oznakom.

2. korak: Stavite prozirnu foliju preko jednog kuta trokuta tako da je vrh kuta ispod rub prozirnice. Ucrtajte kut na prozirnicu i produljite stranice kuta dok se gotovo ne presijeku. Zatim izrežite kut i obojite ga tako da odgovara izvornom kutu na sferi.

3. korak: Ponovite 2. korak 2 za druga dva kuta.

4. korak: Okrenite svoju sferu tako da je vaš izvorni trokut na dnu. Složite tri kuta u vrhove tvoje sfera. Pomaknite kutove i pokušajte oblikovati novi trokut koji ima ova tri kuta kao vrhove. Možda želite označiti stranice kutova kako biste ih lakše vidjeli.

5. korak: Kada ste formirali trokut, zalijepite tri kuta zajedno. Zatim ponovno okrenite svoju sferu i usporedite svoj novi trokut s izvornim trokutom.

1. Kako se vaš trokut napravljen od prozirnih folija može usporediti s originalnim trokutom koji ste nacrtali na sferi?

2. Koliko različitih sfernih trokuta možete napraviti koristeći ista tri kuta?

3. Što je posebno kod sfernih trokuta čiji su odgovarajući kutovi sukladni?

4. Pomiješajte svoje sferne kutove s onima koje su napravili drugi u vašem razredu i zatim pokušajte oblikovati sferne trokute. Što ste uočili?

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete napraviti ravninske trokute koji zadovoljavaju KKK uvjet i sferni trokute koji zadovoljavaju KKK uvjet.

2. Mislite li da je ravnina ili sfera jednostavnija u ovom slučaju? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto je jednostavnija površina koju ste odabrali gore od ove druge.

Odgovori se nalaze na stranici 147.

3. radni listić: Koji uvjeti jamče sukladnost sfernih trokuta?

Vrijeme rada: 25 - 45 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koji uvjeti jamče sukladnost sfernih trokuta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Sječate li se koje kombinacije sukladnih stranica i kutova jamče sukladnost dva trokuta u ravnini?

- Testirajte ove kombinacije kako biste pronašli koje također jamče sukladnost sfernih trokuta.
- Pronađite neke kombinacije sukladnih stranica i kutova koje jamče sukladnost sfernih trokuta ali ne i trokuta u ravnini.

Konstrukcija u ravnini

Mnogo je uvjeta koji jamče da su dva trokuta u ravnini sukladni. Primjerice, dva trokuta zadovoljavaju SSS (stranica-stranica-stranica) uvjet ako su sva tri para odgovarajućih stranice dvaju trokuta sukladna. Bilo koji par trokuta koji zadovoljavaju SSS uvjet moraju biti kongruentni.

1. Kopirajte sljedeći popis mogućih uvjeta sukladnosti. Zaokružite uvjete koji jamče sukladnost trokuta u ravnini. Prekrižite one koji ne zadovoljavaju.
   SSS KKK KKS SSK KSK SKS
2. Za svaki uvjet koji ste prekrižili nacrtajte dva trokuta u kojima su odgovarajući navedeni dijelovi sukladni, ali trokuti nisu sukladni.

Koje kombinacije sukladnih kutova i stranica jamče sukladnost trokuta na sferi?

Konstrukcija na sferi

1. Odredite koje kombinacije odgovarajućih sukladnih dijelova jamče sukladnost sfernih trokuta. Napravite crteže na svojoj sferi koji pokazuju koji uvjeti vrijede, a koji ne.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete utvrditi koji uvjeti sukladnosti trokuta u ravnini vrijede a koji uvjeti sukladnosti za trokute na sferi.
2. Što mislite koja je površina jednostavnija u ovome slučaju: ravnina ili sfera? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto ste odabrali gornju površinu da je jednostavnija.

Odgovori se nalaze na stranici 148.

Peti problem: kružnice

1. radni listić: Koja su neka svojstva kružnice na sferi?

Vrijeme rada: 20 - 35 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koja su neka svojstva kružnice na sferi?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

- Usporedi kružnice u ravnini s kružnicama na sferi. Kakve sličnosti i razlike možete pronaći?

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte točku u ravnini. Zatim nacrtajte kružnicu sa središtem u toj točki. Nacrtajte polumjer kružnice.

2. korak: Nacrtajte promjer kružnice, tetivu kružnice i tangentu na kružnicu.

1. Navedite neka svojstva koja su istinita za bilo koju kružnicu u ravnini.

2. Objasnite zašto svaka kružnica u ravnini ima samo jedno središte.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte točku na svojoj sferi. Označite točku P. Uporabite svoj sferni šestar za nacrtati kružnicu kojoj je središte točka P. Uporabite svoje sferno ravnalo za nacrtati polumjer kružnice.

2. korak: Koristite svoje sferno ravnalo za nacrtati promjer kružnice, tetivu kružnice i tangentu na kružnicu.

3. korak: Nacrtajte točku koja je nasuprot točke P. Označite ovu suprotnu točku P'.

1. Nacrtajte neke točke na kružnici i izmjerite udaljenost od svake točke do P'. Je li P' još jedno središte kružnice? Zašto da ili zašto ne?

2. Zatim uporabite svoje sferno ravnalo za mjerenje polumjera kružnice od središta P kako biste izmjerili polumjer iste kružnice iz suprotne točke P'. Kako ove udaljenosti usporediti?

3. Pogledajte listu svojstava kružnica u ravnini koju ste napravili. Odredite koja od tih svojstva vrijede za kružnice na sferi.

4. Sferni šestar može nacrtati kružnice s polumjerima manjim od ili jednakim $90°$. Objasnite kako se crta kružnica čiji polumjer iznosi $120°$.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete nacrtati kružnice u ravnini i kružnice na sferi.
2. Mislite li da su kružnice jednostavnije u ravnini ili na sferi? Zašto?
3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto su kružnice jednostavnije na površini koju ste birali gore.

Odgovori se nalaze na stranici 150.

2. radni listić: Kakvi su neki odnosi u skupu koncentričnih kružnica?

Vrijeme rada: 25 - 40 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kakvi su neki odnosi u skupu koncentričnih kružnica?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Skup koncentričnih kružnica odnosi se na sve kružnice s istim središtem.

- Nacrtajte dio skupa koncentričnih kružnica u ravnini i skupa koncentričnih kružnica na sferi.

- Usporedite ova dva skupa.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte točku u ravnini. Označite točku P.

2. korak: Nacrtajte kružnicu sa središtem P i polumjerom 3 cm.

3. korak: Nacrtajte drugu kružnicu sa središtem P i polumjerom od $3+3$ cm, tj. 6 cm.

4. korak: Nacrtajte još jednu kružnicu sa središtem i polumjerom od $3+3+3$ cm, tj. od 9 cm.

1. Upravo ste konstruirali nekoliko članova iz skupa koncentričnih kružnica u ravnini. Je li moguće nastaviti ovaj proces crtanjae zauvijek, pod pretpostavkom da imate dovoljno veliki šestar?

2. Kako kružnice postaju veće, čini se da su manje zakrivljene. Možete li pronaći kružnice u svojem skupu koncentrične kružnica koje su toliko glavne da su pravci? Drugim riječima, ako imate dovoljno velik šestar, možeš li ga se dovoljno otvoriti za nacrtati pravac? Objasnite.

3. Možete li konstruirati sve manje i manje koncentrične kružnice dok ne konstruirate jednu malu da je samo točka?

4. Možete li pronaći bilo koje dvije različite kružnice u svojem skupu koncentričnih kružnica koje su kongruentne jedna drugoj?

Kako se skup koncentričnih kružnica na sferi razlikuje od skupa koncentričnih kružnica u ravnini?

Konstrukcija na sferi

Ponovite iste korake na sferi koje ste izveli u ravnini, zamjenjujući mjeru polumjera od 3 cm s polumjerom mjere od 30°. Polumjeri vaših kružnica trebaju mjeriti $0°, 30°, 60°$ i $90°$.

1. Upravo ste konstruirali nekoliko koncentričnih kružnica na sferi. Može li se nastaviti ovaj proces konstruiranja zauvijek, pod pretpostavkom da imate dovoljno velik šestar?

2. Možete li pronaći kružnice među svim tim koncentričnim kružnicama koje su veće od glavne kružnice? Drugim riječima, možete li otvoriti svoj sferni šestar dovoljno široko kako biste nacrtali sferni ekvivalent pravca?

3. Možete li konstruirati sve manje i manje koncentrične kružnice dok ne konstruirate jednu tako malu da je samo točka?

4. Možete li pronaći bilo koje dvije različita kružnice u svojem skupu koncentričnih kružnica koje su kongruentne jedna drugoj?

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete nacrtati koncentrične kružnice u ravnini i koncentrične kružnice na sferi.

2. Mislite li da su koncentrične kružnice jednostavnije na sferi ili u ravnini? Zašto? I koji od ova dva slučaj zanimljiviji?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto niste odabrali površinu gore i koja je jednostavnija ili zanimljivija.

Odgovori se nalaze na stranici 151.

3. radni listić: Koliki je omjer opsega kružnice i njezinog promjera?

Vrijeme rada: 35 - 50 minuta

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koliki je omjer opsega kružnice i njezinog promjera?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Možda ste prije usporedili opseg kružnice s njezinim promjerom.

- Provedite vlastite pokuse kako biste odredili približan omjer opsega i promjera kružnice u ravnini i na sferi.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Namotajte konac oko kružnog ruba čaše za piće, plastične čaše ili bilo koje druge okrugle posude i šupljeg predmeta. Zamolite partnera da označi opseg kružnice na predmetu.

2. korak: Na ravnom papiru razvucite konac u pravac. Zamolite svog partnera da izmjeri i zabilježi duljinu opsega. Izrazite svoj odgovor u centimetrima.

3. korak: Stavite okrugli predmet na ravni papir i nacrtajte njegov kružni rub.

4. korak: Izmjerite i zabilježite promjer kružnice u centimetrima.

1. Odredite omjer opsega i promjera.

2. Odaberite drugi okrugli predmet, manji ili veći i ponovite postupak. Zabilježite svoje rezultate.

3. Ostaje li omjer opsega i promjera isti za manje i veće kružnice? Objasnite što znate o ovom poznatom omjeru.

Hoće li omjer opsega i promjera biti isti za kružnice na sferi?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Namotajte konac oko kružnog ruba istog okruglog predmeta koji ste koristili u svojoj konstrukciji u ravnini. Zamolite partnera da označi opseg kružnice na predmetu.

2. korak: Rastegnite konopac na površinu vaše sfere. Zamolite svog partnera za mjerenje, koristeći sferno ravnalo, opsega označenog na predmetu, a zatim zabilježite njegovu sfernu duljinu. Izrazite svoj odgovor u stupnjevima.

3. korak: Stavite svoj okrugli predmet na površinu vaše sfere i nacrtajte oko njega kružni rub.

4. korak: Zatim uporabite svoje sferno ravnalo da izmjerite sferni promjer kružnice i da zabilježite njezinu duljinu. Izrazite svoj odgovor u stupnjevima.

1. Odredite omjer opsega i promjera vaše kružnice.

2. Odaberite drugi okrugli predmet, manji ili veći, i ponovite postupak. Zabilježite svoje rezultate.

3. Objasnite što se događa s omjerom opsega i promjera za kružnice čija veličina varira.

4. Je li moguće nacrtati kružnicu čiji je opseg dvostruko veći od njezinog promjera? Objasnite zašto da ili zašto ne.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete napraviti omjer opsega i promjera za kružnice u ravninu i isti omjer za kružnice na sferi.

2. Što mislite koja je ploha jednostavnija u ovom slučaju: ravnina ili sfera? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto niste odabrali površinu gore koja je jednostavnija.

Odgovori se nalaze na stranici 152.

Šesti problem: površina

1. radni listić: Možete li uvijek koristiti kvadratne jedinice za mjerenje površine?

Vrijeme rada: 25 - 40 minuta

Kvadrat je četverokut s četiri sukladne stranice i četiri prava kuta.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Možete li uvijek koristiti kvadratne jedinice za mjerenje površine?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

- Konstruirajte kvadrat i podijelite ga na manje sukladne kvadrate. Istražite ovu konstrukciju u ravnini i na sferi.
- Za mjerenje površina u ravnini rabimo kvadratne jedinice. Istražite koje jedinice možete uporabiti za mjerenje površina na sferi.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte kružnicu sa središtem O.
2. korak: Konstruirajte dva okomita promjera kružnice. Označite točke sjecišta A, B, C i D.
3. korak: Nacrtajte dužine $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ i $\overline{DA}$.
4. korak: Nacrtajte dužinu okomitu na dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ koja također prolazi kroz točku O. Nacrtajte drugu dužinu kroz točku O okomito na dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$. Označite nove točke sjecišta E, F, G i H.

1. Usporedite stranice četverokuta $ABCD$.
2. Usporedite kutove četverokuta $ABCD$.
3. Usporedite stranice i kutove četiriju manjih četverokuta $OEAH, OHDG, OGCF$ i $OFBE$.
4. Jesu li ovi manji četverokuti slični velikom četverokutu $ABCD$?
5. Koji su od ovih četverokuta kvadrati?

Je li moguće konstruirati kvadrat na vašoj sferi?
Je li moguće kvadrat na sferi' podijeliti na manje sukladne kvadrate?
Je li moguće izmjeriti sfernu površinu kvadratnim jedinicama?

Konstrukcija na sferi

Ponovite istu konstrukciju na sferi koju ste učinili u ravnini. Nacrtajte lukove glavnih kružnica umjesto dužina koje ste nacrtali u ravnini.

1. Usporedite stranice sfernog četverokuta $ABCD$.
2. Usporedite kutove sfernog četverokuta $ABCD$.
3. Usporedite stranice i kutove četiri manja sferna četverokuta $OEAH, OHDG, OGCF$ i $OFBE$.
4. Jesu li ovi manji četverokuti slični velikom četverokutu $ABCD$?
5. Koji su od ovih četverokuta kvadrati?

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete podijeliti kvadrat u ravnini a kako podijeliti pravilni četverokut na sferi.
2. Mislite li da je dijeljenje kvadrata u ravnini jednostavnije od dijeljenja pravilnog četverokuta na sferi? Zašto?

Odgovori se nalaze na stranici 154.

2. radni listić: Kako možete izmjeriti površinu trokuta?

Vrijeme rada: 30 - 60 minuta

Ako konačnu figuru podijelite na dijelove, površina cijele figure mora biti jednaka zbroju površina dijelova.

- Dokažite da je to točno ako ravninski trokut podijelite na dva trokuta.
- Pronađite način da pomoću stupnjeva izmjerite površine trokuta na sferi. Ako je potrebno, promijenite svoju definiciju površine kako biste osigurali da je površina bilo kojeg trokuta jednaka zbroj površina njegovih dijelova

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako možete izmjeriti površinu trokuta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte trokut.
2. korak: Svoj trokut crtanjem podijelite na dva manja trokuta dužinom od jednog vrha do suprotne stranice.

1. a) Nađite površinu velikog trokuta.
   b) Odredite površine dvaju malih trokuta.
   c) Je li površina velikog trokuta jednaka zbroju površina tih dvaju malih trokuta?
2. Nacrtajte mnogokut s više od četiri stranice. Podijelite mnogokut na trokute. Objasnite zašto možete odrediti površinu bilo kojeg mnogokuta ako znate odrediti površinu trokuta.

Kako možete izmjeriti površinu trokuta na sferi?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte sferni trokut.
2. korak: Podijelite svoj trokut na dva manja trokuta crtanjem luka glavne kružnice od jednog vrha do suprotne stranice.
3. korak: Pronađite mjere kuta u velikom trokutu i dodajte njih gore.
4. korak: Odredite zbroj mjera kutova svakog od ta dva manja trokuta.

1. a) Zbrojite mjere kutova dva mala trokuta. Zbog toga je zbroj jednak zbroju mjera kutova velikog trokuta?

   b) Objasnite možemo li definirati površinu sfernog trokuta kao zbroj njegovih kutnih mjera.

2. Sferni eksces trokuta definiramo kao 180° manje zbroj mjera njegovih kutova. Svaki trokut na sferi ima mjere kutova koje se zbrajaju do najmanje 180°. Sferni eksces je uvijek broj veći ili jednak nuli. Što je veći trokut, to je veći njegov sferni eksces.

   a) Uporabite svoja mjerenja kuta iz Konstrukcija na sferi za odrediti sferne ekscese svoja dva mala trokuta i velikog trokuta.

   b) Kakav je odnos između ova tri broja (ekscesa)?

3. a) Nacrtajte dva sferna trokuta, od kojih je jedan potpuno unutar drugog. Pronađite sferni eksces za svaki trokut. Izrazite svoj odgovor u stupnjevima.

   b) Kako se ova dva odgovora mogu usporediti?

4. Objasnite zašto je razumno definirati područje za sferni trokut kao njegov sferni eksces.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete izmjeriti površine u ravnini i izmjeriti površine na sferi.

2. Što mislite koja je površina jednostavnija u ovom slučaju: ravnina ili sfera? Zašto? I koja površina je zanimljivija?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto ste odabrali površinu gore koja je jednostavnija ili zanimljivija.

Odgovori se nalaze na stranici 155.

3. radni listić: Kako možete približno odrediti površinu kruga?

Vrijeme rada: 25 - 40 minuta

Ako u krug upišete pravilan mnogokut, površina mnogokuta manja je od površine kruga. Ako oko kruga opišete pravilan mnogokut, tada je površina mnogokuta veća od površine kruga.

Ako povećate broj stranica bilo kojeg od ovih pravilnih mnogokuta, površina mnogokuta je sve bliže i bliže području kruga.

- Uporabite upisane i opisane mnogokute kako biste dobili približnu vrijednost za područje ravninskog kruga.
- Uporabite istu metodu za aproksimaciju površine kruga na sferi.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako možete približno odrediti površinu kruga?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte kružnicu i zabilježite njezin polumjer.
2. korak: Upišite pravilan 12-erokut u krug.
3. korak: Opišite pravilan 12-erokut oko kruga.

1. Nađite površinu upisanog mnogokuta.
2. Odredite površinu opisanog mnogokuta.
3. Izračunajte prosjek površina upisanih i opisanih mnogokuta kako biste dobili dobru aproksimaciju površine vašeg kruga.
4. Provjerite svoju procjenu pronalaženjem točne površine kruga. Koliko ste bili blizu?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte kružnicu i zabilježi njen polumjer.
2. korak: Nacrtajte 12 polumjera kružnice tako da svaki par susjednih polumjera čini kut od 30°.
3. korak: Upišite pravilni mnogokut s 12 stranica. Izmjerite kut.
4. korak: Opišite pravilni 12-erokut. Izmjerite kut.

1. Odredite površinu upisanog mnogokuta koristeći činjenicu da je površina sfernog trokuta jednak njegovom sfernom ekscesu. (Da biste pronašli sferni eksces trokuta zbrojite mjere unutarnjih kutove i oduzmite od $180°$.)

2. Odredite površinu opisanog mnogokuta.

3. Izračunajte prosjek površina upisanih i opisanih mnogokuta kako biste dobili dobru aproksimaciju površine vašeg kruga.

4. Formula za površinu sfernog kruga u stupnjevima je $P = (1 - \cos r)$, gdje je r sferni radijus kruga. Uporabite ovu formulu da odredite točnu površinu vašeg kruga. Koliko je točna površina blizu aproksimacije koju ste napravili koristeći pravilni 12-erokut?

5. Površina polusfere je $360°$. Odredite sferni radijus sfernog kruga s polovinom površine polusfere. Konstruirajte ovaj krug na svojoj sferi.

Sedmi problem: iznenađenja na sferi

1. radni listić: Što je posebno kod trokuta upisanih nad promjerom kružnice?

Vrijema rada: 20 - 40 minuta

- Upišite trokut u kružnicu **tako** da jedna stranica trokuta bude promjer kružnice. Zatim izmjerite kutove trokuta.
- Koja posebna svojstva imaju trokuti ove vrste u ravnini?
- Odredite vrijede li ova svojstva i za sferne trokute upisane u kružnicu.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Što je posebno kod trokuta upisanih na promjeru kruga?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Konstruirajte kružnicu sa središtem O. Konstruirajte promjer s krajnjim točkama A i B.
2. korak: Odaberite drugu točku C na kružnici i nacrtajte tetive $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$.
3. korak: Izmjerite kut $\angle ACB$. Izmjerite kutove $\angle CAB$ i $\angle CBA$ i zbrojite njihove mjere.
4. korak: Odaberite drugu točku D na kružnici i ponovite postupak.

1. Ponovite za ostale točke na kružnici. Što opažate o kutovima ove vrste upisanog trokuta?

Hoće li ista svojstva vrijediti i za sferu?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Konstruirajte kružnicu sa središtem O. Konstruirajte promjer s krajnjim točkama A i B.
2. korak: Odaberite drugu točku C na kružnici i nacrtajte tetivu $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$.
3. korak: Izmjerite sferni kut $\sphericalangle ACB$. Mjere sfernih kutove $\sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle CBA$ zbrojite.

4. korak: Odaberite još dvije točke D i E na kružnici i ponovite 2. i 3. korake za svaku točku.

1. Ponovite za ostale točke na kružnici. Što opažate o kutovima ove vrste upisanog trokuta?

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete napraviti ovaj tip trokuta u ravnini i na sferi.

2. Što mislite koja je ploha jednostavnija u ovom slučaju: ravnina ili sfera? Zašto?

3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto ste odabrali površinu gore da je jednostavnija.

Koja su neka svojstva upisanog trokuta u oktantu?

Odgovori se nalaze na stranici 156.

2. radni listić: Koja su neka svojstva upisanog trokuta u oktantu?

Vrijeme rada: 20 - 40 minuta

Sferni trokut s tri prava kuta naziva se *oktantom* jer je takvih trokuta osam i pokrivaju cijelu sferu bez praznina ili preklapanja. Oktant ima neke neobične značajke. Istražit ćete posebnu vrstu trokuta upisanog u oktant.

- Izvedite konstrukciju u nastavku. Zatim nagađajte o svojoj konstrukciji.
- Pokušajte dokazati svoje pretpostavke.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koja su neka svojstva upisanog trokuta u oktantu?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Konstruirajte oktant. Označite njegove vrhove K, L i M.
2. korak: Nacrtajte bilo koju točku O unutar trokuta $\triangle KLM$ i spojite ovu točku s tri vrha. Produžite svaki novi luk iza točke O dok ne presiječe suprotnu stranicu trokuta $\triangle KLM$. Označite točke sjecišta R, Q i R.
3. korak: Spojite točke R, Q i R kako biste konstruirali trokut $\triangle PQR$.

1. a) Izmjerite tri stranice trokuta $\triangle PQR$ i zbrojite njihove mjere.
   b) Zapišite sve pretpostavke koje možete napraviti o stranicama trokuta $\triangle FQR$.
2. a) Izmjerite sve kutove u točkama R, Q i R.
   b) Što možete reći o glavnim kružnicama KR, LQ i MR u trokutu $\triangle PQR$?
3. Pokušajte dokazati bilo koju pretpostavku koju ste uobličili u ovom listiću.

3. radni listić: Kako možete konstruirati Napierov peterokut[1]?

Vrijeme rada 20 - 40 minuta

U peterokutu $PQRST$ postoji pet nesusjednih pari stranica: $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$, $\overline{QR}$ i $\overline{ST}$, $\overline{RS}$ i $\overline{TR}$, $\overline{ST}$ i $\overline{PQ}$ te $\overline{TP}$ i $\overline{QR}$.

- Nacrtajte ravninski peterokut tako da se jedan od tih parova sastoji od dvije okomite stranice (recimo, $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$ su okomite jedna na drugu).
- Pokažite da možete u ravnini nacrtati peterokut sa svim tim parovima okomitih stranica.
- Pokažite da možete na sferi nacrtati peterokut koji se sastoji od svih ovih parova okomitih stranica.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako možete konstruirati Napierov peterokut?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. Nacrtajte peterokut $PQRST$ s nesusjednim stranicama $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$ međusobno okomitim.
2. Pokažite da možete nacrtati peterokut $PQRST$ sa svim sljedećim parovima međusobno okomitih susjednih stranica: $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$, $\overline{QR}$ i $\overline{ST}$, $\overline{RS}$ i $\overline{TR}$, $\overline{ST}$ i $\overline{PQ}$, $\overline{TP}$ i $\overline{QR}$.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte trokut $\triangle APQ$ s točno jednim pravim kutom u točki A.
2. korak: Produžite hipotenuzu PQ preko točke Q tako da udaljenost nove krajnje točke od točke P je $90°$. Označite ovu novu krajnju točku B.
3. korak: Produžite stranicu AQ preko točke Q. Zatim nacrtajte okomicu na glavnu kružnicu PB u točki B tako da siječe produženu stranicu AQ u točki R. Sada imate novi pravokutni trokut s oznakom $\triangle BQR$.
4. korak: Ponovite korake od 1. do 3. za trokut $\triangle BQR$. Sada imamo još jedan pravokutni trokut s oznakom CRS.

[1] **John Napier** (1550.-1617.) bio je poznati škotski matematičar i izumitelj. U svojim istraživanjima sferne geometrije otkrio je ovaj neobičan oblik. Nazvao ga je *Pentagramma Mirificium*, što na latinskom znači "čudesna petokraka zvijezda". Što je čudesno u ovoj konstrukciji?

5. korak: Ponovite korake od 1. do 3. za trokut $\triangle CRS$.

6. korak: Nastavite ovaj proces stvaranja novih pravokutnih trokuta.

1. Opišite što se događa dok nastavljate ovaj proces konstruiranje novih pravokutnih trokuta.

2. Koliko ste pravokutnih trokuta konstruirali počevši od trokuta $\triangle APQ$?

3. Što možete reći o parovima nesusjednih stranica sfernog peterokuta $PQRST$?

Osmi problem: popločavanje

1. radni listić: Koja su popločavanja na sferi?

Vrijeme rada: 30 - 50 minuta

Zatvoreni oblici tvore popločavanje površine ako oblici pokrivaju cijelu površina bez praznina ili preklapanja. Ove zatvorene oblike nazivamo pločicama. Popločavanje je čisto ako su mu sve pločice sukladne. Popločavanje je polučisto ako ima pločica koje nisu sukladne, ali ipak ima konačan broj različitih oblika pločica.

- Koristeći samo pravilne mnogokute, konstruirajte primjere čistih i polučistih popločavanja u ravnini i na sferi. Opišite svako popločavanje.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koja su popločavanja na sferi?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Postoje tri vrste čistih popločavanja u ravnini koje koriste pravilne mnogokute kao pločice. Skicirajte primjer svake vrste.

2. korak: Postoje mnoge vrste polučistog popločavanja u ravnini koje koriste samo pravilne mnogokute kao pločice. Skicirajte dvije vrste.

3. korak: Skicirajte popločavanje koje ne koristi mnogokute kao pločice.

1. Za svaki od šest popločavanja koje ste izradili odlučite koliko će pločica biti potrebno za popločiti cijelu ravninu.

2. Objasnite je li veličina pločica bitna kod popločavanja u ravnini.

Po čemu se popločavanje na sferi razlikuju od popločavanja u ravnini?

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte luk $\widehat{OA}$ čija je mjera $70,5^\circ$. Nacrtajte kružnicu sa središtem O i polumjerom $\overline{OA}$.

2. korak: Nacrtajte još dva radijusa $\overline{OB}$ i $\overline{OC}$ kružnice tako da kutovi između svakog para radijusa iznose 120°.

3. korak: Konstruirajte suprotnu točku središta O i označite je D. Izbrišite sve na svojoj sferi osim točaka A, B, C i D.

4. korak: Smatrajte točku A polnom točkom i nacrtajte ekvator. Ponovite s točkama B, C i D. mnogokuti koje stvaraju ova četiri ekvatora oblikuju popločavanje na sferi.

1. a) Opišite popločavanje koje tvore četiri ekvatora.
   b) Kakve pravilne sferne poligone nalazite u ovom popločavanju?
   c) Koliko je svake vrste pravilnih poligona u vašem popločavanju?
   d) Bez stvarnog mjerenja, možete li odrediti mjeru stranica ovih poligona?
2. Izmjerite neke stranicee pločica. Što ste pronašli?
3. Objasnite je li broj pločica bitan u popločavanju na sferi.
4. Objasnite je li veličina pločica bitna kod popločavanja na sferi.

Usporedite ravninu i sferu

1. Uočite na koliko načina možete napraviti popločavanje u ravnini i popločavanje na sferi.
2. Mislite li da su popločavanja jednostavnije u ravnini ili na sferi? Zašto?
3. Sada pokušajte preokrenuti svoj argument. Navedite razloge zašto su popločavanja jednostavnija na površina koju niste odabrali gore.

Odgovori se nalaze na stranici 158.

2. radni listić: Kako možete konstruirati nogometnu loptu?

Vrijeme rada: 45 - 80 minuta

Pogledajte nogometnu loptu. Popločana je pravilnim peterokutima i šesterokutima.

- Konstruirajte popločavanje nogometne lopte na svojoj sferi.

Ovo izvanredno popločavanje koristi se za više od prekrivanja nogometnih lopti. Arhitekt iz Sjedinjenih Država **Buckminster Fuller** (1895. - 1983.) koristio je ovaj oblik za konstrukciju geodetskih kupola. Godine 1985. kemičari su otkrili molekulu C_{60}, sugerirajući da ima strukturu nogometne lopte i predložili naziv *buckminsterfulllerene* - ili *buckyball*, skraćeno - u znak priznanja arhitektu i njegovim kupolama. Kasnije, kada je C_{60} kristaliziran, predložena struktura je potvrđena i buckminsterfuleren je postao treći oblik kristalnog ugljika (dijamant i grafit su druga dva).

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako možete konstruirati nogometnu loptu?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija na sferi

Ova konstrukcija može trajati dugo. Koristite sve prečace koje nađete na putu. Korištenje markera s posebno finim vrhom može vam pomoći da točnije radite.

1. korak: Konstruirajte jednakostranični trokut sa stranicama mjere $63,4°$. Cijelu sferu prekrijte s trokutima ove vrste, pazeći da se trokuti ne preklapaju i da između njih nema razmaka. (Mogući prečac je izrezati predložak iz komada prozirnice i zatim crtajte obris predloška dok ne pokrijete cijelu sferu.) Konstruirali ste sferni ikosaedar.

2. korak: Odaberite jedan od ovih trokuta i konstruirajte okomite simetrale svake stranice. Ovo dijeli trokut u šest manjih trokuta, svaki s jednim pravi kutom.

3. korak: Konstruirajte simetrale kutova šest centralnih kutova u jednakostraničnom trokutu. Označite točke u kojima simetrale kutova sijeku suprotne strane.

4. korak: Izvedite korake 2. i 3. u svih dvadeset jednakostraničnih trokuta.

5. korak: Uporabite markere jarkih boja za spajanje susjednih točaka presjeka. Napravite svoje popločavanje tako da izgleda poput prave nogometne lopte bojeći neke od područja.

3. radni listić: Kako možete popločati sferu s tri različite vrste pravilnih mnogokuta?

Vrijeme rada: 45 - 80 minuta

Nogometna lopta je sferno popločavanje koje rabi dva različita pravilna mnogokuta kao svoje pločice. Možete li napraviti sferno popločavanje koje rabi više pravilnih mnogokuta?

- Rabeći tri različite vrste pravilnih mnogokuta kao pločica, konstruirajte sferno popločavanje.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako možete popločati sferu s tri različite vrste pravilnih mnogokuta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija na sferi

Ova konstrukcija ima mnogo koraka. Pronađite prečace i koristite ih! Možete rabiti markere različitih boja za uzastopne korake ove konstrukcije.

1. korak: Konstruirajte tri glavne kružnice tako da svaka bude okomita na druge dvije. Stvorili ste osam jednakostraničnih trokuta za pločice sfere. Svaki od ovih trokuta ima tri prava kuta.
2. korak: Pronađite središta stranica trokuta. Spojite sredinu svake stranice s njezinim nasuprotnim vrhom. Sad imate šest pravokutnih trokuta u svakom od jednakostraničnih trokuta.
3. korak: U svakom pravokutnom trokutu konstruirajte simetrale kutova i označite njihova sjecišta.
4. korak: Uporabite svijetli marker za spajanje svakog para susjednih sjecišta simetrala kutova. Spojite svako sjecište s još tri sjecišta. Vaše popločavanje je gotovo!

1. Koje vrste sfernih mnogokuta nalazite u svojem završnom popločavanju?
2. Koliko ste od svake vrste mnogokuta uporabili za popločavanje sfere?
3. Koje se vrste mnogokuta susreću u svakom vrhu popločavanja? Koliko?

4. radni listić: Kako možete upisati Platonova tijela u sferu?

Vrijeme rada: 2 školska sata

Platonova[2] tijela su poliedri čije su sve strane sukladni pravilni mnogokuti i koji se sastaju u svakom vrhu na isti način. Čvrsto tijelo je upisano u sferu ako svaki njegov vrh leži na površini sfere.

- Izgradite pet Platonovih tijela tako da točno stanu unutar sfere.
- Ukrasite svoju učionicu tako što ćete objesiti svoja uspisana Platonova tijela.

Mreže u sljedećim konstrukcijama trebaju biti na tvrdom papiru. One se mogu konstruirati ručno, ali ih se mnogo lakše i brže konstruira korištenjem računalnog programa kao što je Sketchpad te ih se nakon toga isprinta.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako možete upisati Platonova tijela u sferu?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstruiranje tetraedra

1. korak: Napravite mrežu tetraedra s duljinom svake stranice približno $16,59$ cm.
2. korak: Izrežite mrežu i sastavite tijelo.

Konstruiranje heksaedra ili kocke

1. korak: Napravite mrežu heksaedra s duljinom svake stranice približno $10,16$ cm.
2. korak: Izrežite mrežu i sastavite tijelo.

Konstruiranje oktaedra

1. korak: Napravite mrežu oktaedra s duljinom svake stranice približno $14,38$ cm.
2. korak: Izrežite mrežu i sastavite tijelo.

[2]**Johannes Kepler** (1571. - 1630.) je poznati njemački matematičar i astronom. Pokušao je dokazati da sfere upisane i okolo opisane Platonovim tijelima opisuju orbite planeta oko Sunca. Kasnije je Kepler shvatio da su putanje planeta eliptične. Pročitajte o Keplerovim idejama i opišite ih pobliže.

Konstruiranje dodekaedra

1. korak: Napravite mrežu dodekaedra s duljinom svake stranice približno $7,24$ cm.

2. korak: Izrežite mrežu i sastavite tijelo.

Konstruiranje ikosaedra

1. korak: Napravite mrežu ikosaedra s duljinom svake stranice približno $10,67$ cm.

2. korak: Izrežite mrežu i sastavite tijelo.

1. Usporedite svoje metode za konstruiranje različitih Platonovih tijela.

2. Zamislite da možete napuhati svoja upisana Platonova tijela dok ne postanu sfernog oblika. Usporedite svoja tijela ravnih stranica s njihovim "napuhanim" parnjacima. Pronađite neke sličnosti i razlike među njima.

5. radni listić: Kako možete "uvećati" Platonova tijela i popločati sferu?

Vrijeme rada: 45 - 80 minuta

Postoji pet popločavanja sfere koja koriste točno jednu vrstu pravilnog mnogokuta kao pločicu. Ako zamislite napuhavanje Platonovih tijela dok ne postanu sferna, dobit ćete ideju o tome kako izgledaju. Svako popločavanje nazivamo prema odgovarajućcem čvrstom tijelu: sferni oktaedar, sferni heksaedar ili kocka, sferni tetraedar, sferni dodekaedar i sferni ikosaedar.

- Konstruirajte svih pet sfernih Platonovih tijela na svojoj sferi.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako možete "uvećati" Platonova tijela i popločati sferu?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija na sferi

Koristite drugu boju za svaku konstrukciju. Umjesto konstruiranja svih pet tijela na istoj sferi, možda ćete htjeti konstruirati prva tri na paru prozirnih folija i zadnja dva izravno na sferi ili na drugi par prozirnih folija.

1. korak: Sferni oktaedar: Nacrtajte tri glavne kružnice tako da je svaka glavna kružnica okomita na druge dvije. Ove tri glavne kružnice tvore sferni oktaedar.

2. korak: Sferni heksaedar ili kocka: Konstruirajte težište (sjecište težišnica) svakog trokuta u vašem sfernom oktaedru. Spojite svako težište s tri susjedna težišta. Rezultat je sferni heksaedar ili kocka.

3. korak: Sferni tetraedar: Odaberite jednu stranu sferne kocke i označite dva dijagonalno nasuprotna vrha. Sada pogledajte suprotnu stranu i označite dva vrha koji ne leže na glavnoj kružnici prolazeći kroz već označene točke. Konačno, spojite svaku točku koju ste označili s druge tri. Konstruirali ste sferni tetraedar.

4. korak: Sferni dodekaedar: Uzmite jedan brid sferne kocke. (Ovaj brid trebao bi mjeriti približno $70,5°$.) Konstruirajte sferni jednakostranični trokut koji ima ovu stranicu. Konstruirajte težište ovog jednakostraničnog trokuta. Koristite olovku druge boje za nacrtati tri luka koji povezuju vrhove trokuta s njegovim težištem. Ovo su tri brida sfernog dodekaedra. Bilo koja dva susjedna brida ovog popločavanja imaju kut od $120°$ između sebe. Koristeći ove informacije i imajući na umu

da su svi bridovi iste duljine, završite konstruiranje strana sfernog dodekaedra. Nastavite s ovim procesom na sferi za konstrukciju ostalih strana.

5. korak: Sferni ikosaedar: Konstruirajte okomite simetrale na svaki brid sfere dodekaedra tako da se sijeku u središtu svake strane sfernog dodekaedra. Vi ste konstruirali sferni ikosaedar.

Deveti problem: polarni trokuti

1. radni listić: Kako se konstruira polarni trokut?

Vrijeme rada: 20 - 30 minuta

Za svaki trokut na sferi postoji srodni trokut koji se naziva polarni trokut. U ovom listiću konstruirat ćemo takav trokut.

- Nacrtajte sferni trokut. Svaka stranica vašeg sfernog trokuta dio je glavne kružnice koja ima dvije odgovarajuće polne točke. Za svaku stranicu vašeg sfernog trokuta, odaberite polnu točku koja je na istoj strani glavne kružnice kao i sam trokut. Spojite ove tri polne točke kako biste konstruirali polarni trokut.
- Koja zanimljiva svojstva možete otkriti o svom sfernom trokutu i njegovom odgovarajućem polarnom trokutu?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako se konstruira polarni trokut?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte trokut. Označite njegove vrhove A, B i C.
2. korak: Promotrimo stranicu AB i glavnu kružnicu kroz stranicu AB. Primijetite da glavna kružnica AB dijeli cijelu sferu na dvije polusfere. Jedna od ovih polusfera sadrži trokut $\triangle ABC$. Druga polusfera je prazna. S glavnom kružnicom AB kao ekvatorom nacrtajte polarnu točku koja leži u polusferi koja sadrži trokut. Označite ovu polarnu točku C^*.
3. korak: Ponovite korak 2. za stranicu BC. Označite polarnu točka A^*.
4. korak: Ponovite korak 2. za stranicu CA. Označite polarnu točka B^*.
5. korak: Spojite točke A^*, B^* i C^*. Upravo ste konstruirali polarni trokut $\triangle A^*B^*C^*$ trokuta $\triangle ABC$.

1. Konstruirajte polarni trokut trokuta $\triangle A^*B^*C^*$. Što ste pronašli?

2. radni listić: Kako su kutovi i stranice povezani u paru polarnih trokuta?

Vrijeme rada: 20 - 45 minuta

U prethodnom listiću naučili ste kako konstruirati par polarnih trokuta.

- Istražite odnos između kutova i stranica trokuta i njemu odgovarajućeg polarnog trokuta.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Kako su kutovi i stranice povezani u paru polarnih trokuta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte sferni trokut $\triangle ABC$.
2. korak: Konstruirajte njegov polarni trokut $\triangle A^*B^*C^*$.
3. korak: Izmjerite sve kutove jednog trokuta.
4. korak: Izmjerite sve stranice drugog trokuta. i
5. korak: Odaberite jedan od kutova koji ste mjerili u prvom trokutu. Pronađite odgovarajući kut u drugom trokutu. Sada pronađite stranice drugog trokuta koja je nasuprot ovom odgovarajućem kutu. Dodajte mjeru kuta iz prvog trokuta mjeri stranice iz drugog trokuta.
6. korak: Ponovite korak 5. za druga dva kuta u prvom trokutu.

1. Nagađajte o odnosu stranica i kutova u parovima polarnih trokuta.
2. Ponovite konstrukciju i mjerenja s trokutom različitog oblika. Je li se vaša pretpostavka još drži?

3. radni listić: Što je posebno u visinama polarnih trokuta?

Vrijeme rada: 25 - 40 minuta

Visina trokuta je pravac koji prolazi vrhom trokuta i okomit je na stranicu nasuprotnu vrhu.

- Istražite neka svojstva triju visina trokuta u ravnini.
- Konstruirajte i istražite tri visine sfernog trokuta i tri visine odgovarajućeg polarnog trokuta.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Što je posebno u visinama polarnih trokuta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

Nacrtajte trokut i njegove tri visine.

1. Što možete reći o tri visine? Zabilježite svoju pretpostavku.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte sferni trokut $\triangle ABC$ i njegov polarni trokut $\triangle A^*B^*C^*$.
2. korak: Nacrtajte tri visine trokuta $\triangle ABC$.
3. korak: Nacrtajte tri visine trokuta $\triangle A^*B^*C^*$.

1. Zabilježite sve svoje pretpostavke o visinama sfernog trokuta i visinama njemu odgovarajućeg polarnog trokuta.
2. Je li korak 3. u konstrukciji bio neophodan?

4. radni listić: Što je posebno kod simetrala kutova u trokutu i za okomite simetrale njegovih stranica?

Simetrala stranice trokuta okomica je koja prolazi kroz njezino polovište. Simetrala kuta u trokutu je pravac koji prolazi kroz jedan od vrhove trokuta i raspolavlja kut u tom vrhu.

- Istražite svojstva simetrala kutova i simetrala stranice ravninskih i sfernih trokuta.
- Istražite ta svojstva u sfernim trokutima i njima odgovarajućim polarnim trokutima.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Što je posebno kod simetrala kutova u trokutu i za okomite simetrale njegovih stranica?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte trokut $\triangle ABC$ i tri simetrale njegovih stranica. Označite njihovu točku konkurencije P.
2. korak: Izmjerite udaljenosti od točke P do svakog od vrhova A, B i C.
3. korak: Nacrtajte tri simetrale kutova u trokutu $\triangle ABC$. Označite njihovu točku konkurencije Q.
4. korak: Izmjerite udaljenosti od točke Q do svake od stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$.

1. Središte kružnice upisane u trokut zove se središte trokutu upisane kružnice. Središte kružnice opisane oko trokuta zove se središte trokutu opisane kružnice. Konstruirajte upisanu i opisanu kružnicu trokutu ABC.
2. Objasnite vezu između središta upisane kružnice, središta opisane kružnice, simetrala kutova i simetrala stranica trokuta.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte sferni trokut $\triangle ABC$ i njegov polarni trokut $\triangle A^*B^*C^*$.
2. korak: Nacrtajte tri simetrale kutova u trokutu $\triangle ABC$. Označite njihovu točku konkurencije Q.

1. Istražite ulogu ovih simetrala kutova u polarnom trokutu $\triangle A^*B^*C^*$. (Produžite simetrale kutova ako je potrebno.)

2. Opišite točku Q i njen odnos prema trokutu $\triangle ABC$ i trokutu $\triangle A^*B^*C^*$.

3. Točkom Q nacrtajte trokutu $\triangle ABC$ upisanu kružnicu i opisanu kružnicu polarnog trokuta $\triangle A^*B^*C^*$.

5. radni listić: Što je posebno kod linija kroz polovišta stranica trokuta?

Vrijeme rada: 35 - 50 minuta

Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice trokuta.

- Istražite težišnice trokuta u ravnini i na sferi.
- Konstruirajte i istražite glavne kružnice koje povezuju polovišta stranica sfernog trokuta s odgovarajućim polovištima stranica njegovog polarnog partnera.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Što je posebno kod linija kroz polovišta stranica trokuta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Nacrtajte trokut $\triangle ABC$ i označite polovište svake stranice.
2. korak: Spojite svako polovište stranice sa suprotnim vrhom trokuta kako biste dobili tri težišnice trokuta.

1. Što možete reći o ove tri težišnice? Napišite svoju pretpostavku.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Nacrtajte sferni trokut $\triangle ABC$ i konstruirajte tri njegove težišnice. Vrijedi li vaša pretpostavka o težišnicama trokuta u ravnini i za sferne trokute?
2. korak: Konstruirajte polarni trokut $\triangle A^*B^*C^*$ trokuta $\triangle ABC$.
3. korak: Označite polovište svake stranice trokuta $\triangle A^*B^*C^*$.
4. korak: Nacrtajte glavnu kružnicu koja prolazi polovištima stranica AB i A^*B^*. Učinite isto za stranice BC i B^*C^* i za stranice CA i C^*A^*.

1. Glavna kružnica koja prolazi polovištima dviju odgovarajućih stranica u paru polarnih trokuta naziva se *srednjepolarnom*. Što možete reći o tri srednjepolarne kružnice za par polarnih trokuta? Objasnite svoju pretpostavku.

Usporedite ravninu i sferu

1. Jesu li polovišta stranica trokuta u ravnini i na sferi jednaka? Po čemu se razlikuju?

Deseti problem: reflektiranje na sferi

1. radni listić: Što se događa s točkom ako se reflektira uzastopno preko tri okomite velike kružnice?

Vrijeme rada: 20 - 45

- Konstruirajte tri glavne kružnice na sferi tako da svaka od njih je okomita na druge dvije. Istražite što se događa s točkom kada je uzastopno reflektirate preko svake od tri glavne kružnice.
- Što se događa s trokutom kada ga reflektirate uzastopno preko tri okomite glavne kružnice?

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Što se događa s točkom ako se reflektira uzastopno preko tri okomite velike kružnice?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija u ravnini

1. korak: Konstruirajte tri glavne kružnice tako da svaka bude okomita na druge dvije. Označite ove glavne kružnice a, b i c.
2. korak: Nacrtajte točku P koja ne leži ni na jednoj od tri glavne kružnice. Reflektirajte ovu točku P preko glavne kružnice a i njezinu sliku označite točkom Q. Reflektirajte točku Q preko glavne kružnice b i označite njezinu sliku točkom R. Na kraju, reflektirajte točku R preko glavne kružnice c i njezinu sliku označite točkom P'.

1. Izmjerite udaljenost između točaka P i P' i opišite svoje rezultate.
2. Odaberite drugi redoslijed za tri glavne kružnice, recimo b, c, a. Reflektirajte točku P preko glavnih kružnica b, c i a tim redom. Označite krajnju točku S. Izmjerite udaljenost između točaka P i S. Što nalazite?
3. Odaberite drugu točku i pronađite njezinu sliku/točku nakon iste tri refleksije. Opišite svoje rezultate.
4. Rezimirajte svoje nalaze iz ovih konstrukcija.

2. radni listić: Koje oblike možete stvoriti ako reflektirate točku preko stranica oktanta?

Vrijeme rada: 20 - 50 minuta

Možda ste prije reflektirali oblike koristeći pravce kao svoja zrcala. Slijedite isti postupak za reflektiranje oblika preko glavne kružnice na sferi. U ovom listiću uporabitit ćete tri luka oktanta kao zrcala za preslikavanje u tri refleksije. Rezultati od ove refleksije pokazuju zanimljivo svojstvo oktanta.

Za rad će vam trebati Sketchpadova datoteka `Koje oblike možete stvoriti ako reflektirate točku preko stranica oktanta?.gsp`. i model sfere s ostalim priborom.

Konstrukcija na sferi

1. korak: Konstruirajte oktant. Označite njegove vrhove K, L i M.
2. korak: Nacrtajte točku O unutar trokuta $\triangle KLM$ i spojite ovu točku s tri vrha K, L i M.
3. korak: Reflektirajte trokut $\triangle KLO$ preko stranice KL kako biste kreirali trokut $\triangle KLP$. Zatim reflektirajte trokut $\triangle LMO$ preko stranice LM kako biste kreirali trokut $\triangle LMQ$. Na kraju, reflektirajte trokut $\triangle MKO$ preko stranice MK za kreirati trokut $\triangle MKR$.

1. Izmjerite kutove u vrhovima K, L i M. Što možete reći o zbroju mjera kutova u ova tri vrha?
2. Je li PQR trokut ili je $PLQMRK$ šesterokut?
3. Izmjerite kutove u vrhovima P, Q i R. Koliki je zbroj ove tri mjere kutova?
4. Izmjerite dijelove na koje točka K dijeli stranicu PR. Učinite isto za točku L i stranicu QR i točku M i stranicu RQ. Što ste pronašli? Kakve su točke K, L i M u trokutu $\triangle PQR$?

Dodatak B: Uspoređivanje ravninske i sferne geometrije

Ovdje uspoređujemo/kompariramo pojmove ravninske i sferne geometrije.

Spomenimo da u ravnini ne postoje pojmovi koji bi odgovarali *središtu, polumjeru sfere* na čijoj površini gradimo geometriju.

Svakoj točki na sferi odgovara *dijametralno suprotna* ili *antipodalna točka*. U ravnini nema takvog pridruživanja jedne točke k drugoj.

Geometrija u ravnini	Geometrija na sferi
točka	točka
pravac	glavna kružnica
kružnica	mala kružnica
Dužina je dio prvaca omeđen dvjema točkama.	Na sferi odgovara dužini dio luka glavne kružnice omeđen dvjema točkama.
Dužine u ravnini mjerimo jedinicama mjere dužina: mm, cm, dm, m, km ... Mjerni broj dužine izmjerene jedinicom mjere dužina zovemo *duljinom* Govorimo i o *udaljenosti* dviju točaka A i B. *Kut* između dva pravca koja se sijeku zovu se *sukuti* i *vršni* kutovi.	Lukove glavnih kružnica mjerimo na dva nečina: 1.) dužinskom mjerom: mm, cm, dm, m, km ... Lukovi jednakih duljina zavise još i o polumjeru sfere. Što je polumjer manji, lukovi su jače zakrivljeni pa se ne poklapaju. Luk zadan u dužinskoj mjeri bit će tek onda potpuno određen ako poznajemo polumjer sfere. 2.) središnjim kutom koji pripada luku glavne kružnice, tj. kutnoj mjeri. Pod *kutom* dviju glavnih kružnica razumijevamo kut između tangenata u njihovom sjecištu ili kut ravnina tih glavnih kružnica.

Kružnica je geometrijsko mjesto točaka (lokus) koje su sve jednako udaljene od neke čvrste točke.	*Mala* i *glavna kružnica* geometrijsko je mjesto točaka jednake sferne udaljenosti od jedne čvrste točke. Čvrstu točku zovemo *sfernim središtem* male (ili glavne) kružnice, a luk glavne kružnice koji veže čvrstu točku s bilo kojom točkom male (ili glavne) kružnice zovemo *sfernim polumjerom* te kružnice. Sferni je polumjer glavne kružnice *kvadrant*, tj. četvrtina opsega kružnice, a sferni polumjer svake male kružnice je manji od kvadranta.
Jednom točkom izvan zadanog pravca prolazi samo jedna usporednica s tim pravcem (aksiom o usporednosti). Dva pravca sijeku se uvijek u samo jednoj točki.	Dvije se glavne kružnice uvijek raspolavljaju. Dokaz: presječnica ravnina obiju glavnih kružnica prolazi središtem sfere, pa je promjer sfere dio te presječnice. Prema tome glavne kružnice se sijeku u dvije dijametralno suprotne točke
Dva pravca okomita na trećem jesu usporedna (aksiom).	Dvije glavne kružnice okomite na trećoj glavnoj kružnici sijeku se u sfernom središtu treće kružnice.
Pravac je određen s dvjema točkama (aksiom).	Glavna kružnica određena je dvjema točkama koje nisu dijametralno suprotne. Dokaz: ravnina glavne kružnice mora prolaziti dvjema zadanim točkama i središtem sfere. Dakle, trima točkama, pa je time potpuno određena. Naprotiv, kroz dvije dijametralno suprotne točke prolazi beskonačno mnogo glavnih kružnica.
Svaki pravac je neograničen.	Svaka je glavna kružnica ograničena.
Iz svake točke ravnine može se opisati kružnica sa svakim polumjerom.	Polumjer kružnica na sferi ne može biti veći od polumjera sfere.
Od točke A do točke B pravca može se stići gibanjem samo u jednom smjeru.	Od točke A do točke B glavne kružnice može se stići gibanjem u dva suprotna smjera.
Od tri točke pravca samo jedna mora ležati između drugih dviju (aksiom).	Od tri točke na glavnoj kružnici svaka leži između ostalih dviju točaka.

Iz koje god čvrste točke može se na zadani pravac spustiti samo jedna okomica.	Svakom točkom koja nije sferno središte zadane glavne kružnice prolazi samo jedna glavna kružnica okomitio na zadanu glavnu kružnicu. Naprotiv, svaka glavna kružnica koja prolazi sfernim središtem neke zadane glavne kružnice okomita je na toj glavnoj kružnici.
Dva pravca dijele ravninu na četiri neograničena dijela. Po dva od njih pripadaju vršnim kutovima, a po dva pripadaju sukutima.	Dvije glavne kružnice dijele sferu na četiri dijela, na četiri *sferna dvokuta*. Po dva pripadaju vršnim kutovima i zovu se *vršni dvokuti*, a po dva pripadaju sukutima te se zovu *susjedni dvokuti*. Vršni dvokuti su jednaki, susjedne dijeli jedna zajednička glavna polukružnica te se nadopunjuju na polusferu. Točke u kojima se sijeku glavne kružnice koje omeđuju dvokut zovu se *vrhovi*. Osim toga, dvokut ima dva jednaka kuta i dvije stranice koje su polukružnice.

Prilagodimo i prenesimo neke pojmove i odnose Euklidske geometrije iz ravnine na geometriju sfere.

- Ako dvije točke A i B nisu dijametralno suprotne one su spojene dvjema različitim lukovima iste glavne kružnice.
- Pod sfernom udaljenosti dviju točaka razumijevamo kraći luk glavne kružnice omeđene tim točkama.
- Ako točka nije sferno središte zadane glavne kružnice tada njome prolaze dva različita luka iste glavne kružnice, okomito na zadanu glavnu kružnicu.
- Sfernu udaljenost točke od zadane glavne kružnice razumijevamo kraći luk glavne kružnice okomite na zadanu glavnu kružnicu, omeđen točkom i sjecištem tih glavnih kružnica.
- *Simetrala luka* $\widehat{AB}$ *glavne kružnice* jest geometrijsko mjesto točaka (lokus) jednake sferne udaljenosti od krajnjih točka A i B toga luka.

Simetrala je glavna kružnica koja prolazi polovištem luka $\widehat{AB}$ i stoji njemu okomito

- *Simetrala kuta dviju glavnih kružnica* jest geometrijsko mjesto točaka (lokus) jednakih sfernih udaljenosti do glavnih kružnica koje čine taj kut. To je glavna kružnica koja prolazi vrhom kuta te raspolavlja taj kut.
- Pod *tangentom* sporedne/male kružnice razumijevat ćemo glavnu kružnicu koja s malom kružnicom ima samo jednu zajedničku točku - *dirali šte*.
- Tangenta je u diralištu okomita na pripadni sferni radijus male kružnice.
- Sferni polumjer svake male kružnice je manji od kvadranta glavne kružnice.
- Ako sferna udaljenost neke točke od sfernog središta male kružnice *manja, jednaka,* odnosno *veća* od sfernog polumjera te male kružnice tada ta točka leži *unutar, na obodu,* odnosno *izvan* te kružnice.
- Iz čvrste točke izvan male kružbnice uvjek se mogu povući dvije tangente na malu kružnicu.
- Lukovi obiju tangenata omeđeni čvrstom točkom i diralištima jednaki su.
- Pod *tetivom* male kružnice razumijevamo luk glavne kružnice koji spaja dvije točke oboda te kružnice.

Premda je sustav aksioma po Euklidu nepotpun, iako je taj sustav tek potpuno izgradio **Hilbert** (1862. - 1943.).

Euklid je sagradio geometriju na temelju 23 definicije, 5 postulata i 5 aksioma.

Navest ćemo ovdje svih pet Euklidovih postulata:

I.: *Zahtijeva se da se od svake točke k svakoj točki uvijek može povući pravac.*

II.: *I da se svaki pravac može neograničeno produljiti.*

III.: *I da se oko svakog središta može opisati kružnica sa svakim polumjerom.*

IV.: *I da su svi pravi kutovi jednaki.*

V.: *I da se uvijek kad pravac sjekući se s drugim dvjema pravcima s ovima na istoj strani gradi unutarnje kutove čiji je zbroj manji od dva prava kuta, tada se ona dva pravca, kad se produlje u beskonačnost, moraju sjeći na onoj strani na kojoj leže kutovi, čiji je zbroj manji od dva prava kuta.*

Dva su aksioma *ekvivalentna* ako se jedan može dokazati iz drugoga i obrnuto. Euklidovom V. postulatu ekvivalentan je *aksiom o usporednosti* koji glasi: *točkom koja leži izvan nekog pravca može se povući samo jedna usporednica s tim pravcem.*

Želimo li izgraditi *neeuklidsku geometriju* tada moramo umjesto aksioma usporednosti postaviti njemu suprotni aksiom:

A) *Točkom koja leži izvan zadanog pravca može se povući beskonačno mnogo usporednica s tim pravcima.*
Ili

B) *Točkom koja leži izvan zadanog pravac ne može se uopće povući paralela s tim pravcem.*

Ovaj je aksiom u suprotnosti s aksiomom usporednosti.

Lako razabiremo da na *sferi ne vrijedi aksiom usporednosti* jer se svake dvije glavne kružnice uvijek sijeku.

Dakle, *sferna geometrija jest neeuklidska geometrija.* To je jedna od *Riemannovih geometrija.*

Dodatak C: Popis Sketchpadovih datoteka za rad

Ovdje se nalazi popis Sketchpadovih datoteka za rad.

Radni listići

Elementarni poučci

1. Brianchonov poučak
2. Cevin poučak
3. Desarguesov poučak
4. Gusić - Mladinićev poučak
5. Menelajev poučak
6. Papov poučak
7. Pascalov poučak
8. Ptolemejev poučak

Ostale datoteke

U mapi *Ostale datoteke* nalaze se 22 Sketchpadove datoteke za rad.

1. Anna datoteka
2. Dijeljenje kvadrata
3. Dvije zrake
4. Formule
5. KKK uvjet 01
6. KKK uvjet
7. Koncentrične kružnice
8. Kružnice
9. Lenárt-odgovor
10. Omjer
11. Popločavanje
12. Poučci
13. Površina
14. Pravci

15. Pravokutni trokut
16. Presjek pravaca
17. Sličnost
18. Tri pravca
19. Trokut
20. Trokuti upisani
21. Udaljenost
22. Zbroj kutova

Crtanje, mjerenje, računanje i priručnik

U mapi *Crtanje, mjerenje, računanje i priručnik* nalaze se 3 Sketchpadove datoteke za rad, pdf datoteka Sketchpad-priručnik i 2 doc datoteke u kojima se nalaze upute za rad.

1. Abeceda Sketchpada i konstrukcije elementarnih geometrijskih likova (1).gsp,
2. Abeceda Sketchpada i konstrukcije elementarnih geometrijskih likova (2).gsp,
3. Abeceda Sketchpada i konstrukcije elementarnih geometrijskih likova (1).doc,
4. Abeceda Sketchpada i konstrukcije elementarnih geometrijskih likova (2).doc,
5. Sketchpad-priručnik.pdf,
6. ZadatakKosSferTrokut.gsp

Literatura

1. Abbott, E. A. (1884): *Flatland*, London
2. Banks, R. B. (1998): *Towing Icebergs, Falling Dominoes, and Other Adventures in Applied Mathematics*, Princenton University Press, Princeton
3. Banks, R. B. (1999): *Slicing Pizzas, Racing Turles, and Other Adventures in Applied Mathematics*, Princenton University Press, Princeton
4. Bazilev, V. T., Duničev, K. I., Ivanickaja, V. P., Kuznecova, G. B., Maiorov, V. M. i Skopec, Z. A. (1980): *Sbornik zadač po geometrii*, Prosvecenie, Moskva
5. Bronstein, I. N., Semendjajev, K. A., Musiol, G. i Mühlig (2004): *Matematički priručnik*, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb
6. Burger, D. (1957): *Bolland*, 's-Gravehage
7. Church, A. E. (1864): *Elements of Descriptive Geometry*, American Book Company, New York
8. Dadić, Ž. (2015): *Povijest znanosti i prirodne filozofije u Hrvata, (s osobitim obzirom na egzaktne znanosti)*, Knjiga I. Srednji vijek, Izvori, Zagreb
9. Dalle, A. (1988): *2000 Théorèmes et Problèmes de Géométrie avec Solutions*, onzième édition, Éditions de la procure Namur, Seilles
10. de Villiers, M. (2021):*Dokazivanje i dokaz u nastavi matematike pomoću Sketchpada i drugi tekstovi*, HUNI, Zagreb
11. Ebbott, E. A., Bjurger, D. (1976): *Flatlandija, Sferlandija*, Izdateljstvo Mir, Moskva
12. Einstein, A., Infeld, L. (1967): *The Evolution of Physics*, Touchstone
13. Gemechu, D. (2017): *The effect of the Geometer's Sketchpad on the academic achievement of students: the case of Bedele secondary and preparatory shool*, International journal of engineering sciences & reserch technology, 6(5), 29-39. doi:10.5281/zenodo.57159
14. Gleizer, G. I. (2007): *Povijest matematike za školu*, Školske novine & HMD, Zagreb
15. Gusić, J. i Mladinić (2001): *Tangencijalni četverokut*, Poučak 7, listopad 2001., str. 46. - 53.
16. Gusić, J., Mladinić, P. i Pavković, B. (2003): *Matematika 2 - udžbenik sa zbirkom zadataka za prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb
17. Guven, B. and Karatas, J. (2009): *Students discovering spherical geometry using dynamic geometry softvere*, International Journal of Mathematical Education, Vol 40, No. 3, 331-340
18. Hanžek, Z. (1971): *Sferna trigonometrija*, Tehnička knjiga, Zagreb

19. Igaly, G. i dr. (2015): *Hrvatsko matematičko nazivlje*, Institut za hrvatski jezik i jezikoslovlje, Zagreb
20. Justinijanović, J. (1956): *Sferna trigonometrija*, Tehnička knjiga, Zagreb
21. Katz, V. J. (1998): *A History of mathematics: an introduction,*, Addison Wesley Longman, Inc., Reading
22. Keller, F. J., Gettys, W. E., Skove, M. J. (1992): *Physics: Classical and Modern*, McGraw-Hill College, New York
23. Kittel, C., Knight, W. D., Ruderman, M. A. (1982): *Mehanika (Berkeley Physics Course, Vol. 1)*, Tehnička knjiga, Zagreb
24. Kutepov, A., Rubanov, A. (1975): *Problems in Geometry*, Mir publishers, Moskva
25. Lanza, R., Meloni, A. (2006): *The Earth's Magnetism - An Introduction for Geologists*, Springer, Berlin Heidelberg New York
26. Lénárt, I. (1996): *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere - Investigations in Planar and Spherical Geometry*, Key Curriculum Press, Emeryville
27. Lénárt, I. (2020): *The Algebra of Projective Spheres on Plane, Sphere and Hemisphere*, Journal of Applied Mathematics and Physics, 8, 2020, pp. 2286-2333
28. Lénárt, I. (2021): *Comparative Geometry in distance education*, Journal of Physics: Conferences Series, 1840(2021)012003
29. Majcen, J. (1920): *Geometrija za više razrede srednjih učilišta*, Kraljevska Hrvatsko-Slavonska zemaljska vlada, Zagreb
30. Mladinić, P. (1996): *Sferna geometrija i Eulerova formula*, Bilten 5. državnog susreta, Kraljevica
31. Mladinić, P. (2000): *Dinamična geometrija: The Geometer's Sketchpad*, Poučak 4, Zagreb, prosinac 2000.
32. Mladinić, P. (2003): *Matematika oktatás Horvátországban, XXXXIII. Rátz László vándorgyülés*, július 2003.
33. Mladinić, P. (2004): *Regulaere polygoner*, Matematik gasinet, september 2004, no. 15
34. Mladinić, P. (2011): *Grafovi trigonometrijskih funkcija: može li drukčije?*, Poučak 46, lipanj 2011.
35. Mladinić, P., N. Radović N. i Martinić, I. (2016): *Nacrtna geometrija u IPAQ Peta projektu - Mongeov postupak - Aksonometrija*, V. gimnazija, Zagreb
36. Mladinić, P. i Radović N. (2016): *Nacrtna geometrija *** Perspektiva ** Mongeov postupak * Aksonometrija*, Proven grupa, Zagreb
37. Mladinić, P. and Radović N. (2019): *Descriptive Geometry *Perspective *Monge's Procedure *Axonometry*, Proven grupa, Zagreb
38. Mladinić, P. i Radović N. (2017): *Geometrija prirode*, Proven grupa, Zagreb
39. Mladinić, P. and Radović N. (2019): *The Geometry of Nature*, Proven grupa, Zagreb
40. Modenov, P. S. (1957): *Sbornik zadač po specialnom kursu elementarnoj matematiki*, Sovetskaja Nauka, Moskva
41. O'Neill, B. (1971): *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, Inc., New York and London
42. Pavković, B. i Veljan, D. (1995): *Elementarna matematika 2.*, Školska knjiga, Zagreb

43. Pogorelov, A. (1987): *Geometry.*, Mir Publishers, Moscow

44. Polya, G. (2003): *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb

45. Posamentier, A. and Lehmann IE. (2012): *The Secrets of Triangles: A Mathematical Jouney*, Prometheus Books, New York

46. Reynolds, B. P. and Fenton W. E. (2006): *College Geometry Using The Geometer's Sketchpad*, Key College Publishing, Emeryville

47. Rybak A. i Lénárt I. (2013): *Trzy Swiaty Geometrii*, Wydawnictwo Dla Szkoly, Biełsko-Biała

48. Rybak A. and Lénárt I. (2017): *Hungarian perspectives. Comparative Geometry in Primary and Secondary School The Pedagogy of Mathematics* Johannesburg: MISTRA and Real African Publishers ed, P. Webb and N. Roberts, 107-124

49. Savin, A. P. (1985): *Enciklopedičeskii slovar junogo matematika*, Pedagogika, Moskva

50. Scher, D., Steketee, S., Kunkel, P. and Lyublinkaya, I. (2005): *Exploring Precalculus with The Geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press, Emeryville

51. Serway, R. A., Jewett, J. W. (2014): *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*, Cengage, Hempshire

52. Sharp, J. M. and Heimer, C. (2002): *What Happens to Geometry on a Sphere?*, Mathematics teaching in teh middle school, NCTM, Vol 8, No. 4 December 2002, 182 - 188

53. Smith, K. E. (1958): *History of Mathematics, vol. III,* Dover Publications, Inc, New York

54. Smith, K. E. (1959): *A Source Book in Mathematics,* Dover Publications, Inc, New York

55. Soto-Johnson, H. and Bechthold, D. (2004): *Tessellating the Sphere with Regular Polygons*, Mathematics Teacher, NCTM, Vol 97, No. 3 March 2004, 165 - 167

56. Tanton, J. (2005): *Encyclopedia of Mathematics*, Facts On File, Inc, New York

57. Zahradnik, K. i Segen, D. (1889): *Geometrijska vježbenica za više razrede srednjih učilišta, II.dio*, Kraljevska Hrvatsko-Slavonsko-Dalmatinska zemaljska vlada, Zagreb

58. Weisstein, E. W. (2009): *CRC Encyclopedia of Mathematics,*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton

59. Whittlesey, M. A. (2020): *Spherical Geometry and Its Applications*, CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton

60. *** (2020): *Learning and Teaching Mathematics*, No. 29, 2020, pp. 39-45

61. **** (1989): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, NCTM, Reston

62. *** (1985): *Matematičeskija enciklopedija*, Sovetskaja enciklopedija vol. 1 - 5, Moskva

63. *** (1988): *Matematičeskij enciklopedičeskij slovar*, Sovetskaja enciklopedija, Moskva

64. *** (2000): *Standardi za nastavu matematike*, HMD, Zagreb

65. *** (2015): *Spherical Geometry - A guide for teachers (Years 11-12)*, Australian Mathematical Sciences Institute, Melbourne

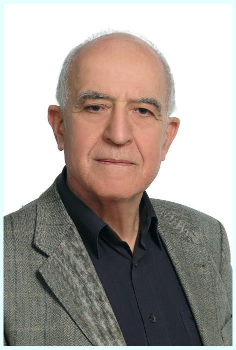
66. *** (2018): *Hrvatska tehnička enciklopedija*, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, Zagreb

67. *** URL: http://dransfeld.knobelauflauf.de/0000_archiv/archiv-gaussturm/1821_gauss-vermessung.html, pristup 23.09.2022.

68. *** URL: https://en.wikipedia.org/wiki/BOOMERanG_experiment, pristup 23.09.2022.

69. *** URL: https://www.youtube.com/watch?v=3EOpHHjv5g8&t=0s, pristup 23.09.2022.

Bilješka o autorima



István Lénárt rođen je 1947. godine u Budimpešti, Mađarska. Završio je sveučilišni studij od 1965.-1970. godine Sveučilišta Eötvös Loránd na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu.

Matematičkim istraživanjima bavi se od 1969. godine. Glavna područja su mu: euklidska i neeuklidska geometrija, geometrijska algebra, teorija brojeva.

U području matematičkog obrazovanja započeo je 1980. godine razvoj edukativnog projekta pod nazivom Komparativna geometrija ravnine i sfere, a od 2009. godine vodi studij na daljinu s akreditacijom Ministarstva za domaće i strane studente. Ima nekoliko patenata koji se odnose na skup alata za podučavanje *Lénártove sfere*. Prvu verziju kompleta distribuirala je mađarska tvrtka TANÉRT 1986. godine, a poboljšanu verziju proizvela je kalifornijska tvrtka Key Curriculum Press 1996. godine.

Od 1990. godine predaje na ELTE Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, a od 1996. na ELTE Učiteljskom i predškolskom fakultetu.

Objavio je brojne članke i nekoliko knjiga sam ili s koautorima iz područja matematičkog obrazovanja i matematičkih istraživanja na mađarskom, engleskom, talijanskom, poljskom i njemačkom jeziku.

Prvi je napisao dulji opis komparativne geometrije na engleskom jeziku. Napisao ga je 1990. – 91., a objavljen je 1993.: Alternative Models on The Drawing Ball u ediciji *Educational Studies in Mathematics, Springer Netherlands, Vol. 24, No. 3 (1993), pp. 277-312 (36 pages)*

Napisao je sljedeće knjige: Neeuklidske pustolovine na Lénártovoj sferi (1996., Key Curriculum Press), mađarski prijevod: Sík és gömb (1998., Múzsák Kiadó), na talijanski preveo Alessandro Gambini: La geometria non-euclidea con la Sfera di Lénárt (2010., Lénárt Bt.), poljski: Anna Rybak - Lénárt István: Trzy swiaty geometrii (Wydawnictwo Dla szkoly, 2013.) s mnogo novih materijala, kao što su sferna trigonometrija, hiperbolička geometrija, Geogebra figure, itd.).

Napisao je materijale za *Sulinova nacionalni obrazovni projekt za razvoj kompetencija od prvog do desetog razreda* (Sulinova Public Education Development and Pedagogus-továbbképzési Kht., 2005.-2007.).

Napisao je na njemačkom članak koji se nalazi u knjizi: Éva Vásárhelyi - Johann Sjuts (Ed.): Theorestische und empirische Analysen zum geometrischen Denken (WTM Verlag für Wissenschaftliche Texte und Medien, Münster, 2021).

Držao je predavanja u mnogim zemljama diljem svijeta i vodio tečajeve za učitelje u nekoliko europskih i američkih zemalja.

Neki tečajevi koje je održao u inozemstvu su: nekoliko jednotjednih tečajeva u Sjedinjenim Američkim Državama, dva u Finskoj i tri puna semestra u Slovačkoj.

Godine 2002. dobio je Memorijalnu nagradu Beke Manó *Matematičkog društva* János Bolyai, a 2018. Memorijalnu nagradu Tamás Varga kao priznanje za rad u matematičkom obrazovanju.

Nikol Radović rođena je 1963. godine u Sisku. Diplomirala je na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, na smjeru Geometrija i topologija.

Godine 1997. magistrirala je na istome odsjeku s temom Reed-Müllerovi kodovi. Radi kao viša predavačica na Katedri za matematiku i fiziku Zavoda za geomatiku Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Područje autoričina znanstvenog i stručnog interesa je primjena matematike u drugim znanostima (kemija, kristolografija, fizika, geodezija i geomagnetizam). U razdoblju od 1992. do 2000. godine surađuje unutar projekta Ministarstva znanosti Studij separacije i analize, te strukture i svojstava materijala (1992. – 1996.) br 1 - 07 071 i Separacija, struktura i sustav metalnih materijala (1997. – 2000.), br. 124003, volonterski, na matematičkoj obradi podataka. Rezultat toga je velik broj objavljenih znanstvenih i stručnih radova u domaćim i stranim časopisima, kao i sudjelovanja na znanstvenim i stručnim skupovima.

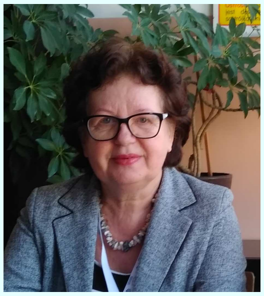
Koautorica je udžbenika iz matematike za osnovnu školu (od 5. do 8. razreda), te knjige Nacrtna geometrija: Perspektiva - Mongeov postupak - Aksonometrija.

Aktivno sudjeluje u aktivnostima Nastavne sekcije Hrvatskog matematičkog društva u organiziranju i provedbi metodičkih radionica za učenike i nastavnike na popularizaciji matematike kao i primjeni tehnolgije u nastavi matematike, te u nizu projekata, primjerice Matematika uz pomoć računala i računalnog programa Sketchpad (2007. – 2010.) u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva i CARNET-a kao jedan od koordinatora.

Sudjeluje u projektima Geopotencijal i geodinamika Jadrana (Geo ++Adria) (od 2007.), Joint Croatian - Hungarian Geomagnetic Repeat Station Survey and Joint Geomagnetic Field Model (od 2009.), Dynamic Number u organizaciji National Science Foundation, U.S.A. i KCP Tehnologies (od lipnja 2010.), IPAQ Peta - projekt V. gimnazije i PMF-a u Zagrebu u okviru Further development and implementation of the Croatian Qualifications Framework (od lipnja 2013. do veljače 2015.) te Matematičkim znanstvenim izazovima na Večerima matematike u organizaciji HMD-a (od lipnja 2013.), od rujna 2021. sudjeluje u projektu Matematički edukator.

Sudjelovala je na 13. International Conference Education, Research & Development s radom Space visualization during Covid-19 koja se održavala od 25. - 28. kolovoza 2022. u Burgasu, Bulgaria (Bugarska).

Zajedno s kolegom Petrom Mladinićem sudjelovala je na znanstvenoj konferenciji 5. dani obrazovnih znanosti u sesiji Kako poticati dobrobit u odgojno-obrazovnom okružju u izazovnim vremenima? s radom Procjena koncepta funkcije prema van Hiele-u učenika osnovnih i srednjih škola koja se održala u Zagrebu od 19. - 20. listopada 2022.



Anna Rybak rođena je 1954. u Białystoku u Poljskoj. Godine 1978. diplomirala je na Fakultetu matematike, informatike i mehanike Sveučilišta u Varšavi, smjer: računarstvo. Godine 1983. stekla je kvalifikaciju za predavača matematike. Godine 2003. stekla je doktorat humanističkih znanosti iz područja pedagogije na Fakultetu za pedagogiju i psihologiju Sveučilišta u Białystoku. Tema doktorskog rada: Modeliranje i suvremene tehnologije obrade informacija u obrazovnom procesu. Od 1978. do 1981. godine radila je na poslovima upravljanja i programiranja računala, a 1983. godine počela je raditi u obrazovanju. Od 1983. do 2001. radila je kao profesorica matematike i informatike u školama na različitim obrazovnim razinama, a 2001. počela je raditi na Fakultetu matematike i informatike na Sveučilištu u Białystoku.

Trenutno je koordinatorica Centra za kreativno učenje matematike koji djeluje u sklopu Matematičkog fakulteta Sveučilišta u Białystoku. Riječ je o metodičko-popularizatorskoj inicijativi čiji je cilj potaknuti učenike da sami otkrivaju matematička znanja, a učitelje na takvu metodiku poučavanja. Ima bogato iskustvo u nastavi: dugi niz godina radila je kao profesorica matematike i informatike. Trenutno održava bliske kontakte sa školskom zajednicom, izvodi nastavu za učenike i nastavnike u sklopu rada Centra te nastavu iz didaktike matematike za studente - buduće učitelje matematike. U svom didaktičkom radu temelji se na teoriji konstruktivističkog obrazovanja, vodeći učenike da samostalno konstruiraju znanje kao rezultat istraživačkog rada.

Glavna područja njezinih interesa u nastavi i nastavi te istraživanju i razvoju su:

- korištenje informacijske tehnologije (njenih metoda i alata) u široko shvaćenom radu učitelja i u didaktici na različitim razinama obrazovanja,
- učinkovitost obrazovanja potpomognutog korištenjem IKT-a,
- primjena matematike u praktičnim situacijama i drugim područjima znanja kroz široku upotrebu matematičkog modeliranja i računalnih simulacija.

Surađuje s centrima i znanstvenicima u Poljskoj i inozemstvu: 2001. sudjelovala je kao predavač na ljetnoj školi za učitelje matematike iz Kalifornije koju je organiziralo Kalifornijsko sveučilište u Davisu, SAD, 2005.

predavala je na Odjelu za matematiku i Statistiku na Sveučilištu Concordia u Montrealu, Kanada, održala je 2009. predavanja na Sveučilištu J. A. Comeniusa u Bratislavi, Slovačka, 2016. na Državnom sveučilištu Puškina u Brestu, Bjelorusija. Od 2003. godine radi s Istvánom Lénártom sa Sveučilišta ELTE u Budimpešti, Mađarska, na području razvoja projekta komparativne geometrije. Od 2004. godine surađuje s nizozemskom tvrtkom Vusoft na području izrade verzija obrazovnog softvera na poljskom jeziku u području matematike.

Njena najznačajnija izdanja su knjige:

- A. Rybak, Matematyka w zastosowaniach - zbiór zadań dla kl. VII-VIII, wyd. Podkowa, Gdańsk,1998, ISBN 83-905467-3-6
- A. Rybak, Komputer na lekcjach matematyki w szkole średniej, wyd. Podkowa, Gdańsk 2001, ISBN 83-912633-9-8
- A. Rybak, Multimedia in Education, książka, Lambert Academic Publishing, Saarbrucken Njemačka 2014., ISBN 978-3-659-52228-4,
- A. Rybak, I. Lénárt, Trzy światy geometrii, Wyd. Dla Szkoly, Bielsko-Biała 2013., ISBN 978-83-88396-79-3
- A. Rybak, E. Borak, Poradnik metodyczny do innowacyjnego programu nauczania matematyki z wykorzystaniem programu edukacyjnego GeoGebra w gimnazjum, e-knjiga, Varszava 2015.
- A. Rybak, Multimedialne wspomaganie ksztalcenia matematycznego, Wydawnictwo NOWIK, Opole, 2016., ISBN 978-83-62687-87-9
- A. Rybak, J. Makowska, Kreatywne kształcenie matematyczne, Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku 2021., ISBN 978-83-7431-726-9

kao i niz članaka na poljskom i engleskom jeziku objavljenih u poljskim i stranim časopisima.

2011. godine dobila je Medalju Državnog prosvjetnog povjerenstva za posebne zasluge u obrazovanju i odgoju.

Godine 2012. dodijeljena joj je titula Merit to the University za izniman doprinos Sveučilištu u Bialystoku, doprinos razvoju sveučilišta i oblikovanju njegove pozitivne slike.

Za popularizaciju mađarske znanosti u Poljskoj dobila je 2019. Certifikat o priznanju Sveučilišta Eötvös Loránd (ELTE) u Budimpešti.

Mario Brkić rođen je 1965. godine u Zagrebu. Dodiplomski studij za inženjera fizike pohađa na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Diplomirao je na smjeru geofizika 1989. godine na temi iz oceanografije. Poslijediplomski studij prirodnih znanosti iz polja fizike pohađa na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Magistrirao je na smjeru geofizika 1994. godine, te doktorirao na polju fizike 2001. godine, na temama iz fizikalne geodezije. Od 1995. do 2002. zaposlen je u MORH-u kao djelatna vojna osoba. Odlukom Predsjednika RH 2001. godine unaprijeđen je u čin natporučnika geodetske struke.

Odlikovan je Spomenicom Domovinskog rata 1990.–1992.

Godine 2018. izabran je u znanstveno-nastavno zvanje redoviti profesor u trajnom zvanju, u znanstvenom području tehničke znanosti, znanstveno polje geodezija, znanstvena grana geomatika, u Katedri za matematiku i fiziku Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Obnašao je dužnosti Pročelnika Katedre za matematiku i fiziku, Prodekana za znanstveni rad i međunarodnu suradnju, Predstojnika Zavoda za geomatiku. Bio je predstavnik Geodetskog fakulteta u Hrvatskom povjerenstvu za geodeziju i geofiziku pri Hrvatskoj akademiji znanosti i umjetnosti.

Član je Uredničkog odbora Geodetskog lista. Predstavnik je Geodetskog fakulteta u Koordinacijskom odboru za provedbu Sporazuma o suradnji na području korištenja podataka i obnove geomagnetske informacije RH.

Posvećen obnovi geomagnetizma u Hrvatskoj.

Bio je voditelj Joint Croatian-Hungarian Geomagnetic Repeat Station Survey and Joint Geomagetic Field Model, bilateralnog znanstvenog projekta MZOŠ-a (2009 - 2012), a od 2002. nadalje više od petnaest domaćih znanstveno-istraživačkih i stručnih projekata u okviru I. i II. ciklusa obnove geomagnetske informacije u Republici Hrvatskoj, s kojima su povezani i brojni radovi (vidi CROSBI).

Nastavi na Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu doprinosi uvođenjem novih predmeta na dodiplomskom, preddiplomskom, diplomskom i poslijediplomskom doktorskom studiju, a trenutno izvodi kolegije Fizika, Evolucija fizike, Geomagnetska izmjera i Geomagnetske mreže.

Petar Mladinić rođen je 1950. godine u Zagrebu, gdje je diplomirao matematiku na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu.

Njegov rad ima dugotrajan učinak na poboljšanje odgojne i obrazovne prakse. Kao voditelj Nastavne sekcije Hrvatskoga matematičkog društva pridonosio je razvoju profesionalnih potreba učitelja/nastavnika, učenika i studenata u formalnome i neformalnom svakidašnjem i cjeloživotnom učenju i poučavanju. Organizirao je više od 150 predavanja, mnogobrojne radionice, pokrenuo Ljetnu školu Ruđera Boškovića te Ljetnu školu V. gimnazije i HMD-a.

Za profesionalne potrebe učitelja, učenika i studenata utemeljio je četiri matematička časopisa: Poučak, Matka, Playmath i math.e te inicirao izdavanja knjiga u sklopu Male matematičke biblioteke, Matkine biblioteke i Biblioteke HUNI.

Napisao je stotinjak stručnih članaka, knjiga, gimnazijskih i drugih udžbenika, potaknuo prijevode i preveo nekoliko knjiga te organizirao na desetke radionica za nastavnike i učenike.

Njegovim i imenom kolegice Gusić nazvan je poučak iz elementarne geometrije.

Theorem of Gusic & Mladinic:
A quadrilateral is tangential if and only if the incircles of the two triangles formed by a diagonal are tangential to each other.
This theorem is named after two Croatian colleagues, Jelena Gusic and Petar Mladinic (2001), who as far as I've been able to ascertain, have priority in first publishing the result in 2001 in a journal Poučak. Later publications by Worrall (2004) and Josefsson (2011) also mention and prove the theorem. - napisano je časopisu *Learning and Teaching Mathematics, No. 29, 2020, pp. 39-45*

Pridonio je razvoju sustava obrazovanja u matematičkom području kao član Vijeća za nacionalni kurikulum i član Radne skupine za izradu Nacionalnoga okvirnog kurikuluma za matematiku.

Godine 2011. prijavio je i vodio projekt V. gimnazije IPAQ Peta – afirmativna nastava i inovativno poučavanje u gimnazijama u okviru HKO koji je realiziran s timovima četiriju gimnazija – iz Vukovara, Pakraca, Knina i Metkovića – te Prirodoslovno-matematičkim fakultetom iz Zagreba, uz sudjelovanje 1 200 učenika i 1 000 nastavnika.

Osmislio je i organizirao projekt dvogodišnjih okupljanja učitelja i nastavnika matematike (susreti i kongresi nastavnika matematike) na kojima su izlagali hrvatski nastavnici, kao i najugledniji strani stručnjaci iz područja nastave matematike.

Utemeljio je hrvatski ogranak TTT (Teacher Teaching Technology).

Utemeljio je i više godina vodio Geometrijske radionice HMD-a.

Kao nastavnik, a posebno kao ravnatelj V. gimnazije, bio je aktivno uključen u zajednicu, osnažujući demokratske procese, toleranciju i solidarnost među mladim ljudima i njihovim roditeljima.

Utemeljio je 2018. godine udrugu Hrvatska udruga nastavnika istraživača HUNI (`www.huni.hr`).

Realizirao je projekt 2019.-2020. van Hieleove razine matematičkih postignuća u RH (zajedničko akcijsko djelovanje nastavnika i učenika) u kojem su sudjelovale škole: I. gimnazija iz Osijeka, XV. gimnazija iz Zagreba, XII. gimnazija iz Zagreba, III. gimnazija iz Splita, Gimnazija Franje Petrića iz Zadra, Gimnazija A. Mohorovičića iz Rijeke, Gimnazija Vukovar, Tehnička škola R. Boškovića, Vinkovci, Gimnazija M.A. Reljkovića iz Vinkovaca, Gimnazija Metković, Gimnazija Pula, Osnovna škola F. K. Frankopana iz Osijeka, Osnovna škola M. Gubeca iz Zagreba, Osnovna škola Skalice iz Splita, Osnovna škola Mejaši iz Splita, Osnovna škola S. Budinića iz Zadra, Osnovna škola Vidikovac iz Pule sa svojim nastavnicima i 1200 učenika.

Godine 2019. organizirao je Znanstveno-stručni skup s međunarodnim sudjelovanjem: *Van Hieleova teorija u matematičkom obrazovanju (Van Hiele Theory in Mathematical Education)* na Sveučilištu u Zadru.

Realizirao je projekt (2021.-2022. godina) *Matematički edukator za osnovne i srednje škole* kao što realizira *Matematički edukator za osnovne i srednje škole 2021.-2026.* U projektu je 100-tinjak hrvatskih škola s 300-tinjak nastavnika i više tisuća učenika.

U slobodnom vremenu bavio se i suđenjem rukometnih utakmica. Prvi je hrvatski međunarodni sudac koji je licencu postigao u Lijepoj Našoj. Od 1993. do 1999. godine bio je član tzv. elitne liste sudaca IHF-a (International handball federation). Sudio je utakmice na Olimpijadi u Atlanti, na 4 svjetska prvenstva, 3 europska, 2 azijska i na mediteranskim igrama. Sudio je završnu utakmicu japanskog prvenstva, kao i tuniskog. Također je sudio 7 završnih utakmica europskih kupova, utakmice na dva svjetska kupa te prvi europski super kup. Na obilježavanju 100 godina športa u Austriji sudio je utakmicu između ženskih reprezentacija Austrije i Svijeta. Ukupno je sudio na više od 250 međunarodnih utakmica.

Odlikovan je Spomenicom Domovinskog rata 1990.–1992., odličjem Reda hrvatskog pletera i dobitnik je Državne nagrade Ivan Filipović za godinu 2015.

ISBN -------------------------