# KISÉRLETI KIMUTATÁSA

## ANNAK A NEHÉZSÉGI VÁLTOZÁSNAK, A MELYET VALAMELY, A SZABÁLYOS ALAKÚNAK FELVETT FÖLDFELÜLETEN KELETI VAGY NYUGATI IRÁNYBAN MOZGÓ TEST E MOZGÁS ÁLTAL SZENVED.

Báró EÖTVÖS LORÁNT † r. tagtól.[1]



### 1. §. Bevezetés.

Ismert követelménye a GALILEI-NEWTON-féle mechanikának az, hogy valamely test súlyának *fogynia* kellene, ha a Földön *kelet* felé mozog, ellenben *növekednie,* ha *nyugat* felé mozog.

E nehézségi gyorsulás-változás nagysága, nyugvó naprendszerre vonatkoztatva:

$$\Delta g = - 2\Omega \cos \varphi \frac{dy}{dt}, \tag{1}$$

[1] Ez értekezés világhírű szerzője súlyos betegségében, a melyben 1919 évi április hó 8.-án elhúnyt, készítette el e közlemény német szövegét és azt 1919 évi márczius hó 31.-i keltezéssel el is küldette az «Annalen der Physik» czímű szakfolyóirat szerkesztőségének, a minek folytán az az 1919. év vége felé a nevezett folyóirat 59. kötete 743—752. lapjain meg is jelent; correcturáját ez Értesítő jelenlegi szerkesztője és FEKETE JENŐ úr, az elhúnytnak sok évi munkatársa végezték. Egyidejüleg a fenti keltezéssel a szerző e kézirati szöveg másolatát oly kéréssel bocsátotta a szerkesztő rendelkezésére, hogy magyarra fordítását és a 3. §-ában szükségesnek látszó elméleti kifejtéseket és kiegészítéseket végezze s ez Értesítőben leendő megjelenéséről gondoskodják; ez FEKETE JENŐ úr szíves közreműködésével meg is történt.

A hazai kedvezőtlen közviszonyok, az Akadémia működésének ideiglenes kényszerszünetelése és nyomdai nehézségek miatt ez a magyar közlemény csak később jelenhetett meg, mint a német.

hol $\Omega$ a Föld forgásának szögsebessége, a mely

$$\Omega = \frac{2\pi}{86164{\cdot}09 \text{ sec}} = 0{\cdot}0000729212\,;$$

továbbá $\varphi$ a Föld felületén lévő helynek földrajzi szélessége és $\frac{dy}{dt}$ a test sebessége a Földön, vonatkoztatva oly derékszögű koordináta-rendszerre, melynek $X$, $Y$, $Z$ tengelyei rendre egybeesnek az Égnek *Északi, Keleti* és *függélyesen Lefelé* haladó irányaival.[1]

[1] Ugyanis: 1. A forgó Földet első megközelítésben gömbalakúnak véve, a $\varphi$ földrajzi szélességű valamely $P$ pontjában e forgás folytán létesülő vonalmenti sebessége: $v_\Omega = \Omega R . \cos\varphi$, hol $\Omega$ a Föld forgásának szögsebessége és $R$ a Föld sugara, 1. ábra. A $P$ helyen levőnek felvett $m$ tömegre ható, e forgás által ébresztett centrifugális erő nagysága:

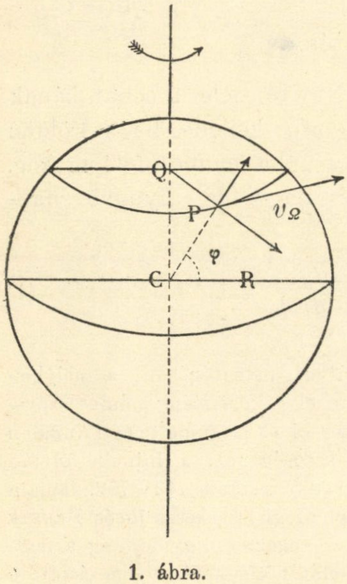
$$m \cdot \frac{v_\Omega^2}{R . \cos\varphi} = m . \Omega^2 . R \cos\varphi,$$

a mely az egyenlítő síkjához párhuzamos és $\overrightarrow{QP}$ irányú; ennek a $\overrightarrow{CP}$ mentén levő összetevője:

$$- m . \Omega^2 . R . \cos\varphi . \cos\varphi,$$

a mely a Föld *vonzása* erejével *ellentetten* hat.

2. Ha az $m$-nek a Föld felületéhez képest $\frac{dy}{dt}$ sebességi **összetevője** is van, mely a mindenkori $v_\Omega$ forgási sebesség irányába esik, akkor ennek mechanikai hatása a centrifugális erőre vonatkozólag az, hogy ez erőnek kifejezésében a $v_\Omega$ helyébe a $\left(v_\Omega + \frac{dy}{dt}\right)$ lép, hol $\frac{dy}{dt}$ sokszorta *kisebb,* mint $v_\Omega$.




1. ábra.

E szerint e középpontfutó erő nagysága:

$$m\left(v_\Omega + \frac{dy}{dt}\right)^2 \cdot \frac{1}{R\cos\varphi} = m\left(\Omega R\cos\varphi + \frac{dy}{dt}\right)^2 \frac{1}{R\cos\varphi}.$$

Megközelítésben:

$$m\Omega^2 . R . \cos\varphi + 2m \cdot \Omega \cdot \frac{dy}{dt}\,;$$

Azonban ennek a magában véve oly világos követelménynek egyenes kimutatása egy negyed-évszázaddal ezelőtt még nem sikerült. Ezt csak azoknak a mélyen átgondolt törekvéseknek köszönhetjük, a melyek még a nyílt tengeren jelentkező földnehézségi viszonyok felismerésére is vezettek. És csodálatosképpen, egy elkövetett hiba volt az, a mely a helyes útra vezetett. («Citius enim emergit veritas e falsitate, quam e confusione.» Baco.)

Hecker berlini tanárnak a nyílt tengeren végzett két emlékezetes utazása: az első az 1901. évben az Atlanti-tengeren, a második az 1904. évi márczius hó 23.-ától 1905. évi április hó 8.-áig az Indiai-tengeren, mindazoknak a szaktudósoknak az élénk érdeklődését felkeltették, a kik a Föld nehézségi ereje kérdésével foglalkoztak.[1]

Így az én érdeklődésemet is.

De csakhamar észrevettem, hogy az eredmények számításánál a hajó mozgásának befolyása, a melynek az egyébként elért pontosság mellett, bizonyos, már előre kiszámítható értékekkel kellett volna jelentkeznie, ezeknek a feltevéseknek nem felelt meg.

Bármely kétely eloszlatása czéljából kivánatosnak látszott a régebbi megfigyelési anyagnak újból való átvizsgálása és újból való átszámítása. Ámde Hecker tanár, a kihez azzal a kéréssel fordultam, hogy ily új számítást végeztessen, még többet is tett. Az ő minden nehézséget leküzdő tevékenységének sikerült az

---

e centrifugális erő összetevője a Föld *vonzása* $\overrightarrow{PC}$ egyenese mentén:

$$-m\Omega^2 R . \cos^2 \varphi - 2m\Omega \cos \varphi . \frac{dy}{dt};$$

itt a második tag a keresett, a szövegben idézett (1) formula.

[1] 1. Bestimmung der Schwerkraft auf dem Atlantischen Ozean, sowie in Rio de Janeiro, Lissabon und Madrid. Von O. Hecker. Veröffentlichung des königlich preussischen geodätischen Institutes. Neue Folge Nr. 11, Folio. pp. 1—137, mit neun Tafeln. Berlin, 1903.

2. Bestimmung der Schwerkraft auf dem Indischen und Grossen Ozean und deren Küsten, sowie erdmagnetische Messungen. Von Prof. Dr. O. Hecker. Zentralbureau der internationalen Erdmessung. Neue Folge der Veröffentlichungen. Nr. 16. Folio. pp. 1—233, mit zwölf Tafeln. Berlin, 1908.

akkori orosz császári kormányt egy új expeditio felszerelésére indítani; és így az 1908. év május havában a Fekete-tengeren új utazásokat és azokon új méréseket végzett, és pedig a tenger felszínén részben ugyanazokon az utakon, de ellentett irányban hajózva.[1] Így az itt a kelet felé és a nyugat felé irányított hajósebességek külömbsége közelítőlegesen 45 kilometert tett ki óránként;[2] az (1) alatti képlet szerint a nehézség-külömbségek közelítőlegesen

$$\triangle g = 0{\cdot}707.0{\cdot}000146 \cdot \frac{4500000}{3600} = 0{\cdot}129, \tag{2}$$

értékűek, azaz oly nagyságú az ily változás, amely az alább megállapított módszerek alapján végzett legkezdetlegesebb kisérletekben is már felismerhető. Ily módon, azokból a látszólagos ellentmondásokból, a melyeket HECKER-nek a nyilt tengeren végzett megfigyelései kelteni látszottak, a régi elmélet első tényleges igazolását lehetett megállapitani.

## 2. §. A kisérleti kimutatásnak a lehetősége sokkal kisebb sebességeknél a laboratoriumban. A resonantia módszere.

Az (1) egyenlet mutatja, hogy a testnek kelet felé való mozgásakor minden grammtömegnek $1 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$ sebességgel való haladása folytán 45 fok földrajzi szélesség alatt a gyorsulás változása $\triangle g = -0{\cdot}000103$, azaz absolut c. g. s.-rendszerben körülbelől egy tízezredrészét teszi ki a gyorsulás c. g. s.-egységének; e szerint a *test súlya* körülbelől egy *tízmilliomod* részével változik.

E szerint előre látható, hogy ha valamely jól táplált, 100 kilogramm súlyú ember, mikor kényelmes, 1 méter másodperczenkénti sebességgel a szabályos alakúnak felvett Föld felületén kelet felé halad, körülbelől $2 \cdot \frac{100000.100}{10000} = 2000$ c. g. s., azaz köze-

[1] Bestimmung der Schwerkraft auf dem Schwarzen Meere und an dessen Küste, sowie neue Ausgleichung der Schwerkraft auf dem Atlantischen, Indischen und Grossen Ozean. Von Prof. Dr. O. HECKER. Zentralbureau der internationalen Erdmessung. Neue Folge der Veröffentlichungen. Nr. 20. Folio. pp. 1—160, mit vier Tafeln. Berlin, 1910.

[2] V. ö. e most idézett közlemény 103. lapjával.

litőlegesen *két* gramm súlylyal, röviden, egész test súlyának körülbelől két százezred részével könnyebb, mint a mikor azután nyugat felé visszatér.

Ámde, az oly kísérletek, a melyek egyenletes, egyenesvonalú mozgásokat teteleznek fel, alig valósíthatók meg pontosan; ezért folyamodunk ebben az esetben is a könnyebben és pontosabban létesíthető körmozgáshoz.

Forgassunk például valamely, végein megterhelt, lengheto mérlegrúd-alakú testet oly függőleges tengely körül, a mely a mérlegrúd nyugalmi helyzetében annak súlypontján halad át; míg a mérlegrúd lengése közben e súlypont a függélyes forgási tengely közelségében marad. A tömegek akkor szakaszosan keleti és azután nyugati irányban mozognak; és megfelelőleg az így keletkező nehézségi változásoknak: szakaszos lengéseknek kell fellépniök, a melyek sokszorosítás folytán szakadatlanul növekedve, a csillapító erő által korlátolt maximális határértéket érnek el. Ez a *kényszerített* lengések, a kényszerített rezgések egy esete, mint a melyhez analog rezgések a hangtani resonantia tanában előfordulnak, a melyeknek pontmozgásokra vonatkozó elméletét Helmholtz elméleti physikájában oly mesterileg tárgyalja.[1]

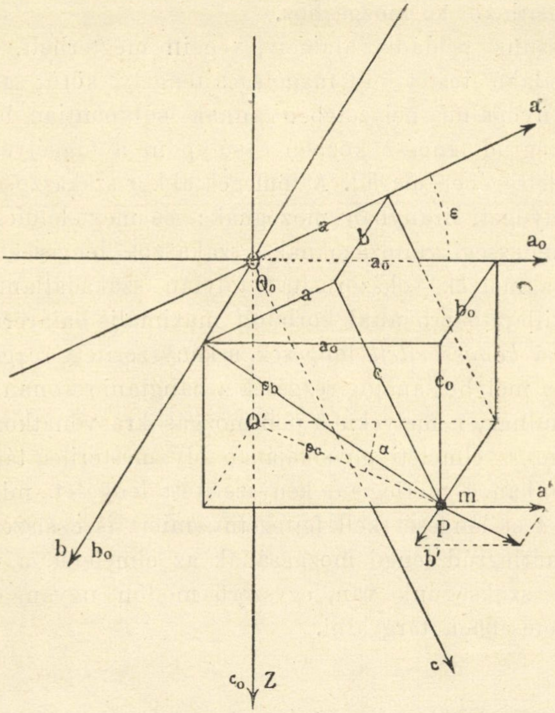
Itt azonban a mérlegrúd kényszerített lengését mint valamely egész test lengését kell fejtegetni, miért is czélszerűbbnek látszik, e mérlegrúd lengő mozgásának az elméletét, a mennyiben itt reá szükségünk van, egyszerű módon ugyan, de valamivel részletesebben tárgyalni.

## 3. §. A forgatott, impulsusoknak alávetett lengő mérlegrúd elmélete. A resonantia által elérhető maximális kilengések nagysága.

A következőkben oly lengő testre fogunk szorítkozni, a mely *egymásra merőleges három síkra nézve symmetrikus,* és a mely egyik, vízszintes tengelye körül (például *éleken)* szabadon lenghet.

[1] Vorlesungen über theoretische Physik. Band I., Abtheilung 2. Dynamik discreter Massen-Punkte. Herausgegeben von O. Krigar-Menzel. Leipzig, J. A. Barth. 1898. pg. 95, pg. 119.

Legyenek (2. ábra) $\overline{Oa}$, $\overline{Ob}$, $\overline{Oc}$ az e testtel mereven egybekapcsolt oly derékszögű koordináta-tengelyek, melyek közül $Ob$ a mindig vízszintes lengési tengely legyen, míg a mérlegrúd egyensúlyi, nyugalmi helyzetében az $(aOb)$ sík vízszintes-, de a positiv $c$ függőlegesen lefelé irányított legyen és ekkor ezek egybeessenek az $(a_0Ob_0)$-síkkal, illetőleg a $c_0$-tengelylyel.




2. ábra.

Legyenek továbbá $X$, $Y$, $Z$ a világtérben lévő, a Föld-del mereven egybekapcsolt ama koordináta-tengelyek, melyek közül *X észak felé, Y kelet felé, Z függőlegesen lefelé* van irányítva; továbbá legyenek $\varrho_b$ és $\varrho_c$ azoknak a köröknek vagy köríveknek a sugarai, a melyeket a lengő testnek egy $m$ tömegpontja a $b$, illetőleg a $c_0$ tengely körül leírhat.

Magára a lengő testre nézve az említett symmetria-síkok közül az egyik a $(bOc)$ sík; a másik a $(cOa)$ sík; e kettő egyszersmind a mérlegrúddal merev kapcsolatban lévő két koordináta-sík; a harmadik symmetria-sík *nem* az $(aOb)$ koordináta-sík, hanem a vele párhuzamos, de az $O_0$ ponton áthaladó sík. Ez az $O_0$ pont a lengő mérlegrúd *tömegközéppontja*

A mérlegrúd *éle* e szerint a *mindig vízszintes* $\overline{Ob}$ tengelyben van, de ez az $\overline{Ob}$ tengely, mint éppen említettük, nem halad pontosan ezen az $O_0$ tömegközépponton át, hanem e pont valamivel az *él alatt* fekszik, úgy, mint a közönséges mérlegnél. Ezért is a mérlegrúd nyugalmi helyzete egy *állandó* helyzet; és ha az egész eszköz nem forog $\overline{OZ}$ függőleges tengelye körül, akkor a mérlegrúd úgy leng, mint egy közönséges physikai inga.

Legyenek továbbá a 2. ábra szerint $\overline{Oa_0}$, $\overline{Ob_0}$, $\overline{Oc_0}$ valamely oly koordináta-rendszer derékszögű tengelyei, a mely rendszer az egész eszközzel, a mérlegrúd állványával, tartójával együtt az $\overline{OZ}$ függőleges tengely körül forog, úgy, hogy $\overline{Oc_0}$ az $\overline{OZ}$-vel mindig egybeesik, míg $\overline{Ob_0}$ mindig az $\overline{Ob}$ irányú él egyenesébe esik; az $\overline{Oa_0}$ szintén mindig a vízszintes síkban marad.

E megállapodás szerint az $(a_0Ob_0)$ sík mindig vízszintes marad, míg a $(b_0Oc_0)$ és a $(c_0Oa_0)$ síkok mindig vertikálisak maradnak; a két, közös $O$ kezdőpontú koordinata-rendszer egymáshoz való vonatkozását legegyszerűbben úgy ismerhetjük fel, ha megjegyezzük, hogy az $(a_0b_0c_0)$ rendszerből az $(abc)$ rendszerre úgy térhetünk reá, ha az előbbit a közös $\overline{Ob} = \overline{Ob_0}$ tengely körül az $\varepsilon$ szöggel elforgatjuk.

### 1. *Nem forgatott mérlegrúd. Egyszerűen harmonikus ingalengés.*

Ha a nem forgatott mérlegrúdra csillapító erő nem hat, akkor a földnehézségi erő által a lengő rúdra kifejtett forgató nyomaték közönséges kifejezése:

$$F_{(g)} = - M.g.s.\sin\varepsilon; \tag{3}$$

hol $M$ az egész tömege a lengő mérlegrúdnak, $g$ a földnehézségi erő gyorsulása a Föld felületén nyugvó testekre nézve, $s$ e rúdtömeg középpontjának távolsága a forgás élétől, azaz, $\overline{OO_0} = s$, és $\varepsilon$ a szög, a melyet ez az $s$ a földnehézségi erő irányával alkot. Akkor, $K_b$-val jelezve a lengő testnek az $Ob$ élre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát, a mérlegrúd mozgás-egyenlete:

$$K_b \cdot \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = - M.g.s.\sin\varepsilon\,; \tag{4}$$

hol ez az $F_{(g)}$ forgató nyomaték *negativ*, mert az $\varepsilon$ szöget *kisebbíteni* törekszik.

Ha a lengés amplitudója kicsiny: a kettős lengés időtartama, a $T_0$, első megközelítésben írható:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{K}{M.g.s}}. \tag{5}$$

## *2. Nem forgatott mérlegrúd. Egyszerű harmonikus csillapított lengés.*

Ha *csillapító erő* lép fel, akkor az ennek folytán hozzájáruló lassító forgató nyomaték mérsékelt szögsebességeknél írható:

$$F_{(k)} = - \Gamma \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}, \tag{6}$$

úgy hogy a még mindig *nem* forgatott mérlegrúd mozgásegyenlete:

$$K_b \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = - Mgs.\sin\varepsilon - \Gamma\frac{d\varepsilon}{dt},$$

avagy kicsiny lengéseknél első megközelítésben:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + k\frac{d\varepsilon}{dt} + \omega_0^2 s = 0\,; \tag{7}$$

hol:

$$\frac{Mgs}{K_b} = \omega_0^2\,;\qquad \frac{\Gamma}{K_b} = k. \tag{7a}$$

Az egyenlet ismert megoldásának rendes alakja:

$$\varepsilon = E.e^{-\frac{1}{2}kt}.\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \tfrac{1}{4}k^2} + 2\pi\delta\right). \tag{8}$$

melyben $E$ és $\delta$ az integratio két állandója, míg most a kettős lengési idő, a $T$ az

$$\omega_0^2 - \frac{1}{4}k^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \frac{1}{4}k^2$$

vonatkozásból:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}k^2}}. \tag{9}$$

Az egymásra következő két legnagyobb szögkitérés hányadosa itt:

$$e^{+\frac{1}{4}kT} = \vartheta; \tag{10}$$

ez a közönséges *csillapodási viszony,* míg ennek természetes logarithmusa:

$$\tfrac{1}{4}kT = \log\vartheta = \lambda \tag{11}$$

a csillapodás logarithmusi decrementuma.

*3. Forgatott mérlegrúd. A földnehézségi erő változásának és a középpontfutó erőnek befolyása a rúd lengéseire.*

A czímben kimondott, itt általános esetben a fent (3) és (6) alatt kifejezett $F_{(g)}$ és $F_{(k)}$ forgató nyomatékokhoz még hozzálép a földnehézségi erő változásából és a centrifugalis erő folytán származó egy-egy pótló forgatónyomaték.

3*a*. Az $\overline{OZ}$ körüli, $\mathfrak{T}$ szakaszú forgatás az egész eszköznek mérleg-állványnak) és vele együtt a lengő mérlegrúdnak is egyenletes

$$\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \tag{$12_a$}$$

nagyságú szögsebességet tulajdonít; akkor a mérlegrúd $m$ tömegpontjának az $y$ koordinátája, vonatkoztatva a földdel mereven egybekapcsolt $(XYZ)$ koordináta-rendszerre, következőleg írható:

$$y = \varrho_c \sin\left(2\pi\frac{t}{\mathfrak{T}} + \alpha\right), \tag{12}$$

a hol $\varrho_c$ az $m$ tömegnek a forgatás $\overline{OZ}$ tengelyétől való merőleges távolsága, továbbá $\alpha$ az a szög, a melyet a $\varrho_c = \overline{O'P}$ forgó egyenes az $(aOc)$ forgó síkkal alkot, és végre $2\pi\frac{t}{\mathfrak{T}}$ az a forgás-szög, a melyet *ez* a forgó sík, a $(cOa)$, és a földdel mereven egybekapcsolt, szilárd $(XOZ)$ sík (az $O$-n átmenő földrajzi délkör síkja) egymással bezár.

Itt figyelembe veendő, hogy az $\alpha$ szög az időtől független és hogy e szögnek az értéke a mérlegrúd minden egyes $m$ tömegű pontjára nézve egy-egy meghatározott, állandó érték.

Ezek szerint a forgatott $m$ tömegpontnak mindenkori *nehézségi erőváltozása*, azaz *súlyváltozása* az (1) és (12) formula alapján:

$$m\Delta g = -2m\Omega\cos\varphi\frac{dy}{dt} = -2m\Omega\cos\varphi\cdot\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\cdot\varrho_c\cos\left(2\pi\frac{t}{\mathfrak{T}}+\alpha\right),$$

avagy, annál a körülménynél fogva, hogy az $\alpha$ szög külömböző $m$ tömegpontokra nézve külömböző értékeket is mutathat fel:

$$m\Delta g = -2\Omega\cos\varphi\cdot\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\cdot(m\varrho_c)\left\{\cos\alpha\cos\left(2\pi\frac{t}{\mathfrak{T}}\right) - \sin\alpha\sin\left(2\pi\frac{t}{\mathfrak{T}}\right)\right\}. \tag{13}$$

Ámde a 2. ábra szerint $a_0$, $b_0$, $c_0$ az $m$ pont folyó koordinátái az $\overline{Oa_0}$, $\overline{Ob_0}$, $\overline{Oc_0}$ tengelyrendszerre nézve, a mely, miként e 3. §. elején említettük, az $\overline{Oa}$, $\overline{Ob}$, $\overline{Oc}$ koordináta-rendszerrel a közös, mindig vízszintes $Ob_0 = \overline{Ob}$ tengelylyel bír, de hozzáképest e közös tengely körül $\varepsilon$ szöggel el van forgatva.

Ebből folyólag az $\alpha$ és az $a_0$, $b_0$, $c_0$ koordináták között, valamint ezek és az $a$, $b$, $c$ koordináták között a következő vonatkozások állanak fenn:

$$\cos\alpha = \frac{a_0}{\varrho_c}; \quad \sin\alpha = \frac{b_0}{\varrho_c}. \tag{14}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= a\cos\varepsilon + c\sin\varepsilon; \\ b_0 &= b; \\ c_0 &= c\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon. \end{aligned} \tag{15}$$

Ezek felhasználásával az $m\Delta g$ a (13)-ból:

$$(m\Delta g) = -2\Omega\cdot\cos\varphi\cdot\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\left[(ma_0)\cos\left(2\pi\frac{t}{\mathfrak{T}}\right) - (mb_0)\sin\left(2\pi\frac{t}{\mathfrak{T}}\right)\right]. \tag{16}$$

Ez a nehézségi erőváltozás függőlegesen *felfelé* van irányítva és az $Ob$-tengely körül (a mérlegrúd *éle* körül) a következő forgató nyomatékot létesíti:

$$m.a_0 \Delta g = + 2\Omega \cos \varphi \cdot \frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \left\{ (ma_0^2) \cos \left( 2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right) - \right.$$

$$\left. - (ma_0 b_0) \sin \left( 2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right) \right\};$$

a mely a (3)-ban kifejezett $F_{(g)}$ forgató nyomatékkal ellentett irányú, mert az $\varepsilon$ szög növesztésére törekszik.

Ezek szerint adódik az a forgató nyomaték, a melyet a forgatás okozta nehézségi erő-változás az egész lengő testre kifejt, vonatkoztatva a mérlegrúd élére, mint a lengés tengelyére:

$$F_{(\Delta g)} = \Sigma (ma_0 . \Delta g) =$$

$$= \frac{4\pi}{\mathfrak{T}} \Omega \cos \varphi \left\{ (\Sigma ma_0^2) \cos \left( 2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right) - (\Sigma ma_0 b_0) \sin \left( 2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right) \right\}, \quad (17)$$

avagy:

$$\left. \begin{aligned} F_{(\Delta g)} &= + \frac{4\pi}{\mathfrak{T}} \cdot \Omega \cdot \cos \varphi \, (\Sigma ma_0^2) \cos \left( 2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right) - \\ &- \frac{4\pi}{\mathfrak{T}} \cdot \Omega \cdot \cos \varphi \, (\Sigma ma_0 b_0) \sin \left( 2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Az itt jelentkező összegek: $(\Sigma ma_0^2)$ és $(\Sigma ma_0 b_0)$ a tehetetlenségi nyomatékok jellegét mutatják és a (15) transformáló egyenletek szerint még írhatók:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma ma_0^2 &= \cos^2 \varepsilon \, (\Sigma ma^2) + \sin (2\varepsilon) \, (\Sigma mac) + \sin^2 \varepsilon \, (\Sigma mc^2); \\ \Sigma ma_0 b_0 &= \cos \varepsilon \, (\Sigma mab) + \sin \varepsilon \, (\Sigma mbc). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

3*b*. De az eszköz forgatása folytán (a mely a függőleges $\overline{OZ}$ tengely körül megyen végbe) *középpontfutó erő* is keletkezik, a mely szintén forgató nyomatékot létesít és a mérlegrúd lengési idejét befolyásolja.

A 2. ábra szerint $\varrho_c$, miként már a megelőző 3*a*. pontban, jelenti a $P$ helyzetű $m$ tömegpontnak az $\overline{OZ}$ forgás-tengelytől való merőleges távolságát $\overline{O'P}$-t; e forgásból folyólag az $\overline{O'P}$

egyenes mentén oly centrifugális erő lép fel, melynek nagysága:

$$m\cdot\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2\cdot\varrho_c, \tag{20}$$

melynek közvetlen fogpontja a $P$-helyű $m$ tömegpont, de a melyet közvetve az $O'$ pontban működőnek is szabad felvennünk, mivel a forgó mérlegrúd *merev* test.

Ezt az erőt két összetevőre bonthatjuk szét: az egyik $Pa'$ mentén, a másik $Pb'$ mentén működőnek tekinthető; e két összetevő nagysága:

$$m\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2\cdot\varrho_c\cdot\frac{a_0}{\varrho_c}\,;\quad m\cdot\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2\cdot\varrho_c\cdot\frac{b_0}{\varrho_c}\,.$$

Az első összetevő az $Ob$ él körül egy

$$m\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2\cdot a_0c_0$$

nagyságú forgató nyomatékot létesít; a másik összetevő azonban párhuzamos ez élhez és így nem fejthet ki az $\overline{Ob}$ körül forgató-nyomatékot; e szerint nem is gyakorolhat befolyást a mérlegrúd lengő mozgására.

Ezek alapján a középpontfutó erők által a forgatott mérlegrúdra kifejtett összes forgatónyomaték, vonatkoztatva az $\overline{Ob}$ élre:

$$F_{(\mathfrak{T})} = +\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2(\Sigma m a_0 c_0). \tag{21}$$

Ez a nyomaték, különösen hosszúszárú mérlegrúd esetén, továbbá kicsiny $\overline{OO_0} = s$ távolságnál és kicsiny $\varepsilon$ lengésszögeknél *mindig negativ*, mert az $\varepsilon$ szöget kisebbíteni törekszik; ez a körülmény itt *positiv* előjelet követel, mert, miként a (22)-, a (24)- és a (25)-ből ki fog tetszeni, a $(\Sigma m a_0 c_0)$ összeg az előbb mondottak mellett negativ.

Az itt jelentkező $(\Sigma m a_0 c_0)$ összeg szintén tehetetlenségi nyomaték jellegű; a (15) transformáló formulák szerint adódik:

$$\Sigma m a_0 c_0 = \tfrac{1}{2}\sin(2\varepsilon)\,(\Sigma m\,[-a^2+c^2]) + \cos(2\varepsilon)\,(\Sigma m a c). \tag{22}$$

3c. *Az $F_{(\Delta g)}$ és $F_{(\mathfrak{x})}$ forgató nyomatékok egyszerűsítése symmetrikus szerkezetű mérlegrúd esetén.*

A (19) és (22) kifejezésekben fellépő összegek redukálva vannak a

$$\Sigma ma^2;\ \Sigma mc^2;\ \Sigma mbc;\ \Sigma mca;\ \Sigma mab$$

összegekre.

E 3. §. elején említettük, hogy a lengő mérlegrúd symmetrikus alkotású legyen, melynek két symmetria-síkja a $(bOc)$- és a $(cOa)$-sík; míg a harmadik ily symmetria-sík párhuzamos az $(aOb)$ síkkal, de az $O_0$ tömegponton haladjon keresztül.

Könnyű lesz most az előbbi összegek közül a következő hármat, ugyanis az

$$\Sigma mbc;\quad \Sigma mca;\quad \Sigma mab \tag{23}$$

összegek mindegyikét oly egyes pontpárok összegére bontani, a mely párok mindegyike külön-külön zérus, s így ez összegek is zérusok.

Így az $\Sigma mbc$ összegben csupa oly pontpárok lépnek fel, a melyek $m$ pontjai rendre $+mbc$ és $-mbc$ szorozmányokat szolgáltatnak, mert ez összegre nézve a symmetria-sík a $(aOc)$ sík lévén, a pontpárhoz tartozó koordináták

$$+a,\ +b,\ +c \quad \text{és} \quad +a,\ -b,\ +c.$$

Éppen így az $\Sigma mca$ összegre nézve a $(bOc)$ a symmetria-sík; a pontpárok, a melyekre ez az összeg szétbontható, $+mca$ és $-mca$ szorozmányokat szolgáltatnak és a két $m$ tömegpont koordinátái itt:

$$+a,\ +b,\ +c; \quad \text{és} \quad -a,\ +b,\ +c.$$

Végre az $\Sigma mab$ összegre nézve a $(bOc)$ és az $(aOc)$ síkok a symmetria-síkok és a pontpárok, a melyekre ez az összeg szétbontható, az $+mab$ és $-mab$ szorozmányokat szolgáltatják; a *két* idetartozó $m$ tömegpont koordinátái lehetnek :

$$+a,\ +b,\ +c \quad \text{és} \quad -a,\ +b,\ +c;$$

vagy:

$$+a,\ +b,\ +c \quad \text{és} \quad +a,\ -b,\ +c.$$

Ezek szerint a fentírt (23) összegek zérussal egyenlők.

Legyen továbbá $K_a$ és $K_c$ a lengő testnek tehetetlenségi nyomatéka az $\overline{Oa}$, illetőleg az $\overline{Oc}$ tengelyre vonatkozólag; ezekre nézve áll:

$$K_a = \Sigma m\,(b^2+c^2)\,; \quad K_c = \Sigma m\,(a^2+b^2)\,; \tag{24$_a$}$$

azaz nyerjük a (22)-ben írt jobboldali összegek elsejére nézve:

$$-\big(\Sigma m\,(a^2-c^2)\big) = K_a - K_c. \tag{24}$$

Mindezeket tekintetbe véve, az (19)- és (21)-ben írt összegekből marad:

$$\begin{aligned} \Sigma m a_0^2 &= \cos^2\varepsilon\,(\Sigma m a^2) + \sin^2\varepsilon\,(\Sigma m c^2)\,; \\ \Sigma m a_0 b_0 &= 0\,; \\ \Sigma m a_0 c_0 &= \tfrac{1}{2}\sin(2\varepsilon)\,\{K_a - K_c\}. \end{aligned} \tag{25}$$

E szerint a (18) és (21) alapján az $F_{(\Delta g)}$ és az $F_{(\mathfrak{T})}$ forgatónyomatékok redukálódnak a következő kifejezésekre:

$$\begin{aligned} F_{(\Delta g)} = &+ \frac{4\pi}{\mathfrak{T}}\cdot\Omega\cdot\cos\varphi\,\{\cos^2\varepsilon\,(\Sigma m a^2) + \\ &+ \sin^2\varepsilon\,(\Sigma m c^2)\}\cos\left(2\pi\cdot\frac{t}{\mathfrak{T}}\right); \end{aligned} \tag{26}$$

$$F_{(\mathfrak{T})} = +\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\,\{K_a - K_c\}\sin(2\varepsilon). \tag{27}$$

### *4. A lengő mérelgrúd mozgás-egyenlete első megközelítésben. Teljes megoldása.*

A fentiekben a (3), (6), (26), (27)-ben előtüntetett kifejezéseiből a ható $F_{(g)}$ $F_{(k)}$, $F_{(\Delta g)}$, $F_{(\mathfrak{T})}$ forgató nyomatékoknak a mérlegrúd mozgás-egyenlete:

$$K_b\,\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = F_{(g)} + F_{(k)} + F_{(\Delta g)} + F_{(\mathfrak{T})},$$

avagy:

$$\begin{aligned} K_b\,\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = &- Mgs.\sin\varepsilon - \Gamma\frac{d\varepsilon}{dt} - \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2\frac{1}{2}\,(K_c - K_a)\sin(2\varepsilon) + \\ &+ \frac{4\pi}{\mathfrak{T}}\cdot\Omega\cos\varphi\,\{\cos^2\varepsilon\,(\Sigma m a^2) + \sin^2\varepsilon\,(\Sigma m c^2)\}\cos\left(2\pi\,\frac{t}{\mathfrak{T}}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

E mellett feltételeztük azt, hogy a mérlegrúdra ható csillapító erő az eszköznek forgatása folytán nem szenved változást, azaz, hogy $\Gamma$ ugyanaz marad a nem forgatott és a forgatott eszközre nézve; ez oly feltevés, mely nagyon valószínűnek mondható. Az ettől netán felmerülhető eltérést csak külön e végből megejtendő oly kisérleti megvizsgálás alapján lehetne megállapítani, a melynél a mérlegrúdnak csillapítási viszonya úgy a nem forgatott, mint a forgatott eszköz esetén figyeltetnék meg. Az eddigi, itt a forgatott mérlegrúd esetén e czélból végzett megfigyelések nem mutatkoztak eléggé alkalmasnak arra, hogy segélyükkel e kérdést véglegesen eldönteni lehetne.

*4a.* A (28) alatti mozgásegyenletet minden elhanyagolás mellőzésével állítottuk elő; de az e formájában megnyilatkozó összefüggés az $\varepsilon$ lengési szög és a $t$ folyó idő között nem nagyon egyszerű, s így az egyenlet tárgyalása és fejtegetése jelentékeny bonyodalmakkal járna.

Ezért az egyenlet első megközelítése tárgyalására szorítkozunk, mely teljesen megfejthető; ez a megközelítés egyszersmind kielégítő betekintést nyújthat az itt várható lengési vonatkozásokba.

Legyen e szerint a továbbiakban az $\varepsilon$ változó szög oly kicsiny, hogy a $\sin\varepsilon$, $\frac{1}{2}\sin(2\varepsilon)$, $\cos^2\varepsilon$, $\sin^2\varepsilon$ helyébe rendre írhatjuk az értékeket:

$$\varepsilon;\quad \varepsilon;\quad 1;\quad 0.$$

Ekkor a (28) egyenletből:

$$\begin{aligned} K_b \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = &- Mgs.\varepsilon - (K_c - K_a)\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2 \cdot \varepsilon - \Gamma \frac{d\varepsilon}{dt} + \\ &+ \frac{4\pi}{\mathfrak{T}} \cdot \Omega \cos\varphi\,(\Sigma m a^2) \cos\left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}}\right); \end{aligned} \tag{29}$$

és ha rövidség kedveért írunk:

$$\begin{aligned} &\frac{Mgs}{K_b} = \omega_0^2; \qquad \frac{Mgs}{K_b} + \frac{K_c - K_a}{K_b} \cdot \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2 = \omega^2; \\ &\frac{\Gamma}{K_b} = k; \qquad \frac{4\pi}{\mathfrak{T}} \cdot \Omega \cos\varphi\,(\Sigma m a^2) = A; \end{aligned} \tag{30}$$

lesz:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + k \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + \omega^2.\varepsilon = \frac{A}{K_b} \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}}\right). \tag{31}$$

Ez egyenlet teljes megoldása így írható:[1]

$$\varepsilon = E.e^{-\frac{1}{2}kt}.\cos\left(t\sqrt{\omega^2-\tfrac{1}{4}k^2}+2\pi\delta\right)+$$
$$+\frac{A}{K_b}\cdot\frac{1}{\left\{\left[\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2-\omega^2\right]^2+\frac{4\pi^2}{\mathfrak{T}^2}k^2\right\}^{1/2}}\cdot\cos\left(2\pi\frac{t}{\mathfrak{T}}+2\pi\triangle\right); \qquad (32)$$

hol $E$ és $\delta$ az integratio állandói és a $\triangle$-ra nézve áll:

$$\operatorname{tg}(2\pi\triangle)=\frac{\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\cdot k}{\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2-\omega^2}. \qquad (33)$$

Ebben az alakjában ez az általános megoldás mutatja, hogy az $\varepsilon$ teljesen különböző jellegű *két* részből áll.

Az *első tagja* ugyanis

$$E\cdot e^{-\frac{1}{2}kt}.\cos\left(t\sqrt{\omega^2-\tfrac{1}{4}k^2}+2\pi\delta\right), \qquad (34)$$

hasonlóan mint a (8)-ban, egy csillapított egyszerűen harmonikus lengést jelent, melynek amplitudója

$$E.e^{-\frac{1}{2}kt} \qquad (35)$$

az idő folytával fogy és rendesen rövid időn belül észrevehetetlen kicsiny lesz; e lengés időszakasza $T'$, hol:

$$\omega^2-\frac{1}{4}k^2=\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2=\frac{Mgs}{K_b}+\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2\cdot\frac{K_c-K_a}{K_b}-\frac{1}{4}k^2;$$

vagy tekintettel (5)-re

$$\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2=\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2\cdot\frac{K_c-K_a}{K_b}-\frac{1}{4}k^2. \qquad (36)$$

A lengés logarithmusi dekrementuma itt, hasonlóan, mint (11)-ben

$$\log\vartheta'=\tfrac{1}{4}kT';$$

---

[1] V. ö. például FRÖHLICH I., Dynamika 198. §, 456–459. l. Budapest, 1896. Különösen a (10) kifejezések másodikát.

úgy, hogy

$$k = \frac{4 \log \vartheta'}{T'}, \tag{37}$$

a hol azonban, miként fent a 15. oldalon említettük, feltételeztük azt, hogy $k$ csillapodási együttható nem szenved változást az egész eszköznek az $\overline{OZ}$ függélyes tengely körüli forgatása folytán.

A *második tagja* az általános megoldásnak a (32) kifejezésnek az a része, a mely az időben maradandó, egyszerűen harmonikus, de *kényszerített* lengést jelent:

$$\frac{A}{K_b} \cdot \frac{\cos\left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} + 2\pi\Delta\right)}{\left\{\left[\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2 - \omega^2\right]^2 + \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2 \cdot k^2\right\}^{1/2}}. \tag{38}$$

E maradandó, stationárius lengés amplitudója *maximumot* ér el, ha

$$\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2 = \omega^2; \tag{39}$$

szóval itt *mozgásbeli resonantia* következik be, a mikor

$$\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} = \frac{2\pi}{T_0'} \quad \text{vagy} \quad \mathfrak{T} = T_0', \tag{40}$$

hol a (30) szerint

$$T_0' = 2\pi \left\{\frac{Mgs}{K_b} + \frac{K_c - K_a}{K_b} \cdot \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2\right\}^{-1/2},$$

avagy még (5) szerint:

$$\left(\frac{2\pi}{T_0'}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{K_c - K_a}{K_b} \cdot \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2. \tag{41}$$

Itt $T_0'$ jelenti a lengő mérlegrúd ama kettős lengési idejét, a melyet e rúd mutatna, a mikor a közönséges földnehézségi erőn kívül még azok a középpontfutó erők működnének, a melyek az $\overline{OZ}$ tengely körüli forgatás folytán keletkeznek; e mellett azonban a csillapodás nem lépne fel, és a földnehézségi erő változása sem volna jelen.

E szerint a (38)-ban kifejezett kényszerített lengés amplitudójának a $\mathfrak{T} = T_0'$ resonantiánál fellépő maximalis értéke lesz:

$$A_{\max} = \frac{A}{K_b} \cdot \frac{1}{\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \cdot k} = \frac{A}{K_b} \cdot \frac{T_0'}{2\pi k}, \tag{42}$$

hol a (11) és a (37) szerint:

$$kK_b = \frac{4K_b}{T} \log \vartheta = \frac{4.K_b}{T'} \log \vartheta' ;$$

és benne a (9), (10), (11) szerint $T$ és a $\vartheta$ a *nem* forgatott készülék esetén a mérlegrúd csillapított mozgásából egyenes megfigyelések alapján határozható meg. A (30) tekintetbevételével a fent írt maximalis amplitudo:

$$A_{\max} = 2\Omega \cos \varphi \frac{\Sigma m a^2}{k.K_b}, \tag{43}$$

a miből a $k.K_b$ értékének a (11) és a (37)-ből való helyettesítésével

$$\Omega \cos \varphi = 2A_{\max} \frac{K_b}{\Sigma m a^2} \frac{\log \vartheta}{T} ; \tag{44}$$

az utolsó tényező helyett, mint fent is, írható: $\frac{\log \vartheta'}{T'}$.

Szabadjon itt megjegyeznem, hogy a $K_b$ tehetetlenségi nyomaték kisérletileg meghatározható, vagy pedig, pontosan méretezett és kidolgozott mérlegrúdnál, számbelileg is igen jól kiértékesíthető; az $A_{\max}$ értékét közvetetlenül szolgáltatja a megfigyelés; v. ö. alább a 4. §-ot; továbbá, az $(\Sigma m a^2)$ összeg jelenti a rúdnak a $(bOc)$ symmetria-*sík*ra vonatkoztatott négyzetes tömegnyomatékát, a mely symmetrikus mérlegrúd esetén szintén könnyen kiértékesíthető. Végre pedig vonatkozik a $T$ és a $\vartheta$, mint eddig is mindig, a *nem* forgatott mérlegrúdnak egyszerűen harmonikus, csillapított mozgására, (6)—(11), a mely adatok egyenes megfigyelésekből erednek.

Ez utóbbiakkal szemben a $T'$ és a $\vartheta'$ mennyiségeknek közvetetlen észleletek alapján való meghatározása bizonyos kisérleti nehézségekbe látszik ütközni, miként már fent, a 4. pont végén a (28) után jeleztük; mindazonáltal számbelileg kiértékesithetők a mérlegrúd méreteiből és tömeg-eloszlásából.

Abban az esetben, ha az eszköz forgatása folytán a csillapító erő nem változik, akkor mindig áll:

$$\frac{1}{4}k = \frac{\log \vartheta}{T} = \frac{\log \vartheta'}{T'}.$$

Sajnos, jelenleg nem állanak rendelkezésemre rendszeres, quantitative végzett megfigyelések vagy ilyenek eredményei; és nem végezhetek egyhamar, mostani beteg állapotomban ily kisérletezéseket.

Legyen szabad azonban felemlítenem, hogy eddigi kisérleteimhez fémből készített oly mérlegrudakat használtam, a melyek kettős lengési tartama húsz- és harmincz másodpercz között volt; ezek a kivánt czélnak megfeleltek.

Válasszunk lengő testnek például oly mérlegrudat, mely egyszerűen derékszögű tégläny-alakú, éleinek *fél*hossza pedig rendre:

$$a = 3 \text{ cm}; \quad b = 2 \text{ cm}; \quad c = 1.\text{cm};$$

térfogata e szerint 48 $\text{cm}^3$; ha még tömege sűrűségét 10-nek választjuk, akkor egész tömege: $M = 480$ gramm.

A továbbiakra nézve adódik:

$$K_b = \tfrac{1}{3} M (c^2 + a^2) = 1600 \text{ gr.cm}^2,$$

valamint az összeg:

$$\Sigma ma^2 = \tfrac{1}{3} M.a^2 = 1440 \text{ gr.cm}^2.$$

E szerint a (44)-ben fellépő hányados itt:

$$\frac{K_b}{\Sigma ma^2} = \frac{10}{9};$$

azaz, a számegységnél valamivel nagyobb érték.

Ha a mérlegrúd alakja az $\overline{Oa}$ tengely mentén még jobban van megnyújtva, ez a hányados még jobban közeledik a számegységhez.

## 4. §. Hogy figyelhető meg és hogy határozható meg kényszerített lengések maximális kilengése?

Ha a maximalis amplitudo elég nagy és elér például néhány ívfokot, akkor a megnövekvése egészen az elérhető határértékig már szabad szemmel követhető; mutatók segélyével, a milyenek a közönséges mérlegkaroknál a mérleg-nyelvek, az amplitudo mérése jobban végezhető.

Kisebb kilengéseknél azonban és a mérhetőség pontosságának emelése végett szükségesnek látszik a szögmérésnél használatos optikai segédeszközöket alkalmazni. Az előálló jelenség akkor nagyon éles alakban jelentkezik, a mely mint előadási kisérlet is jól értékesíthető.

A 3. ábra talán fölöslegessé tesz minden további leírást. A függőleges tengely körüli forgatás által létesített hajlása a lengő testnek a maximalis amplitudo mértékeként szolgál.

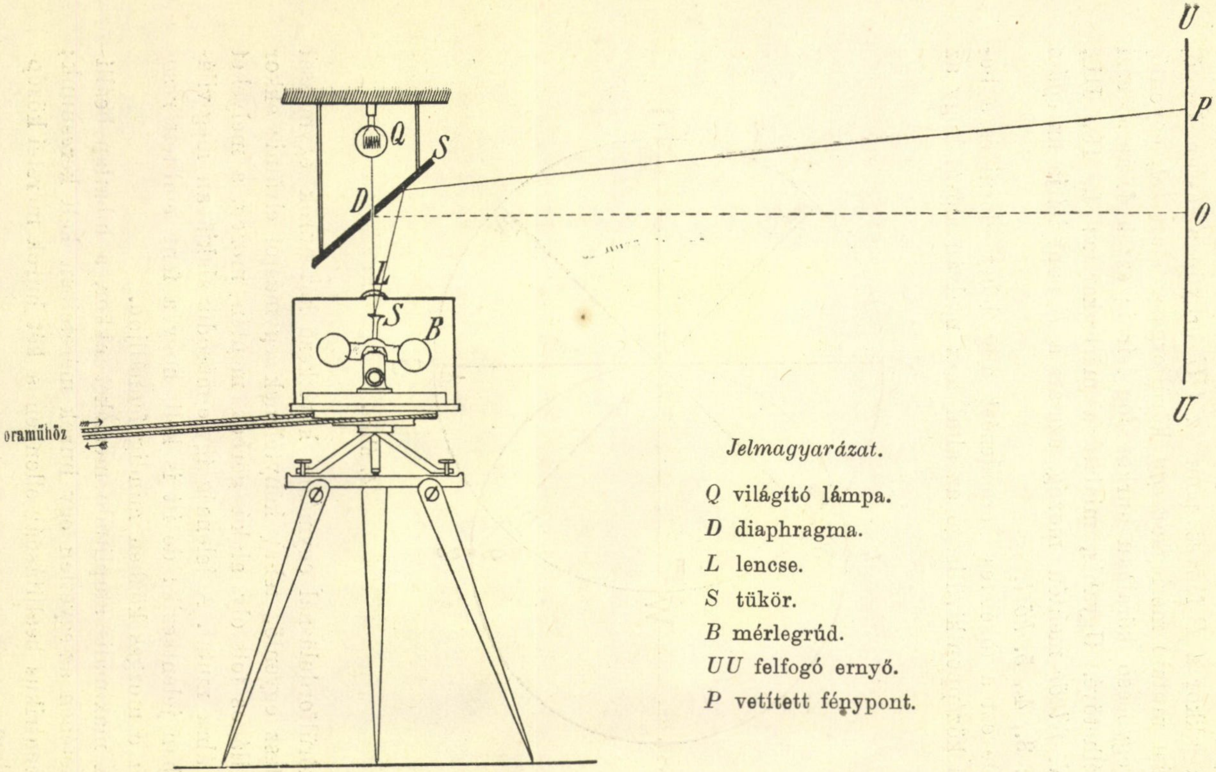
Tekintsük meg közelebbről az általam használt készülékeket.

Szilárd, ingadozásoknak alá nem vetett alapzatra oly forgatható állvány van felállítva, mely a theodolith-éhoz hasonló szerkezetű; állító csavarok segélyével az állvány forgás-tengelye pontosan a függélyesbe hozható; e forgást egy alkalmas óramű létesíti.

A *B* mérlegkar lengéseit a következő módon teszszük láthatóvá és mérhetővé:

A jól világitó *Q* lámpa által átvilágított *D* diaphragma nyílását lehetőleg pontosan a függélyes forgási tengelybe állítjuk fel. A *D* nyílásból lefelé haladó sugárnyaláb az eszköz szekrényére alkalmasan erősített *L* lencsén át a *B* mérlegkarra erősített kicsiny *S* tükörre esik; onnan visszaverődést szenved és újra az *L* lencsén áthaladva, a *D* diaphragma alsó, ezüstözött, tükröző lapjára jut, onnan visszaverődik és a felfogó *UU* ernyő *P* pontját találja és ott mint világos folt jelenik meg. Ez a fénylő, mozgó *P* pont akkor a következő pályát írja le, mindig feltéve, hogy a fent, a 3. §. $4_a$ pontjában részletezett: $\mathfrak{T} = T_0''$ *resonantia* (39), (40), (41) szerint bekövetkezett és a forgatás közben fennáll.

Ha a mérlegkar visszaverő kis tükrének beállítása hibátlan, azaz, a mikor a mérlegkar nyugalmi helyzetében úgy e tükör



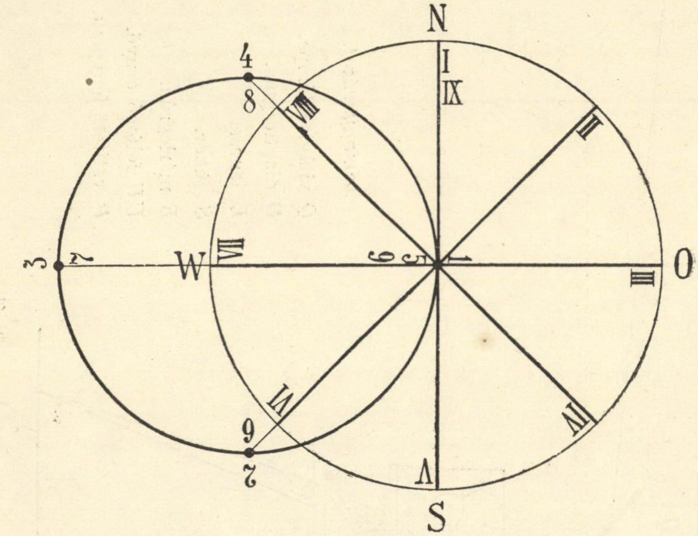

*Jelmagyarázat.*

*Q* világító lámpa.
*D* diaphragma.
*L* lencse.
*S* tükör.
*B* mérlegrúd.
*UU* felfogó ernyő.
*P* vetített fénypont.

3. ábra.

tengelye, mint a felülről beejtett sugárnyaláb pontosan függőleges: akkor a $P$ fényes pont az $UU$ ernyőn a lassan lengő, hajlítást mutató mérlegkar *egy* körülforgása alatt *két*, egyenlő, azaz egybeeső köralakú hurkot fog leírni; ezt a 4. ábra teszi szemlélhetővé. Ugyanis, mialatt a mérlegkar az I., II., III., IV., V. *félkör* mentén mozog, azalatt a $P$ pont leírja az *egész* 1., 2., 3., 4., 5. *kört*.

De ezt a tökéletes berendezést alig lehet elérni és a beállítás középpontkívülisége az által lesz nyilvánvalóvá, hogy az

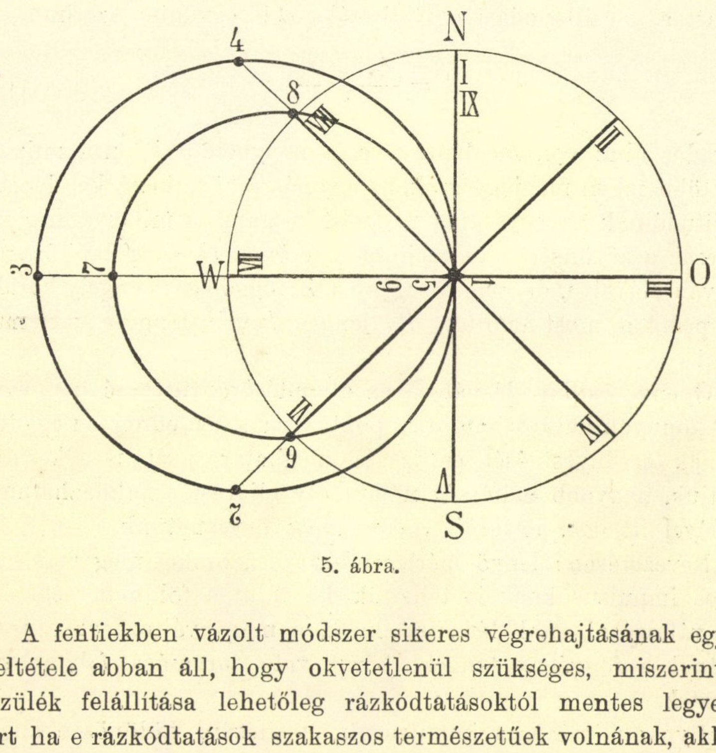



4. ábra.

*egy* körülfordulásnál egymásra következő két hurok egymással nem lesz egyenlő, tehát kénytelenek egymástól elválni; ekkor a $P$ világos folt oly alakú görbék mentén mozog, a melyeket az 5. ábra mutat. A jelenség így e második alakjában még világosabban jelentkezik; de itt is kell, hogy a fent említett *resonantia* e mozgás közben mindig fennálljon.

A maximalis amplitudo mértékét akkor, a hibátlan beállítás esetében az egyetlen egy hurok méreteiben kell keresnünk; az excentrikus beállításnál ellenben a két hurok méretei középértékében.

Sajnos, pontos adatokat nem nyújthatok, minthogy súlyos betegségem következtében munkálkodásomat félbe kellett szakítanom; és mert még most is ágyban fekvő vagyok, adataimat nem egészíthetem ki egyhamar. Mindazonáltal felemlíthetem azt, hogy húsz és egynéhány másodperczet kitevő $\mathfrak{T}$ körülforgási idő mellett oly lengéseket nyertem, a melyek egy körülbelől *öt* méter távolságban lévő felfogó ernyőn egy méter átmérőjű hurkok keletkezése által váltak felismerhetővé.




5. ábra.

A fentiekben vázolt módszer sikeres végrehajtásának egyik főfeltétele abban áll, hogy okvetetlenül szükséges, miszerint a készülék felállítása lehetőleg rázkódtatásoktól mentes legyen; mert ha e rázkódtatások szakaszos természetűek volnának, akkor ezek a megvizsgálandó lengéseket könnyen az által is meghamisíthatnák, hogy a keresett periodusokat saját időszakos impulsusaikkal zavarólag befolyásolhatnák.

Továbbá, a mint az természetes, szintén egyik főfeltétele a sikernek az oly kifogástalan óraműnek a használata, melynek folytonos és egyenletes a járása. Az általam használt, kitünő óramü a cambridgei műhelyekből való; eredetileg csillagászati messzelátók hajtása czéljaira készült.

## 5. Compensatiós eljárás.

A (43) egyenletben nyertük az összefüggést:

$$A_{\max} = 2\Omega \cos \varphi \frac{1}{k} \cdot \frac{\Sigma m a^2}{K_b} \cdot \tag{45}$$

Itt a $k$ csillapodási együttható a (11) egyenlet szerint

$$k = \frac{4.\log \vartheta}{T} \tag{11}$$

hányados által van meghatározva, a melyben $\vartheta$ jelenti, miként már több ízben megjegyeztük, az egymásra következő két lengés amplitudóinak az egységnél nagyobb osztatát, a mikor a mérlegrúd csak a közönséges földnehézségi erőnek és a csillapitó erőnek van alávetve, de *nem* forog az $OZ$ függőleges tengely körül; a $T$ pedig a most említett *ily* lengés *kettős* lengése tartamát jelenti.

Gyenge csillapodásnál ez az állandó $k$ együttható nem egészen könnyen határozható meg pontosan; s ha ennek az együtthatónak érvényesülését és így a meghatározását is elkerülni óhajtjuk, nagyobb nehézség nélkül oly eljárást alkalmazhatunk, a melyet itt *compensatiós módszernek* nevezhetünk.

Nevezetesen: lengő mérlegrúd-szerkezetünket még más szakaszos impulsusoknak is tehetjük ki, mint a földnehézségi erő ama változásai által létesítetteknek, a mely változások e szerkezetnek a függélyes tengely körül való forgatása folytán keletkeztek.

Ilynemű másfajta impulsusok létesítésére különösen alkalmasak a *mágnességi* erők. Lengő mérlegrudunkra, és pedig közepe táján, egy vagy két kicsiny mágnest úgy akarunk reá erősiteni, hogy *tengelyeik függőlegesek* és *déli pólusuk lefelé* irányítva legyenek. A két hatásnak (ugyanis a mérlegrúd forgatása és a földmágnesség vízszintes összetevője által létesített forgatónyomatéknak) egyszerű egymásra rakásából (superpositiójából) nyerjük a (26) alapján és a földmágnesség rendes hatása szerint az eredő *impulsust*, a mely itt váltakozó forgató-nyomatékképpen jelentkezik:

$$\frac{4\pi}{\mathfrak{T}}\cdot\Omega.\cos\varphi\,(\Sigma m a^2)\cos\left(2\pi\frac{t}{\mathfrak{T}}\right)-hM\cos\left(2\pi\frac{t}{\mathfrak{T}}\right), \tag{46}$$

hol $h$ a földmágnességi erő vízszintes összetevőjét jelenti és $M$ a használt, a mérlegrúdra erősített mágnesek összes mágnességi nyomatékát.

A felírt forgató nyomaték az $\overline{Ob}$ élre vonatkozik; ez impulsus amplitudója:

$$\mathfrak{A}=\frac{4\pi}{\mathfrak{T}}\cdot\Omega.\cos\varphi\,(\Sigma m a^2)-M.h. \tag{47}$$

Most kisérletünket úgy akarjuk berendezni, hogy a következő két feltétel teljesedjék: ugyanis *a)* a lengő mérlegrúd kettős lengési ideje egyenlő legyen az $\overline{OZ}$ körüli forgatás egy körülforgása időtartamával, azaz a (40) szerint

$$\mathfrak{T}=T_0'; \tag{40}$$

és *b)* egyidejűleg a mérlegrúd egyensúlyi helyzete az $(aOc)$ síkban oly módon legyen elérhető, hogy e helyzete egyszersmind a rúd *nyugalmi helyzete* is legyen, szóval, hogy akkor a fentirt $\mathfrak{A}$ amplitudo is zérussal egyenlő:

$$\mathfrak{A}_0=0. \tag{48}$$

Ha e két feltétel egyidejűleg elérhető, akkor az $\mathfrak{A}=0$-ből folyik:

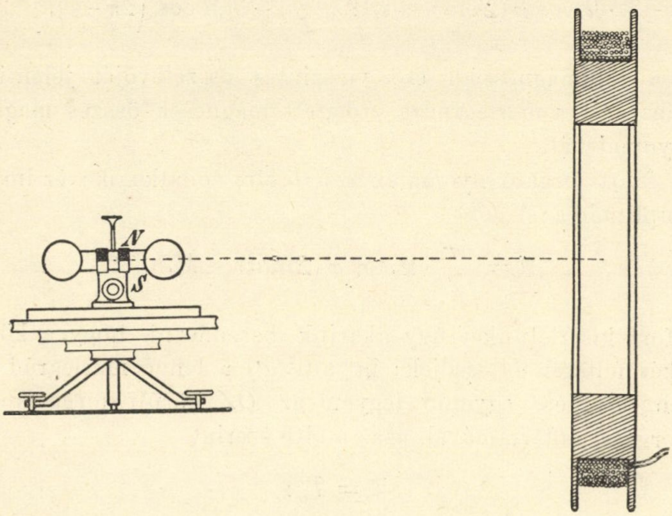
$$\Omega\cos\varphi\cdot\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\cdot 2\,(\Sigma m a^2)=HM. \tag{49}$$

Itt $H$ jelenti azt az eredő mágnességi erőt, a mely létesül, ha a földmágnességi $h$ erőhöz valamely $\Delta h$ pótló vízszintes mágnességi erő hozzájárul, lévén

$$H=h+\Delta h. \tag{$49_a$}$$

Ezt a mágnességi pótló erőt legczélszerűbben elektromágnességi tekercs által létesíthetni, a mint ezt a 6. ábra mutatja.

E végből az ily tekercsnek oly elhelyezést adhatunk, hogy az eredő mágnességi *vízszintes, H* erő a *földrajzi délkörbe* essék; akkor egyszersmind a fent (46) alatt írt kifejezése az impulsus forgatónyomatékának helyes lesz.




6. ábra.

Ilyformán a (49) formula az általunk felállított problémát teljesen megfejti és így belőle:

$$\Omega . \cos\varphi = \frac{HM}{4\pi} \cdot \frac{\mathfrak{T}}{\Sigma ma^2}; \tag{50}$$

azaz az $\Omega \cos\varphi$ keresett értéke adódik, és pedig jól mérhető mennyiségek segélyével kifejezetten; és ezzel egyszersmind a földtengely körüli forgásának szögsebessége ezen az úton is meghatározható.

## 6. §. Befejező megjegyzések.

A szaktárs, a ki nem sajnálta azt a fáradságot, a melyet neki az itt előadottak elolvasása okozott s a ki talán némi érdeklődéssel ment e közlésemen végig, több tekintetben meg fog bocsátani; különösen az iránt legyen elnéző, hogy észleleteimet nem részleteztem többrendbeli, habár csak előzetes adatok közlésével.

Magyarázatot nyújthat e tekintetben ennek az értekezésemnek keletkezési módja.

Négy hónap óta ágyhoz lévén kötve, nem folytathattam kisérleteimet és új megfigyeléseket nem végezhettem.

Mindazonáltal már nem várhattam tovább az eddig megállapított ténykörülmények és eredmények közzétételével.

1917. évi május hó 10.-én ugyanis bemutattam az előadó termemben összegyűlt Mathematikai és Physikai Társulatnak a felállított készülékemet és a vele végrehajtott kisérletet, néhány rövid, szóbeli magyarázó közlés kiséretében.

Néhány nappal későbben meglátogatott Korda Dezső úr, a zürichi polytechnikumon magántanár, elektrotechnikai előadások tartásával megbízott szakférfiú és engedélyt kért tőlem arra, hogy ezt a kisérletet a Schweizerische Geo-Physikalische Gesellschaft-nak bemutathassa. A valóságban meg is mutatta az ő mérlegrúdjának növekvő amplitudóit.[1] Azonban Korda tanár még többet is tett; «Relations entre les expériences d'Eötvös et de Foucault concernant la rotation de la Terre» czimen oly elmélkedéseket közölt,[2] a melyek czélzatát és czélját nem tudom egészen megérteni; de távol áll tőlem, hogy e jelen közleményem rendjén vele tudományos vitába bocsátkozzam.

Egyet azonban e közlésem végén nem hagyhatok említés nélkül: kedves kollegámnak, Fröhlich Izidor tanárnak meleg köszönetemet fejezem ki azért a segítségért, a melyben engemet, a beteg embert, különösen a 3. §. bonyolultabb formuláinak összeállítása tárgyában részesített.

De nemcsak az idősebb, hanem a fiatalabb barátaimról is

---

[1] Extrait des Archives des Sciences Physiques et Naturelles. Genève, Novembre 1917, t. XLIV, p. 369—370.

[2] Extrait des Communications de la Société Suisse de Physique, Decembre 1918, p. 338—340.

teszek említést, így mindenek előtt FEKETE JENŐ úrról, a ki az ábrák szerkesztése és megrajzolása körül, valamint az egész közlés szövegének összeállítása tekintetében igen nagy segítségemre volt.

Budapesten, 1919. évi márczius hó 31.-én.

---

(A M. T. Akadémia III. osztálya 1919. évi október 20.-án tartott üléséből.)