

VIZSGÁLATOK A GRAVITATIO ÉS MÁGNESSÉG KÖRÉBŐL.

(Előleges jelentés.)

B. EÖTVÖS LORÁND r. tagtól.

E jelentésemben a tárgyalt anyag terjedelméhez mérten röviden foglalom össze azon kutatásaim eredményét, melyeket immár nyolcz év óta a gravitációra és a földi mágnességre vonatkozólag végeztem. Azok a rendkívül érzékeny módszerek, melyeket különösen az erők változásainak mérésére megállapítanom sikerült, lehetővé tették a foglalkozást olyan feladatokkal, melyek eddig úgyszólván hozzáférhetlenek voltak. Így történt az, hogy a kutatás folyamán mindig újabb kérdések megoldására törekedvén, a már elért eredmények közzétételére, egyéb sokféle teendőm mellett, alig maradt időm. A m. t. akadémiának tettem ugyan időről-időre rövid előterjesztéseket munkám állásáról, de ez a néhány szó és még kevesebb sor nem volt elég arra, hogy annak eredményét biztosítsa és másoknak is hozzáférhetővé tegye. Addig is tehát, míg e feladatnak teljes mértékben eleget tehetni időm lesz, ezt az összefoglaló jelentést bocsátom közre, a mely, bár mellőztem benne az elméleti tárgyalások és számítások, valamint a kísérleti adatok részletes felsorolását, talán mégis elég lesz arra, hogy érthetővé tegye azt, a mi kutatásomban lényegesen új.

Kötelességet mulasztanék, ha, a midőn a magam munkáságáról szólok, említetlenül hagynám munkatársaim nevét. Éveken át buzgó segédem volt dr. KÖVESLIGETHY RADÓ, ma egyetemi rendkívüli tanár úr, és kutatásaim egész idején át, kezdetben mint tanuló, utóbb mint egyetemi tanársegéd velem együtt dolgozott dr. TANGL KÁROLY úr. Fogadják ma közreműködésükért hálás köszönetemet.

Az új eszközöket, melyekre vizsgálataimhoz szükségem volt, mind SÜSS NÁNDOR úr, az állami mechanikai tanműhely igazgatója

itt Budapesten készítette, avval a kiváló gondnal, pontossággal és csinnal, a mely keze munkáját jellemzi.

I. A nehézség térbeli változásainak méréséről.

1. A feladat.

Ismereteink a nehézség térbeli változásaira vonatkozólag, a felismerésükre szolgáló módszerek elégtelensége miatt, mindeddig nagyon hiányosak. Az inga e változások kicsinsységéhez mérten ki nem elégitő érzékenységgel csak nagy távolságokban teszi lehetővé azoknak felismerését, a mérleg pedig, úgy a mint azt JOLLY használta, ugyan érzékenyebben, hanem csak egy kiváltságos irányban, t. i. lefelé tárja fel a változás nagyságát. Azok a módszerek és azok az eszközök, melyekről e jelentésben fogok szólni, lehetővé teszik e változások lemérését kicsiny, néhány decimeternyi távolságokban és különböző irányokban. Sőt az e módszerek szerint tett mérések az ingával és JOLLY-féle mérleggel tett megfigyeléseket úgy egészítik ki, hogy ezekkel együtt a nehézség nagyságát és irányát teljesen ismertté teszik, nemcsak egyes pontokban, hanem a térnek egy olyan nagy kiterjedésű részében, a melyben ez erőt egyenletesen változónak feltételezhetjük. Ezt a czélt állítván magam elé, mindenekelőtt a megoldandó feladatokat fogom kijelölni.

A nehézségnek egyenletesen változó terében ez erő gyorsulásainak derékszögű összetevőit a következő egyenletek adják:

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \frac{\partial X}{\partial x} x + \frac{\partial X}{\partial y} y + \frac{\partial X}{\partial z} z, \\ Y &= Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial x} x + \frac{\partial Y}{\partial y} y + \frac{\partial Y}{\partial z} z, \\ Z &= Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial x} x + \frac{\partial Z}{\partial y} y + \frac{\partial Z}{\partial z} z, \end{aligned} \quad 1)$$

ezekben X, Y, Z a gyorsulás összetevőit az x, y, z pontban, X_0, Y_0, Z_0 pedig ugyanazokat a tengelyrendszer kezdetpontjában jelölik.

A nehézséget mint a földi tömegek vonzásának és a föld for-

gásából eredő középpont futó erőnek eredőjét állítván elő, ha V -vel a föld tömegének potenciál függvényét, ω -val a föld forgásának szögsebességét, ρ -val az x, y, z pont forgás-sugarát és U -val a nehézség erőfüggvényét jelöljük, akkor írhatjuk:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} (V + \frac{1}{2} \rho^2 \omega^2) = \frac{\partial U}{\partial x}, \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} (V + \frac{1}{2} \rho^2 \omega^2) = \frac{\partial U}{\partial y}, \\ Z &= \frac{\partial}{\partial z} (V + \frac{1}{2} \rho^2 \omega^2) = \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \quad 2)$$

E szerint:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial Z}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \end{aligned} \quad 3)$$

és

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2\omega^2. \quad 4)$$

Ha most a koordináta-rendszert úgy választjuk, hogy Z tengelye egyirányú legyen a nehézséggel a koordináták kezdő-pontjában, akkor:

$$X_0=0 \quad Y_0=0 \quad \text{és} \quad Z_0=g_0.$$

Az 1) egyenletek a nehézség gyorsulását az egész egyenleteken változó térben tizenkét állandó segítségével fejezik ki, ez állandók közül a függőn a Z tengely irányát jelölő Z_0 -nak értékét pedig az inga adja meg. A többi kilencz, a változás arányát kifejező állandó között a 3) és 4) egyenletek négy összefüggést állapítanak meg, úgy hogy a feladat teljes megoldására még öt adatot kell mérés által meghatározni. Mielőtt az erre szolgáló módszerekről szólnék, előre bocsátom azon egyszerű vonatkozások felsorolását, melyekben az itt szereplő mennyiségek a nehézség niveau-felületéhez, az $U=C$ felülethez állanak. Ha ugyanis ρ_x e felület normál

metszetének görbületi sugarát jelenti az x tengely irányában, ρ_y pedig ugyanazt az y tengely irányában, akkor :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{g_0}{\rho_x}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{g_0}{\rho_y};$$

tengelyrendszerünket azonban úgy is választhatjuk, hogy X és Y tengelyei a főgörbületek irányába essenek, s akkor ρ_1 és ρ_2 -vel a főgörbületi sugarakat jelölván, leszen :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{g_0}{\rho_1}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{g_0}{\rho_2}$$

és

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0.$$

Az ezeken kívül itt meghatározandó $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ és $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ differenciál-hányadosoknak kettős jelentősége van. Ha írjuk :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

úgy látjuk, hogy e mennyiségek a nehézség változásának arányát az X , illetve Y tengely irányában állítják elő. Tegyük még :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s} \cos \alpha$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial s} \sin \alpha$$

∂s -sel a nehézség niveau-felületén az állandó nehézség görbéjére merőleges ívelemet jelölván, akkor a $\frac{\partial g}{\partial x}$ és $\frac{\partial g}{\partial y}$ meghatározását a $\frac{\partial g}{\partial s}$

és az α szög meghatározásával pótolhatjuk. A $\frac{\partial g}{\partial s}$ nem egyéb mint a nehézség változásának aránya magában a niveau-felületben, az α pedig az e változás irányát meghatározó szög.

A fenti mennyiségek második értelmezéséhez akkor jutunk, ha teszszük

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z},$$

ebből t. i. azt következtethetjük, hogy z -vel a kezdetpont alatt fekvő pontban $\frac{\partial X}{\partial z} z$ és $\frac{\partial Y}{\partial z} z$ gyorsulások járulnak hozzá a z irányába eső g gyorsuláshoz, úgy hogy az eredő nehézség e pontban

$$\frac{1}{g} \frac{\partial X}{\partial z} z \text{ és } \frac{1}{g} \frac{\partial Y}{\partial z} z$$

szögekkel hajlik el a Z tengelytől. Így tehát:

$$E_x = \frac{1}{g} \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \text{ és } E_y = \frac{1}{g} \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$$

azokat a szögeket jelentik, melyekkel a nehézség iránya, a hosszegységgel lefelé haladva, az XZ , illetőleg YZ síkokban a Z tengelytől eltér. Ez a nehézség irányváltozásának aránya lefelé.

A feladatunk teljes megoldására szükséges öt adat e szerint meg lesz határozva, ha ismerjük egyrészt a főgörbületek irányát és nagyságát, másrészt a nehézség változásának irányát és nagyságát magában a niveau-felületben. Mivel pedig a JOLLY-féle mérle-

lés a 4) egyenlet értelmében az $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ értékét adja, azért a főgörbületi sugarak ismeretére elégséges lesz az $\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}$ értékének meghatározása, a melyről alább fogok szólni.

2. A módszer.

A fent körvonalozott feladat megoldására a COULOMB-féle mérleget használtam.

Az előbbi fejezet 1) és 3) egyenleteinek értelmében a COULOMB-féle mérlegrúd nehézségének forgásmomentumát a felfüggesztő drót tengelyébe helyezett Z tengely körül a következő alakban fejezem ki:

$$F = \int (Y_x - X_y) dm = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \int xy dm + \\ + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \int (x^2 - y^2) dm - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \int xz dm - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \int yz dm$$

a hol az integrálás kiterjesztendő a dróton függő összes tömegekre.

Ha pedig a mérlegrúd tömegelemeinek helyzetét egy szilárdan e rúdhoz kötött $\xi\eta\zeta$ tengelyrendszerre vonatkoztatjuk, melynek ζ tengelye a z forgási tengelyvel összeesik, ξ tengelye pedig a rúddal együtt forogván, az x tengelyvel a szöget képez, akkor a forgásmomentum értéke:

$$F = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2a}{2} \int (\xi^2 - \eta^2) dm + \\ + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \cos 2a \int \xi\eta dm + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2a \int (\xi^2 - \eta^2) dm - \\ - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} 2 \sin 2a \int \xi\eta dm + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cos a - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \sin a \right) \int \xi\zeta dm - \\ - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \sin a + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \cos a \right) \int \eta\zeta dm. \quad 5)$$

Ez az egyenlet a mérlegtestnek bármely alakjára vonatkozólag érvényes. Célom elérésére két alakot használtam. Az első alak egyszerű hengeres rúd volt, végén golyó vagy hengeralakú tömegekkel, a második alak ettől annyiban különbözött, hogy a rúd egyik végén a golyó vagy henger fonálra függesztve, mélyebben volt elhelyezve. A ξ tengelyt a rúd geometriai tengelyébe helyezvén, mindkét esetben:

$$\int \xi \eta dm = 0,$$

$$\int \zeta \eta dm = 0,$$

az első esetben ezenkívül :

$$\int \xi \zeta dm = 0,$$

a másodikban ellenben :

$$\int \xi \zeta dm = hlm,$$

a hol l a felfüggesztett golyó karját, m tömegét, h pedig függélyes távolát jelöli a rúdtól, illetőleg az annak másik végén megerősített golyótól.

Vizsgáljuk most meg a COULOMB-féle mérleg mechanikai viszonyait külön-külön e két esetre.

Az első esetben, t. i. a rúd két végén egy magasságban megerősített golyók esetében, az 5) egyenlet szerint lesz :

$$F = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} \int (\xi^2 - \eta^2) dm + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \int (\xi^2 - \eta^2) dm;$$

ha pedig az X , Y tengelyeket úgy választjuk, hogy $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$, azaz, hogy X és Y a főgörbületek irányai legyenek (lásd fent), akkor :

$$F = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} \int (\xi^2 - \eta^2) dm.$$

Tegyük :

$$\int (\xi^2 - \eta^2) dm = K',$$

és :

$$\int (\xi^2 + \eta^2) dm = K,$$

és :

$$\frac{K'}{K} = (1 - \varepsilon).$$

K a rúd tehetetlenségi momentumát fejezi ki, hosszúkás rúd esetében az ε kicsiny, sőt a legtöbb esetben elhanyagolható lesz.

A nehézségnek forgásmomentuma F a COULOMB-mérleg drótját vagy fonalát ϑ szöggel megcsavarja úgy, hogy :

$$\tau \vartheta = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) K (1 - \varepsilon) \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

vagy

$$\vartheta\tau = g \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) K(1-\varepsilon) \frac{\sin 2a}{2}$$

$\tau\vartheta$ a drótnak csavarás ellenében ható forgásmomentumát állítván elő.

A ϑ szöget a mérleg rúdjának egy egyetlen állásából ugyan nem olvashatjuk le, de ha a mérleg szekrényét torsio fejével együtt függélyes tengely körül úgy forgatjuk, hogy a rúd középvonala az x tengelylyel az előbbtől eltérő a' szöget képezzen, akkor a drót csavarási szöge is megváltozik, s ez a változás ($\vartheta' - \vartheta$) a rúdhoz és a szekrényhez erősített mutatóknak vagy jobban tükröknek viszonyos elfordulásából felismerhető és mérhető lesz.

A rúdnak három állása elég már arra, hogy a drót csavarásában előálló változások észlelése alapján úgy az a szög értékét, mint a $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)$ mennyiség értékét megállapíthassuk; jobban áttekinthető s a számításban egyszerűbb lesz azonban eljárásunk, ha négy állást létesítünk, úgy hogy az állások közül kettő-kettő egymásra merőleges legyen, e két pár pedig egymással 45 foknyi szöget képezzen.

Így lesz az eredeti állásban:

$$\vartheta = \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2a}{2},$$

erre merőlegesen:

$$\vartheta' = - \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2a}{2},$$

az eredetitől 45 fokra:

$$\vartheta_1 = \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\cos 2a}{2},$$

az eredetitől 135 fokra:

$$\vartheta'_1 = - \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\cos 2a}{2};$$

e szerint:

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{K}{\tau} (1-\varepsilon) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2a,$$

$$\vartheta'_1 - \vartheta_1 = \frac{K}{\tau} (1-\varepsilon) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \cos 2a,$$

és:

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{\vartheta' - \vartheta}{\vartheta_1' - \vartheta_1},$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = \frac{\tau}{K(1-\varepsilon)} \sqrt{(\vartheta' - \vartheta)^2 + (\vartheta_1' - \vartheta_1)^2};$$

az ε -nak amúgy is kicsiny értéke, a mérlegrúd méreteiből, $\frac{\tau}{K}$ pedig annak lengési idejéből határozható meg.

Légüres térben végtelen kicsiny amplitudókkal egyedül a drót rugalmassága által okozott lengések esetében volna:

$$\frac{\tau}{K} = \frac{\pi^2}{T^2}.$$

A levegő ellenállása és a nehézség változásaiból eredő forgásmomentum befolyása azonban különös megfontolást követel. A rúd mozgásának differenciálegyenletét ismert alakjában írjuk:

$$K \frac{d^2 \omega}{dt^2} + H \frac{d\omega}{dt} + F\omega = 0,$$

itt ω a szögkitérést, H a levegő surlódásától függő állandót, K mint előbb a tehetetlenségi momentumot jelenti. Ebből folyólag a rúd egy pontjának kitérése:

$$\omega = ae^{-\beta t} \sin \pi \frac{t}{T},$$

a hol

$$\beta = \frac{H}{2K},$$

és

$$\frac{\pi^2}{T^2} = \frac{F}{K} - \beta^2.$$

A mi esetünkben:

$$F = \tau - \frac{\partial F}{\partial \omega} = \tau - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) K(1-\varepsilon) \cos 2a,$$

s így

$$\frac{\pi^2}{T^2} = \frac{\tau}{K} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (1-\varepsilon) \cos 2a - \beta^2,$$

ha pedig α helyébe $\alpha + \frac{\pi}{2}$ értéket teszünk, a mi a rúd merőleges állításának felel meg, akkor :

$$\frac{\pi^2}{T'^2} = \frac{\tau}{K} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (1 - \varepsilon) \cos 2\alpha - \beta^2$$

ezekből kapjuk :

$$\pi^2 \left(\frac{1}{T^2} + \frac{1}{T'^2} \right) = \frac{2\tau}{K} - 2\beta^2$$

s így kiszámíthatjuk $\frac{\tau}{K}$ értékét.

Ez okoskodásunkból kitűnik még az is, hogy a lengési idők észlelése már egymagában is elég az elcsavarodások által lemérhető adatok meghatározására. Két egymásra merőleges helyzetre nézve ugyanis az előbb megállapított értékekből nyerjük :

$$\pi^2 \left(\frac{1}{T'^2} - \frac{1}{T^2} \right) = 2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (1 - \varepsilon) \cos 2\alpha,$$

és két más ezekkel 45 foknyi szögletet képező helyzetre vonatkozólag

$$\pi^2 \left(\frac{1}{T_1'^2} - \frac{1}{T_1^2} \right) = 2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (1 - \varepsilon) \sin 2\alpha$$

tehát úgy a főgörbületek iránya α , mint

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = g \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)$$

meg vannak határozva.

Ha az általam használt mérlegrudakra vonatkozólag amúgy is kicsiny ε mennyiséget elhanyagoljuk, és a lengési idő értékét egyedül a drót rugalmassága folytán T_0 -al jelöljük, akkor közelítésben a következőleg mondhatjuk ki okoskodásunk eredményét: a COULOMB-féle mérleg drótja a mérlegszekrény és torsiofejnek együttes forgatása közben megcsavarodik, e csavarodás nagysága a rúd-
nak 90 fokkal egyenlő elforgatásánál:

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{T_0^2}{\pi^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2a = \frac{T_0^2}{\pi^2} g \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \sin 2a;$$

a mérlegrúd lengési ideje ugyanilyen forgatásnál megváltozik, 90 fokos forgatásnál e változás:

$$T' - T = - \frac{T_0^3}{\pi^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \cos 2a = - \frac{T_0^3}{\pi^2} g \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \cos 2a$$

$\vartheta' - \vartheta$ maximum lesz, mikor $a = 45^\circ$ és $= 135^\circ$ $T' - T$ maximum lesz, mikor $a = 0$ és $= 90^\circ$, $(T' - T)_{\max} = T_0 (\vartheta' - \vartheta)_{\max}$.

A COULOMB-féle mérlegnek még azon második alakjáról kell most szólnom, melynél a rúd egyik végén a fonálon felfüggesztett tömeg mélyebben áll, mint az ellensúlyozó tömeg a rúd másik végén. Erre vonatkozólag már tudjuk, hogy

$$\int \xi \zeta dm = m l h$$

s így az 5) egyenlet tetszőlegesen irányított X tengelyre vonatkoztatva, adja:

$$F = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2a}{2} \int (\xi^2 - \eta^2) dm + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2a \int (\xi^2 - \eta^2) dm + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cos a - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \sin a \right) h l m.$$

Ha a mérlegrudat előbb az X tengely irányába állítjuk, úgy hogy $a = 0$ legyen s azután az eszköz szekrényét és vele a torsiofejet átforgatjuk addig, a míg $a = \pi$, akkor a mérődrót ($\vartheta' - \vartheta$) szöglettel csavarodik meg, e szögletnek értéke az F értékéből kiszámítva:

$$\vartheta' - \vartheta = - \frac{2 h l m}{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = - 2 \frac{\partial g}{\partial y} \frac{h l m}{\tau}$$

és ha a rudat előbb $a = \frac{\pi}{2}$ azután $a = \frac{3\pi}{2}$ állásba hozzuk, akkor

e két helyzet között a csavarodás

$$\vartheta'_1 - \vartheta_1 = \frac{2 h l m}{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{h l m}{\tau}$$

az $\frac{l m}{\tau}$ mennyiséget vagy az eszköz méreteiből, vagy a függő súlyra

kivülről ható vonzó tömegek által okozott kitérésből könnyen meghatározhatjuk. Így a $\frac{\partial g}{\partial x}$ és a $\frac{\partial g}{\partial y}$ vízszintes irányú változásoknak, vagy eredőjüknek és ez eredő irányának ismeretéhez jutunk. Tudjuk már, hogy

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial s} = E$$

a nehézség irányváltozását lefelé méri.

A COULOMB-féle mérleg e két alakjában és e két módon használva, az előadottak szerint lehetővé teszi azt, hogy meghatározzuk egyrészt a nehézség niveau-felületének főgörbületi irányait és e főgörbületek különbségét $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$, másrészt a nehézség változását a niveau-felület érintő síkjában (a vízszintesben) és e változásnak irányát. Feladatunkat tehát teljesen megoldhatjuk, mert a JOLLY-féle mérlegelés a $\frac{\partial g}{\partial z}$ értékét adja s így a 4) egyenletből folyó

$$\frac{\partial g}{\partial z} = g \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) + 2\omega^2$$

egyenlet segélyével az $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$ értékével együtt magukat a ρ_1 és ρ_2 görbületi sugarakat is kiszámíthatjuk.

Megjegyzem még, hogy a függélyes síkban lengő inga mechanikáját abban a modorban tárgyalva, mint azt itt a COULOMB-féle ingára vonatkozólag röviden előadtam, az elmélet a $\frac{\partial g}{\partial z}$ meghatározására a JOLLY-féle eljárásnál előnyösebb módszerekkel kecseltet, azoknak megvalósítása azonban a vízszintes forgási tengelyeket létesítő szerkezetek tökéletlensége miatt nekem mindeddig nem sikerült.

3. Az eszközök.

A tervbe vett mérések kivitelére olyan eszközökről kellett gondoskodnom, melyeknek érzékenysége a lemérendő igen kicsiny erőknek megfelelő legyen. A megkívánt érzékenység fokának megítélése végett közlöm itt a lemérendő adatoknak értékeit egy olyan

mintaszerű földre vonatkozólag, a minőt közelítésben a föld alakjának s rajta a nehézség változásainak elötüntetésére szoktunk használni. Ilyen például LISTING forgás-ellipsoidja. Ennél:

$$a=637\ 736\ 500\ \text{C.}$$

$$b=635\ 529\ 800\ \text{C.}$$

és

$$g_{\varphi}=978\ 0728(1+0,005\ 201\ 3\ \sin^2\varphi)$$

A számítás ez adatokból $\varphi=47^{\circ}30'$ szélességre vonatkozólag, azaz Budapest helyzetére, a következő értékeket adja:

$$g=980,838$$

$$g\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = 4\ 836.10^{-12}$$

$$\frac{\partial g}{\partial s} = 7\ 960.10^{-12}$$

$$E = \frac{\frac{\partial g}{\partial s}}{g} = 8\ 115.10^{-15}$$

vagy

$$E=0,000\ 001\ 673\ \text{másodperc}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 3\ 080.10^{-9}.$$

A két végén golyókkal ellátott mérlegrúd drótjának elcsavarodása a legnagyobb akkor lesz, a mikor e rúd tengelye a meridián-nal 45 foknyi szögletet képez, a meridián két oldalán fekvő két ilyen állás között az elcsavarodás

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{T_0^2}{\pi^2} g \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)$$

s ha teszszük $T_0=1000$ s, akkor:

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{1000^2}{\pi^2} \cdot 4\ 836.10^{-12} = 0,000\ 490$$

azaz $1,7$ percz.

Ha pedig a lengési időt a meridián körül T -vel, arra merőlegesen T' -gyel jelöljük, akkor:

$$T - T' = T_0 (\vartheta' - \vartheta) = 0,49 \text{ s.}$$

azaz körülbelül egy fél másodperc.

Abban a második esetben, mikor a rúd egyik súlyát mélyebbre függesztjük, a rudat e mintaszerű földön a meridiánra merőleges két állásba helyezzük, ezek között a drót elcsavarodása :

$$\vartheta' - \vartheta = 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{hlm}{\tau};$$

egy eszközömnél például $h = 100 \text{ c.}$, $l = 13^{1/3} \text{ c.}$, $m = 30 \text{ gr.}$ és $\tau = 0,4 \text{ volt}$ s így esetünkben $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s}$ lévén, találjuk :

$$\vartheta' - \vartheta = 2,7 \ 960 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \ 000 = 0,001 \ 492$$

azaz körülbelül 5 perc.

Világos ezekből, hogy eszközeim szerkesztésénél mindenekelőtt nagy lengési idők létesítésére kellett törekednem s ennek a megfontolásnak köszönhetem, hogy sikerült lemérnem e kicsiny erőváltozásokat, melyek kisebb lengési idejű eszközök használatánál mindedig rejtve maradtak.

Ilyen nagy 10 egész 20 percnyi s egyes esetekben még ennél is nagyobb lengési idők és eddig aligha elért érzékenység mellett mérlegrúdjaim egyensúlyi állását úgy mint mozgását bámulatosan szabályossá tudtam tenni és pedig nemcsak jól védett pincékben, hanem a labororiumnak bármely helyiségében, sőt éjjel egyszerű vászonsátor alatt még a szabadban is.

Az egyetlen fogás, ha egyáltalában annak nevezhetem, az volt, hogy rúdjaimat kettősfalú és kicsiny magasságú fémszekrényekbe zártam. Vizsgálódásaim folyamán különböző alakú szekrényeket használtam, majd vízszintes hengeres csövet, mely a mérlegrúdat szorosan körülvette, majd lapos hosszúkás paralelepipedet, majd kis magasságú körhengert. Legelőnyösebbnek ez utolsó alakot találtam, a melyben a rúd szabadon lenghet s minden helyzetében egyformán áll a szekrény falaihoz viszonyítva.

A szekrények kettős, $\frac{1}{2}$ —1 centimetryi levegőréteg által egymástól elválasztott falai 2—4 millimeter vastag sárgarézből készültek, ilyen kettős falúak s ugyanakkora vastagságúak a drótot

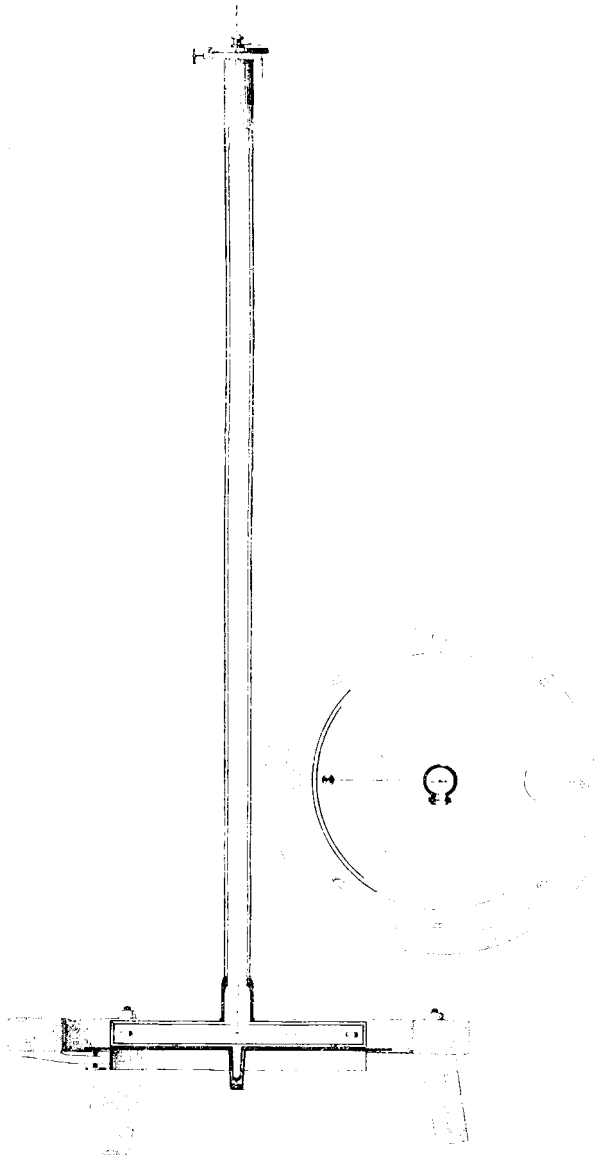
bezáró csövek is. A belső szekrényben ily módon az egyoldalú melegedések hatása jelentékenyen kisebbedik, s a külső hőmérsék-változások a minden részükben lehetőleg egyenlő vastagságú fémfalakon és légrétegeken át minden oldalról majdnem egyidejűleg hatolnak a rudat környező térbe. A csak két vagy három centimeter magas lengési térben a felfelé irányított légáramlások hatása is alig lesz érezhető. Ehhez hozzátéve még azt, hogy a minden oldalról jól vezető környezet a külső elektromos befolyásokat is teljesen kizárja, magyarázatát adtuk az eszközeimben a COULOMB-féle mérleggel eddig tett tapasztalatok után bizonyára meglepő állandóságnak.

A mérleg rúdját rendszeren 100—150 centimeter hosszú platindrótra függesztettem, a mely előzetesen már hónapok óta reá akasztott súlyokkal ki lett nyújtva. A rendszeren használt drót átmérője $\frac{1}{25}$ millimeter, hordképessége 120—130 gramm, a reá függesztett szerkezet súlya pedig 80—100 gramm volt. A drót egy méter hosszúságú részére vonatkozólag átlagban $\tau=0,3$ C. G. S.

Boys nyomán tettem kísérleteket ugyanakkora hordképességű és hosszúságú kvarczfonalakkal is, a melyeknek elkészíttetésük után azonnal bámulatosan állandó rugalmassága sok előnnyel kecsegtet, de különösen hordozható eszközeimnél egyelőre mégis megtartottam az előzetesen kinyújtott platinát, mert e nagy hordképességű rideg kvarczfonalak könnyen törnek. Érzékenységük is kisebb a platináénál, alig sikerült olyan 100 grammot hordó kvarczfonalat készítenem, melynek egy méter hosszú részére vonatkozólag τ az egységnél kisebb lett volna. A hosszú időn át kinyújtott és erősen megterhelt platindrótok is kielégítő állandóságot mutattak, s ha azonnal az eszközök új felállítása után némi járást tanusítottak, az is szabályos volt és így könnyen vehetem számításba.

E jelentésemben előterjesztendő vizsgálatok folyamán eszközeim száma nagyra nőtt s azért azoknak megkülönböztetése végett kénytelen vagyok azoknak neveket adni.

Így azt az eszközt, melylyel a $g\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$ mennyiséget mértem, *görbületi variometernek*, azt a másikat pedig, melylyel a nehézség változását a vízszintesben, s egyszersmind a nehézség



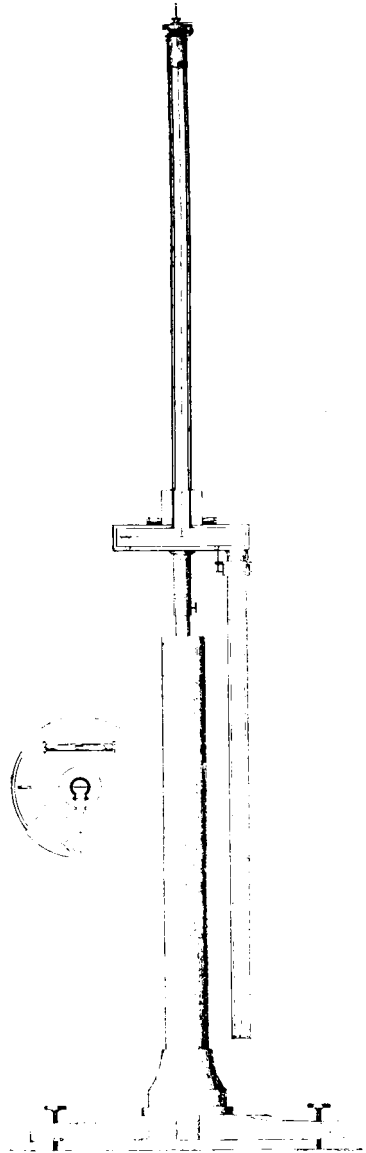
1. és 2. ábra.

irányváltozását lefelé határozom meg, *horizontális variometernek* fogom nevezni.

A görbületi variometer képét az 1. és 2. ábra tünteti elő, az 1. ábra függélyes, a 2. ábra vízszintes átmetszetben. E jelen-tésem keretében nem szándékozván eszkö-zeim részletes leírásába bocsátkozni, rövi-den csak a következőket emelem ki. A hen-geres mérlegszekrény erős fagyűrűben ahhoz erősített fémkarokra van helyezve. A fa-gyűrű három 120 centimeter magas szét-terpeszthető falában áll, a mérlegszekrényt hordó fémkarok állító-csavarokban végződ-nek, az eszköz vízszintezése végett. A hen-geres szekrény függélyes tengely körül fo-kokra beosztott kör felett foroghat. A cső alsó részén köralakú ablak van, melynek egyik fele tükörrel van elfödve, másik fele pedig a bent lengő rúdhoz erősített tükröt tárja fel. A csőhöz erősített tükör hajlása csavarokkal úgy változtatható, hogy az elébe helyezett skála képét a mozgó-rúd tükrével egyszerre mutassa a leolvasási táveső lát-terében. E két skálakép eltolódása szolgál a $\theta' - \theta$ csavarodás lemérésére. A lengő-rúd végén hengeres súlyok fekszenek, tömegük egyenkint 30 gramm, középpontjaiknak egy-mástóli távolsága 34 cm., a belső szekrény átmé-rője 40 cm. A belső úgy mint a külső szek-rénynek teteje leemelhető. A drót végein fémlemezkekhez van forrasztva és csava-rokkal megerősítve, egyrészt a torsiofej rúd-jához, másrészt a mérlegrúddhoz; a drót hossza 150 cm.

Másik eszközömet, a horizontális va-riometert a 3. és 4. ábra mutatja.

A hengeres mérlegszekrény ez eszközön 140 centimeter ma-



3. és 4. ábra.

gas, 4 lábon álló faoszlop végén erős fémtengelyen nyugszik. A forgás nagyságának lemérésére a szekrény felső lapján elhelyezett iránytű szolgál. A rúdra függesztett hengeres súly kettősfalú csőben van elzárva, a mely a szekrény fenekén alkalmazott csavarokkal függélyesen állítható. A csavarodás lemérésére szolgáló tükrök úgy vannak elhelyezve, mint a görbületi variometeren. A felső mérő-drót hossza 110 cm., a függő-henger súlya 30 gr., forgási karja 13,2 cm., felfüggesztő-drótjának hossza pedig 100 cm.

4. Az eddig tett mérések eredményei.

Az itt röviden előadott mérési módszereket mindenekelőtt magában a physikai intézetben próbáltam ki. Mindkét eszközt, a görbületi variometert és a vízszintes variometert a pince, a földszint és az első emelet különböző pontjain állítottam fel. Az észlelt változások általában az épület tömegeloszlásának megfelelőek voltak, különösen érezhető volt az alúl elterülő hosszúkás pince látszólagos taszítása. Az intézeten kívül először a Gellért-hegy tövében, a Rudas-fürdő igazgatósági épületének földszintjében tettem méréseket. A görbületi variometer rúdjának lengési ideje e helyen a hegy felé irányított egyensúlyi állás körül 564,6 s., arra merőlegesen 572,2 s. volt. Ugyanott a mérő-drót elcsavarodását a mérlegrúdnak két egymásra merőleges, az előbbi iránynyal 45° szöget képező állítása közben 45 percczel egyenlőnek találtam. Ez utóbbi érték alig 1 percczel tér el attól, melyet a lengési időkből számítás útján nyerünk. A variaciónak ezekből folyó értéke megfelel a hegy alakjának és tömegének, a mennyiben ezeket szabálytalanságuk mellett számításba vehetjük.

Ezután szt.-lőrinczi kertemben, a szabadban vízmentes ponyvával bevont sátorban állítottam fel horizontális variometeremet. Nappal, főképen a sátorra tűző nap sugarainak behatása mellett, eszközöm folytonos majd lassúbb, majd gyorsabb járása folytán az észlelés nem volt lehetséges. Éjjel azonban minden megváltozott, a mérlegrúd olyan biztosan és állandóan foglalta el egyensúlyi helyzetét, mint a laboratoriumban.

Több éjjelen át ismételvén a méréseket, egymással jól megegyező adatokat nyertem. Biztosan felismerhető volt azokból a gyengén emelkedő lejtőnek hatása, melyen kertem elterül.

Ez előzmények után lehetségesnek mutatkozott a nehézség változásainak a szabadban rendszeres megvizsgálása. 1891 nyarán BODOLA LAJOS, dr. KÖVESLIGETHY RADÓ és TANGL KÁROLY urak eszközeimmel ellátva, a Kis-Czell mellett emelkedő Ság-hegyen ütötték fel sátraikat, hova őket később én is követtem. Ez a síkságból kiemelkedő 150 meter magas csonka bazaltkúp elszigetelt állása és szabályos alakjánál fogva a tömegvonzásnak aránylag egyszerű s így jól tanulmányozható esetét valósítja meg. A nehézség tanulmányozása szempontjából különösen érdekessé teszik a Ság-hegyet azon vizsgálatok, melyeket rajta STERNECK ezredes, az ingamegfigyelések e fáradhatatlan mestere eszközölt s a melyek azt látszottak mutatni, hogy a nehézség a hegy lapos tetején fekvő két egymástól csak 150 méter távolságra fekvő és közel egymagasságú pont között $\frac{1}{3000}$ részével változik meg. Ily kis távolságban ilyen nagy változást a nehézségre vonatkozó elméleteink nem tudnának indokolni.

A Ság-hegyen módszerem szerint tett mérések eredményeiről fent nevezett urak fognak kimerítő jelentést tenni, annyit azonban már itt elárulhatok, hogy a STERNECK-féle kritikus pontok között ily nagy változásokat nem találtak, s méréseik eredményei szerint a Ság-hegyen is minden rendben van.

Megemlítem még azt, hogy a görbületi variometert még azon kérdésnek megoldására is használtam, van-e befolyása a testek anyagi minőségének arra a vonzásra, melyet reájuk a föld tömege gyakorol.

A mérlegrúdnak két végére két különböző anyagot, például parafát és rezet helyezve, annak 180 fokkal átforgatása után nyilvánulnia kellene a különbségnek, mely netán e két anyag nehézségének iránya között fennáll. A mennyiben pedig ilynemű megfigyeléseim azon eredményhez vezettek, hogy a különböző anyagok nehézségének irányai között még e rendkívül érzékeny megfigyelések sem árulnak el különbséget, annyiban arra a következtetésre lettem jogositva, hogy ez anyagokra maga a föld vonzása is ugyanaz, vagy legalább csak az észlelés határánál kisebb mértékben különböző. A vonzó-erők között fennálló különbségeknek ugyanis a nehézség irányának különbségeiben is kellene nyilvánulniok azért, mert a nehézséget a vonzó-erőknek és az anyag minő-

ségétől független középpontfutó erő eredőjének kell tekintenünk. Így kimutattam, hogy a különböző anyagokra gyakorolt vonzóerők közötti különbség ha volna is, mindenesetre kisebb mint annak egy húszmilliomoda. (Lásd 1889 jan. 20.-án a m. t. akadémiának tett előterjesztésemet.)

II. A földi mágneses erő térbeli változásainak méréséről.

Feladatul tűztem ki magamnak a földi mágneses erő térbeli változásait teljességükben mérhetőkké tenni, olyan értelemben, mint az nekem a nehézségre vonatkozólag sikerült.

A mágneses folyadékegységre ható erőnek (a mágneses intenzitásnak) összetevőit X , Y , Z megfelelő értelmezéssel ugyancsak az I. fejezet 1) alatti egyenletei által állíthatjuk elő, s ha tekintetbe vesszük, hogy e mágneses erőnek is van potenciálfüggvénye, akkor tisztába jövünk azzal, hogy feladatunk teljes megoldására itt is a változást kifejező hat adat meghatározása szükséges. Ezek az adatok:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z};$$

közöttük a ható mágneses testeken kívül fekvő pontokra vonatkozólag a következő összefüggés áll fenn:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Figyelmünk e feladat kitűzésénél mindenekelőtt arra a translatorius erőre irányul, melynek mint az egész mágnesre ható összes erőnek kell nyilvánulnia akkor, midőn megfigyelő képességünket olyan érzékenynyé teszszük, hogy a mágneses intenzitás változásait felismerni tudjuk. Valóban első teendőmnek ezen erő lemérését tekinttem.

A megelőző fejezet 1) egyenleteinek alapján könnyen kiszámíthatjuk a translatorius erő összetevőit olyan mágnesre, mely-

nek momentumát annak M_x , M_y , M_z vetületei által fejezzük ki. Ezen erő összetevői:

$$\begin{aligned} P_x &= M_x \frac{\partial X}{\partial x} + M_y \frac{\partial X}{\partial y} + M_z \frac{\partial X}{\partial z}, \\ P_y &= M_x \frac{\partial Y}{\partial x} + M_y \frac{\partial Y}{\partial y} + M_z \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ P_z &= M_x \frac{\partial Z}{\partial x} + M_y \frac{\partial Z}{\partial y} + M_z \frac{\partial Z}{\partial z}. \end{aligned} \quad 1)$$

Tengelyrendszerünket most úgy választjuk, hogy annak Z tengelye lefelé, X tengelye a mágneses meridián irányában észak felé, Y tengelye pedig kelet felé irányuljon. Egyelőre azon esetre szorítkozunk, a mikor a mágnes tengelye a mágneses meridiánnal kicsiny ε szöget zár be, s ez esetben az erőnek vízszintes összetevőit (a melyek itt egyedül érdekelnek) a következő alakban állítjuk elő:

$$\begin{aligned} P_x &= M_h \frac{\partial X}{\partial x} + M_h \frac{\partial X}{\partial y} \varepsilon + M_v \frac{\partial X}{\partial z}; \\ P_y &= M_h \frac{\partial Y}{\partial x} + M_h \frac{\partial Y}{\partial y} \varepsilon + M_v \frac{\partial Y}{\partial z}; \end{aligned}$$

a hol M_h a mágnes momentumának vízszintes, M_v pedig ugyanannak függélyes összetevőjét jelöli.

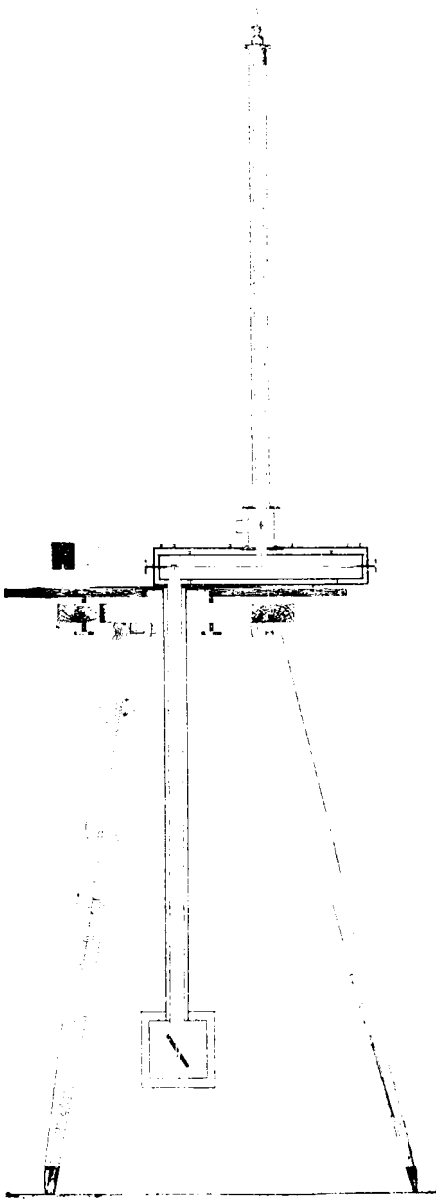
Ezen vízszintes erő-összetevők lemérésére egy a COULOMB-féle mérleg elvére alapított eszközt használok, melyet *mágneses translatometernek* neveztem el. Ezen eszközt az 5. ábra függélyes, a 6. ábra vízszintes átmetszetben tünteti elő. Külső alakjában a nehézség horizontális variometeréhez hasonlít, a mérlegrúd végén azonban mágnes függ, melynek hajlását a vízszinteshez változtatni lehet. A szekrény forgatása ez eszközön nem a mérlegrúd közepe, hanem annak vége körül, illetőleg azon függélyes cső körül történik, melyben a felfüggesztett mágnes drótja van elzárva. Ez a cső és annak végén a mágnes körülvéő szekrény vasmentes rézből készült. Nagyobb súlyt kell fektetni ez eszköznél a torsiofej finomabb beosztására; kívánatos, hogy azon legalább 1 percet leolvasni lehessen. Az eszköz szekrényének szögelfordulását ugyancsak körosztályzaton, a mérlegrúdnak a szekrényhez és torsiofej-

hez viszonyított elfordulását pedig tükrök segítségével lehet lemérni.

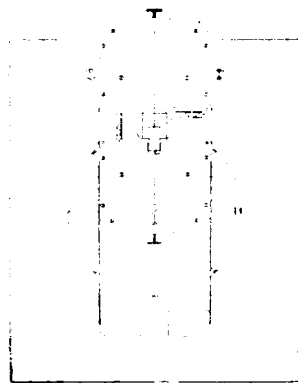
A szövegbe foglalt 7. ábránkon OA a mérlegrudat, C a rudat hordó drótnak lábpontját jelöli. Az eszköz forgatása O körül történik, úgy hogy forgatás közben a C pont, tehát a torsiofej is $OC=l$ sugarú kört ír le.

Ezt az eszközt a translatorius erő lemérésére a következő módon használom.

A mérlegrudat a szekrény kellő elhelyezése és a mérődrótnak a torsiofejen kiigazítása által először a mágneses meridiánra merőleges OCA állásba hozom és pedig úgy, hogy a lent függő mágnes tengelye a mágneses meridiánnal ha nem is zérus, de legalább lehetőleg kicsiny (ϵ) szöget képezzen. A



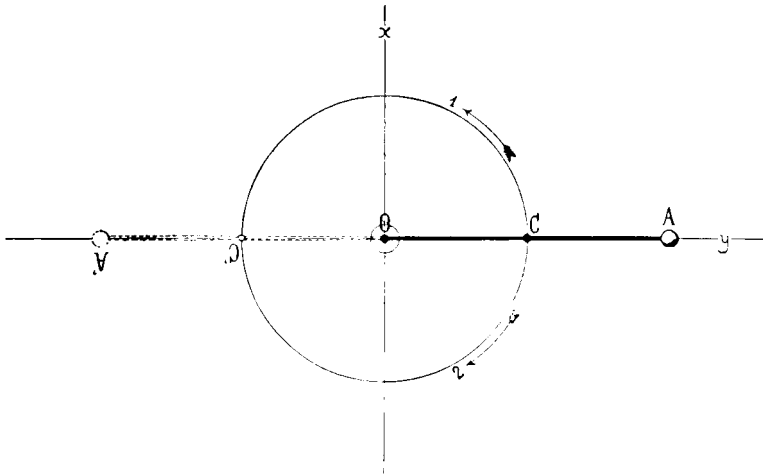
5. ábra.



6. ábra.

felső, a mérlegrudat hordó drótot, melyet mérő-drótnak nevezek, ez esetben két erő csavarja meg, ú. m. először a translatorius erőnek az X irányába, vagyis a meridián irányába eső összetevője, a mely l karon működik, és másodsor a függő mágnesnek forgató ereje a H horizontális mágneses intenzitás behatása alatt. A mérő-drót e szerint a rúdnak ez állásában meg van csavarva, s a csavarás szögét ϑ -val jelölvén, egyensúly esetében lesz:

$$\tau\vartheta = lM_h \frac{\partial X}{\partial x} + lM_v \frac{\partial X}{\partial y} \varepsilon + lM_v \frac{\partial X}{\partial z} - M_h H \varepsilon = lP_x - M_h H \varepsilon.$$



7. ábra.

Most az eszközt szekrényével együtt 180 fokkal átforgatom a szemben álló helyzetbe, előbb az 1 nyíl irányában, azaz ellentétben az óramutató járásával. A drót felső végének a torsiofejen tett forgatásával a mérlegrudat pontosan $OC'A'$ állásba hozom. E közben a mágneset hordó drótnak felső vége is 180 fokkal fordult el s ezért a mágnes tengelye is kitért előbbi helyzetéből, most $\varepsilon - \alpha$ szöget képezvén a meridiánnal. Finom drótojaim alkalmazásánál α egy, két foknál kisebb marad. Ezért a mérő-drótnak ez újabb egyensúlyi helyzetére nézve tehetjük:

$$\tau\vartheta'_1 = -lP_x + lM_h a \frac{\partial X}{\partial y} - M_h H\varepsilon + M_h Ha.$$

Ha végre eszközünk szekrényét az első *OCA* álláson át a 2 nyíl irányában forgatjuk addig, míg az újra ebbe az *OC'A'* állásba visszatér, azaz egyszer egészen körülforgatjuk és a mérlegrudat a torsiofejen újra pontosan beigazítjuk, akkor lesz:

$$\tau\vartheta'_2 = -lP_x - lM_h a \frac{\partial X}{\partial y} - M_h H\varepsilon - M_h Ha,$$

és $\tau\vartheta$, $\tau\vartheta'_1$ és $\tau\vartheta'_2$ ez értékeiből:

$$\tau(\vartheta - \vartheta'_1) = 2lP_x - lM_h a \frac{\partial X}{\partial y} - M_h Ha,$$

$$\tau(\vartheta - \vartheta'_2) = 2lP_x + lM_h a \frac{\partial X}{\partial y} + M_h Ha,$$

tehát:

$$P_x = \frac{\tau}{4l} ((\vartheta - \vartheta'_1) + (\vartheta - \vartheta'_2)).$$

A $\vartheta - \vartheta'_1$ és a $\vartheta - \vartheta'_2$ csavarodási szögeket a mérő-drót torsiofejen mérjük le, azt keressük ugyanis, hogy mekkora szöggel kell a drót felső végét forgatnunk, hogy a mérlegrudat az 1-gyel és 2-vel jelelt átforgatások után az eszköz szekrényére erősített tükör normálisához viszonyítva a kezdetállásba visszahozzuk. A mennyiben a rúdnak ilyen pontos beállítása nehézséggel jár, az annak megfelelő csavarodási szögeket, két közel szomszédos állásra vonatkozó adatokból interpolatio segítségével számíthatjuk ki. Épen úgy mint a translatorius erőnek északi irányú P_x összetevőjét, lemérhetjük annak keleti irányú P_y összetevőjét is, arra a mérlegrúdnak a mágneses meridián irányába eső állásait használván fel.

Okoskodásunk folyamán csak a mágneses erőre fordítottuk figyelmünket, tudjuk azonban, hogy eszközünk mérlegrúdjának állására a nehézség változásai is befolyást gyakorolnak. Ezt a befolyást azonban könnyen felismerhetjük s attól észlelésünk eredményét mentté tehetjük, ha a mágnes helyébe nem mágneses tömeget akasztván, az eszközt mint a nehézség horizontális variometerét használjuk.

A mágneses translatorius erő összetevőinek lemérését, a mágneses intensitás térbeli változásainak felismerésére jól értékesíthetjük, a legelőnyösebben úgy, ha a mérést előbb lefelé s azután felfelé hajlított mágnessel végezzük. Legyen például a mágnes tengelyének hajlásszöge a vízszinteshez előbb $=i$ s azután $=-i$, akkor az első esetben :

$$M_h = M \cos i, \quad M_v = M \sin i;$$

a második esetben :

$$M'_h = M \cos i, \quad M'_v = -M \sin i;$$

s ha továbbá pontos beállítást feltételezván, teszszük $\varepsilon=0$, akkor az összetevők értékei a következők lesznek : az első esetben :

$$P_x = M \cos i \frac{\partial X}{\partial x} + M \sin i \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$P_y = M \cos i \frac{\partial Y}{\partial x} + M \sin i \frac{\partial Y}{\partial z},$$

a második esetben pedig :

$$P'_x = M \cos i \frac{\partial X}{\partial x} - M \sin i \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$P'_y = M \cos i \frac{\partial Y}{\partial x} - M \sin i \frac{\partial Y}{\partial z}.$$

Ezekből :

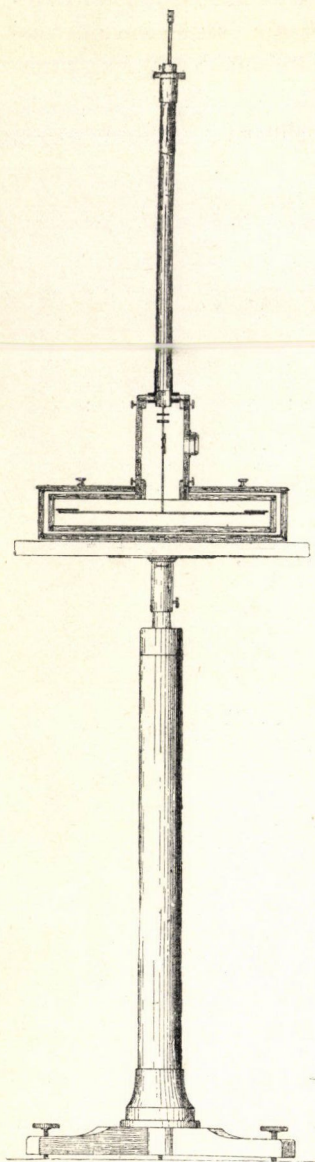
$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{P'_x + P_x}{2M \cos i},$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{P_x - P'_x}{2M \sin i},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{P_y + P'_y}{2M \cos i},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{P_y - P'_y}{2M \sin i}.$$

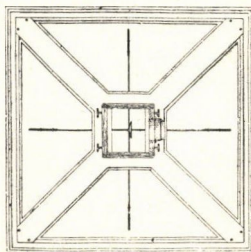
Feladatunk teljes megoldásához szükséges hat adatból e szerint ez úton négyet mérhetünk le s hátra van még kettőnek, illetőleg a $\Delta V=0$ egyenlet felhasználásával még csak egynek meghatározása.



8. ábra.

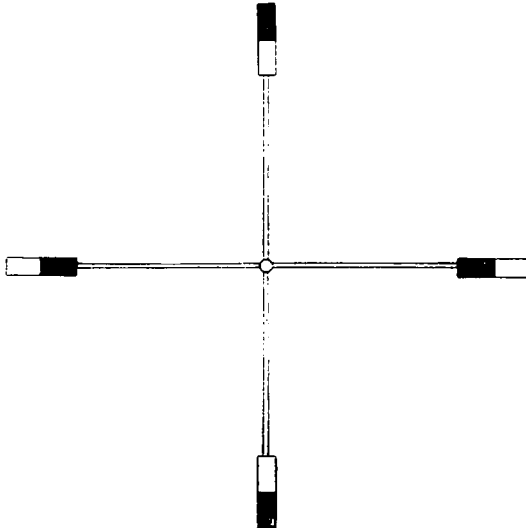
Erre szolgál egy másik eszközöm, az *astatikus variometer*. Az eszköz egyszerű szerkezetét a 8. ábra függélyes, a 9. ábra vízszintes átmetszetben mutatja. COULOMB-féle mérleg ez is; finom drótján könnyű aluminium csövekből összerakott vízszintes kereszt függ, melynek végein négy egymást lehetőleg astatizáló mágnes van elhelyezve. A keresztet alkotó két rúd egyikén a mágnesek északi pólusai kifelé, másikán pedig befelé vannak irányítva, úgy a mint azt a 10. ábra mutatja. Az astatizálás lehető megközelítésére a rúdra könnyen reá rakható kis segédmágnesek szolgálnak. A keresztalakú mérlegtesten és az eszköznek vasmentes rézből vagy fából készült szekrényén az irány kijelölésére szolgáló tükrök vannak megerősítve. Az egész függélyes tengely körül forgatható asztalon áll.

E keresztalakú elrendezésnek nagy előnye az, hogy feleslegessé



9. ábra.

teszi úgy a nehézség változásaiból, mint a mágnesekben indukált momentumokból származó forgató-erők külön megfigyelését. A jelentésem első fejezetében előadottakból kitűnik ugyanis, hogy az ilyen keresztalakú mérlegtestre a nehézség változásának forgásmomentuma $=0$. Külön e célra tett pontos mérések pedig, melyeket dr. TANGL KÁROLY úr felszólításomra az egyetem physikai intézetében végzett, azt mutatták ki, hogy egy astatikus tőpárnak



10. ábra.

a földi mágneses erő inductiója olyan forgásmomentumot ad, a mely $C \sin 2a$ alakban állítható elő s így két egymásra merőleges tőpárra :

$$C \sin 2a + C \sin 2 \left(a + \frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

E szerint a keresztalakú szerkezet forgásmomentumának kiszámításánál csak a mágneses erőt kell tekintetbe vennünk s annak hatását oly módon állapíthatjuk meg, mintha a mágnesek inductiótól mentek, azaz állandóak volnának.

E jelentésem keretében nem bocsátkozhatom a számítás rész-

leteibe, melyet tetszőleges alakú s a keresztben tetszőlegesen elhelyezett mágnesekre vonatkozólag végeztem. Abban az egyszerű esetben, mikor a mágnesek tengelyei a kereszt rúdjaian azokkal párhuzamosan fekszenek, e mágnesek egyikére vonatkozólag, melynek északi polusa kifelé áll, lesz:

$$F = -HM \sin \alpha + Ml \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + 2Ml \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial y} \cos 2\alpha ;$$

tudjuk, hogy tengelyrendszerünk X tengelye a mágneses meridiánba esik, s így itt α azt a szöveget jelöli, melyet a mágnes középpontjának forgássugara az X -el képez. H a mágneses intenzitás vízszintes összetevője, l pedig a mágnes középpontjának forgássugara.

Ha a mágnes északi polusa a rúdon befelé áll, akkor M helyébe $-M$ helyettesítendő. Összetévé a kereszt egyes mágnesekre ható forgásmomentumokat, mind a négyre együttvéve találjuk:

$$F = -H\mu \sin \gamma + (M_1 l_1 + M_2 l_2 + M_3 l_3 + M_4 l_4) \left(\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial y} \cos 2\alpha \right)$$

a hol μ -vel a négy mágnesből alkotott közel asztatikus csoportzatnak összes kicsiny mágneses momentumát, γ -val pedig ez összesített mágnes tengelye és az X tengely által bezárt ismeretlen szöveget jelöltem. M_1, M_2, M_3, M_4 az egyes mágnesek momentumainak abszolút értékeit, l_1, l_2, l_3, l_4 pedig e mágnesek középpontjainak forgássugarait állítják elő.

Tegyük most rövidség kedvéért:

$$M_1 l_1 + M_2 l_2 + M_3 l_3 + M_4 l_4 = 4Ml ;$$

a mi egyenlő momentumú és a forgás tengelyétől egyenlő távolságokra elhelyezett mágnesek esetében állana és fejezzük ki a mérő-drót csavarodásának értékeit az eszköznek α által meghatározott különböző helyzeteiben:

$$\alpha=0 \quad \tau\vartheta_0 = -\mu H \sin \gamma + 8Ml \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

$$\alpha=\pi \quad \tau\vartheta_\pi = +\mu H \sin \gamma + 8Ml \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad \tau\vartheta_{\frac{\pi}{4}} = -\mu H \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \gamma + \cos \gamma) + 4Ml \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)$$

$$\alpha = 3\frac{\pi}{4} \quad \tau\vartheta_{\frac{3\pi}{4}} = -\mu H \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin \gamma + \cos \gamma) - 4Ml \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right).$$

Ezekből:

$$2\mu H \sin \gamma = \tau(\vartheta_\pi - \vartheta_0)$$

és

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \mu H \sin \gamma - 8Ml \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) = \tau(\vartheta_{\frac{3\pi}{4}} - \vartheta_{\frac{\pi}{4}})$$

e szerint a mérődrótnak elcsavarodásai ez állások közben lemérve, úgy mint azt már fentebb előadtam, arra szolgálhatnak, hogy általuk a $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)$ értékét meghatározzuk.

Felhasználhatjuk arra a rúdnek más négy állását is, sőt egy ötödik állásra vonatkozó észleléssel még a $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ értékét is lemérhetnők. A translatometerrel eszközölt mérések azonban ezt már feleslegessé teszik, mert a feladatot a $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)$ értékével és $J^2 V = 0$ egyenlettel együtt teljesen megoldják.

Annak megítélésére, hogy mennyire fokozható eszközeim érzékenysége, szolgáljon egy példa. Mágneses térképeink szerint a mágneses intenzitás horizontális összetevője Budapestről 20 kilométerrel dél felé haladva, körülbelül 0,001 C. G. S. értékkel nagyobodik. Hozzávetőleg tehetjük ezért:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{0,001}{2\,000\,000} = 5 \cdot 10^{-10}.$$

Mágneses translatometerem drótja 30—35 gramm súlyú mágnes felfüggesztését engedi meg, melynek momentumát $M=1000$ tehetjük, a mágnes forgássugara $l=20$ cm., a drót csavarási állandója

$\tau=0,25$, úgy hogy egyéb változásoktól eltekintve a csavarodás szögét a következőnek találjuk :

$$\vartheta = \frac{l}{\tau} M \frac{\partial X}{\partial x} = 0,000\ 04,$$

a lemérendő csavarási szög az eszköznek 180 fokkal átforgatása után ennek kétszerese, azaz k. b. $\frac{1}{4}$ -e percz lesz.

Eszközeim azonban nem arra valók, hogy velük egy ország vagy világrész általános mágneses térképét vegyük fel, hanem inkább arra, hogy azokat a változásokat keressük fel, melyeket a mágneses erőben közelfekvő tömegek, hegyek, völgyek vagy a föld belsejében elrejtett mágneses kőzetek létesítenek. Ily értelemben jó szolgálatot tehetnek a geológiának. Erre azonban már kisebb érzékenység is elegendő. Így azon méréseknél, melyeket eddig a physikai laboratoriumban és utóbb 1895 őszén szt.-lőrinczi kertemben is végeztem, olyan mágnesnek felfüggesztése is elégséges volt, melynek momentuma csak 200 C. G. S., s így az eszköz érzékenysége az előbbinek $\frac{1}{5}$ -e volt.

A physikai laboratoriumban még evvel is olyan nagy csavarodásokat észleltem, melyek több fokot tettek ki. Szt.-Lőrinczen a szabadban sátor alatt észleltem, úgy mint a nehézségi variometerekkel. Ez utóbbi megfigyeléseket rendszeren éjjel, borús, esős napokon azonban nappal is végezhettem.

Módszereimet különösen alkalmasoknak tartom a föld felületének közelében áramló elektromos áramok felkutatására, mert lehetővé teszik azokat magán a helyszínén vizsgálni, nem pedig úgy mint az eddig történt, csupán a földbe mélyített fémlapokat összekötő vezetőkben. Ha ugyanis valamely helyen, a hol a mágneses erő változásait már lemértük, a környező földtömegek egy részét eltávolítjuk, például árkot ásunk, úgy a mágneses erőben ennek folytán előálló változás nemcsak e tömegek eltávolításának, hanem az azokat áthatoló áramrészek kiiktatásának s az áramelosztás módosításának következménye lesz. Szt.-lőrinczi megfigyeléseim folyamán e végből a föld színétől 150 centimeter magasan felállított astatikus variometerem lábpontjától másfél méter távolságban két méter hosszú, egy méter széles és egy méter mély gödört ástam. Az eszköz adataiban ez által létesített változás a gödör

közepébe helyezett mintegy 100 C. G. S. momentummal bíró mágnes hatásának felelt meg. A tél beállta erős havazásokkal véget vetett kutatásomnak s így nem dönthettem el azt a kérdést, mennyi része volt e hatásban a kiásott homokos földtömeg mágneses állapotának és mennyi a netán azon áthatoló áramoknak.

Mágneses variatio eszközeim mint igen érzékeny galvanometerek is használhatók. Jól meghatározható velük az állandó mágnesek momentuma is. Egy mágnes, melynek momentuma 10 000 C. G. S., még 15—20 méter távolságban is érezhető hatást gyakorol a translatometerre.

Egy érdekes kérdés, melynek tanulmányozására az eszközök hivatva vannak, a térbeli variatioiok időbeli változásainak kérdése. A physikai intézetben több hónapon át fotografálás útján jegyeztük fel a translatometer járását, azaz a translatorius erőnek időbeli változásait. E változásnak szembetűnő módon nyilvánuló napi periodusa nagy részében bizonyára azoknak a városi áramoknak következménye volt, melyeket az utczáinkon lefektetett vezetékek szolgáltatnak a város talajának. Mindenesetre kívánatos volna ilyenmő megfigyeléseket a városon kívül oly helyen ismételni, a hol ezen áramforrások hatása ki van zárva.

III. A gravitatio állandójának meghatározása.

A gravitatio jelenségeinek megfigyelése 1888 óta az egyetemi physikai intézetben a mindennapos kísérletek közé tartozik. Hallgatóimnak bőven van alkalmuk arra, hogy úgy az előadásban, mint a gyakorlatokban a tömegek kölcsönös vonzásáról saját megfigyelésük útján meggyőződést szerezzenek.

Az első eszköz, melylyel 1888-ban egy népszerű előadás alkalmával a tömegvonzás jelenségét bemutatni tudtam, a quadrans-elektrometer mintájára készült. A fémszekrényében jól védett COULOMB-féle mérlegrúd alatt quadransokra osztott hengeres vas-edény volt elhelyezve, melynek szemben álló quadranspárjait felváltva, alúlról befolyatott higanynyal töltöttem meg. Az eszköz már három egész négy percznyi lengési idővel is elegendő érzékenységet s a mellett a kivilágított és fűtött tanteremben is kellő

állandóságot tanusított. A quadransokat kitöltő higany vonzásának kiszámítása kissé hosszadalmas. A mérő-kísérleteknek hosszú és változatos sorát végeztem azután majd golyóalakú, majd parallel-epipedalakú ólomtömegekkel, a melyeknek súlya némely kísérleteknél 50—100 kilogramm, másoknál 1 kilogramm vagy annál is kisebb volt.

Ezen mérésekre, melyeknek módszere CAVENDISH eljárásához egyébként közel áll, jellemző volt különösen az, hogy a vonzó-tömegeket többnyire nem a rúddal ugyanazon magasságban, hanem a rúd alatt vízszintes síkban forgatható asztallapokra helyeztem el. Ez az elhelyezés már azért is előnyös, mert a mellett a mérlegrudat a megvédésére annyira alkalmas lapos hengeralakú fémszekrénybe lehet zárni, úgy mint azt az I. fejezetben leírtam. De előnyös ez az elhelyezés különösen azért is, mert úgy választható, hogy a lemérendő erőnek változása a mérlegrúd kitérítése közben elhanyagolhatóan kicsiny legyen. A vonzó-tömegek ugyanis a rúd alatt lévő vízszintes lapon abba a helyzetbe hozhatók, a melyben hatásuk a rúdra maximális lesz. Így lesz az például golyók vonzásának esetében, ha a középpontjaikat a rúd golyóinak középpontjaival összekötő egyenesek a rúdra merőlegesen állván, a vízszintessel közel 55 foknyi szöget képeznek. Ebben a maximumnak megfelelő állásban elég, ha az egymásra ható tömegek viszonyos helyzetének meghatározásánál csak függélyes távolságuk lemérésére fordítunk gondot, ez pedig minden nehézség nélkül eszközölhető.

Az a körülmény, hogy ilyen elhelyezésnél a lemérendő erő kisebb lesz, mint egymagasságú tömegek esetében az általam elért érzékenység mellett számba sem jó, mert 10 percnyi vagy annál is nagyobb lengési idejű eszközeimben úgyszólván két-három fokot meghaladó kitéréseket létesítettem. E kitéréseknek és a velükjáró lengéseknek szabályosságáról tanuskodhatnak a fotografiai felvételek, melyeket akként készítettem, hogy a mozgó-rúd tükréről visszavert fényt fényérzékeny papíron fogtam fel, a mely órával egyenletesen forgatott hengeren volt kifeszítve.

Megjegyzem, hogy magukat a méréseket rendszeren a POGGENDORFF-féle skálaleolvasással végeztem, s a fotografálást inkább csak állításaim okmányszerű igazolására vagy olyan esetekben

alkalmaztam, a midőn a túlfokozott érzékenység az eszközökhöz közeledést meg nem engedhette. Ilyen esetekről még alább lesz szó.

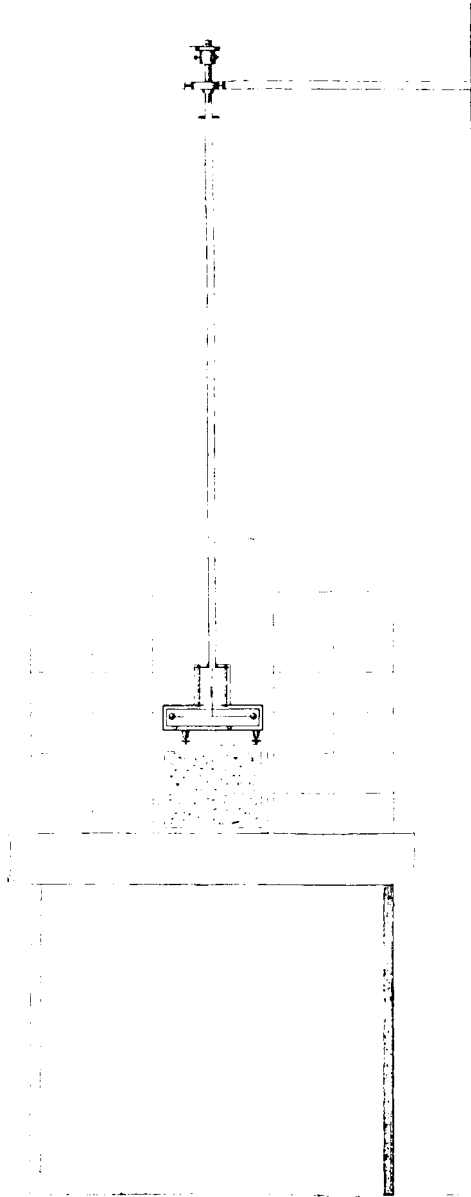
Áttérek most egy lényegében új módszernek leírására, a melynek megállapításához a nehézség változásaira vonatkozó kutatásaim nyomán jutottam. Ezen a gravitatio állandójának meghatározására szolgáló módszer lényege ugyanis az, hogy arra nem magát az erőt, hanem annak változását, tehát nem a mérlegrúdnak kitérését, hanem egyedül lengési idejét és annak változását használom fel.

E végből a kettősfalú fémszekrényében jól megvédett COULOMB-féle mérleget két quadratikus alapú függélyes ólomoszlop között állítottam fel, a mely oszlopok között ugyancsak quadratikus alapú üres tér volt hagyva. A felállítás módját a 11. ábra tünteti elő. Az oszlopok alapja közel 30×30 centimeter, magasságuk 60 centimeter, az oszlopok egymásfelé fordított lapjainak távolsága ugyancsak 30 centimeter, úgy hogy az egész ólomtömeget 60 centimeter magas, 90 centimeter hosszú és 30 centimeter vastag falnak tekinthetjük, a melynek közepéből egy 30 centimeter oldalú négyzetes oszlop van eltávolítva.

A mérleg rúdjának lengéseit két egymásra merőleges egyensúlyi helyzet körül figyeltem meg, ú. m. a fal hosszának irányába eső longitudinális állás körül és a fal vastagságának irányába eső transversális állás körül. A lengési időt a longitudinális állás körül 641 másodpercczel, a transversális állás körül pedig 860 másodpercczel egyenlőnek találtam.

A vonzó-tömegek ezen alakjának megválasztására a következő, egy eszményi esetre vonatkozó megfontolások vezettek. Állítsunk magunk elé képzeletünkben egy végtelen hosszú, végtelen magas, de véges vastagságú függélyes paralelepiped alakú homogén falat s fektessünk annak közepén mint kezdetpontot át egy olyan derékszögű tengelyrendszert, melynek z tengelye lefelé, y tengelye a fal hosszának irányába, x tengelye pedig a fal végtelen lapjára merőlegesen, azaz vastagságának irányában álljon.

Az ilyen falnak belsejében a középtől véges x , y , z távolságra fekvő pontokban a fal tömegének vonzó-ereje merőleges lesz annak függélyes lapjára, úgy hogy :



11. ábra.

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

továbbá:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0,$$

s így

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = 4\pi f \sigma,$$

ha σ -val a homogen fal anyagának sűrűségét, f -vel pedig a gravitatio állandóját, azaz a vonzó-erőt jeleljük, melyet NEWTON törvénye értelmében a tömegegység a tömegegységre egységnyi távolságban gyakorol.

E szerint e fal belsejének közepe körüli része egyenletesen változó térnek tekinthető, s ha a mérlegrudat az XY síkban a fal középpontja körül egyelőre annak belsejében foroghatónak gondoljuk, akkor lengéseire az I. fejezetben megállapítottakat alkalmazhatjuk. Ha tehát T_l -vel a fal hosszának irányába eső longitudinális állaskörüli lengések idejét, T_t -vel pedig az arra merőleges transversális állaskörüli lengések idejét jelöljük, lesz:

$$\pi^2 \left(\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} \right) = 2(1 - \varepsilon) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right);$$

vagyis

$$\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} = \frac{8\pi f \sigma}{\pi^2} (1 - \varepsilon). \quad 1)$$

Ez az egyenlet még abban az esetben is érvényes lesz, ha a végtelen falból egy quadratikusan alapú függélyes oszlopot eltávolítunk, a melynek középpontja a rúd forgási tengelyébe esik, úgy hogy a rúd az ekként létesített üres térben tényleg szabadon lenghet. Ha t. i. teljes fal esetében a rúd forgásmomentumát a longitudinális állaskörüli lengések közben $f_l \omega$ -val-, a transversális állaskörüli lengések közben pedig $f_t \omega$ -val jelöljük, és a megfelelő mennyiségeket a leírt oszlop eltávolítása után $f_l' \omega$ és $f_t' \omega$ -vel jelöljük, akkor könnyű látni, hogy:

$$f_l' \omega - f_t' \omega = f_l \omega - f_t \omega,$$

mert a rúd mind a két egymásra merőleges állásban a fent leirt quadratikus oszlophoz ugyanazon viszonyos elhelyezésben van s így ez oszlop tömegének eltávolítása mindkét esetben ugyanannyival változtatja meg a vonzó erők forgásmomentumát. Így tehát megfelelő jelzésekkel:

$$\frac{\pi^2}{T_l^2} - \frac{\pi^2}{T_t^2} = \frac{\pi^2}{T_l'^2} - \frac{\pi^2}{T_t'^2} = \frac{f_l - f_t}{K};$$

egyenlet folytán valóban igazolva van az I. egyenlet érvényességére vonatkozó állításom.

Azon véges méretű oszlopokra, a melyeket az előbb leirt módon felállítottam, és tényleg méréseimnél használtam, lényegükben hasonló okoskodások érvényesek. Ez esetben azonban, mint a számítás mutatja, az 1) egyenletben a 8π érték helyébe 13,427 volt teendő. Igaz, hogy ez a szám szigorúan csak a rúd végén alkalmazott golyókra érvényes, de a választott méretek mellett a rúdnak a forgástengelyhez közelebb álló részeire vonatkozólag csak igen csekély javításra szorúl. Lesz tehát:

$$\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} = \frac{13,427}{\pi^2} f \cdot \sigma(1 - \epsilon')$$

a hol ϵ' egy kicsiny, egy százaléknál kisebb, a rúd méreteitől függő és az oszlopok véges voltából eredő correctio tagot jelent.

A lengési idők lemérése meglepő biztonsággal és pontossággal eszközölhető. Dr. KÖVESLIGETHY RADÓ és dr. TANGL KÁROLY urak 1891. év január 26.-ától márczius 26.-áig 59 észlelési sorozatban határozták meg az $\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2}$ mennyiség értékét. Minden észlelési sorozat nyolcz lengésre terjedt ki a longitudinális s ugyanannyira a transversalis állásban.

Az észlelések e hosszú sorában, mely alatt az arra szolgáló besötétített pinczehelyiség hőmérséklete 2° C.-ról 5° C.-ra emelkedett, a végtelen kicsiny amplitudokra redukált lengési idők szélső értékei a longitudinális állásban 640,97 s. és 641,28 s., a transversalis állásban pedig 859,29 s. és 860,32 s. voltak. Az észlelések kiszámításánál összefoglaltam az egy ugyanazon napon a két állás-

ban lemért lengési idők értékeit. Az így megállapított 59 értékből mint középértéket találtam :

$$\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} = 0,000\ 001\ 080\ 31.$$

az 59 egyes érték között ninesen egy sem, mely e középértéktől annak egy ezeredrészével vagy annál többel térne el. Az eredmény valószínű hibája annak itt felírt utolsó számjegyét csak 4-gyel nagyobbítja vagy kisebbíti, tehát az egésznek csak $\frac{1}{25000}$ részével egyenlő. Meghatároztam azután a két iránykörüli lengési időt akkor is, a mikor az ólomoszlopokat eltávolítottam ; ekkor úgy találtam, hogy a longitudinális állás körül $T_l = 742,82$ a transversális állás körül pedig $T_t = 759,07$. Ez a különbség az észlelés helyét környező falak és földtömegek vonzásának eredménye volt. Számításba vettem a fent ε' -sal jelölt correctiót is, de feladatomat véglegesen és teljesen megoldani mindeddig még sem tudtam, mert egy tényezőnek t. i. a rúd lengése közben mozgásba hozott levegőnek befolyását az eredményre az itt megkívánt pontossággal kikutatni ez ideig még nem volt alkalmam. Olyan kísérletekből ugyanis, a melyeket ugyanavval a COULOMB-féle mérleggel, de nem az oszlopok között, hanem más helyen, egy az egész eszközt bezáró, e célra készített fémbura alatt légritkitott térben végeztem, azt mutatták, hogy e szűk szekrényekben történő lassú lengéseknél a levegő mozgása sokkal nagyobb befolyást gyakorol a lengési időre, mint azt BESSEL-nek az ingára vonatkozó vizsgálatai alapján várhattam. Például egy rúdnak lengési ideje, mely rendes nyomású levegőben 648,92 másodperc volt, 20 millimeter nyomású levegőben 648,00 másodpercze kisebbedett. Ezen és hasonló észleléseim azonban nem nyújtanak elegendő biztosítékot arra, hogy a correctiót azoknak alapján kívánt pontossággal kiszámíthassuk, mert úgy tapasztaltam, hogy a lengőrúd mozgása a levegőben még attól is függ, hogy milyen magasan áll ez a rúd a maga szekrényében, és mindenesetre megfontolandó volna az is, vajjon a levegő ezen hatására okoz-e számbavehető befolyást a vonzó erőknek változása a szekrény belsejében.

Ezen nehéz kérdések elkerülésével a feladat megoldására czélszerűbb volna a méréseket maguk között az oszlopok között

légüres térben végezni, a mit azonban a rendelkezésemre álló eszközöknek méretei mellett eddig nem tehettem.

$$f=0,000\ 000\ 066\ 5$$

Ezért és a használt ólomtömegek homogenitásának megbízhatatlansága miatt is, nem bocsátkozhatom eddigi méréseim alapján a gravitatio állandójának megállapításába azon pontossággal, melyet módszeremmel elérhetni reménylek. Legfeljebb megemlíthetem, hogy eddigi megfigyeléseim alapján ez állandó értéke: értéktől aligha tér el többel, mint annak $\frac{5}{100}$ részével.

Jelen közleményemben azonban nem ez értékre, hanem a módszerre fektetem a súlyt, mert úgy gondolom, hogy az a pontosság, melyet a lengési idők lemérésénél már is elértem, biztosítékot nyújt arra nézve, hogy magát ezt a nagyfontosságú állandót ugyanavval a pontossággal tudjuk meghatározni, mint a milyenel a nehézséget az inga lengéseiből állapítjuk meg. Erre azonban a lengési idők helyes megfigyelésén kívül még légüres tér és a megbízhatatlan ólom helyett valóban homogén higany szükséges.

IV. Két segédeszköz a gravitatio tanulmányozására.

1. *A gravitációs compensálás.*

Azon eszközöknél, melyekkel e helyen eddig leirt vizsgálataimat végeztem, az érzékenységnek határt szabott a mérlegrúd függesztésére használt drót vagy kvarczfonál csavarás ellenében ható rugalmassága. Még nagyobb érzékenység elérésére törekedvén, a compensálás segédeszközéhez fordultam, s e célra magát a tömegvonzást használtam fel, a mely állandósága folytán erre minden más erőnél kétségtelenül alkalmasabb.

A vonzó erejűnkkel compensáló tömegeket a mérlegrúd végeinek közelében két oldalon úgy helyeztem el, hogy a rúd egyensúly állásában maga ez az erő zérus vagy legalább igen kicsiny, annak változása azonban a rúd kimozdulása közben jelentékeny legyen. A rúdra ható összes erők forgásmomentuma akkor az egyensúlyi helyzettől mért kicsiny ω kitérések esetében $(\tau \pm \varphi) \cdot \omega$ lesz, azaz a compensáló tömegek elhelyezése szerint kisebb vagy nagyobb

mint az, mely egymagában a drót csavarodásának felelne meg. Ily módon valóban sikerült olyan eszközt készítenem, melynek érzékenységét kívánságom szerint tetszőlegesen egészen a végtelenig, azaz a labil-helyzet beálltaig fokozhatom.

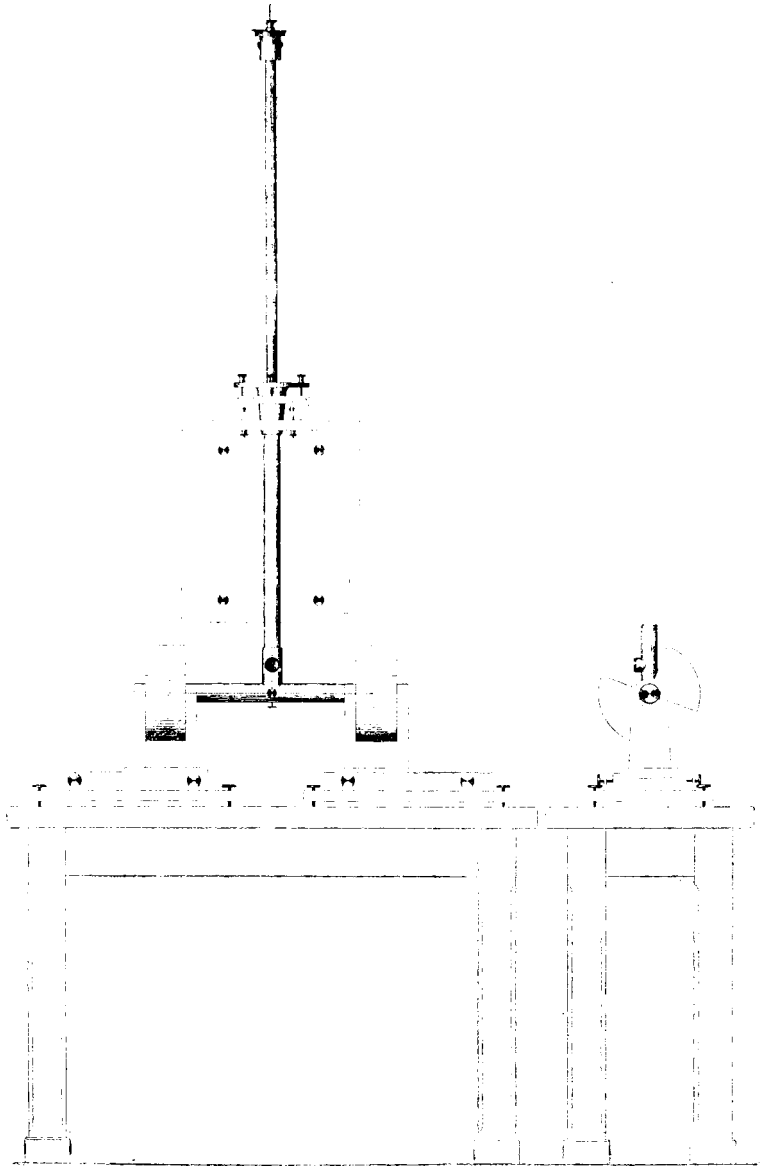
Ez az eszköz a 12. és 13. ábrán látható. Magát a végén golyókkal terhelt könnyű mérlegrudat a compensáló súlyok czélszerű elhelyezhetése végett ez esetben kettősfalú, kívül 4 cm. átmérőjű fémhengerbe zártam, úgy hogy az eszköz szekrénye \perp alakú hengeres tok alakját nyerte, melynek 1,5 meter hosszú függélyes része a felfüggesztő drótot vagy kvarczfonalat, vízszintes 55 centimeter hosszú része pedig a mérlegrudat foglalja magába. A mérlegrúd hossza 50 centimeter, a végéin reá tölt golyók tömege egyenkint 30 gramm volt, az egész szerkezetnek forgásmomentumát az egyensúlyi helyzettől számított ω kitérés esetében a compensáló súlyok nélkül: 0,1478 C. G. S. értékkel egyenlőnek találtam. Ez a forgásmomentum a drót csavarás ellenében ható rugalmas momentumán kívül még azt is magába foglalja, a mely az észlelés helyén a nehézség változásaiból származik (I. I. fejezet).

A compensáló ólomsúlyok a rudat védő fémtokot körülvevő 5 cm. belső átmérőjű fémesőre vannak forrasztva, a mely vízszintes tengelyágyakon fekszik s így a belső tok körül e súlyokkal együtt forgatható.

A compensáló súlyoknak hengerquadransok alakját adtam, e quadransok belső része a cső által van lemetszve, a melyhez illesztve vannak. Két ilyen szemben álló quadrans egy csövön megerősítve egy compensatort alkot. Méretei a következők: az egyes quadrans belső sugara 2,5 cm., külső sugara 12 cm., vastagsága azaz két sík határlapjának egymástóli távolsága 9,5 cm.

Eszközöm mindkét végére állíthatok egy egy ilyen compensatort, úgy hogy a mérlegrúd végén alkalmazott golyók a hengerquadransok közepei körül mozogjanak.

E golyók és a rúd is ily módon a két oldalt szemben álló quadransok vonzásának befolyása alatt állanak. A rúd középső állásában ezen két oldalról ható és egyenlő quadransok esetében egyenlő vonzó erők ellensúlyozzák ugyan egymást, de az erők változásai e helyzet körül mint egyenlő előjelűek egyirányú hatásokat létesítenek.



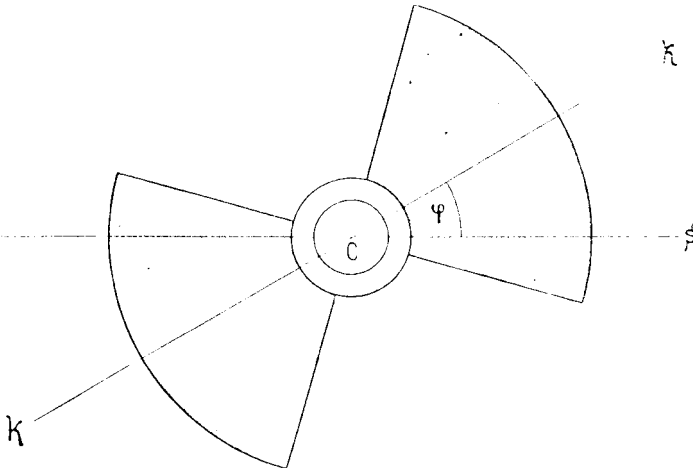
12. és 13. ábra.

Ha meggondoljuk, hogy a COULOMB-mérleg rúdján elhelyezett golyó középpontja végtelen kis kimozdulása közben

$$\delta s = l \delta \omega$$

vízszintes ívelemet fut be, akkor az egyensúlyi helyzetéhez közel állásaiban a reá mozgásának irányában ható kitérítő erő:

$$fm \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \delta s = fm \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} l \delta \omega;$$



14. ábra.

lesz, ennek az erőnek forgásmomentuma pedig:

$$fm \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} l^2 \delta \omega.$$

Könnyen belátható, hogy a $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ értéke változik akkor, mikor a quadransok hajlását a vízszinteshez forgatás által változtatjuk és számítás útján bebizonyíthatjuk, hogy ha φ -vel jelöljük azt a szöveget, melyet a quadransok középvonala KK (l. 14. ábra) a vízszintes CS -sel képez, akkor:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = a + b \cos 2\varphi.$$

Az a és b állandóknak a quadransok méretei és sűrűsége, valamint a gravitatio állandója által meghatározott értékeit eszközömrre vonatkozólag a következőknek találtam :

$$\begin{aligned} a &= 0,000\ 001\ 190, \\ b &= 0,000\ 003\ 722. \end{aligned}$$

Ebből azután (tévén $m=30$ gr., $l=25$ cm.) kiszámítottam a rúd két végén alkalmazott két compensator együttes hatását s az egyensúlyi helyzetűtől távolodást létesítő forgásmomentumát és találtam

$$F\omega = (0,044\ 62 + 0,139\ 57 \cos 2\varphi) \omega ;$$

A compensáló súlyok nélkül felállított mérlegrúdra nézve, mint már jeleztem, az egyensúlyi helyzet felé forgató momentum :

$$\tau\omega = 0,147\ 8 \omega ;$$

lévén, a compensatorokkal ellátott eszközömben az a forgásmomentum, mely a rudat egyensúlyi helyzetébe visszatereli

$$F\omega = (\tau - F) \omega = (0,103\ 15 - 0,139\ 57 \cos 2\varphi) \omega$$

lesz.

A forgásmomentumnak s vele együtt az érzékenységnek megváltoztatására csak a quadransok hajlásszögét kell változtatnunk. Így például

$$\begin{aligned} \varphi = 90^\circ\text{-ra} & \quad F = 0,242\ 72 ; \\ \varphi = 45^\circ\text{-ra} & \quad F = 0,103\ 15 ; \\ \varphi = 25^\circ\text{-ra} & \quad F = 0,013\ 44 ; \end{aligned}$$

$\varphi = 21^\circ 10' 45''$ hajlásszögnél pedig $F=0$, azaz a rúd labil állapotha jut. Ha mérlegrudunk tehetetlenségi momentumát kerek-számban 38000-nek teszszük, akkor a levegő ellenállásától eltekintve

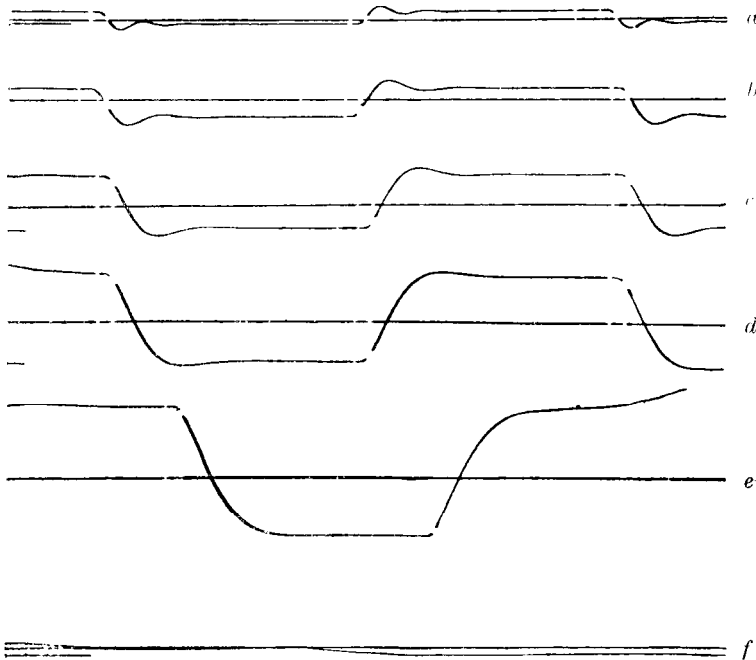
$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{F}}$$

képlet szerint találjuk :

$$\begin{aligned} \varphi = 90^\circ\text{-ra} & \quad T = 124\ 3 \text{ s.} \\ \varphi = 45^\circ\text{-ra} & \quad T = 190\ 7 \text{ s.} \\ \varphi = 35^\circ\text{-ra} & \quad T = 528\ 3 \text{ s.} \end{aligned}$$

A levegő ellenállása folytán azonban ezen egy óránál is hosszabb idejű lengések már nem létesülhetnek, mert a mozgás aperiodikussá válik.

Ily nagy érzékenységu beállítás esetében az eszköz csak lehetőleg védett helyen, például jól temperált és besötétített pinczében foglal el biztos egyensúlyi állást s a megfigyelés csak foto-



15. ábra.

grafálás útján ad megbízható eredményt. Így azonban teljesen megfelel a várakozásnak. Sikerült például a pinczében felállított eszköztől *öt méter* távolságban a szomszédos udvarban elhelyezett 300 kilogrammnyi tömegek hatását kimutatnom. E tömegeknek ugyanazon távolságban az ellentett hatás oldalára átrakása a mérlegrudat, úgy mint az elmélet alapján is várhattam, több mint 4 percznyi szöglettel térítette ki (l. 15. ábra *f*).

Az eszköznek a quadransok hajlásával fokozható érzékeny-

ségét a mellékelt 15. ábra is mutatja. Az a, b, c, d, e görbéket a mérleg rúdja mind ugyanazon reá ható vonzó erőknek (5 kilogramm $\frac{1}{2}$ méter távolságban) behatása alatt írta le, de különböző volt e közben a quadransoknak φ hajlásszöglete. a -nál 90° , b -nál 45° , c -nél 35° és d -nél 30° és e -nél $27,5^\circ$. Jól mutatják e képek azt is, hogyan alakul át az a -nál még lengő mozgás d és e -nél aperiodikus mozgássá.

Az elérhető érzékenység fokának megítélésére még egyet akarok megemlíteni. Ha majd egyszer alkalmam lesz eszközümet valamely folyó, tenger vagy tó partján úgy felállítani, hogy drótja a függélyes falakkal határolt vízfelülettől 1 méter távolságban legyen s a mérlegrúd a parttal 45 foknyi szögletet képezzen, akkor a vízszintjének emelkedése egy centimeterrel a compensatornak 45 foknyi hajlásánál 1 percnyi, 25 foknyi hajlásánál pedig már közel 7 percnyi kitérést fog létesíteni. Jól használhatónk ezért ez eszközt a dagály és apály jelenségének fotografiai feljegyzésére is, annál is inkább, mert bármennyire hullámozó tenger közelében mindig csak a közép szint változásait tüntetné elő.

2. *A gravitációs multiplikálás.*

A COULOMB-féle mérlegrúdnak a tömegvonzás által létesített kis kitéréseit multiplikálás útján nagy kilengésekké tudom növelni. Ezt a multiplikálást olyan módon végezem, hogy a rúd alatt forogható asztallapon elhelyezett vonzó tömegeket, melyek kezdetállásukban a rudat például az óramutató járásának irányában térítik ki, abban a pillanatban, melyben a rúd ez irányban legnagyobb kilengését eléri, az asztallap forgatása által egy más olyan helyzetbe viszem át, melyben a tömegek vonzása ellentett irányú kitérést létesít, s az ezen irányban elért legnagyobb kilengés pillanatában a tömegeket újra az első állásba helyezem és így tovább. A multiplikálás ezen módjánál, melynél a rúd lengései felváltva két egyensúlyi helyzet körül történnek, az ekként sokszoros ismétlés által megnövelt kilengéseknek határértéke:

$$A = a \frac{1 + \beta}{1 - \beta};$$

lesz, a hol a -val a két egyensúlyi helyzetnek egymástóli távolságát, ϑ -val pedig a csillapodás viszonyát jelöltem, melyet az állandó egyensúlyi helyzet körül történő lengésekből oly módon határozzunk meg, hogy egy kilengés hosszát a megelőző kilengés hosszával osztjuk.

Az így multiplikált lengések fotografiai felvételei fényesen tanuskodnak arról, mennyire sikerült eszközeim berendezése által mindazon zavaró tényezőket kizárnom, melyek a COULOMB-féle mérleg megbízhatóságát sok esetben annyira kétséssé tették. Multiplikáltam ily módon nagyobb 10 percnyi idejű lengéseket és kisebb 1 percnyi lengési idejűeket is. Az első esetben a kilengést a kitérésnek közel húszszorosára, a másodikban százötvenszeresére tudtam növelni mindig egyforma biztonsággal és állandósággal.

A multiplikálás ezen módja kétségtelenül jó szolgálatokat fog tehetni a gázok surlódásának tanulmányozásánál is.

Nekem egyelőre más volt a célom. Felhasználtam ugyanis a multiplikálást mint igen érzékeny módszert a lengési idők és azok változásainak lemérésére. Ha t. i. a tömegek periodikus áthelyezésének, tehát az erő változásának időszaka: \mathbb{T} nem ugyanaz mint a rúd lengési ideje T , akkor olyan végső kilengések létesülnek, melyeknek nagysága A nem csupán az a kitérés nagyságától és a ϑ csillapodástól, hanem e két időszak T és \mathbb{T} értékeitől függ. A rúd ilyenkor egy ide-oda mozgását már nem a maga lengési idejében, hanem az erő változása által reá kényszerített időben fogja végezni. Az ilyen lengéseket azért kényszerített lengéseknek nevezem, ezek a két egyensúlyi helyzet körül történő egyszerű lengések részeitől vannak összetéve.

Világos, hogy ha egy ugyanazon T lengési idejű mérlegrudat különböző időszakaszú áthelyezésekkel kényszerített lengésekbe hozunk, akkor a végső kilengések értékei olyan adatokat fognak szolgáltatni, melyekből magát a T lengési időt meghatározhatjuk. És épen úgy világos az is, hogy ha a kényszerített lengések \mathbb{T} időszakasza állandó maradván, a rúd T lengési ideje változik meg, akkor ennek a változásnak a végső kilengés nagyságában kell nyilvánulnia. Mennyire érzékeny ez a végkilengés a \mathbb{T} vagy a T időszakaszok változásainak felismerésére, arra szolgáljon egy példa :

A végkilengéseket perczekben fejezván ki, találtam :

$$T=611 \text{ s. és } T=611 \text{ s. időkkel } A=252'$$

$$T=611 \text{ s. és } T=600 \text{ s. } \quad \ll \quad A=225'$$

$$T=611 \text{ s. és } T=590 \text{ s. } \quad \ll \quad A=180'$$

a T kisebbedése 10 másodpercczel e szerint a végkilengés szögértékét 45 percczel kisebbitette, úgy hogy átlagban 1 másodpercznyi időváltozásnak $4\frac{1}{2}$ percznyi szögváltozás felelt meg.

Ezek a kényszerített lengések tehát valóban felhasználhatók arra, hogy végkilengéseik hosszának lemérésevel lengési időket határozzunk meg, s ez az eljárás jó szolgálatot tehet különösen olyankor, mikor a csillapodás nagy lévén, hosszú lengési sorozatok megfigyelése egyébként nem lehetséges.

A gyakorlati kivitel megkönnyítése czéljából, különösen azért, hogy a tömegek áthelyezésének hosszú időn át tartó és lélekölő munkájától szabaduljak, egy a multiplikálást az óra pontosságával teljesítő gépet, az *elektromágneses multiplikátort* szerkesztettem, a melyet Süss NÁNDOR úr, az állami mechanikai tanműhely igazgatója szokott ügyességével készített.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. április 20.-án tartott üléséből.)