DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
VII. kötet, 2019


doi:10.20312/dim.2019.03

# Az általánosított októnióalgebrák egy új felépítéséről

**Péntek Kálmán**
ELTE SEK TTMK Savaria Matematikai Tanszék
pentek.kalman@sek.elte.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Az általános Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárással a valós számok R testéből kiindulva felépíthetjük az általánosított komplex számok C_α kommutatív és asszociatív algebráját. Ennek megkettőzésével nyerhetjük az általánosított kvaterniók H_αβ nem kommutatív, de asszociatív algebráját. Innen pedig ismételt megkettőzéssel adódik az általánosított oktoniók O_αβγ nem kommutatív és nem is asszociatív algebrája.
Közismert, hogy minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a teljes mátrixalgebra egy alkalmas részalgebrájával. Ám az általános oktoniók O_αβγ algebrája nem asszociatív, ezért nem reprezentálható mátrixokkal. E probléma megoldására M. Zorn 1933-ban kidolgozta a split oktoniók reprezentációját vektor-mátrixok segítségével. Az előadás utolsó részében ezt az eredményt általánosítva teljesen általánosan megadjuk az általánosított oktoniók algebrájának egy, a vektor-mátrixok fogalmának általánosításán alapuló reprezentációját.

ABSTRACT. In the paper with the use of generalized Cayley-Dickson process we construct the commutative and associative algebras of generalized complex numbers C_α, the non commumative, but associative algebras of generalized quaternions H_αβ and the non commutative, non associative algebras of generalized octonions O_αβγ.
Any finite dimensional associative algebra is algebrically isomorphic to a subalgebra of a total matrix algebra, but the algebras of octonions O_αβγ is not associative. To overcome this problem Zorn, M.A. defined vector-matrix representation for split octonions algebra in 1933.
In the last section of the paper we construct the generalized vector-matrix representation of generalized octonions O_αβγ .

## 1. Bevezetés

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) fedezte fel 1843-ban a $\mathbb{H}$ valós kvaterniók 4-dimenziós nem kommutativ, de asszociatív algebráját (*HAMILTON 1844,1847*). Még ebben az évben alkotta meg John Thomas Graves (1806-1870) az $\mathbb{O}$ valós oktoniók 8-dimenziós nem kommutatív és nem is asszociatív algebráját. Eredményeit azonban nem publikálta, csupán Hamiltonnal folytatott baráti levelezésében írta le. Arthur Cayley (1821-1895) 1845-ben jutott el szintén az oktoniókhoz és publikálta is az elliptikus függvényekről írt dolgozatának függelékében (*CAYLEY 1889)*, ezért nevezik ezeket Cayley-féle számoknak.

Leonard Eugene Dickson (1874-1954) 1912-ben értelmezte egy test feletti $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternióalgebra fogalmát, 1919-ben pedig megalkotta a neutrális elemes algebrák későbbiekben Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárásnak nevezett módszerét. Ennek felhasználásával a Hamilton-féle kvaterniók $\mathbb{H}$ algebrájának megkettőzésével építette fe a Cayley-féle számok, a valós $\mathbb{O}$ oktoniók algebráját (*DICKSON 1912,1919*).

A Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárást Dickson tanítványa Abraham Adrien Albert (1905-1972) általánosította (*ALBERT 1942*), ezzel lehetővé vált a valós számok $\mathbb{R}$ algebrájából kiindulva az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$, majd az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúrájának egységes szemléletű tárgyalása. Ennek részletes magyarnyelvű bemutatását találhatjuk például (*PÉNTEK 2018*) dolgozatában.

Ebben a munkában e megkezdett utat folytatva az általánosított kvaternióalgebrák $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúrájából kiindulva felépítjük az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebráját. Jól ismert, hogy minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a megfelelően választott teljes mátrixalgebra alkalmas részalgebrájával. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy minden ilyen algebrának megadhatjuk a mátrix-reprezentációját. Így megadható a $\mathbb{C}_\alpha$ és a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúrák mátrix-reprezentációja, például (*PÉNTEK 2018*). Az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrája azonban nem asszociatív, így e struktúra mátrixokkal nem reprezentálható.

Max August Zorn (1906-1993) 1933-ban megadta a split oktoniók algebrájának vektor-mátrix-reprezentációját (*ZORN 1933*). Módszere némi módosítással alkalmazható a klasszikus oktoniók $\mathbb{O}$ stuktúrájának vektor-mátrix-reprezentációjára is (*EBBINGHAUS ET AL. 1991, KATARAS – HALICI 2018*). Dolgozatunk fő eredményeként e módszert általánosítva megadjuk az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ struktúrájának vektor-mátrix-reprezentációját.

A most következő két fejezetben összefoglaljuk és kiegészítjük azokat az általánosított komplex számokra és az általánosított kvaterniókra vonatkozó legfontosabb ismereteket (*PÉNTEK 2018*), amelyek a dolgozat fő témájához, az általánosított oktoniók felépítéséhez és tárgyalásához szükségesek.

## 2. Az általánosított komplex számok

Jelölje $\{\mathbb{R},+,\cdot\}$ a valós számok testét, 0 az összeadás, 1 a szorzás neutrális elemét, legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter! Az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(a_0, a_1): a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ direktszorzatban értelmezzünk műveleteket a következő módon:

skalárral való szorzás: $r \cdot (a_0, a_1) := (r \cdot a_0, r \cdot a_1)$ (1)

összeadás: $(a_0, a_1) + (b_0, b_1) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1)$ (2)

szorzás: $(a_0, a_1) \cdot (b_0, b_1) := (a_0 \cdot b_0 - \alpha \cdot a_1 \cdot b_1, a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0)$ (3)

ahol $r \in \mathbb{R}, (a_0, a_1), (b_0, b_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tetszőleges elemek.

Az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ direktszorzat az (1), (2) és (3) műveletekkel egy 2-dimenziós kommutatív, asszociatív és neutrális elemes algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett, amelyben a $0_\mathbb{C} := (0,0)$ az összeadás, $1_\mathbb{C} := (1,0)$ a szorzás neutrális eleme. Ezen algebrában, mint $\mathbb{R}$ feletti 2-dimenziós vektortérben az $1_\mathbb{C} := (1,0)$ és az $i := (0,1)$ elempár alkot természetes bázist.

Az $S := \{(a_0, 0): a_0 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ részalgebrát alkot az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ algebrában és az $f_\mathbb{C}: \mathbb{R} \to S, a_0 \mapsto (a_0, 0)$ egy algebra-izomorfizmus, így pedig az $f_\mathbb{C}^*: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a_0 \mapsto (a_0, 0)$ egy beágyazási algebra-monomorfizmus.

A beágyazás eredményeként kapott struktúrát $\mathbb{C}_\alpha$ szimbólummal jelöljük és az *általánosított komplex számok* algebrájának nevezzük. Speciálisan az $\alpha = 1$ estben a klasszikus komplex számok $\mathbb{C}$ algebrájához jutunk. Az általánosított komplex számok további típusait említi és tárgyalja (*ROSENFELD 1997*) művében.

Az $i = (0,1) \in \mathbb{C}_\alpha$ elemre teljesül $i^2 = -\alpha$ és minden $(a_0, a_1) \in \mathbb{C}_\alpha$ elem felírható $a_0 + a_1 \cdot i$ alakban, amely előállítást az általánosított komplex szám *algebrai* alakjának nevezünk.

A $z = a_0 + a_1 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ *konjugált*ján az $\bar{z} = a_0 - a_1 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ általánosított komplex számot, *normá*ján pedig a $N(z) := z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z = a_0^2 + \alpha \cdot a_1^2 \in \mathbb{R}$ valós számot értjük, a $z = a_0 + a_1 \cdot i, t = b_0 + b_1 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ elempár *skaláris szorzat*ának a $\langle z, t \rangle := a_0 \cdot b_0 + \alpha \cdot a_1 \cdot b_1 \in \mathbb{R}$ valós számot nevezzük.

Az $\mathbb{R}$ test feletti $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ -\alpha \cdot a_1 & a_0 \end{pmatrix} : a_0, a_1 \in \mathbb{R} \right\}$ alakú mátrixok egy részalgebrát alkotnak a másodrendű kvadratikus mátrixok 4-dimenziós $M_2(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrájában.

A $g^{\mathbb{C}}: \mathbb{C}_\alpha \to M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $a_0 + a_1 \cdot i \mapsto \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ -\alpha \cdot a_1 & a_0 \end{pmatrix}$ leképezés egy algebra-izomorfizmus, így az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ algebrája reprezentálható az $M_2(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebra $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ részalgebrájával.

## 3. Az általánosított kvaterniók

Az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ algebrájából kiindulva értelmezzünk műveleteket a $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha := \{(z_0, z_1): z_0, z_1 \in \mathbb{C}_\alpha\}$ direktszorzatban a következő módon:

skalárral való szorzás: $r \cdot (z_0, z_1) := (r \cdot z_0, r \cdot z_1)$ (1')
összeadás: $(z_0, z_1) + (w_0, w_1) := (z_0 + w_0, z_1 + w_1)$ (2')
szorzás: $(z_0, z_1) \cdot (w_0, w_1) := (z_0 \cdot w_0 - \beta \cdot z_1 \cdot \overline{w_1}, z_0 \cdot w_1 + z_1 \cdot \overline{w_0})$ (31')

ahol $\beta \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter, továbbá $r \in \mathbb{R}, (z_0, z_1), (w_0, w_1) \in \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ tetszőlegesek.

A $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ direktszorzat az (1'), (2') és (3') műveletekkel egy 4-dimenziós nem kommutatív, de asszociatív és neutrális elemes algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett, amelyben $0_{\mathbb{H}} := (0_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{C}})$ az összeadás és $1_{\mathbb{H}} := (1_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{C}})$ a szorzás neutrális eleme. Ezen algebrában, mint $\mathbb{R}$ feletti 4-dimenziós vektortérben az $1_{\mathbb{H}}$, $(i, 0_{\mathbb{C}})$, $j := (0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{C}})$, $(0_{\mathbb{C}}, i)$ elemnégyes egy természetes bázist alkot.

A $T := \{(z_0, 0_{\mathbb{C}}): z_0 \in \mathbb{C}_\alpha\} \subset \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ részalgebrát alkot a $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ algebrában és az $f_{\mathbb{H}}: \mathbb{C}_\alpha \to T, z_0 \mapsto (z_0, 0_{\mathbb{C}})$ leképezés egy algebra-izomorfizmus, így pedig az $f_{\mathbb{H}}^*: \mathbb{C}_\alpha \to \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha, z_0 \mapsto (z_0, 0_{\mathbb{C}})$ egy beágyazási algebra-monomorfizmus.

A beágyazás eredményeként kapott struktúrát a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ szimbólummal jelöljük és az *általánosított kvaterniók* algebrájának nevezzük. Speciálisan, ha $\alpha = \beta = 1$, akkor a klasszikus Hamilton-féle kvaterniók $\mathbb{H}$ algebráját nyerjük. Az általánosított kvaterniók további típusait említi (*JAFARI – YAYLI* 2015) és tárgyalja is (*ROSENFELD 1997)* művében.

A $j = (0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{C}}) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elemre teljesül $j^2 = -\beta$ és minden $q = (z_0, z_1) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ felírható $q = z_0 + z_1 \cdot j$ alakban, amely előállítást az általánosított kvaternió *komplex algebrai alak*jának nevezzük.

Ha $z_0 = a_0 + a_1 \cdot i$, $z_1 = a_2 + a_3 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ és $q = z_0 + z_1 \cdot j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor a $q$ kvaternió felírható a $q = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$ alakban, amelyet a $q$ elem *valós algebrai alak*jának hívjuk, az $1, i, j, k := i \cdot j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elemeket pedig *általánosított kvaternióegységek*nek nevezzük.

Az általánosított kvaternióegységek Cayley-féle szorzási táblázata:

| $\cdot$ | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ |
| $i$ | $i$ | $-\alpha$ | $k$ | $-\alpha j$ |
| $j$ | $j$ | $-k$ | $-\beta$ | $\beta i$ |
| $k$ | $k$ | $\alpha j$ | $-\beta i$ | $-\alpha\beta$ |

Ha $z_0 = a_0 + a_1 \cdot i$, $z_1 = a_2 + a_3 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$, akkor a $q = z_0 + z_1 \cdot j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ *konjugált*ján a

$$\bar{q} := \bar{z_0} - z_1 \cdot j = a_0 - a_1 \cdot i - a_2 \cdot j - a_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}, \qquad (4')$$

*normá*ján pedig az

$$N(q) := q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = a_0^2 + \alpha \cdot a_1^2 + \beta \cdot a_2^2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3^2 \in \mathbb{R} \qquad (5')$$

elemet értjük. A $q_0 = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$, $q_1 = b_0 + b_1 \cdot i + b_2 \cdot j + b_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elempár skaláris szorzatának a

$$\langle q_0, q_1 \rangle := a_0 \cdot b_0 + \alpha \cdot a_1 \cdot b_1 + \beta \cdot a_2 \cdot b_2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3 \cdot b_3 \in \mathbb{R} \qquad (6')$$

valós számot nevezzük.

A $q = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternió *valós rész*én (*skalár rész*) az

$$S(q) := a_0 \in \mathbb{R} \qquad (7')$$

valós számot, képzetes részén (vektor rész) a

$$V(q) := a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \in \mathbb{R}^3 \qquad (8')$$

vektort értjük.

Ha $q_0 = a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$, $q_1 = b_1 \cdot i + b_2 \cdot j + b_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ két tiszta képzetes általánosított kvaternió, akkor szorzatuk

$$\begin{gathered} q_0 \cdot q_1 = -(\alpha \cdot a_1 \cdot b_1 + \beta \cdot a_2 \cdot b_2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3 \cdot b_3) + \\ +[(a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \beta \cdot i + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \cdot \alpha \cdot j + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot k] \end{gathered}$$

lesz. Ez alapján e két tiszta képzetes kvaternió *skaláris szorzat*án a (6') összefüggéssel összhangban a

$$q_0 \circ q_1 := \alpha \cdot a_1 \cdot b_1 + \beta \cdot a_2 \cdot b_2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3 \cdot b_3 \in \mathbb{R} \qquad (9')$$

skalárt, *vektoriális szorzat*án pedig a

$$q_0 \times q_1 := (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \beta \cdot i + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \cdot \alpha \cdot j + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)\, k \in \mathbb{R}^3 \qquad (10')$$

vektort értjük. Ekkor e kvaterniókra a $q_0 \cdot q_1 = -(q_0 \circ q_1) + (q_0 \times q_1)$ összefüggés teljesül.

A tiszta képzetes általánosított kvaterniók a skalárral való szorzással és az összeadással $\mathbb{R}^3$ vektorteret, továbbá a (9') skaláris szorzással az $E^3_{\alpha\beta}(\mathbb{R})$ szimbólummal jelölt általánosított euklideszi vektorteret alkotnak az $\mathbb{R}$ test felett.

Az $\mathbb{R}$ feletti $M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -\alpha a_1 & a_0 & -\alpha a_3 & a_2 \\ -\beta a_2 & \beta a_3 & a_0 & -a_1 \\ -\alpha\beta a_3 & -\beta a_2 & \alpha a_1 & a_0 \end{pmatrix} : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$ alakú mátrixok egy részalgebrát alkotnak a negyedrendű kvadratikus mátrixok 16-dimenziós $M_4(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrájában.

A $g^{\mathbb{H}}: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ , $a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \mapsto \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -\alpha a_1 & a_0 & -\alpha a_3 & a_2 \\ -\beta a_2 & \beta a_3 & a_0 & -a_1 \\ -\alpha\beta a_3 & -\beta a_2 & \alpha a_1 & a_0 \end{pmatrix}$
leképezés egy algebra-izomorfizmus, így az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrája reprezentálható az $M_4(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebra $M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ részalgebrájával.

## 4. Az általánosított oktoniók

Az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrából kiindulva értelmezzünk műveleteket a $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta} := \{(q_0, q_1): q_0, q_1 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}\}$ direktszorzatban a következő módon:

skalárral való szorzás: $r \cdot (q_0, q_1) := (r \cdot q_0, r \cdot q_1)$ (1'')
összeadás: $(p_0, p_1) + (q_0, q_1) := (p_0 + q_0, p_1 + q_1)$ (2'')
szorzás: $(p_0, p_1) \cdot (q_0, q_1) := (p_0 \cdot q_0 - \gamma \cdot \overline{q_1} \cdot p_1, p_1 \cdot \overline{q_0} + q_1 \cdot p_0)$ (3'')

ahol $\gamma \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter, valamint $r \in \mathbb{R}, (p_0, p_1), (q_0, q_1) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ tetszőlegesek.

Hosszadalmas, bár nem túl nehéz számításokkal bizonyítható a következő

**1.Tétel.** A $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ direktszorzat az (1''), (2'') és (3'') műveletekkel egy 8-dimenziós nem kommutatív, nem asszociatív, de neutrális elemes algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett, amelyben $0_{\mathbb{O}} := (0_{\mathbb{H}}, 0_{\mathbb{H}})$ az összeadás, $1_{\mathbb{O}} := (1_{\mathbb{H}}, 0_{\mathbb{H}})$ a szorzás neutrális eleme. Ezen algebrának, mint 8-dimenziós vektortérnek természetes bázisa az $1_{\mathbb{O}}, (i, 0_{\mathbb{H}}), (j, 0_{\mathbb{H}}), (k, 0_{\mathbb{H}})$, $E := (0_{\mathbb{H}}, 1_{\mathbb{H}}), (0_{\mathbb{H}}, i), (0_{\mathbb{H}}, j), (0_{\mathbb{H}}, k)$ elemrendszer.

**2. Tétel.** Az $U := \{(q_0, 0_{\mathbb{H}}): q_0 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}\} \subset \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ részalgebrát alkot a $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrában, mivel zárt az (1''), (2'') és a (3'') műveletekre nézve. Az $f_{\mathbb{O}}: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to U, q_0 \mapsto (q_0, 0_{\mathbb{H}})$ leképzés egy algebra-izomorfizmus, ezért az $f_{\mathbb{O}}^*: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}, q_0 \mapsto (q_0, 0_{\mathbb{H}})$ egy beágyazási algebra-monomorfizmus.

A beágyazás eredményeként kapott struktúrát $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ szimbólummal jelöljük és az *általánosított oktoniók* algebrájának nevezzük. Speciálisan, ha $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , akkor a klasszikus Cayley-féle oktoniók $\mathbb{O}$ algebráját nyerjük.Az általánosított oktoniók további típusait említi és tárgyalja (*ROSENFELD 1997*) művében.

**3. Tétel.** Az $E = (0_{\mathbb{H}}, 1_{\mathbb{H}}) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elemre teljesülnek a következő összefüggések:
(a) $E^2 = -\gamma$
(b) bármely $q_1 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ esetén $(0_{\mathbb{H}}, q_1) = q_1 \cdot E$
(c) minden $(q_0, q_1) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elem felírható $q_0 + q_1 \cdot E$ alakban.

A (c) pontban szereplő előállítást az általánosított oktonió *kvaternió-algebrai* alakjának nevezzük, a vele történő számolás szabályait tartalmazza a következő

**4. Tétel.** Ha $r \in \mathbb{R}, p_0 + p_1 \cdot E, q_0 + q_1 \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor
(a) skalárral való szorzás: $r \cdot (q_0 + q_1 \cdot E) = (r \cdot q_0) + (r \cdot q_1) \cdot E$,
(b) összeadás: $(p_0 + p_1 \cdot E) + (q_0 + q_1 \cdot E) = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) \cdot E$,
(c) szorzás: $(p_0 + p_1 \cdot E) \cdot (q_0 + q_1 \cdot E) = (p_0 \cdot q_0 - \gamma \cdot \overline{q_1} \cdot p_1) + (p_1 \cdot \overline{q_0} + q_1 \cdot p_0) \cdot E$.

A $p_0 := 0_{\mathbb{H}}, p_1 := 1_{\mathbb{H}}, q_0 := q, q_1 := 0_{\mathbb{H}}$ értékadással a fenti tétel (c) pontja alapján érvényes az

**5. Következmény.** Bármely $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ esetén teljesül: $E \cdot q = \bar{q} \cdot E$ .

**Megjegyzés.** Speciálisan ezért igazak az $E \cdot i = -i \cdot E, E \cdot j = -j \cdot E, E \cdot k = -k \cdot E$ összefüggések.

**6. Tétel**. Ha $f \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{C}_{\alpha}, E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor $(f \cdot i) \cdot E = f \cdot (i \cdot E)$.

(a) Ha $g \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}, E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor $(g \cdot j) \cdot E = g \cdot (j \cdot E)$.

(b) Ha $h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}, E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor $(h \cdot k) \cdot E = h \cdot (k \cdot E)$.

A 3. tétel és a 6. lemma alapján könnyen adódik a

**7. Tétel.** Ha $q_0 = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k, q_1 = a_4 + a_5 \cdot i + a_6 \cdot j + a_7 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor a $q_0 + q_1 \cdot E$ oktonió felírható az $a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k + a_4 \cdot E + a_5(i \cdot E) + a_6 \cdot (j \cdot E) + a_7 \cdot (k \cdot E)$ alakban.

Vezessük be a következő egyszerűsítő jelöléseket! Legyen a továbbiakban

$$e_0 := 1, e_1 := i, e_2 := j, e_3 := k, e_4 := E, e_5 := i \cdot E, e_6 := j \cdot E, e_7 := k \cdot E,$$

amely azonos az oktonióknak e fejezet elején az 1. tétel végén említett természetes bázisával. Ekkor a 7. tétel állítása szerint minden oktonió felírható

$$\sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i$$

formában. Ezt az előállítást az általánosított oktonió *valós algebrai alak*jának, az ezen előállításban szereplő $\{e_i\}_{i=0}^{7}$ elemeket *általánosított oktonióegységek*nek nevezzük.

Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrában a szorzás disztributív az összeadásra nézve, így a szorzás műveletét egyértelműen meghatározza az általánosított oktonióegységek Cayley-féle szorzótáblája. A 6. lemma folytatásaként egyszerű direkt számolással igazolható (*EBBINGHAUS ET AL. 1991*) nyomán a következő

**8. Tétel.** Tetszőleges $u, v \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ és $e_4 = E = (0_{\mathbb{H}}, 1_{\mathbb{H}}) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ esetén érvényesek a következő azonosságok:

(a) $(u + 0 \cdot e_4) \cdot (v + 0 \cdot e_4) = u \cdot v$,

(b) $(u + 0 \cdot e_4) \cdot (0 + v \cdot e_4) = u \cdot (v \cdot e_4) = (v \cdot u) \cdot e_4$,

(c) $(0 + u \cdot e_4) \cdot (v + 0 \cdot e_4) = (u \cdot e_4) \cdot v = (u \cdot \bar{v}) \cdot e_4$,

(d) $(0 + u \cdot e_4) \cdot (0 + v \cdot e_4) = (u \cdot e_4) \cdot (v \cdot e_4) = e_4^2 \cdot (\bar{v} \cdot u)$.

Megjegyzés: Az (a) rész alapján látható, hogy az olyan oktoniókkal, amelyek „képzetes része” 0, úgy kell számolni, mint a közönséges általánosított kvaterniókkal.

**9. Tétel.** Az általánosított oktonióegységek Cayley-féle szorzótáblájának belső tartománya:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_0$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
| $e_1$ | $-\alpha e_0$ | $e_3$ | $-\alpha e_2$ | $e_5$ | $-\alpha e_4$ | $-e_7$ | $\alpha e_6$ |
| $e_2$ | $-e_3$ | $-\beta e_0$ | $\beta e_1$ | $e_6$ | $e_7$ | $-\beta e_4$ | $-\beta e_5$ |
| $e_3$ | $\alpha e_2$ | $-\beta e_1$ | $-\alpha\beta e_0$ | $e_7$ | $-\alpha e_6$ | $\beta e_5$ | $-\alpha\beta e_4$ |
| $e_4$ | $-e_5$ | $-e_6$ | $-e_7$ | $-\gamma e_0$ | $\gamma e_1$ | $\gamma e_2$ | $\gamma e_3$ |
| $e_5$ | $\alpha e_4$ | $-e_7$ | $\alpha e_6$ | $-\gamma e_1$ | $-\gamma\alpha e_0$ | $-\gamma e_3$ | $\gamma\alpha e_2$ |
| $e_6$ | $e_7$ | $\beta e_4$ | $-\beta e_5$ | $-\gamma e_2$ | $\gamma e_3$ | $-\gamma\beta e_0$ | $-\gamma\beta e_1$ |
| $e_7$ | $-\alpha e_6$ | $\beta e_5$ | $\alpha\beta e_4$ | $-\gamma e_3$ | $-\gamma\alpha e_2$ | $\gamma\beta e_1$ | $-\gamma\alpha\beta e_0$ |

Bizonyítás. A műveleti táblázat bal felső $4 \times 4$-es parcellája a 8. tétel (a) része szerint azonos a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaterniók egységeinek szorzótáblájával. A műveleti táblázat jobb felső $4 \times 4$-es parcellája a 8. tétel (b) részének felhasználásával egyszerű közvetlen számolással igazolható. A műveleti táblázat bal alsó $4 \times 4$-es parcellája a 8. tétel (c) része alkalmazásával számolható ki. Végül pedig a műveleti táblázat jobb alsó $4 \times 4$-es parcellája a 8. tétel (d) része felhasználásával látható be. □

A 4. tétel, az oktoniók valós algebrai alakja, a 9. tétel műveleti táblázata felhasználásával érvényesek a következő számolási szabályok az oktoniók között, igaz ugyanis a következő

**10. Tétel.** Ha $r \in \mathbb{R}, o_0 := \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i\,, o_1 := \sum_{i=0}^{7} b_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

(a) skalárral való szorzás: $r \cdot (\sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i) = \sum_{i=0}^{7} (r \cdot a_i) \cdot e_i\,,$

(b) összeadás: $o_0 + o_1 = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i + \sum_{i=0}^{7} b_i \cdot e_i = \sum_{i=0}^{7} (a_i + b_i) \cdot e_i\,,$

(c) szorzás: $o_0 \cdot o_1 = (\sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i) \cdot \left(\sum_{j=0}^{7} b_j \cdot e_j\right) = \sum_{i,j=0}^{7} \left(a_i \cdot b_j\right) \cdot \left(e_i \cdot e_j\right) =$

$$
\begin{aligned}
&= (a_0b_0 - \alpha a_1b_1 - \beta a_2b_2 - \alpha\beta a_3b_3 - \gamma a_4b_4 - \gamma\alpha a_5b_5 - \gamma\beta a_6b_6 - \gamma\alpha\beta a_7b_7) \cdot e_0 + \\
&+ (a_0b_1 + a_1b_0 + \beta a_2b_3 - \beta a_3b_2 + \gamma a_4b_5 - \gamma a_5b_4 - \gamma\beta a_6b_7 + \gamma\beta a_7b_6) \cdot e_1 + \\
&+ (a_0b_2 - \alpha a_1b_3 + a_2b_0 + \alpha a_3b_1 + \gamma a_4b_6 + \gamma\alpha a_5b_7 - \gamma a_6b_4 - \gamma\alpha a_7b_5) \cdot e_2 + \\
&+ (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0 + \gamma a_4b_7 - \gamma a_5b_6 + \gamma a_6b_5 - \gamma a_7b_4) \cdot e_3 + \\
&+ (a_0b_4 - \alpha a_1b_5 - \beta a_2b_6 - \alpha\beta a_3b_7 + a_4b_0 + \alpha a_5b_1 + \beta a_6b_2 + \alpha\beta a_7b_3) \cdot e_4 + \\
&+ (a_0b_5 + a_1b_4 - \beta a_2b_7 + \beta a_3b_6 - a_4b_1 + a_5b_0 - \beta a_6b_3 + \beta a_7b_2) \cdot e_5 + \\
&+ (a_0b_6 + \alpha a_1b_7 + a_2b_4 - \alpha a_3b_5 - a_4b_2 + \alpha a_5b_3 + a_6b_0 - \alpha a_7b_1) \cdot e_6 + \\
&+ (a_0b_7 - a_1b_6 + a_2b_5 + a_3b_4 - a_4b_3 - a_5b_2 + a_6b_1 + a_7b_0) \cdot e_7\,.
\end{aligned}
$$

Ezután megadjuk az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrájának egy reprezentációját általánosítva a (*KARATAS – HALICI 2018*) dolgozatban a Cayley-féle számok $\mathbb{O}$ algebrája reprezentációs tételét.

A $\gamma \in \mathbb{R}$ paraméterrel konstruáljuk meg a 2. fejezetben bemutatott módon az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\gamma$ algebráját! A tetszőleges $o := \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktonióhoz rendeljük hozzá azt a $\mathbb{C}_\gamma$ elemeiből felépülő

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

alakú hipermátrixot, ahol

$$A_{11} := a_0 + a_4 \cdot i\,, A_{22} := a_0 - a_4 \cdot i \ \in \mathbb{C}_\gamma,$$
$$A_{12} := (-a_1 + a_5 \cdot i, -a_2 + a_6 \cdot i, -a_3 + a_7 \cdot i) \ \in \mathbb{C}_\gamma^3,$$
$$A_{21} := (a_1 + a_5 \cdot i, a_2 + a_6 \cdot i, a_3 + a_7 \cdot i) \ \in \mathbb{C}_\gamma^3.$$

Látható a konstrukció szerint, hogy $A_{22}$ az $A_{11}$ konjugáltja, $A_{21}$ komponensei pedig rendre az $A_{12}$ megfelelő komponenseinek negatív konjugáltjai.

A $\mathbb{C}_\gamma$ elemeiből felépülő és e feltételeknek eleget tevő hipermátrixokat *általánosított Zorn-féle vektor-mátrix*oknak nevezzük és ezek halmazát az $M^Z(\mathbb{C}_\gamma)$ szimbólummal jelöljük.

Az általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok halmazában műveleteket értelmezhetünk a következő módon:

skalárral való szorzás: $r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot A_{11} & r \cdot A_{12} \\ r \cdot A_{21} & r \cdot A_{22} \end{pmatrix}$, (1''')

összeadás: $A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}$, (2''')

szorzás: $A * B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} :=$

$$\begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \circ B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + B_{22} \cdot A_{12} - A_{21} \times B_{21} \\ B_{11} \cdot A_{21} + A_{22} \cdot B_{21} + A_{12} \times B_{12} & A_{22} \cdot B_{22} + A_{21} \circ B_{12} \end{pmatrix}. \quad (3''')$$

Látható, hogy az $r \in \mathbb{R}$ skalárral való szorzást és az összeadást természetes módon komponensenként értelmeztük, a szorzás emlékeztet némileg a mátrixok klasszikus szorzására, de itt $\circ$ és $\times$ a $\mathbb{C}_\gamma$ rendezett elemhármasaiból képzett $E^3_{\alpha\beta}(\mathbb{C}_\gamma)$ struktúra (9') és (10') összefüggésekkel analóg $\mathbb{C}_\gamma$ felett definiált skaláris, illetve vektoriális szorzása.

Nem túl nehéz, de nagy figyelmet igénylő és hosszadalmas számítással belátható, hogy ha $r \in \mathbb{R}$, $A, B \in M^Z(\mathbb{C}_\gamma)$, akkor $r \cdot A, A + B$ és $A * B \ \in M^Z(\mathbb{C}_\gamma)$, vagyis az általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok halmaza zárt mindhárom műveletre nézve, így $M^Z(\mathbb{C}_\gamma)$ algebrai struktúrát alkot e műveletekkel.

Tekintsük most már az

$$F: \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \to M^Z(\mathbb{C}_\gamma),$$

$$\sum_{j=0}^{7} a_j \cdot e_j \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_4 \cdot i & (-a_1 + a_5 \cdot i, -a_2 + a_6 \cdot i, -a_3 + a_7 \cdot i) \\ (a_1 + a_5 \cdot i, a_2 + a_6 \cdot i, a_3 + a_7 . i) & a_0 - a_4 \cdot i \end{pmatrix}$$

leképezést! Mivel $F^{-1}$ is leképezés, így $F$ maga bijektív. Hosszadalmas direkt számítással igazolható, hogy az $F$ egy művelettartó leképezés is, azaz érvényes az

(a) homogén: $F(r \cdot o) = r \cdot F(o)$,

(b) additív: $F(o_1 + o_2) = F(o_1) + F(o_2)$,

(c) multiplikatív: $F(o_1 \cdot o_2) = F(o_1) * F(o_2)$,

ha $r \in \mathbb{R}, o, o_1, o_2 \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ tetszőleges elemek.

Ezért érvényes a dolgozat legfontosabb eredményét összegző következő

**3. Tétel.** A fentiekben definiált $F: \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \to M^Z(\mathbb{C}_\gamma)$ leképezés egy izomorfizmus, így az általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok algebrája az általánosított oktoniók algebrájának egy reprezentációja.

## 5. Összefoglalás

Az általánosított Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárás felhasználásával a valós számok $\mathbb{R}$ testéből kiindulva megkonstruáljuk az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ kommutatív és asszociatív algebráját. E struktúra újabb megkettőzésével nyerhetjük az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ nem kommutatív, de asszociatív algebráját. Végül e struktúra ismételt megkettőzésével kaphatjuk meg az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ nem kommutatív és nem is asszociatív algebráját.

Tudjuk, hogy minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a teljes mátrixalgebra egy alkalmas részalgebrájával, ám az általánosított oktoniók algebrája nem asszociatív, s így nem reprezentálható mátrixokkal. E probléma megoldására dolgozta ki Zorn, M.A. 1933-ban a split oktoniók vektor-mátrix reprezentációját. Eljárását általánosítva a dolgozat fő eredményeként megadhatjuk az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebra általánosított vektor-mátrixokkal történő reprezentációját.


## Köszönetnyilvánítás

A szerző hálás és őszinte köszönetét fejezi ki Prof. Dr. Nagy Péter Tibor egyetemi tanárnak támogatásáért és szakmai segítségéért.


## Irodalomjegyzék


[1] **Albert, A. A**., Quadratic forms permitting composition. Annals of Mathematics, vol. 43, (1942) 161-177.

[2] **Carley, A.,** On Jacobi's Elliptic Function, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on Quaternions. In: The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley, Cambridge University Press, Vol. 1, (1889). 127.

[3] **Dickson, L. E.**, Linear algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 13(1), (1912) 59-73.

[4] **Dickson, L. E.**, On Quaternions and Their Generalization and the History of Eight Square Theorem. Annals of Mathematics, 2nd. 20(3), (1919) 155-171.

[5] Ebbinghaus, H. D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestei, A., Remmert, R., Numbers. Springer, 1991. doi:10.1007/978-1-4612-1005-4

[6] **Hamilton, W. R.,** On a new Species of Imaginary quantities connected with a Theory of quaternions. Proceeding of the Royal Irish Academy 2, (1844) 424-434.

[7] **Hamilton, W. R.,** On Quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy 3 (1847) 1-16.

[8] **Jafari, M., Yayli, Y.,** Generalized Quaternions and Their Algebraic Properties. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 64(1), (2015) 15-27. doi:10.1501/Commua1_0000000724

[9] **Karatas, A., Halici, S.**, Vector Matrix Representation of Octonions and Their Geometry. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 67(1), (2018) 161-167. doi:10.1501/Commua1_0000000839

[10] **Péntek, K.,** Az általánosított kvaternióalgebrák egy új felépítéséről. Dimenziók - Matematikai Közlemények VI. (2018) 25-30. doi:10.20312/dim.2018.03

[11] **Rosenfeld, B.,** Geometry of Lie groups. Kluwer Academic Publisher, Netherlands, 1997. doi:10.1007/978-1-4757-5325-7

[12] **Zorn, M. A.,** Alternativkörper und quadratische Systeme. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg. Springer Berlin/Heidelberg, (1933) 395-402.