*Vozsech István**

A „Longest Kill 2017” matematikai elemzése I. rész

Bevezetés

A Haditechnika folyóirat 2018/5. számban jelent meg dr. Földi Ferenc (PhD) és dr. Piroska György (PhD) *„Longest Kill 2017” igazságügyi fegyverszakértői értékelése* című tanulmánya [1]. A cikk egy 3540 méteres távlövést elemez, pontosabban vizsgálja annak a műszaki feltételrendszereit, reprodukálhatóságát. A tanulmány részletesen ismerteti a nagy távolságú lövések során felmerülő problémákat, zavaró tényezőket, valamint a paraméterek, kezdeti és végértékek nem pontos ismeretéből adódó találati valószínűség csökkenését. A tanulmány hatására fogalmazódott meg bennem a gondolat, hogy a 3540 méteres távlövés valószínűségtani elemzését elvégezzem, és a „lőfeladat” sikeres végrehajthatóságára matematikai alapokon nyugvó előrejelzést adjak.

Az elkövetkezőkben kísérletet teszek matematikai módszerekkel, egzakt módon meghatározni a történet szerinti találat bekövetkeztének valószínűségét, de nem tárgyalva azt, hogy a sikeres távlövés ténylegesen bekövetkezett-e.

Célkitűzés

A találat valószínűségét 3540 méteres lőtávolságon, idealizált kezdeti és végérték, valamint paraméterek mellett kívánjuk megadni. Megadjuk továbbá a méréssel meghatározott paraméterek, valamint a beállított kezdeti és a szintén mért végérték – céltávolság – bizonytalanságából adódó valószínűségi függvényeket, ezzel kiterjesztve és számíthatóvá téve a találati valószínűséget az idealizált állapot megfelelően kicsiny környezetében. Mindezt úgy végezzük el, hogy a *lövész helyett* egy *közel ideális fegyverbefogó szerkezetet* feltételezünk, amelynek ismétlőképességéből adódó véletlen, valamint állandó hibái zérus értékűek.

A „pontosság” megítélésének kérdése, standardizálása

Egy adott fegyver, vagy fegyverrendszer pontosságának megítélésénél többféle mérőszám közül választhatunk, amelyek egymásba átszármaztathatók, mert összefüggenek. Közös jellemzőjük, hogy lövészettel felvett értékekből képeződnek le, valamely a valóságot jó közelítéssel leíró matematikai modell segítségével. Ezen modellek mindegyikéről kijelenthető, hogy matematikai összefüggéseik valószínűségi függvények, és a modellek minden esetben tartalmaznak elhanyagolásokat, egyszerűsítéseket a valós viszonyok leképezésekor. (A későbbiekben az általunk használt modellt és összefüggéseit kirészletezzük.) Amennyiben azonban a pontosság kérdését valószínűségi alapokon vizsgáljuk, úgy be kell lássuk azt a szükségszerűséget, amely szerint biztos találat, azaz pontos lövés nem létezik, legfeljebb a teljes eseménytérben, de legalábbis annak egy megfelelően nagy valószínűségi szint melletti lekorlátozásában. Ilyen megfontolások alapján, viszont meglehetősen kívánatosnak mutatkozik a „pontos” kifejezés elkerülése, mert az legfőképpen a „sok, kevés, kicsi, nagy” családjába sorolható, és eredeti célunkkal – amely szerint a találat, azaz a kedvező esemény bekövetkeztét kívánjuk számszerűsíteni – ellentétes.

A fenti gondolatmenet alapján a rendszer jóságára, lőszabatosságára, „pontosságára” a *szórást* vehetjük mértékadónak, ezzel a valószínűségi függvényeket jól jellemezve, egy adott lőtávolságon koordinátatengelyenként egy darab mérőszámmal. Kiszámításának és értelmezésének módját az elkövetkezőkben tárgyaljuk. A rendszer szórásjellemzőit ezek után természetesen megadhatjuk a gyakorlatban elfogadott és járatosabb MOA értékben is, amely bizonyos elhanyagolások esetében – lásd később –, már a lőtávolságtól függetlenül szolgáltat számunkra koordinátatengelyenként egy darab mérőszámot.

Modellállítás – idealizált valóság

Célunk eléréséhez külballisztikai és valószínűségi számításokat hajtunk végre, amelyek első lépéseként modelleket állítunk fel, mégpedig szükségképpen kettőt, egy ballisztikait és egy valószínűségit. (Az általunk használt koordináta rendszer jobbsodrású, x a gravitációs erőtér vektorára merőleges és a lövés irányába mutat, y a gravitációs erőtér vektorával párhuzamos és ellentétes értelmű *[1. ábra]*).

A ballisztikai modell és főbb egyszerűsítései:

- Az erőtér parallel, a Föld lapos.
- A tér konzervatív, divergencia és rotáció mentes.
- Az atmoszféra stabil és nyugalmi, semmilyen szélhatás nincs.

ÖSSZEFOGLALÁS: A cikk a Haditechnika folyóirat 2018/5. számban jelent meg *A „Longest Kill 2017” igazságügyi fegyverszakértői értékelése* című tanulmányban ismertetett távlövés valószínűségtani elemzésével foglalkozik.

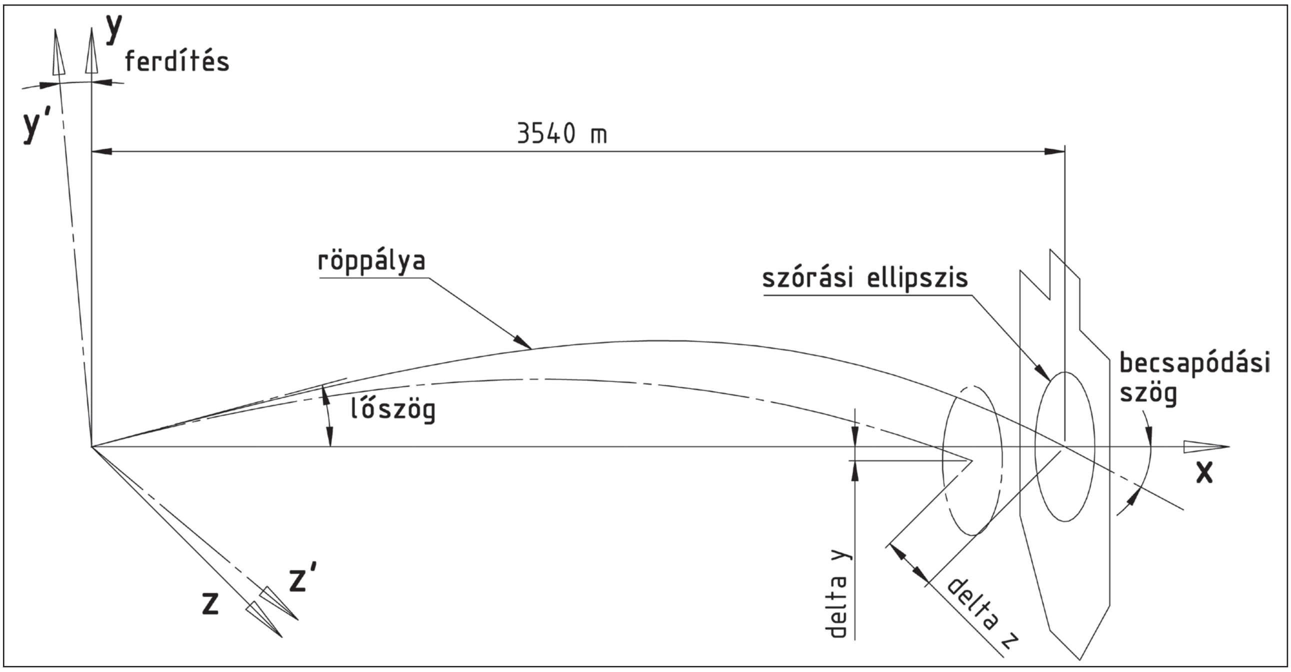
KULCSSZAVAK: távlövés, mesterlövész puska, mesterlövész töltény, valószínűség, találati valószínűség, konvolúció, mérési bizonytalanság.

ABSTRACT: The article deals with the probabilistic analysis of the long shot described in the study titled *The forensic weapons expert evaluation of the „Longest Kill 2017”,* published by dr. Földi Ferenc and dr. Piroska György in the periodical Haditechnika Number 5 in 2018.

KEY WORDS: long shot, sniper rifle, sniper rifle cartridge, probability, hit probability, convolution, measurement uncertainty

* ORCID: 0000-0001-9818-7755

DOI: 10.23713/HT.53.6.02



1. ábra. A modell koordináta-rendszere (a szerző saját szerkesztése)

- Az atmoszféra intenzív állapotjelzői ismertek, és a lőirány mentén állandóak.
- A lövedék pontszerű testként mozog a röppályán, a légerők a pontszerű testen hatnak, nyomatékuk zérus.
- A lövedék Magnuss- és Kármán-effektusok miatti oldalgását elhanyagoljuk.
- A fegyver irányzékának szögtájolása tökéletes, azaz az irányzék függőleges mozgatása az *xy* síkban értelmezett.

A valószínűségi modell és főbb egyszerűsítései:

- Az egyedi hibák vagy *z* vagy *y* irányban hatnak, kereszteffektusok és függőségek közöttük nincsenek.
- A lőszer egyedi eltéréseiből származó hibák *z* és *y* irányú véletlen eltéréseket okoznak. Tapasztalatok alapján az *y* irányba ható változók száma és összegzett hatása is nagyobb, ezért az *y* irányú eredő szórás is nagyobb.
- A fegyver – csövének lengése által – *z* és *y* irányú egyedi hibákat okoz. (A fegyver lengéseinek jelentősebb gerjesztőforrásai a csőfurat átmérőjének inhomogenitása a hossz mentén, a csőfurat hengerességi hibája, töltényűr-átmeneti kúp-csőfurat egytengelyűségi hibája, a cső nyugalmi inhomogén mechanikai feszültségi állapota.)
- A *z* és *y* irányú eltérések összege jól közelítően Gauss-eloszlást mutat, az eseménytér *[–4σ…4σ]* tartományában (99,97% lefedettségi szint).
- Mind a *z*, mind az *y* irányú szórások egy adott lőtávolság esetén fellépő szórásokból más lőtávolságra homogén lineáris formulával számíthatók, azaz szórásértékekre igaz az

$$s_i = \frac{x_i}{x_{\text{mérés}}} s_{\text{mérés}} \text{ egyenlet,} \quad (1)$$

ahol a *mérés index* a méréssel meghatározott szórásértékhez tartozó lőtávolságra utal, $x_{\text{mérés}}$ pedig a mérési lőtávolság. (A rendszer tehát *z* és *y* irányban is jellemezhető MOA értékekkel.)

- A fegyver magassági irányzásának szögtájolása nem tökéletes – a magassági irányzás síkja az *xy* síkkal nem esik egybe –, hibája valószínűségi változó. A TKP-ra gyakorolt *y* irányú hatását elhanyagoljuk, csak a *z* irányú komponensével számolunk *(1. ábra).*
- Figyelembe vesszük a magassági és az oldalirányzási hibákat, amelyeket a befogószerkezetünk véges beállítási pontossága eredményez. Feltételezzük, hogy a beállítási pontosságon belül felvett valós érték, egyenletes eloszlással jellemezhető.
- Minden egyéb bizonytalanság hatása a TKP-ra *y* irányba értelmezett.

A fentieket figyelembe véve, szorítkozván itt szigorúan csak a lőszer eltéréseire, vizsgáljuk meg azoknak, a csak várható értékükkel és szórásukkal jellemezhető mennyiségeknek az elemenkénti hatását a röppályára, amelyek az egyedi röppályák kialakulásánál komolyabb jelentőséggel bírnak. Ezeknek a mennyiségeknek a szórásai, egyedi ingadozásai a gyártási folyamat törvényszerű egyenetlenségeiből adódnak, amelyek közül a legfontosabbak rendre a következők:

- lövedéktömeg;
- lőportöltet-tömeg;
- hüvely belső térfogata;
- lövedék beültetési mélysége;
- lövedék hüvelyből való kihúzási ereje;
- lövedék átmérője;
- lövedékköpeny falvastagság-különbsége a kerület mentén;
- lőportöltet inhomogenitása.

Tekintsük át a fentiek hatásait részletesebben úgy belső, mint külső ballisztikai szempontból.

Lövedéktömeg:

Növekedése esetén jól szerkesztett lőszer esetében – bár a maximális gáznyomás és a gáznyomásgörbe munkaterülete, valamint a lövés hatásfoka is növekszik –, a lövedék kezdősebessége csökken, ezáltal a röppálya rövidül, azaz Δy negatív előjelű. Ezen túlmenően, nagyobb lövedéktömeg esetén, a megnövekvő fajlagos keresztmetszeti terhelés miatt, a lövedékre ható légerők kisebb mértékben lassítják azt a pályája mentén, amely ellentétes hatású az előzővel, bár hatása kisebb.

Lőportöltet-tömeg:

Növekedése esetén a maximális gáznyomás és a gáznyomásgörbe munkaterülete növekszik, ezért a lövedék kezdősebessége is növekszik, ezáltal a röppálya hosszabbodik, azaz Δy pozitív előjelű.

Hüvely belső térfogata:

Növekedése esetén a gáznyomásgörbe kezdeti statikus szakasza elnyújtottabbá válik, a gyújtás bizonytalanabb lesz. Komolyabb hatása a lövedék kezdősebességére van, mivel számértéke a belballisztikai gáznyomásegyenlet nevezőjében szerepel, ezért belátható, hogy növekedésével a maximális gáznyomásérték és a gáznyomásgörbe munkaterülete csökken, azaz a lövés termikus hatásfoka romlik. Ebből következően a lövedék kezdősebessége is csökken, ezáltal a röppálya rövidül, azaz Δy negatív előjelű.

Lövedék beültetési mélysége:

Gyakorlatilag a hüvely kezdeti belső térfogatát csökkenti, a gyújtásra nézve az előzőben leírtak szerint hat. Ezenkívül a túl mélyen ültetett lövedék forgásmentes úthossza növekszik, ezáltal a lövedék huzagokba történő besajtolódása ütésszerű. A lövedék tehát az átmeneti kúpba nem zérus sebességgel kezd bepréselődni, ami további két bizonytalanságot eredményez. Egyrészt a nagyobb alakváltozási sebesség miatt a lövedék anyaga ridegebben viselkedik, így annak besajtolódási munkája megnő, tehát a lövedéket gyorsító munka kisebb lesz. Másrészről a szükségképpen nem teljesen koncentrikus és egyben dinamikusabb besajtolódás miatt a lövedék geometriája torzul. A torzult geometria miatt a lövedék hosszirányú sajáttengelye el fog térni a forgástengelytől, ezért a fogó lövedék nutációs szöge növekszik. Ezek a hatások nehezen megjósolható z és y irányú eltéréseket okoznak.

Lövedék hüvelyből való kihúzási ereje:

Csökkenése esetén az égés időben elnyújtottabbá és bizonytalanabbá válik, a bizonytalan begyújtás miatt. A lövedék kezdősebességét kis mértékben csökkenti, ezáltal a röppálya rövidül, azaz Δy negatív előjelű. Továbbá elégtelen kihúzóerő estében előáll az a jelenség, amely szerint a hüvelyszájból könnyen meginduló és felgyorsuló lövedék az átmeneti kúphoz érve megáll, vagy igen jelentősen lelassul, amely hatására geometriája torzul, illetve nem kívánatos nyomáslengéseket gerjeszt. Összességében hatása nehezen számítható, de jó minőségű lőszer esetén a kihúzóerő értéke egyenletes, ezért az általa okozott bizonytalanság is csekély.

Lövedék átmérője:

Növekedése esetén növekszik a besajtolódás erőszükséglete, valamint a lövedék és csőfal közötti súrlódás. A kezdeti gázfejlődést felgyorsítja, amely akár veszélyes mértékben is megnövelheti a maximális gáznyomást. A gáznyomásgörbe alatti terület növekszik, ezért a lövésünk termikus hatásfoka javul, így a lövedék kilépő sebessége is nagyobb lesz. Ezt a hatását némileg ellensúlyozza a megnövekedő súrlódási munka. A nagyobb kezdősebesség hatására a röppálya megnyúlik, azaz Δy pozitív előjelű.

Lövedék-falvastagság inhomogenitás:

Összetett lövedék esetén – tombak köpeny, ólom mag –, belátható, hogy a lövedék saját tengelyei el fognak térni a forgástengellyel meghatározott triédertől, ennek következménye, hogy a fogó lövedék nutációs szöge megnövekszik. A megnövekvő nutációs szög hatására z és y irányú eltérések keletkeznek.

Lőportöltet inhomogenitása:

Döntő mértékben a lőszergyártási technológiára vezethető vissza. A lőportöltet betöltését a hüvelytérbe általában rezgő adagolással valósítják meg. A betöltést megelőzően a rezgő adagoló egy előre beállított térrészbe juttatja a kívánt térfogatú lőport, azonban ezen műszaki megoldás mindenképpen inhomogenitást generál a gyártásban lévő lőszertételen belül. Mindez az egyedi lőporszemcsék eltérő geometriai méretei miatt van, amely kizárólag a lőporgyártási technológiára vezethető vissza. (Az eltérő geometriai méretek a gyártási méretszórás miatt keletkeznek. A geometriai méretek szórásán kívül a geometriai alak szórását is meg kell említeni, amely szintén a lőporgyártási technológiákra vezethető vissza.) A betöltés során a lőport egy kisebb – pár kg lőpor befogadására képes – tartályban helyezik el, amelyet a felboltozódás elkerülése, és az azonos ömlesztett sűrűség elérése érdekében vibrálnak. Ennek a vibrációnak káros mellékhatásaként megindul az eredetileg közel homogén eloszlású lőporszemcsékből álló halmaz frakciókra bomlása, azaz a kisebb szemcsék alulra, a nagyobbak felülre „úsznak”. Ez a jelenség kétféleképpen gyakorol hatást a lőportöltetre. Egyrészről a túlnyomóan kisebb szemcsékből álló töltetek ömlesztett sűrűsége, így tömegük is nagyobb lesz, ezzel természetesen energiatartalmuk is nő. Másrészről a kisebb szemcsék túlsúlya miatt a kezdeti égési felület megnövekszik, amely gáznyomásnövekedéssel és termikus hatásfok növekedéssel jár. A hatás tehát rendkívül összetett, előre nehezen megjósolható. Mértéke a lőporszemcsék geometriai méretszórásának a csökkenésével korlátozható.

Ezek voltak a lőszer komponenseinek egyedi eltéréseiből adódó z és y irányú jelentősebb véletlen hibák forrásai, amelyeket külön-külön kimérni nem tudunk, csak összegzett hatásukat tudjuk laboratóriumi körülmények között, jó közelítéssel meghatározni. Kizárólag a lőszerre vonatkozó bizonytalanságok értékét pontosan megismerni azonban sosem tudjuk, mivel méréseinket csak *lőszer-vizsgálócső* rendszerrel tudjuk elvégezni, ezért a lőszer saját komponenseiből adódó bizonytalanságok szabatosan sohasem lesznek szétválaszthatóak a ballisztikai vizsgálófegyverünk bizonytalanságától. Az elmondottakat tudomásul véve, a *fegyver-lőszer* rendszert csak egyben tudjuk kezelni, ezért megelégszünk *fegyver-lőszer* rendszerünk alap szórásjellemzőinek ismeretével, feltételezve, hogy minden egyéb paramétert és intenzív állapotjelzőt pontosan ismerünk, de legalábbis stabilitásukat okkal feltételezzük. Ez a gyakorlatban az adott ballisztikai fegyverből – amely rendszer így az emberi tényezőktől teljesen független – végzett szóráskép-lövészetet jelenti a vizsgált lőszerrel, amelyet temperáltak, és a lövészet folyamán a légkör intenzív állapotjelzőit pontosan megmérték, valamint a lőtávolságot gondosan kimérték. Megjegyzendő azonban, hogy az intenzívek kiválóan pontos mérése és ismerete nem szükséges követelmény, ugyanis a szórásképlövészetnél a találati középpont és a célpont koordinátáinak egyezése kiemelt fontossággal nem bír, annál nagyobb hatással van azonban méréseink megbízhatóságára a paraméterek és az intenzívek valós értékeinek a stabilitása, azaz a befogószerkezet minél jobb ismétlőképessége és a légkör nyugalma. Az így elvégzett vizsgálat adja meg számunkra *fegyver-lőszer* rendszerünk alapszórási jellemzőit, amely beláthatóan a legjobb tulajdonságokkal rendelkezik, mivel lőszerünket gondosan temperáltuk, és a lövészt kiváltottuk egy szükségképpen precízebb befogószerkezettel. Az elmondottakból adódik azon megállapításunk, amely szerint a *fegyver-lőszer-lövész* rendszer esetében a gyakorlati szórásjellemzők az előzően megállapított alap szórásjellemzőktől mindenképpen rosszabbak, azt legfeljebb minden határon túl megközelíteni tudják, viszont a gyakorlati szórásjellemzőkből találati valószínűséget számítani nem célszerű, mert azt a szubjektív hatásoktól mentesíteni nem tudjuk. Elfogadjuk tehát az alap szórásértéket, mint legjobban megközelíthető elméleti jellemzőt, azon praktikus megfontolás alapján, hogy a metódus standardizálható. Gondolatmenetünket tehát ennek figyelembevételével folytatjuk, kísérletet téve a rendszerrel elérhető legnagyobb találati valószínűség meghatározására.

Az eloszlási függvény, szórásjellemzők és a találati valószínűség

Feladatunk tárgyalásánál a modellállítás részben feltételeztük, hogy a z és y irányú ingadozások egyaránt követik a Gauss, azaz a normál eloszlás törvényszerűségeit. Ez akkor igaz, ha az egyes események kimenetelét több, egymástól függetlenül ható – vagy egymástól csekély mértékben függő – véletlen tényező határozza meg akképpen, hogy az egyes tényezők külön-külön csak igen kis mértékben járulnak hozzá az összes véletlen hatásból adódó ingadozáshoz, és az egyes tényezők hatásai összegződnek. A teljes függetlenséget modellállításunknál kikötöttük, de meg kell említeni, hogy pl. a lövedék oldalgása a röpidő, a fogási szögsebesség, és a légerők függvénye, így nyilván nem lehet független a kezdősebesség, valamint a légnyomás ingadozásától.

Egy tetszőleges ξ valószínűségi változót normális eloszlásúnak tekintünk, ha sűrűségfüggvénye kielégíti az alábbiakat [2]:

$$\forall x \in \boldsymbol{R} \text{ esetén } f(z)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}}, \tag{2}$$

ahol $m \in \boldsymbol{R}$ és $\sigma \in +\boldsymbol{R}$.

Ennek eloszlásfüggvénye:

$$\forall x \in \boldsymbol{R} \text{ esetén } F(z)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}}dz. \tag{3}$$

A levezetéseket mellőzve, az m paraméter értéke a ξ valószínűségi változó várható értékével, σ paraméter pedig a variancia pozitív négyzetgyökével, azaz elméleti szórásával egyezik meg.

Amennyiben vizsgálatunk végtelen számú mintavételen (lövésen) alapul, úgy igaz, hogy a gyakorlati tapasztalati szórás megegyezik az elméletivel, valamint a valószínűségi változó egyedi értékeinek számtani átlaga megegyezik a változó várható értékével, azaz végtelen számú lövés esetén $s=\sigma$ és $\bar{z}=m$.

Véges számú esemény (lövés) esetén a tapasztalati értékek kiszámítása az alábbiak szerint történik:

$$\bar{z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i, \tag{4}$$

$$s_z=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2}{n-1}} \tag{5}$$

A koordinátarendszer origóját a találati középpontba transzformálva kapjuk, hogy $\bar{z}=0$ és $\bar{y}=0$, valamint

$$s_z=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i^2}{n-1}}, \text{ és} \tag{6}$$

$$s_y=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{n-1}}. \tag{7}$$

Egy tetszőleges z érték dz szélességű végtelenül keskeny és végtelen magassági kiterjedésű sávjának eltalálási valószínűsége a (2) alapján:

$$dW_z=f_z(z)dz=\frac{1}{s_z\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-\bar{z})^2}{2s_z^2}}dz, \tag{8}$$

y irányban pedig:

$$dW_y=f_y(y)dy=\frac{1}{s_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2s_y^2}}dy. \tag{9}$$

Mivel a két elemi téglatest eltalálási valószínűségei függetlenek, így az egyszerre történő eltalálásuknak a valószínűsége a két esemény valószínűségének szorzata:

$$W_{zy}=dW_z * dW_y, \text{ azaz} \tag{10}$$

$$dW_{zy}=\frac{1}{s_z\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-\bar{z})^2}{2s_z^2}}dz*\frac{1}{s_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2s_y^2}}dy. \tag{11}$$

Rendezve:

$$dW_{zy}=\frac{1}{s_z s_y 2\pi}e^{-\left(\frac{(z-\bar{z})^2}{2s_z^2}+\frac{(y-\bar{y})^2}{2s_y^2}\right)}dzdy, \tag{12}$$

Természetesen független változók esetén az előzőek igazak a sűrűségfüggvényekre is:

$$f_{zy}(z,y)=f_z(z)*f_y(y)=\frac{1}{s_z\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-\bar{z})^2}{2s_z^2}}*\frac{1}{s_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2s_y^2}}. \tag{13}$$

Rendezve:

$$f_{zy}(z,y)=\frac{1}{s_z s_y 2\pi}e^{-\left(\frac{(z-\bar{z})^2}{2s_z^2}+\frac{(y-\bar{y})^2}{2s_y^2}\right)}. \tag{14}$$

Keressük meg az azonos valószínűség mellett eltalálható pontok halamazát, azaz a potenciálgörbéket. Látható, hogy dW olyan z és y párokra lesz konstans, amelyekre $\left(\frac{(z-\bar{z})^2}{2s_z^2}+\frac{(y-\bar{y})^2}{2s_y^2}\right)$ kifejezés állandó. Transzformáljuk most a találati középpontot az origóba, ekkor:

$$\frac{z^2}{2s_z^2}+\frac{y^2}{2s_y^2}=C, \text{ átalakítva } \frac{z^2}{2Cs_z^2}+\frac{y^2}{2Cs_y^2}-1=0 \tag{15}$$

ellipszis egyenletét kapunk.

Látható, hogy a két szórás egyezése esetén az ellipszis egyenlete köregyenletté silányul, amellyel viszont a számítások jelentősen leegyszerűsödnek.

Gondolatmenetünket egy rövid időre megszakítva vizsgáljuk meg annak a beállítási, fegyvertartási hibának a hatását, amikor a magassági beállítás nem az yx síkban értelmezett, hanem egy $y'x$ síkban. Ez a ferdítés, vagy ferdítési hiba, ekkor y' tengelyt az y tengely x menti α szöggel való elforgatásával nyerjük, amely szórási ellipszisünket egyrészt általános pozícióba forgatja, másrészt találati középpontunk a forgatás irányába oldalra, valamint lefelé vándorol *(1. ábra)*. Az általános helyzetű szórási ellipszisünk főtengelyeit a legegyszerűbben következők szerint határozhatjuk meg:

A találati középpontba transzformált origó esetén az α szöggel elforgatott koordinátarendszerben egy adott találati pont koordinátája

$$\boldsymbol{r}_{i,\alpha}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}_{i,0}, \text{ ahol} \tag{16}$$

$\boldsymbol{r}_{i,0}=[z_{i,0}\boldsymbol{k}, y_{i,0}\boldsymbol{j}]$ az eredeti helyvektor, és

$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{bmatrix}$ a forgatómátrix.

Írható továbbá, hogy

$$f(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_{i,\alpha}[2])^2, \tag{17}$$

tehát az $f(\alpha)$ függvény találati középponttól értelmezett y' vetületű távolságok négyzetösszege. A függvény szélsőérték helyei ott vannak, ahol az elforgatott y, azaz az y' tengely a szórási ellipszis nagytengelyével, vagy kistengelyével egybeesik, tehát feladatunk megoldását a $\frac{df(\alpha)}{d\alpha}=0$ egyenlet megoldása szolgáltatja.

Visszatérve az eredeti gondolatmenetünkhöz, határozzuk meg most már egy véges kiterjedésű elemi négyzet eltalálásának valószínűségét!

Egy tetszőleges z_i érték $\pm\delta$ szélességű környezetének, – z_i középpontú $y \in \boldsymbol{R}$ végtelen kiterjedésű téglatest – eltalálási valószínűsége a (3) alapján általános esetben:

$$W_{\delta,z_i}=\frac{1}{s_z\sqrt{2\pi}}\int_{z_i-\delta}^{z_i+\delta}e^{-\frac{(z-\bar{z})^2}{2s_z^2}}dz\text{, valamint} \tag{18}$$

tetszőleges y_i érték $\pm\delta$ magasságú környezetének, – y_i középpontú $z \in \boldsymbol{R}$ végtelen kiterjedésű téglatest – eltalálási valószínűsége általános esetben:

$$W_{\delta,y_i}=\frac{1}{s_y\sqrt{2\pi}}\int_{y_i-\delta}^{y_i+\delta}e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2s_y^2}}dy. \tag{19}$$

A találati középpontba transzformált origó esetében:

$$W_{\delta,z_i}=\frac{1}{s_z\sqrt{2\pi}}\int_{z_i-\delta}^{z_i+\delta}e^{-\frac{z^2}{2s_z^2}}dz\text{, valamint} \tag{20}$$

$$W_{\delta,y_i}=\frac{1}{s_y\sqrt{2\pi}}\int_{y_i-\delta}^{y_i+\delta}e^{-\frac{y^2}{2s_y^2}}dy. \tag{21}$$

Mivel a két téglatest eltalálási valószínűségei függetlenek, így az egyszerre történő eltalálásuknak a valószínűsége, azaz a $P_i=[z_i, y_i]$ középpontú 2δ élhosszúságú négyzetnek az eltalálási valószínűsége – a két esemény valószínűségének szorzata:

$$W_{\delta,P_i}=W_{\delta,z_i}*W_{\delta,y_i} \tag{22}$$

A (22) összefüggés segítségével meghatároztuk az eseménytér egy tetszőleges pontjának, tetszés szerinti kicsiny környezetének az eltalálási valószínűségét. Helyezzünk most az eseménytér azon felületére, ahol a történések 99,97%-a bekövetkezik, egy megfelelően sűrű négyzetrácsot 2δ osztással, és az összes rácspont δ távolságú környezetében számítsuk ki (22) értékét, majd rendezzük a kapott eredményeket egy p x q méretű mátrixba. (Megjegyzendő, hogy a (2)-es egyenlet csak $\pm\infty$-ben ad zérus valószínűséget, ezért az eseményteret $z\in[-4s_z \dots 4s_z]$, és $y\in[-4s_y \dots 4s_y]$ releváns téglalapra megszorítjuk és a relatív hibát elhanyagoljuk.) Vegyük most a célt, és szintén helyezzük az eseménytérbe, majd képezzünk egy szintén p x q méretű mátrixot oly módon, hogy a cél kontúrjain belül elhelyezkedő rácspontok 1, az azon kívül elhelyezkedőek 0 logikai súlyt kapjanak. A két mátrix Hadamard – elemenkénti szorzatát $M_{i,j}=(A\circ B)_{i,j}=(A)_{i,j}*(B)_{i,j}$ képezve megkapjuk a cél elemi egységeinek találati valószínűség szerint értelmezett lefedettséget. A teljes találati valószínűség kiszámításához összegezzük az elemeket.

$$W=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}M_{i,j} \tag{23}$$

Ezzel a megoldási módszerrel egzakt módon meghatározható a cél eltalálási valószínűsége, természetesen azzal a megkötéssel, hogy a célnak nincsenek kitüntetett zónái, valamint, hogy az egyes lövések halmozódó hatásaitól eltekintünk, azaz a megsemmisítés szükséges és elégséges feltétele a találat. A számításokhoz tehát elégséges ismerni az adott lőtávolsághoz tartozó szórásértékeket, a cél geometriáját, a találati középpont, valamint a cél relatív helyzetét.

A találat valószínűségét megfogalmazhatjuk másképpen is, mégpedig a biztos találathoz szükséges lövések – lőszermennyiség – számával, egy előzetesen meghatározott valószínűséggel.

A találati valószínűség ilyetén történő megadása régebben volt járatos, mivel a táblázatba rendezett, legfeljebb kétjegyű számok könnyebb áttekinthetőséget adtak. A régebbi szakutasítások – SzVD, AK típusok – végén található alap lőtáblázatok között találhat az Olvasó ilyen táblázatokat.

A szükséges lőszermennyiség kiszámításához elsődlegesen meghatározzuk egy lövés találati valószínűségét – amelyet jelöljünk W_1-gyel – majd ennek a komplementerét, – $(1-W_1)$ – azaz a nemtalálat valószínűségét. Amennyiben a biztos találat valószínűségi szintje W, – pl. 95%, azaz 0,95 – úgy a nem találaté $(1-W)$, amely alapján írható az alábbi egyenlet [3]: $1-W=(1-W_1)^n$, mivel az egyes lövések független események, azaz

$$W=1-(1-W_1)^n\text{, amelyet } n\text{-re megoldva kapjuk} \tag{24}$$

$n=\frac{\ln(1-W)}{\ln(1-W_1)}$, amelyet a következő egészre kerekítve kapjuk

$$N=\mathrm{trunc}\left(\frac{\ln(1-W)}{\ln(1-W_1)}\right)+1\text{ értéket.} \tag{25}$$

(Folytatjuk)

Irodalomjegyzék

[1] Földi Ferenc, Piroska György. „A „Longest Kill 2017" igazságügyi fegyverszakértői értékelése" *Haditechnika* 52/5 (2018): pp. 50–54. https://doi.org/10.23713/HT.52.5.10;

[2] Reimann József, Tóth Julianna. *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., 1996.;

[3] Rheinmetall GmbH. *Waffentechnisches Taschenbuch*, Düsseldorf, 1980

[4] Fazekas István. *Valószínűségszámítás*. Debrecen: Debreceni Egyetem Kossuth Egyetemi Kiadó, 2005.;

[5] Hihalmi Harmos Zoltán. *Tüzérlövéstan*. Budapest: M. Kir. Honvédelmi Minisztérium, 1937.

Jelölések jegyzéke

MOA – (minit of angle) szögperc
TKP – találati középpont
σ – elméleti szórás, a variancia pozitív négyzetgyöke
s – korrigált tapasztalati szórás
i, j – futó indexek
n – események (lövések) száma
Δ – véges növekmény
d – differenciális növekmény
x, y, z – Descartes-féle koordinátarendszer tengelyei
W – a valószínűség számértéke
2δ – diszkrét tér négyzetrács távolsága