KÖZGAZDASÁGI SZEMLE, LXVII. ÉVF., 2020. JANUÁR (14–30. o.)

KELEMEN JÓZSEF

Szimultán Hotelling-modell Cobb–Douglas-hasznosságfüggvénnyel

A Hotelling-keretrendszer (1929) napjainkban is igen sikeres. Ennek ellenére néhány feltevése nem magától értetődő, például az, hogy a háztartásokat csak rezervációs áruk jellemzi. Ebből adódóan a háztartások viselkedését egy Cobb–Douglas-féle hasznossági függvénnyel definiáljuk. Ez a fogyasztóknak egy folytonos és elasztikus egyéni keresleti függvényt eredményez, valamint egyéb új mechanizmusokat is hoz a modellbe, amelyekre a szakirodalom már korábban felhívta a figyelmet. Mindezek eredményeként egyrészt a jövedelem változója játssza a rezervációs ár szerepét, korlátozza az árakat. Másrészt a jövedelem és az árak befolyásolják a közömbös fogyasztó elhelyezkedését, aminek a hatása több csatornán keresztül érvényesül. Az új modell lényegében nem tér el a korábbi eredményektől. Ha a jövedelem és a szállítási költség aránya magas, akkor a piac közepén lévő Bertrand-verseny az egyetlen egyensúly. Ha túl alacsony, akkor a vállalatok monopóliumként viselkedhetnek. E mellett a két lehetőség mellett van még egy harmadik is, ahol a vállalatok egymással versenyeznek, de elég piaci erejük van az árakat a határköltség felett tartani.*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: L10, R10.

Bevezetés

Hotelling modellje a térbeli gazdaságtan fejlődésének fontos állomását jelentette, noha fő célja a verseny stabilitásának elemzése volt (*Hotelling* [1929]). Egy új dimenzióval – a vállalatok elhelyezkedésével – bővítette ki a Bertrand-versenyt. Ez egy horizontális differenciáláson alapuló modell, ahol az árak és az elhelyezkedések szekvenciálisan kerülnek meghatározásra. Ennek eredményeként végül mindkét vállalat a piac közepén fog elhelyezkedni. Annak ellenére, hogy az eredmények igen plauzibilisek, *d'Aspremont és szerzőtársai* [1979] megmutatta, hogy nincs tiszta Nash-egyensúly a modellben, ha a két vállalat egymáshoz túl közel, de nem ugyanabban a pontban

* Köszönet illeti a tanulmány névtelen bírálóját a hasznos megjegyzésekért.

Kelemen József a Magyar Nemzeti Bank munkatársa (e-mail: kelemenj@mnb.hu).
A kézirat első változata 2018. november 21-én érkezett szerkesztőségünkbe.
DOI: http://dx.doi.org/10.18414/KSZ.2020.1.14

helyezkedik el a piac közepén. Más szavakkal, a piac középső szakaszán nem ösztönzi őket semmi arra, hogy a boltok a piac középpontja felé törekedjenek.

Az eredeti Hotelling-modell azt feltételezte, hogy az áraknak nincs korlátja, azaz minden fogyasztó a piacon hajlandó bármekkora összeget fizetni egy egység termékért. *Lerner–Singer* [1937] megjegyezte, hogy a modell reálisabb lenne, ha az áraknak lenne felső határa, mert különben a fogyasztók kiadásainak sincs korlátja. A szerzőpáros emellett szimultán ármeghatározást és elhelyezkedést feltételezett, és így vizsgálta az eredeti Hotelling-modellt. Később *Smithies* [1941] elasztikus keresletet javasolt, mert ahogy a vállalatok a piac közepe felé haladnak, úgy veszíthetnek el fogyasztókat a piac szélein. Ezért egy lineáris keresleti függvényt vezetett be, és a vállalatok viselkedését négy különböző stratégia mellett vizsgálta. *Salop* [1979] egy külső jószágot feltételezett a híres körmodelljében, ahol a keresletben egy véges rezervációs ár jelent meg. *Economides* [1984] Hotelling modelljében azt mutatta meg, hogy eléggé alacsony árak feltevése mellett a vállalatok lokális monopóliumként viselkednek. Eltávolodnak egymástól, és monopolárakat határoznak meg oly módon, hogy egymást ne zavarják. Ez összhangban van *Böckem* [1994] eredményeivel kvadratikus szállítási költségek mellett. *Hinloopen–Marrewijk* [1999] megmutatta, hogy – Hotelling és Economides eredményei mellett – egy harmadik eset is létezik a rezervációs ár köztes értékeire.[1] Ez egy tiszta Nash-egyensúly, ahol a vállalatok egymással versenyeznek, és a teljes piacot kiszolgálják. *Woeckener* [2002] azt találta, hogy a vállalatok optimális elhelyezkedése biztosítja a szociális jóléti maximumot, ha a szállítási költségek kvadratikusak, és a rezervációs árak homogének a térben. Ez a Hotelling-keretrendszer ma is sikeres, és számos tanulmány épít rá. Például az e-kereskedelem térnyerésével új szempontok váltak fontossá, megjelentek a webáruházak mint speciális boltok. Ezért egyre gyakoribbak a webáruházak viselkedését vizsgáló modellek, mint *Lijesen* [2013], *Kelemen* [2017] vagy *Guo–Lai* [2017].

A szakirodalom fejlődésével a tanulmányok a háztartásokat továbbra is csak a rezervációs árukkal ragadták meg. Ezért tanulmányunk a háztartások viselkedésének leírására egy Cobb–Douglas-hasznosságfüggvényt integrál a Hotelling-keretrendszerbe, így részletesebb modellben szintetizálja a szakirodalom fontos eredményeit. Azt elemezzük, hogy ez a modell milyen új eredményekkel szolgál. A korábbiakhoz képest eltérés, hogy nem szekvenciálisan, hanem szimultán döntenek a vállalatok. Az egyéni kereslet folytonos és elasztikus lesz, azaz a fogyasztók nemcsak egy egységet, hanem bármekkora mennyiséget választhatnak a termékből, azonban lehetőségük van nem fogyasztani. Mindezek eredményeként a jövedelem rezervációs árként viselkedik, korlátozza a maximális lehetséges árat. Másfelől új mechanizmus jelenik meg: a háztartások elkölthető jövedelme különböző helyeken eltér.

Hinloopen–Marrewijk [1999] tanulmányával összevetve az eredményeket, mindkét esetben meg lehet figyelni, hogy ha a jövedelem és a szállítási költségek aránya alacsony, akkor lokális monopóliumok jelennek meg, de az új modellben

[1] A köztes differenciáláson olyan differenciálást értünk, amely a szélek és a központ között valósul meg. Eredetileg *Hinloopen–Marrewijk* [1999] azonban arra az esetre használta, amikor a vállalatok a kvartiliseken helyezkedtek el.

nehezebben alakulnak ki, mert a monopolista viselkedéshez nagyobb kereslet kell annak rögzített mérete miatt. Az arány köztes értékeinél a vállalatok úgy versenyeznek egymással, hogy a negyedelőpontok és a középpont között helyezkednek el. Magasabb értékei visszavezetnek az eredeti Hotelling-modellhez. A piac közepén Bertrand-verseny érvényesül, viszont a középpont közelében nem tudunk mit mondani a vállalatok elhelyezkedési szándékáról.

Modellünk a *Peng–Tabuchi* [2007] cikkre építkezik, amelyben a szerzőpáros egy endogén termékválasztékú modellt mutatott be. A vállalatok döntéshozatala nemcsak az áraktól és elhelyezkedésektől függ, de a termékválasztéktól is. A kezelhetőség kedvéért a szerzőpáros rögzített árakat használ. A fogyasztóknak kvázilineáris hasznosságfüggvényük van, amely restriktívebb az általunk bemutatottakhoz képest. Így mindig egy egységet költenek az összetett jószágra – feltéve, hogy a jövedelmük elégséges ehhez –, és a többi egységet egy másikra, ezért a kereslet nem rugalmas. Köszönhetően a hasznossági függvény alakjának, a jövedelem nem jelenik meg a közömbös fogyasztó képletében, így ez a paraméter nem játszik szerepet ebben a modellben.

Az alábbiakban bemutatott modell a *Dixit–Stiglitz* [1977] keretrendszerének elemeit használja és integrálja a Hotelling-modell megközelítésébe. Két vállalat szimultán dönt az árakról és elhelyezkedésről, valamint a kezelhetőség érdekében egy egyszerű haszonkulcsalapú árazást vezetünk be – ez a feltétel azonban realisztikus is lehet néhány esetben. A modell úgy interpretálható, mint két hasonló méretű szupermarket, amelyek közel azonos termékkörrel kereskednek. Mindkét bolt próbálja a termékek legszélesebb választékát nyújtani, ezért hasonló termékeket kínálnak, így a beszerzési költségeik is hasonlók lehetnek. Következésképp egy racionális fogyasztó – azonos árakat feltételezve – a közelebbi boltot választja.

A modell analitikusan két új gazdaságföldrajzi modellre hasonlít. Az egyik, amelyben *Henkel és szerzőtársai* [2000] a koalíciók szerepét vizsgálta, a másikban *Tabuchi* [2009] egy városfejlődési modellt mutatott be, amelyben a Christaller–Lösch-elmélet alapján létrejövő hexagonális térszerkezet alakul ki.

Először az alapmodellt mutatjuk be, amely közömbös fogyasztót, profitfüggvényt és profitmaximalizálást feltételez. Ezt követően a profitmaximalizálásról és ennek következményeiről lesz szó. Végül az utolsó rész összegzést ad.

A modell

Tegyük fel, hogy egy egységnyi hosszúságú térben vagy városban két vállalat működik. A fogyasztók egyenletesen helyezkednek el, és legfeljebb csak az egyik üzletben vásárolnak. A hasznossági függvényük Cobb–Douglas-típusú, ahol az egyik jószág egy kompozit termék, amelyet egy CES függvény $\sigma > 1$ paraméterrel ír le.

$$U(x) = Q(x)^{\gamma} S(x)^{1-\gamma}, \qquad \text{ahol} \qquad Q(x) = \left[\int_0^{v_R} q(v, x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \, \mathrm{d}v \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}. \tag{1}$$

Az x helyen élő fogyasztó az R-edik vállalattól vásárol, aki v_R termékváltozatot értékesít. Az x pontbeli fogyasztó $q(v, x)$ mennyiséget fogyaszt a v-edik termékből és $Q(x)$ mennyiséget a kompozit jószágból. Emellett még fogyaszt $S(x)$ mennyiséget egy másik jószágból, amelyhez nem kapcsolódik szállítási költség.

Ezt nevezhetjük megtakarításnak, és az ára P_S, exogén. Ekkor, felhasználva a

$$P_R = \left[\int_0^{v_R} p_r(v)^{1-\sigma} \, \mathrm{d}v \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

árindexet és τ szállítási költséget, az elkölthető jövedelem a következőképp írható fel:

$$Y(x) = P_R Q(x) + P_S S(x) = y - \tau |x_R - x|. \tag{2}$$

Az y paraméter a fogyasztó jövedelme vagy vagyona, valamint az analitikus kezelhetőség érdekében a távolságot abszolútérték-függvénnyel számoljuk. Így szokásos módon az elkölthető jövedelem megegyezik a költségvetési korláttal, valamint felírható a jövedelem és a szállítási költség különbségeként is. A kereslet:

$$q(v, x) = \frac{p_R(v)^{-\sigma}}{P_R^{1-\sigma}} \gamma Y(x). \tag{3}$$

Az indirekt hasznossági függvény:

$$V(P_R, P_S, x) = \gamma^{\gamma} (1-\gamma)^{1-\gamma} P_R^{-\gamma} P_S^{\gamma-1} Y(x). \tag{4}$$

Két vállalat van, A és B, továbbá az általánosság megsértése nélkül élhetünk azzal, hogy $x_A \leq x_B$. Egymással versenyeznek, maximalizálják a profitjukat, és feltesszük, hogy a termékválaszték exogén.

Henkel és szerzőtársai [2000] modelljéhez hasonlóan a hasznosságfüggvény Cobb–Douglas-típusú.[2] Ez a szokásostól eltérő összefüggéseket eredményez, és a jövedelem változója is szerves részévé válik a modellnek. A költségvetési egyenes tartalmazza a szállítási költséget, ezzel nyer értelmet a vagyon és az elkölthető jövedelem fogalma. Továbbá a modellben nem rögzítettek az árak, viszont a kezelhetőség érdekében szükség volt egy újabb megkötésre, amely szintén újdonság a modellben. A vállalatok egy haszonkulcsalapú árazást használnak, és mivel ugyanazokat a termékeket értékesítik, így ugyanolyan költségekkel szembesülnek.

[2] *Peng–Tabuchi* [2007] modelljében a jövedelemproblémát egy kvázilineáris alakkal egyszerűsítették, hogy ezzel a fogyasztók fixen egy egységet költsenek a kompozit termékre. Bár ez az átalakítás sem volt elegendő, hogy a szerzők megkerüljék a problémát, ezért újabb feltevéssel éltek. Minden fogyasztónak elégséges vagyona van ahhoz, hogy maradjon egy egység elkölthető jövedelme a kompozit termékre.

A közömbös fogyasztó

Legyen $\tilde{x}$ a közömbös fogyasztó elhelyezkedése, akinek indifferens, hogy az A vagy a B vállalattól vásárol, azaz $V(P_A, P_S, \tilde{x}) = V(P_B, P_S, \tilde{x})$. Ekkor

$$\tilde{x} = \begin{cases} -\dfrac{y}{\tau} + \dfrac{P_A^{-\gamma} x_A - P_B^{-\gamma} x_B}{P_A^{-\gamma} - P_B^{-\gamma}}, & \text{ha } \tilde{x} < x_A < x_B; \\ \dfrac{P_A^{-\gamma} - P_B^{-\gamma}}{P_A^{-\gamma} + P_B^{-\gamma}} \dfrac{y}{\tau} + \dfrac{P_A^{-\gamma} x_A + P_B^{-\gamma} x_B}{P_A^{-\gamma} + P_B^{-\gamma}}, & \text{ha } x_A \le \tilde{x} \le x_B; \\ \dfrac{y}{\tau} + \dfrac{P_A^{-\gamma} x_A - P_B^{-\gamma} x_B}{P_A^{-\gamma} - P_B^{-\gamma}}, & \text{ha } x_A < x_B < \tilde{x}. \end{cases} \tag{5}$$

A képletben megjelenik a vagyon paramétere, amely szintén befolyásolja a közömbös fogyasztó elhelyezkedését. Ha az árak megegyeznek, akkor a közömbös fogyasztó a megszokott módon a boltok között, a felezőpontnál helyezkedik el.

Az (5) képlet második sora jelenti azt, hogy a közömbös fogyasztó a két vállalat között helyezkedik el. Ha a két vállalat árindexei nem egyeznek meg, például A-nak alacsonyabb árai vannak, akkor a közömbös fogyasztó messzebb kerül, és többet akar az A vállalattól vásárolni. Ennek oka nemcsak a kedvezőbb árban rejlik (második tag), hanem ehhez hozzájárulnak a jövedelmi csatornák is (első tag). Ha a fogyasztó kap némi extrajövedelmet, akkor ebből a pénzből többet tud vásárolni a preferált boltban, mint a másikban. Ezért az árbeli előny jelentősen erősebb. Az (5) képlet második részének a deriváltjai a következők:[3]

$$\tilde{x}'(x_A) = \frac{P_A^{-\gamma}}{P_A^{-\gamma} + P_B^{-\gamma}}, \tag{6}$$

$$\tilde{x}'(x_B) = \frac{P_B^{-\gamma}}{P_A^{-\gamma} + P_B^{-\gamma}}, \tag{7}$$

$$\tilde{x}'(P_A) = \gamma\left(-\frac{2y}{\tau} + x_B - x_A\right)\frac{P_A^{-\gamma-1} P_B^{-\gamma}}{\left(P_A^{-\gamma} + P_B^{-\gamma}\right)^2}, \tag{8}$$

$$\tilde{x}'(P_B) = -\gamma\left(-\frac{2y}{\tau} + x_B - x_A\right)\frac{P_A^{-\gamma} P_B^{-\gamma-1}}{\left(P_A^{-\gamma} + P_B^{-\gamma}\right)^2}. \tag{9}$$

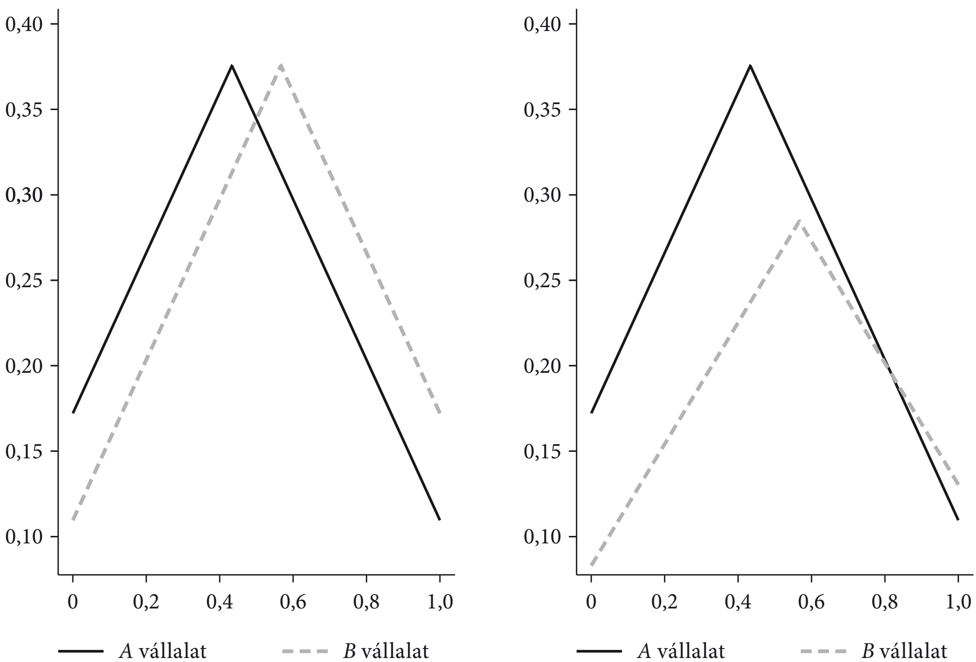
Az elhelyezkedés szerinti parciális deriváltak – pozitív árakat feltételezve – nagyobbak nullánál. Minél közelebb költözik egy bolt a középponthoz, annál közelebb kerül a közömbös fogyasztó a másik bolthoz, ami magasabb potenciális keresletet biztosít számára, azaz annál több vásárló éri el. Az ár szerinti parciális deriváltnak negatívnak kell lennie A vállalat számára, és pozitívnak B részére, azaz $(x_B - x_A)/2 < y/\tau$. Így egy vállalatnak minél magasabb az ára, annál közelebb van hozzá a közömbös fogyasztó.

[3] A következő jelölést használjuk: $\tilde{x}'(u) = \partial\tilde{x}/\partial u$.

A közömbös fogyasztó nem a két bolt között helyezkedik el, ha az áraik jelentősen eltérnek egymástól, ami az (5) képlet első és harmadik sorában áll fenn. Például ha az *A* vállalat ára jelentősen kisebb a *B*-énél, akkor megtörténhet, hogy a közömbös fogyasztó a *B* vállalaton túl helyezkedik el, azaz $x_B < \tilde{x}$.

Az *1. ábra* mutatja a fogyasztók hasznosságát a képzeletbeli városban, ha *A* és *B* vállalatnál vásárolnak. Ez alapján meghatározható, hogy egy fogyasztó ott vásárol, ahol magasabb a hasznossága. Egy bolttal azonos helyen élő lakos nagyobb hasznossághoz jut, mivel a szállítási költség alacsonyabb. Ezért a hasznosságok maximuma a boltok elhelyezkedésénél van. A két görbe metszéspontja határozza meg a közömbös fogyasztó elhelyezkedését. Az *1. ábra* bal oldali részén a közömbös fogyasztó *A* és *B* bolt között helyezkedik el, mint az (5) képlet második tagjában.

1. ábra
A fogyasztók hasznossága a képzeletbeli városban, ha *A* vagy *B* vállalatnál vásárolnak azonos (bal oldal) és eltérő árak (jobb oldal) feltevése mellett



Ha az árak különböznek, akkor a görbék meredekségének nem kell megegyezniük, ahogy az ábra jobb oldali része is mutatja. Ennek köszönhetően a modellnek van egy érdekes tulajdonsága. Ha *A* vállalat árban aláígér *B* vállalatnak, azaz $x_B < \tilde{x}$, akkor *B* nem veszíti el az összes fogyasztóját, ha az aláígérés nem olyan agresszív. Vannak fogyasztók, akik *B* vállalattól vásárolnak, mert *A* túl messze van számukra ezen az alacsony áron is, vagyis arányaiban túl magas a szállítási költség.

A profit

Egy adott bolt bevétele azoktól a potenciális vásárlóktól származik, akik az adott boltot választják, és ki tudják fizetni a szállítási költséget. Feltesszük, hogy a fogyasztók a bolt összes termékváltozatából vásárolnak, valamint minden terméknek van egy fix költsége. A lakosok térbeli eloszlása homogén, egy pontban csak egy lakos él. A vállalatok haszonkulcsalapú árazást alkalmaznak, mint ahogy a *Grant–Quiggin* [1994] tanulmányban szerepel, $c_R(v) = \rho_R(v) p_R(v)$, ahol ρ a haszonkulcs. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy csak egy haszonkulcs $[\rho_R(v) = \rho_R]$ van boltonként, mert a vállalatok nem tesznek különbséget és nem diszkriminálnak termékek és vásárlói csoportok között. Ezért a vállalatoknak ár szerint egy döntési változójuk van. A költségárindexük $C_R = \left[\int_0^v c_r(v)^{1-\sigma}\, \mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$, és így a kapcsolat az ár- és költségindex között: $P_R = C_R/\rho_R$.

Továbbá feltételezzük, hogy mindkét vállalat termékszerkezete azonos, $c = C_A = C_B$ és $v_A = v_B$, így a két vállalat termékválasztékban nem versenyez egymással. Azonos méretű vállalatok a javak azonos spektrumát kínálják, ezzel csökkentve a másik vállalat versenyelőnyét. A profitfüggvényt átírhatjuk ezekkel a jelölésekkel, majd felhasználva *Kelemen* [2018] eredményeit, ahol *l* a leginkább balra elhelyezkedő, *r* pedig a leginkább jobbra elhelyezkedő fogyasztója a vállalatnak:

$$\pi_R = \gamma\left(1 - \frac{c}{P_R}\right)\left[y(r-l) + \tau x_R(r+l) - \frac{\tau}{2}\left(l^2 + r^2\right) - \tau x_R^2\right]. \tag{10}$$

A profitfüggvény meghatározásához *l* és *r* változót kell kifejezni, amihez a (2) képletet használjuk fel. Pozitív elkölthető jövedelmet feltételezve, meghatározhatjuk az első fogyasztót az *R*-edik vállalat jobb és bal oldalán, aki a magas szállítási költségek miatt nem tud vásárolni a vállalattól:

$$x_R^l = x_R - \frac{y}{\tau}, \tag{11}$$

$$x_R^r = x_R + \frac{y}{\tau}. \tag{12}$$

A (11) és a (12) összefüggésnek fontos következményei vannak. Az *R*-edik vállalat csak egy y/τ sugarú körben éri el a fogyasztókat, mert $x_R^r - x_R^l = 2\,y/\tau$. Ez tehát a vállalatok potenciális kereslete. Ennek mértéke szerint a modellt négy különböző esetre tudjuk bontani a jövedelem és a szállítási költség arányának a függvényében.

Ha ez az arány elég alacsony, akkor a két vállalat úgy tud elhelyezkedni, hogy az általuk kiszolgált piacok nem fedik egymást, nem versenyeznek, és lokális monopóliumként viselkedhetnek. Analitikusan ez azt jelenti, hogy a képzeletbeli város teljes hossza nagyobb, mint a két vállalat együttes potenciális kereslete, $4y/\tau \leq 1$, ami azt eredményezi, hogy $0 < y/\tau \leq 1/4$. A második esetben a vállalatok potenciális kereslete olyan nagy, hogy keresztezik egymást, ha a hátországot is kiszolgálják, azonban egyedül nem képesek a teljes piacot lefedni. Ezért $2y/\tau < 1$, együtt pedig $1/4 < y/\tau < 1/2$, és versenyezhetnek. A harmadik eset $1/2 \leq y/\tau < 1$, amikor a vállalatok a teljes piacot ki tudják szolgálni, de nem minden pontban. Nyilvánvalóan az utolsó eset $y/\tau \leq 1$, ekkor van a legnagyobb verseny, mindkét vállalat képes kiszolgálni a teljes piac minden pontját.

A második esetben a vállalatok három különböző elrendezésben fedhetik le a piacot. Például *A* vállalatra $l=0$ és $r=\tilde{x}$; $l=0$ és $r=x_R^r$; $l=x_R^l$ és $r=\tilde{x}$.[4] A legtermészetesebb elrendezés az első, amikor a vállalatok a piac első és második felét külön-külön szolgálják ki. A másik két esetben arról van szó, hogy megtörténhet, hogy kihagynak néhány fogyasztót a nagyobb profit reményében. Ezért a vállalatok nem versenyeznek, és nem érik el a piac közepét, vagy néhány vásárlót kihagynak a hátországokban, azaz a város szélein.

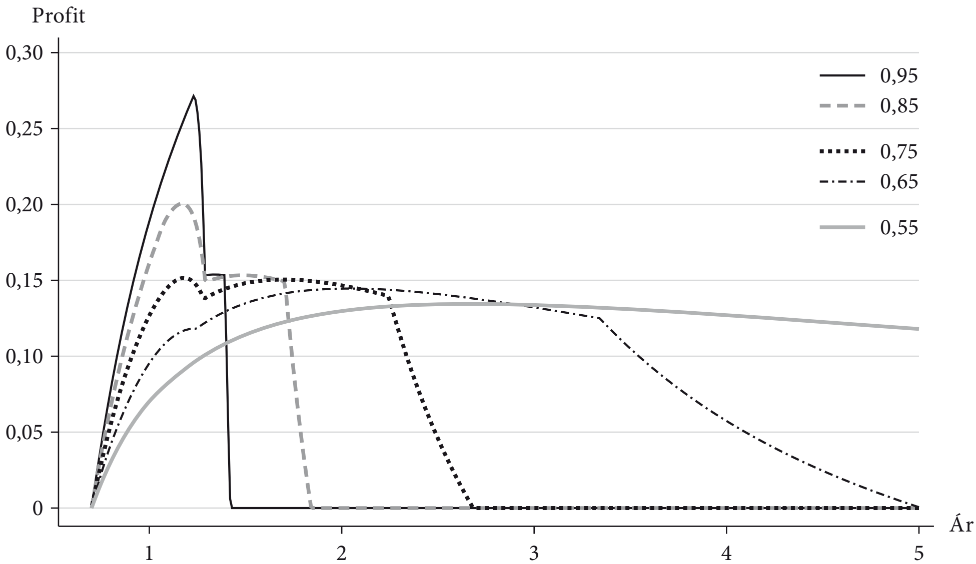
A versenyzői esetekben a profit egy nem jól viselkedő függvény, amiatt, hogy a közömbös fogyasztó elhelyezkedését egy nem folytonosan differenciálható függvény írja le. Hogy elkerüljük a Hotelling által elkövetett hibát, meg kell vizsgálni az egyensúlyi pontokat, hogy nemcsak lokális optimumok, hanem globálisak is. Például megéri monopóliumként viselkedni függetlenül a versenytárstól, vagy aláígérni árakban a másiknak, mint ahogy már *d'Aspremont és szerzőtársai* [1979] rámutatott.

A *2. ábra* mutatja az *A* vállalat profitfüggvényét különböző jövedelem/szállítási költség arányok mellett. A legalacsonyabb arány (0,55) egy jól viselkedő profitfüggvényt ábrázol, a globális maximum egy Nash-egyensúly. Ahogy az arány emelkedik, úgy válik egyre nyilvánvalóbbá a különbség a versenyzői Nash-egyensúly és az árakban aláígérő megoldás között. Egy új lokális maximum jelenik meg, és a két legnagyobb arány esetében (0,85 és 0,95) láthatóan magasabb is. Így a versenyzői egyensúlynak alá lehet ígérni, amivel több profitra lehet szert tenni. A megoldás nem optimális, az egyik vállalat a másikhoz képest jelentősen alacsonyabb árat fog kínálni. Ezért a másik vállalatnak szintén árat kell csökkentenie, hogy ne veszítse el minden nyereségét. Ezután újra versenyeznek, és újra árat kezdenek emelni, hogy elérjék a Nash- egyensúlyt. Végül az aláígérés lehetősége újra megjelenik, és a folyamat elölről kezdődik.

Ahogy a második legnagyobb arányhoz (0,85) tartozó görbe is jól mutatja, a profitfüggvényeknek öt különböző része lehet, attól függően, hogy milyen a jövedelem/szállítási költség arány. A görbe második és harmadik szakasza az, ahol a lokális maximumok vannak. Az első szakaszt, balra az aláígérés maximumától, az a tény befolyásolja, hogy a közömbös fogyasztó a képlet szerint a városon kívül is elhelyezkedhet, azaz a profitfüggvény nagyobb, mint egy. A profitfüggvényben azonban a kínálat csak a város széléig terjedhet, azaz az értéke legfeljebb csak egy lehet, mivel a képzeletbeli város egységnyi hosszúságú. A negyedik szakasz az, amikor a másik vállalat elkezd aláígérni, az utolsó szakasz pedig – a teljes piac elvesztése miatt – a nulla profit.

[4] Az $l=x_R^l$ és $r=x_R^r$ elrendezés nem lehetséges, mivel az azt jelentené, hogy $y/\tau < 1/4$.

2. ábra
Profitfüggvények különböző jövedelem/szállítási költség arányok mellett ($\tau = 1$, $\gamma = 0{,}9$ és $c = 0{,}7$, a *B* vállalat árai rögzítettek)



Profitmaximalizálás

Lokális monopóliumok ($0 < y/\tau \leq 1/4$)

Lokális monopóliumok esetén a profitfüggvény könnyen kiszámolható, felhasználva az $l = x_R - y/\tau$ és $r = x_R + y/\tau$ azonosságokat. Mint ahogy *Economides* [1984] megmutatta, a lokális monopóliumok profitja független az elhelyezkedésüktől, mert olyan messze helyezkednek el egymástól, hogy ne kelljen versenyezniük.

$$\pi_R = \gamma\left(1 - \frac{c}{P_R}\right)\frac{y^2}{\tau} \to \gamma\frac{y^2}{\tau}. \tag{13}$$

Ekkor az árak a végtelenhez tartanak, így ebben az értelemben a modell nem biztosít egyensúlyi árakat. Ennek ellenére a profit egy rögzített szinthez konvergál. A monopóliumok megpróbálják a teljes összeget megszerezni, amit az elkölthető jövedelemből az összetett jószágra fordítottak. Be lehet vezetni (például maximális árat) vagy feloldani (például a termék oszthatóságát) feltevéseket az árak korlátozására, de ennek a tanulmánynak nem ez a célja. Az egyensúlyi elhelyezkedéseket nem lehet pontosan meghatározni, mert minden olyan elhelyezkedés optimális, ahol a vállalatok elkülönült piacokon szolgálják ki a vásárlókat.

Köztes differenciálás ($1/4 < y/\tau < 1$)

Először röviden bemutatjuk, hogy a vállalatok nem hagynak ki senkit sem a látókörükből, ha $1/4 < y/\tau < 1/2$. Nem választanak olyan helyet, ami túl közel van a szélekhez vagy a középponthoz, mert nem akarnak lehetséges vásárlókat veszíteni, főként a hátországi lakosokat, akik tipikusan őket választják.

Másodszor a profitmaximalizálás ugyanaz az $1/4 < y/\tau < 1/2$ és az $1/2 \leq y/\tau < 1$ intervallumokon, és ezért a megoldási módszer is. Ennek az egybeesésnek az az oka, hogy a vállalatok az elhelyezkedésüket mindkét esetben a szélek és a közömbös fogyasztó között optimalizálják.

Meg kell jegyezni a következő számításokhoz, hogy a feltételek szimmetrikus rendszere szimmetrikus vállalatokat eredményez. Be lehet látni, hogy a vállalatok profitfüggvényei megegyeznek azonos helyzetekben. Ezt azt jelenti, hogy az A vállalat profitfüggvénye, feltéve hogy a B vállalatnak egy rögzített $\overline{P}$ ára van és $1-\overline{x}$ elhelyezkedése, megegyezik a B vállalat profitfüggvényével, ha az A vállalatnak rögzített $\overline{P}$ ára van és $\overline{x}$ elhelyezkedése.

$$\pi_A(P, \overline{P}, x, 1-\overline{x}) = \pi_B(\overline{P}, P, \overline{x}, 1-x). \tag{14}$$

Tehát a szimmetrikus vállalati célok is azt sugallják, hogy más modellekhez hasonlóan az eredmények szimmetrikusak lesznek. Ha az egyik vállalat egy ár- vagy elhelyezkedési döntést hoz, és a másik vállalat nem választja ennek a szimmetrikus párját, akkor egyiküknek kisebb profitja lesz. A kisebb profit arra ösztönzi ezt a vállalatot, hogy elérje azt a szintet, amelyet a másik. Ez a vállalat választhat egy másik árat vagy elhelyezkedést, vagy akár mindkettőt, és természetesen megvan a lehetőség arra is, hogy lemásolja a másik vállalat tevékenységét, mert hasonlók egymáshoz. Ezért megsejtjük, hogy az eredmények szimmetrikusak, és emiatt csak az A vállalat viselkedésére koncentrálunk.

Verseny hátország nélkül ($1/4 < y/\tau < 1/2$) • Először tegyük fel azt, hogy az A vállalat nem akarja kiszolgálni a teljes hátországot, azaz $l = x_A - y/\tau > 0$ és $r = \tilde{x}$. A profitfüggvény a következő:

$$\pi_A = \gamma\left(1-\frac{c}{P_A}\right)\left[\left(\tau x_A + y\right)\tilde{x} - \frac{\tau\tilde{x}^2}{2} - yx_A - \frac{\tau}{2}x_A^2 + \frac{y^2}{2\tau}\right]. \tag{15}$$

Szimmetrikus vállalati döntéseket feltételezünk az árakra ($P_A = P_B$) és elhelyezkedésekre ($x_A = 1 - x_B$). Egyszerűen kiszámolható az A vállalat elhelyezkedése a (6) képlet alapján:

$$x_A = \frac{1}{2} - \frac{y}{\tau}. \tag{16}$$

A vállalat próbál a lehető legtávolabb lenni a város közepétől. Azonban $l = x_A - y/\tau = 1/2 - 2y/\tau < 0$ ellentmondás.

Nincs verseny ($1/4 < y/\tau < 1/2$) • A másik elrendezés, amikor a vállalatok nem versenyeznek egymással, hasonló módon látható be. Legyen $l = 0$ és $r = x_A + y/\tau < 1/2$. A profitfüggvény a következő:

$$\pi_A = \gamma\left(1-\frac{c}{P_A}\right)\left(\frac{y^2}{2\tau}+yx_A-\frac{\tau}{2}x_A^2\right). \tag{17}$$

Az A vállalat optimális elhelyezkedése:

$$x_A = \frac{y}{\tau}. \tag{18}$$

A vállalat a lehető legjobban próbál eltávolodni a város bal oldalától. Azonban ez is ellentmondás, mivel $r = x_A + y/\tau = 2y/\tau > 1/2$.

Verseny hátországgal ($1/4 < y/\tau < 1$) • A két előző eredmény alapján a vállalatok egymással versenyeznek, és teljes egészében lefedik a hátországaikat abban az esetben, ha $1/4 < y/\tau < /1/2$ és $1/2 \leq y/\tau < 1$.

Ezért a két esetet együtt lehet vizsgálni. Így $l_A = 0$, $r_A = \tilde{x}$, $l_B = \tilde{x}$ és $r_B = 1$.

$$\pi_A = \gamma\left(1-\frac{c}{P_A}\right)\left[(\tau x_A + y)\tilde{x} - \frac{\tau\tilde{x}^2}{2} - \tau x_A^2\right], \tag{19}$$

$$\pi_B = \gamma\left(1-\frac{c}{P_B}\right)\left[y - \frac{\tau}{2} + \tau x_B + (\tau x_B - y)\tilde{x} - \frac{\tau\tilde{x}^2}{2} - \tau x_B^2\right]. \tag{20}$$

Ahhoz, hogy megtaláljuk a profitmaximumot, az elsőrendű feltételeket kell megvizsgálnunk. Nyilvánvalóan az egyenletrendszer analitikusan problematikus, ár szerint nem lineáris tagokat tartalmaz. A közömbös fogyasztó képlete sokkal komplexebb, mint más modellekben, ez pedig nehezíti az egyenletrendszer megoldását.

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial x_A} = \gamma\left(1-\frac{c}{P_A}\right)\left[\tau\tilde{x} + (\tau x_A + y)\tilde{x}'(x_A) - \tau\tilde{x}\tilde{x}'(x_A) - 2\tau x_A\right], \tag{21}$$

$$\frac{\partial \pi_B}{\partial x_B} = \gamma\left(1-\frac{c}{P_B}\right)\left[\tau + \tau\tilde{x} + (\tau x_B - y)\tilde{x}'(x_B) - \tau\tilde{x}\tilde{x}'(x_B) - 2\tau x_B\right], \tag{22}$$

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial P_A} = \frac{\gamma c}{P_A^2}\left[(\tau x_A + y)\tilde{x} - \frac{\tau\tilde{x}^2}{2} - \tau x_A^2\right] + \gamma\left(1-\frac{c}{P_A}\right)\tilde{x}'(P_A)(\tau x_A + y - \tau\tilde{x}), \tag{23}$$

$$\frac{\partial \pi_B}{\partial P_B} = \frac{\gamma c}{P_B^2}\left[y - \frac{\tau}{2} + \tau x_B + (\tau x_B - y)\tilde{x} - \frac{\tau\tilde{x}^2}{2} - \tau x_B^2\right] +$$

$$+\gamma\left(1-\frac{c}{P_B}\right)\tilde{x}'(P_B)(\tau x_B - y - \tau\tilde{x}). \tag{24}$$

Újra a szimmetrikus helyzet az egyensúlyi megoldás. A vállalatok árának meg kell egyeznie, valamint egyforma távolságra kell lenniük a középponttól. Ennek segítségével ki tudjuk számolni az eredményeket, mivel számos tag egyszerűsödik az elsőrendű feltételekben. Az első- és másodrendű feltételek levezetése megtalálható *Kelemen* [2018].

$$x_A = \frac{1}{6} + \frac{y}{3\tau}, \tag{25}$$

$$x_B = \frac{5}{6} - \frac{y}{3\tau}, \tag{26}$$

$$P_A = P_B = c\left[1 + \frac{10\frac{y}{\tau} - \frac{5}{4} - 2\left(\frac{y}{\tau}\right)^2}{\gamma\left(4\frac{y}{\tau} - 1\right)^2}\right]. \tag{27}$$

A jövedelem és a szállítási költség aránya kulcsfontosságú eleme a modellnek, lényegében ez határozza meg a vállalatok elhelyezkedéseinek és árainak az értékét. Valamint valóban szimmetrikus a távolság, az összegük egy, továbbá az árak is megegyeznek, és a megoldás egy Nash-egyensúly lesz.

Az eredmények értelmezésekor először érdemes figyelembe venni az elhelyezkedési korlátokat. Egyfelől a vállalatok nem helyezkedhetnek el a képzeletbeli város végpontjaitól mért távolság 1/6-ánál közelebb. Ez akkor áll fenn, ha a jövedelem és a szállítási költség aránya nullához tart. De a korlátok miatt ($1/4 < y/\tau$) az 1/6-nyi távolság nem érhető el, így a vállalatok a negyedelőpont és a középpont között helyezkednek el. Ha az arány nő, akkor a vállalatok közelebb kerülnek a középponthoz. Továbbá fontos megjegyezni, hogy az elhelyezkedések megoldásai a vállalatok potenciális keresletén belül vannak: $x_A^l = x_A - y/\tau < 0$ és $x_A^r = x_A + y/\tau > 0{,}5$.

Az ár csökken, ahogy a szállítási költségek mérséklődnek, vagy a jövedelem nő. Ez nagyobb versenyhez vezet, mivel a fogyasztóknak nagyobb lehetőségük van választani a két bolt között. Ugyanis egyrészt ennek a hatására a boltok közelebb költöznek egymáshoz. Így egy kedvező ár könnyen átvonzhatja a fogyasztókat a másik bolthoz. Másrészt viszont a boltok mérséklik az áraikat, ez pedig a fogyasztókat kompenzálhatja a magasabb szállítási költségekből eredő kellemetlenségért.

Egy fontos követelmény, hogy az árak fedezzék a költségeket, ami igaz, ha

$$\frac{10\frac{y}{\tau} - \frac{5}{4} - 2\left(\frac{y}{\tau}\right)^2}{\gamma\left(4\frac{y}{\tau} - 1\right)^2} \geq 0. \tag{28}$$

Ami természetesen attól függ, hogy a számláló nagyobb, mint nulla, a nevező pozitivitása miatt. Ez akkor teljesül, ha az y/τ arány a $[(10 - 3\sqrt{10})/4; (10 + 3\sqrt{10})/4] \approx (0, 13; 4, 87)$ tartományban van, de ez mindig igaz. Vagyis a modellben a vállalatok a határköltség felett tudják értékesíteni a termékeiket ($p > c$). Továbbá a jövedelem növekedésével vagy a szállítási költségek csökkentésével érhető el, hogy a verseny levigye az árat a határköltség szintjére.

A Nash-egyensúly stabilitása

A profitfüggvény nem mindenhol differenciálható folytonosan. Ezért ellenőrizni kell, hogy vajon a lokális maximumok egyúttal globálisak-e. A következőkben ezzel a problémával foglalkozunk.

Monopolista árazás • Az y/τ arány alacsony szintjein – közel a lokális monopóliumok esetéhez – a vállalatok lehet, hogy megtartják a monopolárakat. Ennek az oka az lehet, hogy a másik vállalat nem tudja átcsábítani az összes fogyasztót, mert a potenciális kereslete csak egy y/τ sugarú körben működik, ami túl alacsony ahhoz, hogy elérje az egész piacot. Így a vállalatoknak lehetőségük van arra, hogy monopolárat kínáljanak a versenyzői helyett, és nem veszítik el az összes profitjukat. Ezért meg kell vizsgálni, hogy megéri-e a vállalatoknak kilépni a Nash-egyensúlyból és monopóliumként viselkedni.

A profitfüggvényt át lehet írni, és két részre lehet osztani. Az első felében azok az elhelyezkedések vannak, amelyeket a másik vállalat nem ér el, míg a másodikban olyan elhelyezkedések, ahol a másik vállalat is részt tud venni. A szimmetricitás miatt elég csak az A vállalat profitját vizsgálni:

$$\pi_A = \int_0^{x_B - \frac{y}{\tau}} \pi(x)\mathrm{d}x + \max\left[0, \int_{x_B - \frac{y}{\tau}}^{\tilde{x}} \pi(x)\mathrm{d}x\right]. \tag{29}$$

A profitfüggvény csak akkor tér el a korábban ismertetettől, ha a második tag negatív. Amíg ez nem áll fenn, addig a monopolista profitmaximalizálás megegyezik a versenyzőivel. A szükséges feltétele ennek, hogy $x_B - y/\tau \leq \tilde{x}$. Ha az A vállalat monopolára tart a végtelenhez ($P_A \to \infty$), abból következik, hogy

$$\lim_{P_A \to \infty} \tilde{x} = x_B - \frac{y}{\tau}. \tag{30}$$

Így a második tag nullához tart, és nem negatív. Következésképpen a profitfüggvény monopolárazás esetén azonos a korábban bemutatott versenyzőivel. Mivel a vállalatok nem választják ezt a versenyzői egyensúly helyett, ezért nem éri meg nekik kilépni ebből a helyzetből. Ez a gondolatmenet nemcsak akkor igaz, amikor a közömbös fogyasztó a két vállalat között van, hanem akkor is, amikor kilép ebből a sávból, mert a (30) összefüggés az $x_A < \tilde{x} < x_B$ és $\tilde{x} < x_A < x_B$ esetén is fennáll.

Aláígérés • *D'Aspremont és szerzőtársai* [1979] észrevette, hogy ha a két vállalat túl közel van a piac középpontjához, és így egymáshoz is, akkor lehetőségük van arra, hogy a másiknak aláígérjenek árban, és ezzel fogyasztókat csábítsanak át magukhoz. Ennek az az oka, hogy a vállalatok az árat a határköltség felett tartják, és ha túl közel helyezkednek el egymáshoz, akkor egy kisebb árcsökkentés is elég lehet a kereslet nagyobb növekedéséhez, ami ellensúlyozza a bevételkiesést. Így ebben az esetben a Nash-egyensúly nem stabil. Továbbá nehezíti a helyzetet, hogy ebben a modellben az aláígérés nem jelenti szükségképpen azt, hogy a másik vállalat elveszíti összes fogyasztóját. Analitikusan a probléma a közömbös fogyasztóhoz köthető. Emiatt a profitfüggvény nem jól viselkedő függvény, így nem differenciálható folytonosan, ahogy ezt a *2. ábra* is mutatja.

Ahhoz, hogy ellenőrizzük a Nash-egyensúly stabilitását, azaz hogy nincs lehetőség az aláígérésre, a profitfüggvényt kell megvizsgálni, nemcsak akkor, amikor a közömbös fogyasztó a két bolt között van, hanem akkor is, amikor azon kívül. Könnyen megmutatható, hogy az $1/4 < y/\tau \leq 2/5$ tartomány stabil optimumot biztosít, mivel a vállalatok elég messze vannak egymástól, hogy ne létezzen olyan pozitív ár, ahol lehetséges az aláígérés. Először kissé 2/5 felett vannak olyan pozitív árak, ahol az aláígérés megvalósítható, de a kereslet növekedése még nem tudja fedezni a bevétel csökkenését. Így szignifikánsan magasabb jövedelem/szállítási költség arány kell ahhoz, hogy a vállalatok elég közel költözzenek egymáshoz, és lényegesen magasabb árakat kínáljanak. Ez együtt ad lehetőséget az aláígérési stratégiára.

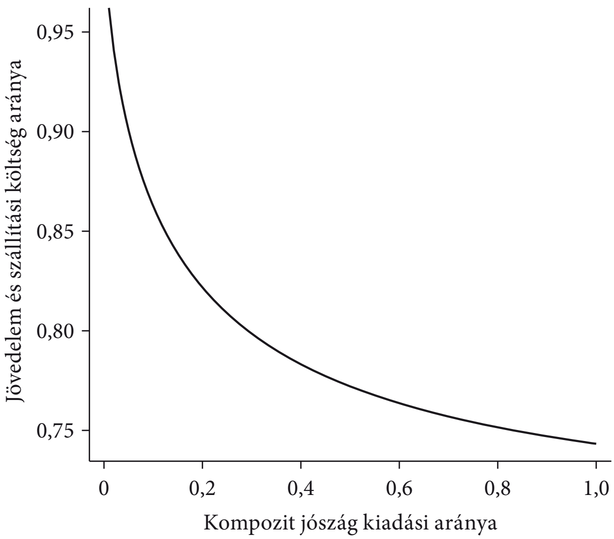
A többi esetben problematikus az aláígérés lehetőségének analitikus vizsgálata. Ezért numerikus módszereket használva kerestük meg a legalacsonyabb jövedelem és szállítási költség arányt rögzített paraméterek mellett, ahol a Nash-egyensúly stabil még. A költség paramétere nem befolyásolja az eredményeket, azonban a kompozit jószág részaránya (γ) hatással van a kimenetre.

Ha $\gamma = 1$, akkor a fogyasztó nem takarít meg, és minden elkölthető jövedelmét a kompozit termékre fordítja.[5] Ebben az esetben a legmagasabb y/τ arány 0,7433 körül van, ahol létezik még Nash-egyensúly, a fölött már nem. Ahogy γ csökken, úgy csökken az aláígérés esélye is *(3. ábra).* A fogyasztók kevesebbet költenek az összetett jószágra, és ez olyan, mintha y/τ alacsonyabb lenne. A lehetséges legmagasabb arány (legyen m) szintje növekszik, mivel a jószág nem fontos annyira a fogyasztóknak, mint a magasabb γ-érték esetében.

Így a köztes eset két részre osztható γ függvényében. Az első a stabil köztes eset, amikor a jövedelem és a szállítási költség aránya 1/4 és m között van, ahol m a lehető legmagasabb szintje az y/τ-értéknek, ami még Nash-egyensúlyt biztosít. A második eset a nem stabil Nash-egyensúly, amikor m és 1 között vagyunk, ahol az aláígérés miatt nem létezik tiszta Nash-egyensúly.

[5] Az eredmények kezelhetőbbé válnak, de nem annyira, hogy analitikusan is megoldható legyen (lásd *Kelemen* [2018]).

3. ábra
A kompozit jószág kiadási részaránya (γ) és az utolsó jövedelem és szállítási költség aránya, ahol a Nash-egyensúly még stabil (m)



Minimális különbség ($1 \leq y/\tau$)

A maximalizálási folyamat analitikusan hasonló a köztes esethez. A vállalatok középen helyezkednek el a korlátok miatt ($r_A \leq 1/2 \leq l_B$), de az árak megegyeznek a határköltséggel, mert a két vállalat ugyanazon a helyen van, és Bertrand-árverseny alakul ki közöttük. Hasonlóan a *d'Aspremont és szerzőtársai* [1979] tanulmányhoz, itt sem tudunk mit mondani a nem stabil egyensúlyi elhelyezkedések estében arról, hogy a térben milyen irányba törekszenek a vállalatok az aláígérés miatt. Ez azt jelenti, hogy ebben a modellben sem igaz a minimális különbség elve.

Összegzés

A tanulmány egy Hotelling-típusú modellt mutatott be, Cobb–Douglas-hasznosságfüggvénnyel kiegészítve. Így a korábbiakhoz képest a fogyasztókat nemcsak a rezervációs áruk jellemezte, hanem hasznosságfüggvényük is. Ez a térbeli versenynek új tulajdonságait fedte fel, és igazolt néhány korábbi eredményt. A fogyasztók egyéni keresleti függvénye folytonos és elasztikus, továbbá az elhelyezkedés és az ár változóit szimultán módon lehet meghatározni. A jövedelem válik a kulcsparaméterré a rezervációs ár helyett, kifejezve azt, hogy a termék áraiban korlátok vannak. Másik újdonság a közömbös fogyasztó képlete, amire a korábbi modellekhez képest erősebb hatást gyakorolnak az árak, és már a jövedelem is megjelenik benne. Továbbá, ha egy vállalat aláígér árakban, az nem jelenti feltétlenül azt, hogy a másik vállalat az összes fogyasztóját elveszti.

A háztartások különböző távolságra vannak a boltoktól, így különböző szállítási költséggel szembesülnek, és ezért különbözik az elkölthető jövedelmük.

Az eredmények a jövedelem és a szállítási költség arányától függnek. Ha ez alacsony, akkor két lokális monopólium jön létre, elkülönült piacokkal. Ha az arány magas, akkor az egyedüli egyensúly a piac közepén van, ahol a vállalatok az árakban versenyeznek. A többi helyen azonban nincs garancia arra, hogy a középpontba törekedjenek. A két eset között létezik egy harmadik is, az arány köztes értékeire, ahol a vállalatok a negyedelőpontok és a középpont között próbálnak elhelyezkedni. Ha elég messze vannak a központtól, akkor ez egy stabil Nash-egyensúly, ellenkező esetben egymás alá ígérhetnek, és a Nash-egyensúly instabil.

Az általános specifikáció mélyebb betekintést engedett az összefüggésekbe, azonban az egyensúly így sem létezett mindenhol. A probléma azzal van, hogy a vállalatok árban egymás alá tudnak vágni. Ez abból is ered, hogy a közömbös fogyasztó képlete nem folytonos.[6] De ha még ezt sikerül kiküszöbölni, akkor továbbra is kérdéses marad, hogyan oldható meg a keretrendszer több mint két vállalatra.

Hivatkozások

Bertrand, J. [1883]: Book review of "Theorie mathematique de la richesse sociale" and of "Recherches sur les principles mathematiques de la theorie des richesses". Journal de Savants, 499–508. o.

Böckem, S. [1994]: A Generalized Model of Horizontal Product Differentiation. The Journal of Industrial Economics, Vol. 42. No. 3. 287–298. o. https://doi.org/10.2307/2950571.

D'Aspremont, C.–Jaskold Gabszewicz, J.–Thisse, J.-F. [1979]: On Hotelling's Stability in Competition. Econometrica, Vol. 47. No. 5. 1145–1150. o. https://doi.org/10.2307/1911955.

Dixit, A. K.–Stiglitz, J. E. [1977]: Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. American Economic Review, Vol. 67. No. 3 297–308. o. http://ideas.repec.org/a/aea/aecrev/v67y1977i3p297308.html.

Economides, N. [1984]: The principle of minimum differentiation revisited. European Economic Review, Vol. 24. No. 3. 345–368. o. https://doi.org/10.1016/0014-2921(84)90061-8.

Grant, S.–Quiggin, J. [1994]: Nash equilibrium with mark-up-pricing oligopolists. Economics Letters, Vol. 45. No. 2. 245–251. o. https://doi.org/10.1016/0165-1765(94)90143-0.

Guo, W. C.–Lai, F. C. [2017]: Prices, Locations and Welfare When an Online Retailer Competes with Heterogeneous Brick-and-Mortar Retailers. The Journal of Industrial Economics, Vol. 65. No. 2. 439–468. o. https://doi.org/10.1111/joie.12141.

Henkel, J.–Stahl, K.–Walz, U. [2000]: Coalition Building in a Spatial Economy. Journal of Urban Economics, Vol. 47. No. 1. 136–163. o. https://doi.org/10.1006/juec.1999.2139.

Hinloopen, J.–Marrewijk, C. [1999]: On the limits and possibilities of the principle of minimum differentiation. International Journal of Industrial Organization, Vol. 17. No. 5. 735–750. o. https://doi.org/10.1016/s0167-7187(97)00059-3.

Hotelling, H. [1929]: Stability in competition. The Economic Journal, Vol. 39. No. 153. 41–57. o. https://doi.org/10.2307/2224214.

[6] Erre lehetne alkalmazni négyzetes távolságfüggvényt, de akkor analitikusan túl bonyolulttá válna a modell.

Kelemen József [2017]: Több piacra épülő webáruház térbeli árversenye. Közgazdasági Szemle, 64. évf. 6. sz. 612–629. o. https://doi.org/10.18414/ksz.2017.6.612.

Kelemen József [2018]: Fejezetek a gazdaságföldrajzból: horizontális termékdifferenciálás. Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest, http://phd.lib.uni-corvinus.hu/1052.

Lerner, A. P.–Singer, H. W. [1937]: Some Notes on Duopoly and Spatial Competition. Journal of Political Economy, Vol. 45. No. 2. 145–186. o. https://doi.org/10.1086/255039.

Lijesen, M. [2013]: Hotelling's webshop. Journal of Economics, Vol. 109. No. 2. 193–200. o. http://dx.doi.org/10.1007/s00712-012-0303-7.

Martinez-Giralt, X.–Usategui, J. M. [2009]: Iceberg transport technologies in spatial competition. Hotelling reborn. UFAE and IAE Working Papers.

Peng, S.-K.–Tabuchi, T. [2007]: Spatial Competition in Variety and Number of Stores. Journal of Economics & Management Strategy, Vol. 6. No. 1. 227–250. o.

Salop, S. C. [1979]: Monopolistic competition with outside goods. The Bell Journal of Economics, Vol. 10. No. 1. 141–156. o. https://doi.org/10.2307/3003323.

Smithies, A. [1941]: Optimum Location in Spatial Competition. Journal of Political Economy, Vol. 49. No. 3. 423–439. o. https://doi.org/10.1086/255724.

Tabuchi, T. [2009]. Self-organizing marketplaces. Journal of Urban Economics, Vol. 66. No. 3. 179–185. o. https://ideas.repec.org/a/eee/juecon/v66y2009i3p179-185.html.

Woeckener, B. [2002]: Spatial Competition with an Outside Good and Distributed Reservation Prices. Journal of Economics, Vol. 77. No. 2. 185–196. o. https://doi.org/10.1007/s00712-002-0546-9.

Wrede, M. [2015]: A continuous logit hotelling model with endogenous locations of consumers. Economics Letters, Vol. 126. C, 81–83. o. https://doi.org/10.1016/j.econlet.2014.11.024.