A T 037202 sz. OTKA pályázat eredményei az előző T 025029 sz. OTKA pályázatban elért eredményekhez szorosan kapcsolódnak, az elkezdett kutatásokat folytattuk. A kutatás fő irányai: a csoportalgebra egységcsoportja és reprezentációelméleti kérdések.

A csoportalgebra egységcsoportjának vizsgálata a múlt század 40-es éveiben az algebrai topológia hatására kezdődött, mivel a fundamentális csoport kutatásához az egész számok feletti csoportgyűrű egységcsoportjának a struktúrája kellett. A 90-es években a kutatások áttevődtek a FG moduláris csoportalgebra (azaz olyan csoportalgebra, ahol F karakterisztikája osztja a G csoport valamely elemének a rendjét) V(FG) normalizált egységcsoportjának a vizsgálatára. A 70-es években elért eredmények a csoportalgebra Lie tulajdonságairól, mint később kiderült, szorosan összefüggnek az egységcsoport tulajdonságaival, így a Lie módszerek nagyon hasznosnak bizonyultak. Először ezt a témavezetőnek sikerült alkalmazni.

A kutatómunka a következő irányokban folyt:

1. Az egységcsoport nilpotecia foka szorosan összefügg a csoportalgebra Lie struktúrájával a csoportalgebra Lie nilpotencia indexén keresztül. Vizsgáltuk, majd teljes leírását adtuk a maximális és majdnem maximális indexű Lie nilpotens csoportalgebráknak, amelyek Shalev eredményeinek általánosításai.

2. A G véges p-csoportok esetén vizsgáltuk a moduláris csoportalgebra V(FG) normalizált egységcsoportjának a konjugált osztályait. Általánosítottuk Rao és Sandling eredményét, miszerint p^2 osztja a nem egyelemű konjugált osztályok rendjét, továbbá bizonyos feltételek mellett megadtuk egyes konjugált osztályok rendjét. Minden véges p-csoport tartalmaz olyan H normális részcsoportot, hogy a G/H faktorcsoport kommutátor részcsoportja p-rendű. Bebizonyítottuk, hogy ha G/H centrumának az indexe p^k, akkor a moduláris csoportalgebra V(FG) normalizált egységcsoportja tartalmaz p^k rendű konjugált osztályt.
3. Kiterjesztettük a kutatásokat az egységcsoport hatványteljes struktúrájának a vizsgálatára és leírtuk az U(FG) egységcsoport struktúráját p-elemű F test felett, ha G véges p-csoport ciklikus Frattini részcsoporttal. A maximális osztályú 2-csoportok csoportalgebrája egységcsoportjában a másodrendű elemek struktúráját vizsgáltuk és megadtuk azok számát. Brauertól származik a kérdés, hogy egy véges p-csoport csoportalgebrája egyértelműen meghatározza-e a csoportot, melyre eddig csak pozitív megoldások ismertek. Berman sejtése, hogy a véges p-csoport csoportalgebrájának egységcsoportja egyértelműen meghatározza a csoportot, sokkal nehezebb probléma mint az előbbi és Berman igazolta, hogy a sejtés érvényes véges Abel p-csoportokra. Megkezdtük a vizsgálatokat nemkommutatív csoportokra és az elért eredmények alapján megmutattuk, hogy a sejtés érvényes, ha G véges p-csoport ciklikus Frattini részcsoporttal, illetve maximális osztályú 2-csoport.
4. A gyűrűelméletben a kutatások egyik főiránya lett a csoportazonosságok vizsgálata. Kiterjesztettük kutatásainkat a csoportazonosságok vizsgálatára a csoportalgebra egységcsoportján, melynek eredményeképpen megoldást nyert két nagyon nehéz, Zassenhaustól származó probléma, amelyek S. K. Sehgal „Topics in Group Rings" című könyvében vannak ismertetve: a korlátos Engel, illetve feloldható egységcsoporttal rendelkező a csoportalgebrák jellemzése.
    - Az FG moduláris csoportalgebra U(FG) egységcsoportja n-Engel akkor és csak akkor, ha FG korlátosan Engel algebra, tehát a G nilpotens csoportnak van olyan normális részcsoportja H, hogy G/H és a H kommmutátor részcsoportja véges p-csoportok.
    - Jellemzést adtuk a feloldható U(FG) egységcsoporttal rendelkező csoportalgebráknak, kivéve azt az esetet, mikor G torziómentes. Választ adtunk arra, hogy egy Lie feloldható csoportalgebra egységcsoportja mikor feloldható.

5. Teljes leírást kaptunk az $x^n+y^n=z^n$ Fermat egyenlet megoldásairól a $GL(2,\mathbf{Z})$ matrixcsoportban és a matrixgyűrű irreducibilis elemeinek halmazában.
6. Reprezentációelméleti probléma a csoportalgebra filtrációs bázisának létezése. A kérdést R. Bautista, P. Gabriel, A. Roiter és L. Salmeron vetették fel. Eddig csak példák voltak filtrációs bázis létezésére. Sikerült igazolni, hogy ha G nemkommutatív metaciklikus p-csoport, a FG csoportalgebrában akkor és csak akkor létezik filtrációs bázis, ha G vagy diédercsoport, vagy a nyolcadrendű quarterniócsoport és az F test tartalmaz harmadfokú egységgyököt. Nemkommutatív hatványteljes G p-csoport esetén FG-nek nincs filtrációs bázisa; továbbá sikerült a filtrációs bázis leírása abban az esetben ha G-nek van p^2 indexű ciklikus részcsoportja, illetve a 2-csoport rendje nem nagyobb mint 2^5. Valószínűleg filteres bázis csak akkor létezik az FG csoportalgebrában, ha G 2-csoport.
7. A reprezentáció elméleti kutatásokat kiterjesztve foglalkoztunk a kristálycsoportok kutatásával. A klasszikus kristálycsoportok osztályát kibővítettük a következőképpen, és e csoportokat általános kristálycsoportnak neveztük el: Legyen K egy főideál gyűrű, amely az F test részgyűrűje és tegyük fel, hogy a G véges csoportnak van egy hű mátrix K-reprezentációja az FG feletti M modulusban. Kiválasztunk az F test felett egy olyan FM vektorteret, amelyben az M teljes rácsot alkot. Az FM vektortéren definiált a G csoport hatása és mivel az additív csoportja tartalmazza az M additív csoportját az L=FM/M faktorcsoportban definiálva van egy G-beli elemmel való szorzás.

   Legyen t a G-nek olyan 1-kociklusa, amelynek értéke a L csoportban van. Ha $Crys(G;\ M;t)=\{(g,x)|\ g\epsilon G,\ x\epsilon t(g)\}$ halmazon a szorzást úgy értelmezzük, hogy $(g,x)\bullet(g',x')=(gg',g'x+x')$, akkor egy általános kristálycsoportot kapunk. Világos, hogy ha K=**Z** és F az **R** valós számtest, akkor a Crys(G; M; t) csoport a klasszikus n-dimenziós kristálycsoporttal izomorf, ahol n a **Z**M modulus rangja. A Crys(G; M; t) csoportot irreducibilisnek, illetve felbonthatatlanak nevezzük, ha M KG-modulus megfelelő tulajdonsággal rendelkezik, azaz irreducibilis, illetve felbonthatatlan és a t kociklus nem kohomologikus zérussal.

   Az általános kristálycsoportok tulajdonságait vizsgáltuk és az elért eredmények alapján új struktúra tételeket kaptunk a klasszikus kristálycsoportra.

   Részletesen tanulmányoztuk az olyan felbonthatatlan Crys(G; M; t) csoportok struktúráját, amelyben G egy p^n rendű ciklikus csoport vagy két p-rendű ciklikus csoport direkt szorzata. Legyen G két p rendű csoport direkt szorzata és K vagy p-egészek a Z_p gyűrűje vagy a p-adikus egészek gyűrűje. Bebizonyítottuk, hogy a G csoportnak van egy olyan hű felbonthatatlan K-reprezentációja a KG feletti M modulusban, hogy a Crys(G; M; t) csoport felbonthatatlan torziómentes és dimenziója $(3p-2)n+p^2$.

   Leírtuk az M felbonthatatlan KG-modulus és egy nem triviális t kociklus által meghatározott Crys(G; M; t) általános kristálycsoport felépítését. Igazoltuk: (i). G ciklikus csoport esetén létezik d-dimenziós torziómentes Crys(G; M; t) általános kristálycsoport, ahol $d=m|G|$ és $(|G|,m)=1$; (ii). a $G=Cp\times Cp$ csoport esetén a Crys(G; M; T) általános kristálycsoportnak a dimenziói nem korlátos halmazt alkotnak; (iii). létezik végtelen sok nem izomorf felbonthatatlan klasszikus kristálycsoport, melynek a holonomia csoportja A_4.

   A kutatások egy részét a kristálycsoportok szerkezetéről az argentin Cordoba-i egyetem munkatársaival közösen végeztük és tovább folytatjuk egy nemzetközi pályázat keretében.

8. Elkészítettük és publikáltuk a LAGUNA programcsomagot, amely segítségével csoportalgebrákban és azok egységcsoportjában végezhetünk számításokat a GAP rendszer alatt. A programcsomag a http://www.gap-system.org illetve a http://www.ukrgap. exponenta.ru/laguna.htm oldalakról tölthető le. 2004-ben kibővítettük ezt további függvényekkel, amely verzió a http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap/Manuals/pkg/ laguna/doc/chap0.html címen található. A LAGUNA fő célja számításokat végezni bármely csoportalgebra asszociált Lie algebrájában. A LAG részével lehetőségünk van bizonyos Lie tulajdonságok ellenőrzésére, Lie invariánsok hatékony meghatározására. A programcsomag függvényei jól használhatók a moduláris csoportalgebrák egységcsoportjaiban is. Például alkalmas annak ellenőrzésére, hogy egy csoportalgebrabeli elem egység-e.
9. Zassenhaus első sejtését vizsgáltuk számítógép segítségével, azaz minden torzió egysége az egész számok csoportgyűrűjének racionálisan konjugált az alapcsoport valamely elemével. A vizsgálat tárgya az I S. Luthar és I. B. S. Passi által adott számítási módszerek felhasználásával bebizonyítani, hogy a 3 dimenziós kristálycsoportok holonómia csoportjaira illetve az $S_3 \times A_4$ csoportra a sejtés igaz. Sikerült igazolni, ha egy G csoportra igaz az első Zassenhaus sejtés, akkor $G \times C_2$-re is igaz.

Előadások: A következő konferenciákon vettünk részt és tartottunk előadást:

1. Workshop "Discrete Groups and Geometric Structures, with Applications". K.U.Leuven, Kortrijk, Belgium, 2002, május 22-24. Bódi Viktor ``Generalized crystallographic groups".
2. Algebra Conference, Venezia-2002, junius 2-8. Bódi Béla " Units in modular group algebras".
3. International Workshop "Polynomial Identities in Algebras", Memorial University of Newfoundland. 2002, augusztus 29 -- szeptember 3. Bódi Béla "Applications of the group identities theory to the group of units of group algebras"; Bódi Viktor "Symmetric units and group identities".
4. International Algebraic Conference dedicated to the memory of Borevich. St. Peterburg, Russia. 2002, szeptember 17--23. Bódi Béla " Conjugacy classes of modular group algebras of finite p-group", Bódi Viktor "Group algebras whose unit group are powerful", Patay Zoltán és Szakács Attila "On Fermat problem in matrix rings and groups".
5. International Conference on Group Theory:combinatorial, geometric, and dynamical aspects of infinite groups, Gaeta, Italy, 1-6 June 2003. Bódi Béla "Group algebras with an Engel group of units"; Bódi Viktor "On elements in algebras having finite number of conjugates".
6. Special Year on Algebraic Geometry and Topology, Workshop on Representation Theory, Canberra, Australia, 30 June -4 July, 2003. Bódi Viktor "Crystallographic groups with indecomposable point groups".
7. International Conference on Algebras, Modules and Rings, Lisboa, 14.-18. July 2003. Bódi Béla "Applications of the group identities theory to the group of units", Bódi Viktor "Generalized crystallographic groups with indecomposable holonomy groups".
8. Groups and Group Rings X – 2003, Ustron, Poland,10 - 14 June 2003. Előadás: Bódi Béla "Group identities on units of rings" (meghívott előadó).
9. International Algebraic Conference, Warwick,UK, December, 2003. Bódi Viktor "On a filtered multiplicative basis".

10. Ischia group theory 2004**,** in honour of Marcel Herzog, Jolly Hotel, Ischia (Naples, Italy) March, 31st - April, 3rd, 2004. Bódi Béla „On the power structure the group of units”; Bódi Viktor „Modular group algebras with maximal Lie nilpotency indices”.
11. International Conference „XVIII ESCOLA DE ALGEBRA”, Campinas, july *19 – 23, 2004* Bódi Viktor „Modular group algebras with maximal Lie nilpotency indices”.
12. International Workshop, Groups, Algebras and Geometries, Alden Biesen, Belgium, August 23-29, 2004, Bódi Viktor „Modular group algebras with maximal Lie nilpotency indices”
13. GROUPS in Bressanone –Brixen, June, 2-5, 2004.
14. Summer School on General Algebra and Ordered Sets. Czech Republic, Malá Morávka, 2004. Bódi Béla „Units in modular group algebras.”
15. Seminar of the Dipartimento di Matematica „E. DeGiorgi”, Universita degli Studi di Lecce Via Provinciale Lecce-Arnesano, 73100-LECCE, Italy, Szeptember, 2004. Bódi Viktor „On a Filtered Multiplicative Bases of Group Algebras”.
16. Seminar of the Faculty of Mathematics (FaMAF--CIEM), Universidad de Cordoba, Cordoba, Argentina, December, 2004 Bódi Viktor „Torsion free crystallographic groups with indecomposable point groups”.
17. International Conference "Groups and Group Rings XI - 2005", Bedlewo-Poznan, Poland, 4--11, June 2005. Bódi Béla „Conjugacy classes in modular group algebras.” Balogh Zs., Group algebras with unit group of class p,
18. International Conference and Workshop: "Lie Algebras, their Classification and Applications", University of Trento, Italy, 24-28 July, 2005. Bódi Viktor „Modular group algebras with almost maximal Lie nilpotency indices”.
19. International Conference and Workshop: "Summer School on General and Ordered Sets", Dep. of Algebra and Geometry, Palacky University of Olomouc, Mala Moravka, Czech Republic, September 4-10, 2005. Bódi Béla „n-Engel modular group algebras.”