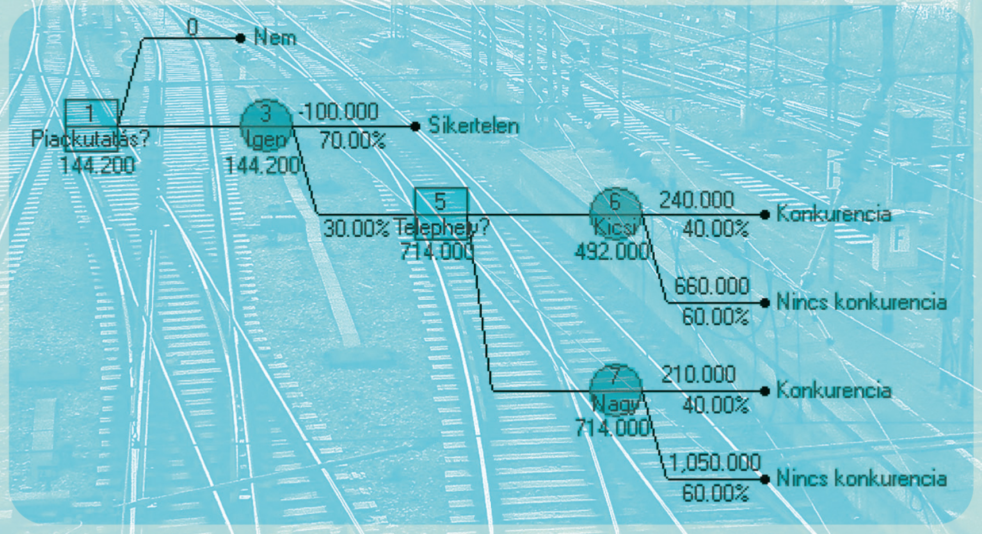
SAPIENTIA
ERDÉLYI MAGYAR
TUDOMÁNYEGYETEM
CSÍKSZEREDAI KAR

jegyzet



SALAMON JÚLIA MAKÓ ZOLTÁN

DÖNTÉSELMÉLET KÖZGAZDÁSZOKNAK

Scientia Kiadó | 2020

SALAMON JÚLIA
MAKÓ ZOLTÁN

DÖNTÉSELMÉLET KÖZGAZDÁSZOKNAK

SAPIENTIA ERDÉLYI MAGYAR TUDOMÁNYEGYETEM
CSÍKSZEREDAI KAR
GAZDASÁGTUDOMÁNYI TANSZÉK

SALAMON JÚLIA
MAKÓ ZOLTÁN

DÖNTÉSELMÉLET KÖZGAZDÁSZOKNAK

Scientia Kiadó
Kolozsvár · 2020

Felelős kiadó: dr. Kása Zoltán

A kötetet lektorálta: dr. Dobos Imre (Budapest)

Első magyar nyelvű kiadás: 2020

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
SALAMON, JÚLIA
Döntéselmélet közgazdászoknak /
Salamon Júlia, Makó Zoltán. - Cluj-Napoca: Scientia, 2020
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-975-030-8

I. Makó, Zoltán

004

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

CUPRINS

ELŐSZÓ

A közgazdaság matematikai modelljei legnagyobb részben olyan döntési modellek, amelyek a gazdasági élet makro-, illetve mikroszintjén a vezetők számára készítik elő a döntéshozatalt. A döntéshozatal során a vezetők arra törekednek, hogy a cél érdekében a legmegfelelőbb stratégiákat válasszák ki. Ezeknek a stratégiáknak a kiválasztásával foglalkozik az operációkutatás és a döntéselmélet.

Többéves oktatási tapasztalatunk, hogy az operációkutatás, valamint a döntéstámogató rendszerek nevű tantárgyak elsajátításában a hallgatóknak a legnagyobb nehézséget a szövegesen megfogalmazott gazdasági vagy döntési feladatok matematikai modelljének felírása jelenti.

A matematikai modellalkotásban a készségszint kialakításához számos feladat megoldása szükséges. Ezért a jegyzet megszerkesztésekor a hangsúlyt a gazdasági probléma matematikai modelljének felírására és a modellekben szereplő paraméterek közgazdasági jelentésének megértésére fektettük. Gyakorlati foglalkozások keretében a matematikai modell számszerű megoldására a WinQSB (QSB – Quantitative Systems for Business), illetve az EXCEL táblázatkezelőt használtuk.

Ez a jegyzet a 2011-ben megjelent *Operációkutatási példatár közgazdászoknak* című feladatgyűjteményünk folytatásának is tekinthető. Itt is mintapéldákon keresztül tárgyaljuk az alapvető döntéselméleti fogalmakat és az elemzési módszereket. A WinQSB programcsomag, valamint az EXCEL táblázatkezelő használatával számszerű válaszokat adunk a megfogalmazott kérdésekre.

A jegyzet a döntéselmélet néhány fontosabb fejezetéből nyújt ízelítőt, és a Sapientia EMTE közgazdasági szakjain oktatott döntéstámogató rendszerek, illetve a döntéselmélet tantárgyak felépítéseit követi.

Az első fejezet a bizonytalan körülmények közötti döntéshozatal alapelveinek és az egyszerű döntéskritériumok áttekintésével kezdődik. A második részében a Neumann–Morgenstern-féle hasznosságelméletet tárgyaljuk. Mintapéldák segítségével bemutatjuk, hogyan alkalmazható az elmélet az egyéni kockázati magatartás vizsgálatában. Kahneman és Tversky tanulmányozták, melyek azok az emberi tényezők, amelyek torzítják a hasznosságelmélet alapelveit. A harmadik részében elemezzük azokat a hatásokat, amelyek a normatív döntéshozatal szempontjából a legfontosabbak, a negyedik részben pedig alkalmazásként bemutatjuk, hogyan alakul a kevert Nash-féle egyensúly a kétszemélyes, két stratégiai lehetőséggel rendelkező játékokban, ha figyelembe vesszük a torzítási hatásokat is. Megvizsgáljuk a referenciaérték hatását is a játék kimenetelére.

A második fejezetben döntési fák szerkesztésével, kiértékelésével, valamint Bayes-elemzéssel foglalkozunk. Mintapéldák használatával bemutatjuk a WinQSB Döntési fa elemzése (Decision Tree Analysis) eszköztárának használatát is.

A harmadik fejezet a többcélú döntéshozatal modelljével foglalkozik. Tárgyaljuk a hierarchikus és nem hierarchikus modelleket, illetve a WinQSB Célprogramozási eszköztárának (Linear and Integer Goal programming) gyakorlati alkalmazását is.

A negyedik fejezet a Saaty által kifejlesztett hierarchikus elemző módszer (Analytic Hierarchy Process – AHP) különböző alkalmazásait tartalmazza. Bemutatásra kerül a prioritási vektor lineáris programozási modell segítségével, illetve a legkisebb eltérési módszerrel történő becslése is.

Az ötödik fejezet a Markov-féle döntési folyamatokat tárgyalja. Az első részben az egyensúlyi eloszlások és a visszatérési idők meghatározásával foglalkozunk. A második részben Markov-láncokat tanulmányozunk a WinQSB segítségével. A harmadik részben az elnyelő Markov-láncok elemzését mutatjuk be. A negyedik részben pedig azt vizsgáljuk, hogy ha az állapotok közötti átmenet egy döntéstől is függ, akkor a döntéshozó milyen döntéseket kell meghozzon, hogy várható profitját maximalizálja.

Az egyes fejezetek a szükséges elméleti alapismeretek – mintapéldák segítségével történő – rövid összefoglalásával kezdődnek, majd a fejezethez kapcsolódó feladattípusok tárgyalásmódját illusztráló mintapéldák következnek. Minden fejezetben bemutatjuk a WinQSB programcsomag, illetve az EXCEL táblázatkezelő használatát az illető feladattípusra. A fejezetek végén a témakörhöz kapcsolódó kitűzött feladatok találhatók.

A jegyzetet elsősorban a gazdasági informatikus és közgazdász alapszakos, valamint a vezetés és szervezés, illetve a pénzügyi mester szakos hallgatóknak ajánljuk. A megoldott és kitűzött feladatok egy része – valós adatokkal – alapötletet és elemzési módszert nyújthat a szakdolgozatok megírásához.

Csíkszereda, 2019. november

A szerzők

1. FEJEZET

DÖNTÉSEK BIZONYTALANSÁG ESETÉN

A döntéselmélet szubjektív döntésekkel foglalkozó irányzataiban központi szerepet játszik a bizonytalanság és annak mérhető része, a kockázat. Ebből a szempontból a döntéseket a kimenetelek valószínűségének ismerete alapján három osztályba rendezhetjük:

- *biztos körülmények* között hozott döntések. Ebben az esetben a cselekvések kimenetelének bizonytalanságától eltekintünk. A korlátozott racionalitás körülményei között meghatározható az elfogadható cselekvés. Ez a döntési körülmény nem igényel magas szintű módszertani ismereteket
- *kockázatos körülmények* között hozott döntések. Ebben az esetben a döntéshozó számára ismert az összes lehetséges cselekvés kimenetele és ezek bekövetkezési valószínűsége (vagy valószínűségi eloszlása, esetleg a valószínűségekre vonatkozó valamilyen intervallumbecslés, konfidenciaintervallum). Módszertani szempontból ezek az esetek tanulmányozhatók statisztikai módszerekkel;
- *bizonytalan körülmények* között hozott döntések. Ebben az esetben ismert az összes lehetséges cselekvés kimenetele, de nem ismert ezek bekövetkezési valószínűsége, sőt, semmiféle információnk sincs róla. Módszertani szempontból ezek az esetek tanulmányozhatók a döntéshozó egyéni preferenciái, kockázatvállalási hajlandósága és értékrendszere alapján.

Ebben a fejezetben a bizonytalan körülmények között hozott döntések alapfogalmaival foglalkozunk.

Számos közgazdász próbált különbséget tenni a kockázat és a bizonytalanság között. Frank H. Knight (1885–1972) a következő javaslatot fogalmazta meg:

- *kockázatról* olyan helyzetben beszélünk, amikor a döntéshozó az események objektív mérlegelése alapján meg tudja határozni a bekövetkezés valószínűségét;
- *bizonytalanságról* olyan helyzetben beszélünk, amelyben nincs lehetőség objektív mérlegelésre.

Knight megfogalmazott egy fontos tulajdonságot: cselekedeteink nagymértékben függhetnek attól, hogy milyen mértékben hiszünk saját becsléseink pontosságában. Ezért a döntés meghozatala szempontjából a kockázat és a bizonytalanság ugyanazt jelenti. A kiválasztott cselekvés alapvetően a valószínűség becslésébe vetett bizalomtól függ. Ha a döntéshozó úgy hiszi, hogy az adott helyzetben egy esemény bekövetkezésének valószínűsége p, akkor a döntését is ez alapján hozza meg. Így a döntéselméletben a Leonard J. Savage (1917–1971) által 1954-ben kidolgozott ***szubjektív valószínűség*** fogalmát használjuk, abban az értelemben, hogy: a döntés szempontjából a valószínűség egyszerűen a vélekedés foka.

Általánosan megfogalmazva, a bizonytalan helyzetekben, véges számú cselekvési lehetőség és véges számú állapot esetén a döntési problémát az alábbi táblázat segítségével lehet leírni:

	Világállapotok			
	s_1	s_2	...	s_n
Cselekvési lehetőségek	p_1	p_2	...	p_n
x_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1m}
x_2	c_{21}	c_{22}		c_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

ahol $(x_1, x_2, ..., x_m)$ a cselekvési lehetőségek, $(s_1, s_2, ..., s_n)$ a környezeti állapotok, $(p_1, p_2, ..., p_n)$ a megfelelő környezeti állapot bekövetkezési valószínűségére vonatkozó becslés és $C = (c_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ a cselekvések és a világállapotok összes lehetséges kimeneteléhez rendelhető következményi mátrix. A lehetséges következmények hasznosságát mérő, elemi hasznossági függvényt $u = u\,(c_{ij})$ jelöljük.

1.1. mintapélda (Étterem). Két versengő étterem mindegyikének egyszerre kell eldöntenie, hogy milyen reklámkampányt indítson: alacsony (a.), közepes (k.) vagy magas (m.) befektetést igénylőt. A reklám utáni becsült napi nyereségnövekedést (lejben kifejezve) az alábbi táblázat tartalmazza:

	II. étterem		
I. étterem	alacsony	közepes	magas
alacsony	1000	800	500
közepes	900	950	400
magas	2000	1000	0

Az első étterem vezetése úgy becsüli, hogy a II. étterem 1/2 valószínűséggel a közepes, 1/4–1/4 valószínűséggel pedig az alacsony, illetve a magas befektetést igénylő reklámkampányt fogja választani. Különböző döntési kritériumokat használva határozzuk meg az I. étterem legnagyobb várható nyereséget ígérő cselekedetét.

Megoldás. Az I. étterem döntési táblázata:

	Világállapotok		
	alacsony	közepes	magas
Cselekvési lehetőségek	0.25	0.5	0.25
alacsony	1000	800	500
közepes	900	950	400
magas	2000	1000	0

Mivel a várható érték alapján döntünk, az elemi hasznossági függvény $u(c_{ij}) = c_{ij}$. Először megnézzük, hogy van-e olyan cselekvése az I. étteremnek, amely minden esetben jobb, mint valamelyik másik (dominálja valamelyik cselekvést). Ez akkor fordul elő, ha $c_{ij} \geq c_{kj}$ minden $j = \overline{1,n}$ esetén, és létezik olyan l index, amelyre $c_{il} > c_{kl}$. Ebben az esetben a k-adik cselekvést kivesszük a lehetséges cselekvések halmazából (kihúzzuk a táblázat k-adik sorát). A mi esetünkben nincs domináns cselekvés.

A cselekvések kiválasztására alkalmas egyszerű kritériumok:

1. Wald-kritérium (maximin kritérium, pesszimista döntés). Minden cselekvési kritérium esetén meghatározzuk a legrosszabb kimenetelt, majd ezek alapján meghatározzuk azt a cselekvési módot, amelynél a legrosszabb kimenetelek közül a legjobb tartozik:

	Világállapotok			
	a.	k.	m.	
Cs.	0.25	0.5	0.25	Min
a.	1000	800	500	**500**
k.	900	950	400	400
m.	2000	1000	0	0

Látható, hogy ebben az esetben az optimális döntés alacsony befektetésű reklámkampány indítása. Ekkor a biztos nyereségnövekedés 500 lej.

2. A maximax kritérium (optimista döntés). Minden cselekvési kritérium esetén meghatározzuk a legjobb kimenetelt, majd ezek alapján meghatározzuk azt a cselekvési módot, amelyhez a legjobb kimenetelek közül a legjobb tartozik:

	Világállapotok			
	a.	k.	m.	
Cs.	0.25	0.5	0.25	Max
a.	1000	800	500	1000
k.	900	950	400	950
m.	2000	1000	0	2000

Látható, hogy ebben az esetben az optimális döntés magas befektetésű reklámkampány indítása. Ekkor, ha összejön (az I. étterem vezetősége optimista), hogy a II. étterem éppen az alacsony befektetést választja, akkor valójában az I. étterem nyereségnövekedése 2000 lej lesz.

3. Hurwicz-kritérium. Jelöljük a döntéshozó optimizmus fokát q-val. Egy teljesen optimista döntéshozó esetén $q = 1$, egy teljesen pesszimista döntéshozó esetén pedig $q = 0$. Kiszámoljuk a cselekedetek minimális és maximális nyereségeinek q-val súlyozott kimeneteli értékeit, majd ezek alapján meghatározzuk azt a cselekvési módot, amelyhez a legjobb kimenetel tartozik. Az alábbi táblázatban az optimizmus foka $q = 0.1$.

	Világállapotok					
	a.	k.	m.			
Cs.	0.25	0.5	0.25	Min	Max	$q = 0.1$
a.	1000	800	500	500	1000	(1-0.1)500+0.1*1000=**550**
k.	900	950	400	400	950	(1-0.1)400+0.1*950=**455**
m.	2000	1000	0	0	2000	(1-0.1)0+0.1*2000=**200**

A táblázatból kiolvasható, hogy egy gyengén optimista döntéshozó ($q = 0.1$) az alacsony befektetési szintet választja. Ekkor a várható nyereségnövekedése 550 lej. Különböző q értékekre más és más döntés lehetséges. Azokat a q értékeket, amelyekre a döntés megváltozik, kritikus értékeknek nevezzük. A kritikus értékeket megkapjuk, ha a q-t 0-tól indítva kis lépésekkel növeljük egészen az 1-es értékig, és figyeljük, milyen értéknél változik meg az optimális cselekvési mód. Matematikailag úgy is eljárhatunk, hogy megnézzük, milyen értékig lesz az optimális döntés az alacsony befektetés. Ennek érdekében meg kell oldani az alábbi egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases} (1-q)*500 + q*1000 \geq (1-q)*400 + q*950 \\ (1-q)*500 + q*1000 \geq (1-q)*0 + q*2000 \end{cases}$$

Az első egyenlőtlenség minden $q \in [0,1]$-re teljesül. A második csak akkor, ha $q \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$. Összegzésként azt mondhatjuk, ha a döntéshozó optimizmusfoka kisebb, mint 1/3, akkor az alacsony befektetési szint mellett dönt, ha pedig nagyobb, mint 1/3, akkor pedig a magas befektetési szintet választja.

4. Legmagasabb valószínűség alapján hozott döntés. A döntéshozó a legnagyobb valószínűségekhez tartozó kimenetelek alapján dönt. Ebben a feladatban legnagyobb valószínűséggel a közepes kimenetel szerepel ($p = 0.5$). Az optimális cselekedet pedig az 1000 lejhez tartozó, magas befektetési szint választása.

5. Várható érték elve alapján hozott döntés. A döntéshozó a becsült kimeneteli valószínűségek alapján kiszámolja a várható nyereséget, és azt a cselekvési módot választja, amelyre a várható nyereség a legnagyobb.

	Világállapotok			
	a.	k.	m.	
Cs.	0.25	0.5	0.25	Várható érték (V)
a.	1000	800	500	$0.25 * 1000 + 0.5 * 800 + 0.25 * 500 = 775$
k.	900	950	400	$0.25 * 900 + 0.5 * 950 + 0.25 * 400 = 800$
m.	2000	1000	0	$0.25 * 2000 + 0.5 * 1000 + 0.25 * 0 = 1000$

A legnagyobb várható nyereségnövekedést a magas befektetésű reklámkampány indítása esetén kapjuk.

6. Markowitz-kritérium. A várható érték elve alapján történő döntés esetén érezhető, hogy a magas befektetési szintnek nagyobb a kockázata. A kockázat a szórással kapcsolatos mennyiség. A Markowitz-kritérium a várható érték mellett a szórást is felhasználja az optimális cselekvés kiválasztására. Döntési függvénye:

$$D = \max_{i=\overline{1,m}} V_i - \lambda \sigma_i,$$

ahol V_i a cselekvések várható értéke,

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \left(c_{ij} - V_i\right)}, \quad i = \overline{1,m},$$

a várható érték körüli szórás. A $\lambda \in [-1,1]$ a döntéshozó kockázattal szembeni magatartását tükrözi. Ha $\lambda = 0$, akkor a döntéshozónak kockázattal szemben semleges, ha $\lambda > 0$, akkor kockázatelutasító, ha pedig $\lambda < 0$, akkor kockázatvállaló a magatartása. Legyen $\lambda = 0.5$. Ekkor

	Világállapotok					
	a.	k.	m.			
Cs.	0.25	0.5	0.25	V	σ	$V - \lambda\sigma$
a.	1000	800	500	775	178.54	685.73
k.	900	950	400	800	231.84	684.08
m.	2000	1000	0	1000	707.11	646.45

A táblázatból kiolvasható, hogy egy kockázatelutasító döntéshozó ($\lambda = 0.5$) az alacsony befektetési szintet választja. Itt is érdemes megvizsgálni a λ kritikus értékeit, azokat az értékeket, amelyeknél az optimális cselekvési mód megváltozik. Ennek érdekében össze kell hasonlítani a döntési függvény kimeneteleit.

Az alacsony befektetési szint az optimális, ha

$$\begin{cases} 775 - 178.54\lambda \geq 800 - 231.84\lambda, \\ 775 - 178.54\lambda \geq 1000 - 707.11\lambda. \end{cases}$$

A feltételek teljesülnek, ha $\lambda \in [0.469, 1]$.

A közepes befektetési szint az optimális, ha

$$\begin{cases} 800 - 231.84\lambda \geq 775 - 178.54\lambda, \\ 800 - 231.84\lambda \geq 1000 - 707.11\lambda. \end{cases}$$

A feltételek teljesülnek, ha $\lambda \in [0.421, 0.469\,04]$.

A magas befektetési szint az optimális, ha

$$\begin{cases} 1000 - 707.11\lambda \geq 775 - 178.54\lambda, \\ 1000 - 707.11\lambda \geq 800 - 231.84\lambda. \end{cases}$$

A feltételek teljesülnek, ha $\lambda \in [-1, 0.421]$.

7. Savage-kritérium (Minimax regret kritérium). Az elmulasztott nyereség (vagy lehetséges veszteség) fogalmát használja a döntéshozatalhoz. Azt a cselekvést kell választani, amely esetében a legkisebb összegről kell lemondani a lehető legnagyobbhoz képest. Ebben az esetben megkeressük minden világállapothoz azt a c_{ij} nyereséget, amely maximalizálja az oszlopot. Ezt az értéket levonjuk az oszlop minden eleméből. Tulajdonképpen értelmezünk egy új elemi hasznosságfüggvényt:

$$u(c_{ij}) = u_{ij} = \max_{i=\overline{1,m}} c_{ij} - c_{ij}.$$

Az így kapott döntési táblázatra alkalmazzuk a pesszimista döntési kritériumot:

	Világállapotok			
	a.	k.	m.	
Cs.	0.25	0.5	0.25	Min
a.	$2000 - 1000 = 1000$	$1000 - 800 = 200$	$500 - 500 = 0$	0
k.	$2000 - 900 = 1100$	$1000 - 950 = 50$	$500 - 400 = 100$	**50**
m.	$2000 - 2000 = 0$	$1000 - 1000 = 0$	$500 - 0 = 500$	0
Max	2000	1000	500	

Következésképpen a legkisebb elmulasztott nyereségnövekedés a közepes befektetésű reklámkampány indítása esetén van.

A bemutatott mintapéldában alapvetően csak három olyan kritériumot tárgyaltunk, ahol a bizonytalanságokat (valószínűségeket) is figyelembe vettük: a várható érték elve, a Markowitz-kritérium és a legmagasabb valószínűség alapján hozott döntés.

1.1. A Neumann–Morgenstern-féle hasznosságelmélet

A várható hasznosságon, illetve ennek kritikáján (kilátáselmélet) alapuló modelleket leginkább a döntéselmélet tárgykörébe tartozó kutatásokban használják. Az alapgondolat egyszerű: különböző, kockázatos szituációkat leíró, virtuális helyzeteket szimuláló lottókat (más megnevezésben szerencsejátékokat, lutrikat, lotteryket, valószínűségi változókat) szembesítenek biztos eseményekkel, majd a választások alapján megszerkesztik a döntéshozó hasznossági függvényét. A hasznossági függvény és a kockázati magatartás közti szoros kapcsolat ismeretében pedig lényeges következtetések vonhatók le a döntéshozó kockázati magatartására vonatkozóan.

Szinte valamennyi mai mikroökonómiai hasznosságfogalom előfutárának Daniel Bernoulli 1738-as tanulmánya tekinthető. Gondolatainak megfogalmazásához a lottókat használta. A lottó azért olyan népszerű eszköz a döntéshozatalok vizsgálatában, mert természetes szabályt kínál arra, hogy súlyokat rendeljünk egy döntési helyzet különböző jutalékaihoz (nyereményeihez vagy veszteségeihez): minél valószínűbb egy jutalék elnyerése, annál nagyobb kell legyen a súlya.

Egy olyan lottót, amelyben 30% valószínűséggel nyerünk 10 000 lejt és 70% valószínűséggel veszítünk 1000 lejt, így jelölünk: $L = [10\,000, 0.7; -1000, 0.3]$.

Általában egy $L = [r_1, p_1; r_2, p_2; ...; r_n, p_n]$ ***lottó*** azt mutatja meg, hogy az r_i jutalmat milyen p_i valószínűséggel lehet elnyerni. Ha $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, akkor L tulajdonképpen egy diszkrét valószínűségi változó.

A lottók összehasonlítására a Bernoulli előtti időkben a ***lottó várható értékét*** vették figyelembe:

$$EV(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i r_i.$$

Bernoulli is megtartotta ezt a módszert, de nem a jutalékok értékeire (r_i-kre), hanem a jutalmak morális értékére, „utilitas” ($u(r_i)$-kre) alkalmazta. Neumann és Morgenstern megfogalmazták azokat az alapelveket, amelyek biztosítják a Bernoulli módszerében előforduló jutalmak morális értékeinek létezését, másképpen fogalmazva, a döntéshozó kardinális hasznossági skálájának a létezését.

Bernoulli egy igen egyszerű játékot ír le.

1.2. mintapélda (Szentpétervári paradoxon). Péter feldob egy érmét, és amennyiben az az első alkalommal fejjel felfelé ér földet, akkor fizet Pálnak egy rubelt. Amennyiben csak a második alkalommal lesz fej az eredmény, akkor már két rubelt fizet, míg a harmadszor kijövő fejért négy rubel jár, az n-edikért pedig – ha előtte nem volt fej – 2^{n-1} rubel.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy Péternél éppen az n-edik alkalommal lesz fej az eredmény? Mennyi lesz ekkor Pál várható nyeresége?

b) Mégis mi az oka annak, hogy ha megkérdezik Pált, mennyit hajlandó fizetni azért, hogy a fenti játékban részt vehessen, minden bizonnyal egy véges és nem is túlságosan nagy összeget mond?

Megoldás. Annak valószínűsége, hogy n-edik alkalommal fej az eredmény:

$$p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Pál várható nyeresége pedig:

$$S_n = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2^2}2 + ... + \frac{1}{2^n}2^{n-1} = \frac{n}{2}.$$

b) A várható nyereség határértéke végtelen, mégis ha megkérdezik Pált, hogy mennyit hajlandó fizetni azért, hogy a fenti játékban részt vehessen, nevetségesen kis összeget mond. Mi ennek a magyarázata?

Bernoulli ezt úgy magyarázza, hogy Pál szubjektív értékelése nem egyezik meg a várható nyereménnyel. Bernoulli szerint a vagyon egy rubellel való folyamatos növelése egyre kevesebb előnyt jelent Pál számára. Pál értékelését Bernulli egyéni hasznossági „utilitas” függvénynek nevezte, és azt mondta, hogy az egyének a döntéseiket nem a várható érték, hanem a várható haszon elve alapján hozzák. Ha u-val jelöljük a hasznosságot, du-val a hasznosság növekményét, r-rel Pál vagyoni szintjét, dr-rel a vagyoni szint növekményét, Bernoulli a következő összefüggés meglétét feltételezte:

$$du = k\frac{dr}{r}, \quad k > 0 \text{ -állandó.}$$

Ebből következik, hogy Pál r nyereményének morális haszna:

$$u\left(r\right) = k\ln\frac{r}{c},$$

ahol $c > 0$ a minimális vagyoni szint.

Bernoulli ezt a képletet használta arra, hogy megbecsülje a játék reális tétjét. Így például ha Pál a játékba $c = 1000$ rubellel száll be, akkor szubjektív (morális) várható haszna:

$$\begin{aligned} US\left(c\right) &= k\left(\frac{1}{2}\ln\frac{c+1}{c} + \frac{1}{2^2}\frac{\ln c+2}{c} + \ldots + \frac{1}{2^n}\ln\frac{c+2^{n-1}}{c} + \ldots\right) \\ &= \frac{k}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}\left(\ln\left(c+2^i\right) - \ln c\right) \\ &= k\ln\prod_{i=1}^{\infty}\left(c+2^i\right)^{2^{-i}} - k\ln c. \end{aligned}$$

Bevezetve a kezdeti $c = 1000$ tőke morális értékének a játékból hozzáadódó növekedését mutató függvényt:

$$z\left(c\right) = \prod_{i=1}^{\infty}\left(c+2^i\right)^{2^{-i}} - c,$$

az $US\left(c\right)$ felírható az alábbi alakba:

$$US\left(c\right) = u\left(z\left(c\right)+c\right).$$

Ha a kezdőtőke $c = 1000$, akkor $z\left(1000\right) \simeq 10.86$ és $US\left(1000\right) \simeq 0.01k$. Tehát Péter maximálisan 11 rubelt hajlandó fizetni a játékban való részvételért.

Bernoulli gondolataiból kiindulva a matematikus Neumann János (1903–1953) és a közgazdász Oskar Morgenstern (1902–1977) öt axiómából vezették le a lottók közötti racionális választásról szóló elméletüket. Az általuk megfogalmazott várható hasznosság elve kétféle módon épült be a közgazdasági elméletekbe: egyrészt mint a döntéshozatal módjára vonatkozó logikai előírás; másrészt mint annak meghatározása, hogyan hoznak döntéseket a racionálisan gondolkodó személyek.

Neumann–Morgenstern-axiómák

1. axióma: *a teljes rendezettség axiómája.* Bármely két r_1 és r_2 jutalék esetén a döntéshozó számára pontosan egy állítás igaz a következők közül:

1. r_1-et preferálja az r_2-vel szemben ($r_1 \succ r_2$),
2. az r_2-t preferálja az r_1-gyel szemben ($r_2 \succ r_1$),
3. közömbös az r_1 és r_2 jutalmakra nézve ($r_1 \sim r_2$).

Ezenkívül még teljesül a tranzitivitás tulajdonsága is, azaz: ha a döntéshozó számára $r_1 \succ r_2$ és $r_2 \succ r_3$, akkor $r_1 \succ r_3$.

2. axióma: *folytonossági axióma.* Tekintjük az $L_1 = [r_1, p; r_3, 1-p]$ és $L_2 = [r_2, 1]$ lottókat, amelyre $r_1 \succ r_2 \succ r_3$. Ekkor létezik egy olyan $p \in (0,1)$ valószínűség, amelyre $L_1 \sim L_2$.

3. axióma: *függetlenség axiómája.* Tekintjük az $L_1 = [r_1, p; r_3, 1-p]$ és $L_2 = [r_2, p; r_3, 1-p]$ lottókat, $p \in (0,1)$ lottókat. Ha a döntéshozó számára $r_1 \sim r_2$, akkor $L_1 \sim L_2$.

4. axióma: *különböző valószínűségek axiómája.* Tekintjük az $L_1 = [r_1, p; r_2, 1-p]$ és $L_2 = [r_1, q; r_2, 1-q]$, $p, q \in (0,1)$. Ha a döntéshozó számára $r_1 \succ r_2$ és $p > q$, akkor $L_1 \succ L_2$.

5. axióma: *az összetett lottó axiómája.* Érvényes az a szabály, hogy ha egy összetett L_1 lottóban minden lehetséges r_i jutalom p_i valószínűségét a teljes valószínűség tétele segítségével számoljuk ki, akkor L_1 ekvivalens az $L_2 = [r_1, p_1; r_2, p_2; ...; r_n, p_n]$ egyszerű lottóval. Példaként tekintjük az $L_1 = [r_1, p; L_2, 1-p]$ összetett lottót, ahol $L_2 = [r_1, q; r_2, 1-q]$, valamint az $L_3 = [r_1, (1-p)\,q + p; r_2, (1-p)\,(1-q)]$ lottót. Ekkor a döntéshozó számára $L_1 \sim L_3$.

Egy $L = [r_1, p_1; r_2, p_2; ...; r_n, p_n]$ ***lottó várható hasznossága***:

$$EU\,(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u\,(r_i)\,,$$

ahol $u : S \to \mathbb{R}$, $S = \{r_1, r_2, ..., r_n\}$ jutalékok halmazán értelmezett úgynevezett ***hasznossági függvény***. Az $u(r_i)$ értékeket ***kardinális hasznosságoknak*** is nevezik.

1.1. Tétel (Neumann–Morgenstern-féle hasznosságelmélet alaptétele)**.** *Legyen $S = \{r_1, r_2, ..., r_n\}$ a jutalékok véges halmaza és $\mathbb{L}$ az S-en értelmezhető összes lottó halmaza:*

$$\mathbb{L} = \left\{ L = [r_1, p_1; r_2, p_2; ...; r_n, p_n] : p_i \geq 0, i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}.$$

Az $\mathbb{L}$-en értelmezett preferenciarendezés akkor és csakis akkor teljesíti a Neumann–Morgenstern-axiómákat, ha létezik egy olyan $u : S \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény, amelyre érvényes:

$$L_1 \succ L_2 \Leftrightarrow EU(L_1) > EU(L_2),$$
$$L_1 \sim L_2 \Leftrightarrow EU(L_1) = EU(L_2)$$

bármely $L_1, L_2 \in \mathbb{L}$ esetén. Mi több, az u hasznossági függvény egy affin, növekvő transzformációtól eltekintve egyértelműen meghatározott, azaz bármely $a > 0$ és $b \in \mathbb{R}$ esetén a $v : S \to \mathbb{R}$ $v(r) = au(r) + b$ hasznossági függvény azonos preferenciarendezést generál az $\mathbb{L}$-en:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u(r_i) > \sum_{i=1}^{n} q_i u(r_i) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i v(r_i) > \sum_{i=1}^{n} q_i v(r_i);$$
$$\sum_{i=1}^{n} p_i u(r_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i u(r_i) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i v(r_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i v(r_i).$$

Tekintjük az $L = [r_1, p_1; r_2, p_2; ...; r_n, p_n]$ lottót. Azt a biztos r^* jutalékot, amelyre az $L_2 = [r^*, 1]$ ekvivalens az L-el, az L lottó ***bizonyossági egyenértékének (Certainty Equivalent – CE)*** nevezzük és $CE(L)$-lel jelöljük. Semleges kockázati magatartású döntéshozó a veszteségeket és a nyereségeket ugyanolyan mértékben értékeli. Egy ilyen döntéshozónak az L lottó bizonyossági egyenértéke

$$CE(L) = EV(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i r_i.$$

A legtöbb döntéshozó egy L lottóban a veszteséget nagyobb mértékben értékeli, mint az ugyanakkora valószínűséggel bekövetkező azonos mértékű nyereséget. Ezek kockázatelutasító magatartást követnek, és náluk a

$CE(L) < EV(L)$. Akik éppen fordítva, a nyereséget értékelik felül, kockázatkereső magatartást mutatnak, és nekik $CE(L) > EV(L)$.

Az $RP(L) = EV(L) - CE(L)$ értéket ***kockázati prémiumnak (Risk Premium – RP)*** nevezzük, amelynek abszolút értéke annak fokmérője, hogy a döntéshozó mennyire kockázatelutasító.

1.3. mintapélda (Egyéni hasznossági függvény becslése) Legyen a $S = [-1000, 10\,000]$ a jutalékok intervalluma lejben kifejezve. Az S-et diszkrétnek is tekinthetjük, ha lejes egységekre bontjuk: $S = \{-1000, -999, ..., 9999, 10\,000\}$. Ebben az intervallumban szeretnénk meghatározni a döntéshozó u egyéni hasznossági függvényét.

Megoldás. A legkisebb jutalék -1000. Ennek a kardinális haszna legyen $u(-1000) = 0$. A legnagyobb jutalék $10\,000$. Ennek a kardinális haszna legyen $u(10\,000) = 1$. Tekintjük az $L_1 = [-1000, 0.5; 10\,000, 0.5]$ lottót. Keressük azt a biztos jutalékot, $r^*_{1/2} \in S$, amelyre $L_2 = \left[r^*_{1/2}, 1\right]$ lottó ekvivalens az L_1-gyel. Az $r^*_{1/2}$ tulajdonképpen az L_1 lottó bizonyossági egyenértéke. A kísérletben az alábbi felezési algoritmust használjuk:

1. lépés. Legyen $r := -100$; $M := 10\,000$; $m := -1000$; $hiba = 100$.

2. lépés. A döntéshozó választ az L_1 lottó vagy a biztos r jutalék között.

3. lépés. Ha L_1-et választja, akkor legyen $m := r$ és $r := (M + m)/2$ szám kerekítése 100 egységekre. Ha L_2-t választja, akkor legyen $M := r$ és $r := (M + m)/2$ szám kerekítése 100 egységekre. Ha azt mondja, hogy neki közömbös az L_1 és L_2, akkor folytatjuk az algoritmust az 5. lépéstől.

4. lépés. Ha $M - m > hiba$, akkor folytatjuk az algoritmust a 2. lépéssel, különben következik az 5. lépés.

5. lépés. Legyen $r^* = r$.

Alkalmazva a fenti algoritmust, tételezzük fel, hogy $r^*_{1/2} = r^* = 1000$.

Az $r^*_{1/2}$ segítségével két lottó értelmezhető. A felső lottó $L_3 = [10\,000, 0.5; 1000, 0.5]$ és az alsó lottó $L_4 = [-1000, 0.5; 1000, 0.5]$.

Ezután a fenti algoritmus segítségével meghatározzuk az L_3 és az L_4 bizonyossági egyenértékeit a $CE(L_3) = r^*_{3/4}$-t, illetve a $CE(L_4) = r^*_{1/4}$. Tételezzük fel, hogy $r^*_{3/4} = 4500$ és $r^*_{1/4} = 0$.

Kiszámoljuk az $r^*_{1/2}$, $r^*_{3/4}$ és $r^*_{1/4}$ bizonyossági egyenértékek hasznosságait:

$$
\begin{aligned}
u\left(r^*_{1/2}\right) &= \frac{1}{2}u\left(-1000\right) + \frac{1}{2}u\left(10\,000\right) = \frac{1}{2};\\
u\left(r^*_{3/4}\right) &= \frac{1}{2}u\left(r^*_{1/2}\right) + \frac{1}{2}u\left(10\,000\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4};\\
u\left(r^*_{1/4}\right) &= \frac{1}{2}u\left(-1000\right) + \frac{1}{2}u\left(r^*_{1/2}\right) = 0 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Most már a döntéshozó hasznossági függvénye megközelíthető egy olyan görbével, amely megközelíti az $A\left(-1000, 0\right)$, $B\left(0, 1/4\right)$, $C\left(1000, 1/2\right)$, $D\left(4500, 3/4\right)$, $E\left(10\,000, 1\right)$ pontokat. A becslés pontosítható, ha újabb köztes pontokat veszünk fel. Excelben tanulmányozható a legjobban illeszkedő hasznossági függvény alakja. A Kahneman–Tversky szerzőpáros kérdőíves vizsgálatok nyomán azt tapasztalták, hogy a hatványfüggvények jól illeszkednek a hasznossági függvényre azokban az intervallumokban, amelyekben a függvény szigorúan konvex vagy szigorúan konkáv. Ezért mi is azt a d^* hatványkitevőt keressük, amelyre az

$$u\left(r\right) = \left(\frac{r + 1000}{10\,000 + 1000}\right)^d$$

közelítő hasznossági függvényre a

$$z\left(d\right) = \left(u\left(0\right) - 1/4\right)^2 + \left(u\left(1000\right) - 1/2\right)^2 + \left(u\left(4500\right) - 3/4\right)^2$$

célfüggvény értéke minimális. Numerikusan meghatározható a d^* közelítő értéke. Ebben a feladatban $d^* = 0.473$. Tehát a döntéshozó becsült hasznossági függvénye

$$u\left(r\right) = \left(\frac{r + 1000}{10\,000 + 1000}\right)^{0.473}.$$

A képletből az r-et kifejezve

$$r = 11\,000u^{2.114} - 1000$$

megbecsülhető egy r jutalom bizonyossági egyenértéke és kockázati prémiuma.

Feladatként megfogalmazható: becsüljük meg az $L = [-1000, 6/11; 10\,000, 5/11]$ lottó bizonyossági egyenértékét és kockázati prémiumát:

$$
\begin{aligned}
EV(L) &= \frac{6}{11}(-1000) + \frac{5}{11}(10\,000) = 4000,\\
CE(L) &= u^{-1}(4000) = 11\,000\left(\frac{4000+1000}{10\,000+1000}\right)^{2.114} - 1000 = 1077.4,\\
RP(L) &= EV(L) - CE(L) = 4000 - 1077.4 = 2922.6.
\end{aligned}
$$

Igazolható, hogy általános esetben az $L = [a, p; b, 1-p]$ lottó ($a > b$) és az u hasznossági függvény esetén:

$$
\begin{aligned}
EV(L) &= pa + (1-p)\,b,\\
CE(L) &= u^{-1}\left(pu(a) + (1-p)\,u(b)\right).
\end{aligned}
$$

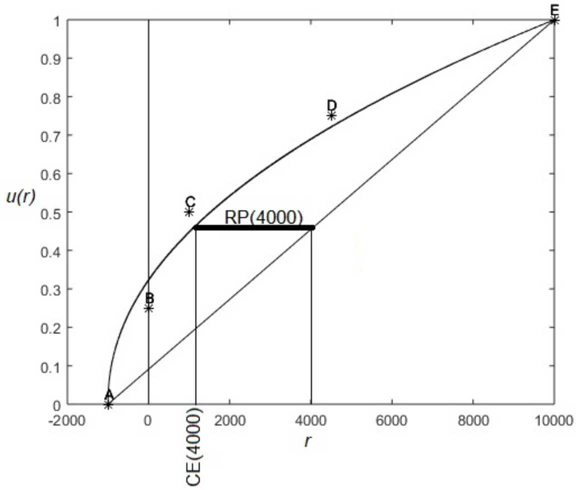
Például az $L = [1000, 0.2; 8\,000, 0.8]$ lottó esetén:

$$
\begin{aligned}
EV(L) &= 0.2 * 1000 + 0.8 * 8000 = 6600,\\
u(1000) &= \left(\frac{1000+1000}{10\,000+1000}\right)^{0.473} = 0.446,\\
u(8000) &= \left(\frac{8000+1000}{10\,000+1000}\right)^{0.473} = 0.909,\\
CE(L) &= u^{-1}(0.2 * 0.446 + 0.8 * 0.909)\\
&= u^{-1}(0.816)\\
&= 11\,000 * 0.816^{2.114} - 1000\\
&= 6156.6,\\
RP(L) &= 6600 - 6156.6 = 443.4.
\end{aligned}
$$

Az 1.1. ábrán a legjobban illeszkedő hasznossági függvény grafikonja látható. Feltüntettük az $L = [-1000, 6/11; 10\,000, 5/11]$ lottó jutalom bizonyossági egyenértékét is. A vastagított szakasz az L kockázati prémiumának nagyságát szemlélteti.

Megjegyezzük, ha a döntéshozó preferenciái megszegik a Neumann–Morgenstern-axiómák valamelyikét, akkor az eljárás nem fog egy sima görbét eredményezni. Az is előfordulhat, hogy bizonyos részen konvex, egy másik részen pedig konkáv a hasznosság. Ilyen esetben újabb kísérletekkel a legjobb d^* értékeket külön-külön kell meghatározni a konvex és konkáv tartományokon.

A hasznossági görbe alapján megmondható a döntéshozó kockázattal szembeni magatartása is:



1.1. ábra. Az 1.3. mintapélda legjobban illeszkedő hasznossági függvénye. A vastagított szakasz az $L = [-1000, 6/11; 10\,000, 5/11]$ lottó kockázati prémiumának nagyságát szemlélteti.

– ha a görbe szigorúan konkáv ($u''(r) < 0$, $r \in S$), akkor a döntéshozónak az S intervallumon ***kockázatelutasító a magatartása***;
– ha szigorúan konvex ($u''(r) > 0$, $r \in S$), akkor a döntéshozónak az S intervallumon ***kockázatkereső a magatartása***;
– ha a görbe affin ($u''(r) = 0$, $r \in S$), akkor a döntéshozónak az S intervallumon ***kockázatsemleges a magatartása***.

Az elgondolás közgazdasági szempontból is logikus, hiszen a konkavitás a csökkenő határhaszonra utal, így az csak a kockázatelutasítók sajátja.

A kockázati magatartás és a hasznossági függvény szubjektív jellegűek. Felmerül a kérdés, hogy miként lehetne összehasonlítani két döntéshozó kockázatelutasító magatartásának mértékét? Észszerűnek tűnik, hogy a nagyobb kockázatelutasító döntéshozó nagyobb kockázati prémiummal és alacsonyabb bizonyossági egyenértékkel kellene rendelkezzen. Amiből azonnal következik, hogy hasznossági függvényének nagyobb a görbülete. Ezért a kockázatelutasító magatartás erősségét mérő úgynevezett ***Arrow–Pratt-féle abszolút kockázatelutasítási mutató (Absolute Risk Aversion – ARA)***, valamint a ***relatív kockázatelutasítási mutató (Relative Risk***

Aversion – RRA) a görbületet mérő második deriváltra alapoz (Arrow – 1965):

$$ARA\,(r) = -\frac{u''\,(r)}{u'\,(r)}, \quad RRA\,(r) = ARA(r) * r.$$

Az ARA reciproka: $-u'\,(r)\,/u''\,(r)$ ***kockázattolerancia*** néven ismert. Az u hasznossági függvények egy érdekes osztályát kapjuk, amikor azt feltételezzük, hogy a kockázattolerancia affin, vagyis $-u'\,(r)\,/u''\,(r) = ar + b$ alakú. Alapvető esetek:

– ha $a = 0$, akkor $u\,(r) = B - Ae^{-r/b}$ alakú;
– ha $a = 1$ és $b = 0$, akkor $u\,(r) = B + A\ln r$ alakú, feltéve, ha $r > 0$;
– ha $a = -1$ és $b > 0$, akkor $u\,(r) = B - A\,(b - r)^2$ alakú;
– ha $a \neq 1$ és $b = 0$, akkor $u\,(r) = B + A\frac{a}{a-1}r^{\frac{a-1}{a}}$.

Megfigyelhető, hogy a feladatban a $[-1000, 10\,000]$ intervallumra skálázott Kahneman–Tversky-féle (1.1) hatványfüggvény éppen az utolsó esetet jelenti, amelyben: $B = 0$, $\frac{a-1}{a} = 0.473$, $a = 1.898$ és $A = \frac{a-1}{a} = 0.473$. A mintapéldában a kockázattolerancia:

$$-\frac{u'\,(r)}{u''\,(r)} = \frac{M-m}{1-d^*}\,(r-m) = 20\,878\,(r + 1\,000)\,, \text{ ha } d^* \neq 1,$$

ahol m a legkisebb és M pedig a legnagyobb jutalom értéke. Tehát azt mondhatjuk, hogy a kockázattolerancia lineárisan nő, meredeksége pedig 1.898. A kockázatelutasító magatartás abszolút mértéke

$$ARA\,(r) = \frac{1}{1.898\,(r+1000)}, \text{ amikor } r > -1000,$$
$$RRA\,(r) = \frac{r}{1.898\,(r+1000)}, \text{ amikor } r > -1000,$$

egy hiperbola. Legnagyobb értéke a -1000 jutalom esetén van: $ARA\,(-1000) = +\infty$, és legkisebb a 10 000-nél: $ARA\,(10\,000) = 0.000\,047$.

A kockázatelutasítás mértékei, illetve a kockázattolerancia mértéke lokálisan függ az r jutalomtól. Lehet értelmezni egy ***globális mérőszámot a kockázatelutasító magatartás mértékére (Global Absolute Risk Aversion – GARA)***, amelyet az u egyéni hasznossági függvény és a ferde átló által bezárt, a teljes tartományhoz viszonyított terület mértéke határoz meg:

$$GARA = \frac{\int_m^M u\,(r) - \frac{r-m}{M-m}dr}{(M-m)}.$$

Ebben a feladatban:

$$GARA = \frac{1}{d^* + 1} - \frac{1}{2} = 0.179.$$

Innen és a hasznossági függvény képletéből levezethető:
- ha $0 < d^* < 1$, akkor a döntéshozónak az S intervallumon kockázatelutasító a magatartása;
- ha $d^* > 1$, akkor a döntéshozónak az S intervallumon kockázatkereső a magatartása;
- ha $d^* = 1$, akkor a döntéshozónak az S intervallumon kockázatsemleges a magatartása.

1.2. A Kahneman–Tversky-féle kilátáselmélet

A Neumann–Morgenstern-féle hasznosságelméletet leíró axiómarendszer kifejlesztése óta számos paradoxont fedeztek fel. A híres Allais-, illetve Ellsberg-paradoxonok rámutattak arra, hogy a valós döntéshozók nem mindig a szubjektív várható hasznosság alapján döntenek.

A várható hasznosság elméletének első jelentősebb kritikája Maurice Allais (1911–2010) nevéhez fűződik. Allais legnevezetesebb felfedezése egy paradoxon, melyet 1953-ban New Yorkban, az American Economic Society konferenciáján fejtett ki először, majd publikált különféle gazdasági szaklapokban az 1950-es évek folyamán. Ő a hasznosságelmélet függetlenségi axiómáját vizsgálta, és felfigyelt arra, hogy az egyének a lottókísérletekben megfordíthatják preferenciáikat a rivális játékok között, amennyiben különkülön megkövetelt valószínűségük azonos mértékben mérséklődik.

1.4. mintapélda (Allais-paradoxon). A diákoknak az alábbi választási lehetőségeket ajánlják fel:

1. kérdés. Melyiket választanád a következő két lottó közül? L_1 : biztosan kapsz 10 000 lejt vagy L_2 : 90%-os valószínűséggel kapsz 15 000 lejt, 10% valószínűséggel nem kapsz semmit.

2. kérdés. Melyiket választanád a következő két lottó közül? L_3 : 10%-os valószínűséggel kapsz 10 000 lejt, 90%-os valószínűséggel nem kapsz semmit vagy L_4 : 9%-os valószínűséggel kapsz 15 000 lejt, 91%-os valószínűséggel nem kapsz semmit.

Az 1. kérdés esetén a diákok 82%-a előnyben részesíti az L_1 lottót, melynek hozadéka biztos, még ha az L_2 lottó várható nyeresége nagyobb is: 13 500 lej.

A 2. kérdés esetén azok a diákok, aki előbb az L_1-et részesítették előnyben a L_2-vel szemben, most inkább (83%-a) az L_4-et választották az L_3-mal szemben, mert L_4 számottevően nagyobb haszonnal kecsegtet, mint az alig nagyobb valószínűségű L_3, pedig az L_3 várható értéke 1000 lej és az L_4 várható értéke pedig 1350 lej.

Igazoljuk, hogy a választások ezen mintázata megsérti a várható hasznosság elvét.

Megoldás. Legyen u egy olyan diák hasznossági függvénye, amely az első kérdésre az L_1, a második kérdésre pedig az L_4 lottót választotta. Ebben a játékban a legkisebb nyereség a nulla, ezért $u(0) = 0$, a legnagyobb nyereség pedig a 15 000 lej, ezért $u(15\,000) = 1$. A várható hasznosság elve alapján

$$\begin{aligned} EU(L_1) &= u(10\,000) > 0.9u(15\,000) + 0.1u(0) = 0.9 = EU(L_2) \\ EU(L_3) &= 0.9u(10\,000) = 0.9u(10\,000) + 0.1u(0) \\ &< 0.09u(15\,000) + 0.91u(0) = 0.09 = EU(L_4)\,. \end{aligned}$$

Ahonnan következik, hogy

$$u(10\,000) < 0.$$

Kilátáselmélet alapelvei

A kilátáselmélet tulajdonképpen a hasznosságelmélet egy továbbfejlesztett változata. Daniel Kahneman (1934–) és Amos Nathan Tversky (1937–1996) tanulmányozták, melyek azok az emberi tényezők, amelyek torzítják a hasznosságelmélet axiómáit. Az alábbiakban felsoroljuk azokat a torzító hatásokat, amelyek a normatív döntéshozatal szempontjából a legfontosabbak.

1. Tükrözéshatás (Veszteségkerülés): az emberek a referenciaértékükhöz viszonyított veszteségnek nagyobb hasznosságot tulajdonítanak, mint egy ugyanolyan mértékű nyereségnek.

1.5. mintapélda (Veszteségkerülés a hasznosságelméletben). A várható hasznosság elve alapján válaszolj az alábbi kérdésekre:

1. kérdés. Melyiket választanád a következő két lottó közül? L_1: biztosan kapsz 9000 lejt vagy L_2: 90%-os valószínűséggel kapsz 10 000 lejt, 10% valószínűséggel nem kapsz semmit.

2. kérdés. Melyiket választanád a következő két lottó közül? L_3: biztosan elveszítesz 9000 lejt vagy L_4: 90%-os valószínűséggel elveszítesz 10 000 lejt, 10% valószínűséggel nem veszítesz semmit.

Az első kérdésre valószínűleg kockázatelutasító választ adtál, azaz megtartod a 9000-et biztosan. Ugyanis a 9000 lej hasznossági értéke bizonyosan több, mint a 10 000 lejes nyereség hasznossági értékének 90%-a. Legyen u a hasznossági függvényed, amelyre $u\,(-10\,000) = 0$ és $u\,(10\,000) = 1$. Ekkor az első kérdésre adott válaszod az alábbi egyenlőtlenséggel írható le:

$$EU\,(L_1) = u\,(9\,000) > 0.9 * u\,(10\,000) + 0.1u\,(0) = 0.9 + 0.1u\,(0) = EU\,(L_2)\,.$$

A második esetben, ha a többséghez hasonlóan gondolkodsz, akkor a második lehetőséget választod, azaz kockázatot vállalsz:

$$EU\,(L_3) = u\,(-9000) < 0.9 * u\,(-10\,000) + 0.1u\,(0) = 0.1u\,(0) = EU\,(L_4)\,.$$

Összegezésképpen, kapjuk:

$$u\,(-9000) < 0.1u\,(0) < u\,(9000) - 0.9 < u\,(-9\,000) - 0.9,$$

vagyis

$$0.9 > 0,$$

ami ellentmondás. Tehát a veszteségkerülési magatartást nem lehet leírni egy képlettel megadott folytonos hasznossági függvénnyel. Kell létezzen egy olyan referenciaérték, amelyhez viszonyulnak a nyereségek, illetve a veszteségek. Kilátáselméletben a hasznossági függvényt ***értékfüggvénynek*** nevezik és így értelmezik:

$$u\,(r, w) = \begin{cases} u^+\,(r - w)\,, \text{ ha } r \geq w, \\ -u^-\,(w - r)\,, \text{ ha } r < w, \end{cases}$$

ahol w a ***referenciaérték (referenciapont)***, $u^+ : S_w^+ \to \mathbb{R}_+$, $u^- : S_w^- \to \mathbb{R}_+$ a nyereséget, illetve a veszteséget mérő hasznossági függvények, $S = S_w^+ \cup S_w^-$ a jutalékok véges halmaza. Az $S_w^+ = \{s_i \in S : s_i \geq w\}$ és $S_w^- = \{s_i \in S : s_i < w\}$ a referenciaértékhez képest nyereségnek, illetve veszteségnek tekintett jutalékok halmazai. A folytonosság érdekében feltételezik, hogy $u^+\,(0) = u^-\,(0) = 0$.

1.6. mintapélda (Veszteségkerülés a kilátáselméletben). Figyelembe véve a veszteségkerülési magatartást, igazoljuk, hogy nincs ellentmondás az 1.5. mintapéldában.

Megoldás. Jelöljük a referenciaértéket w-vel, és tegyük fel, hogy az értéke $w \in (0, 9000)$. Legyen a magatartás kockázatelutasító, azaz u^+ és u^- szigorúan konkáv függvények. Ekkor az első kérdésre adott válasz így írható le:

$$\begin{aligned} EU(L_1) &= u(9000, w) = u^+(9000 - w) \\ &> 0.9 * u^+(10\,000 - w) - 0.1u^-(w) = EU(L_2). \end{aligned}$$

Hasonlóan, a második kérdésre adott válasz így adható meg:

$$\begin{aligned} EU(L_3) &= -u^-(w + 9000) \\ &< -0.9 * u^-(w + 10\,000) - 0.1u^-(w) = EU(L_4). \end{aligned}$$

Összegezésképpen kapjuk:

$$\begin{aligned} u^+(9000 - w) &> 0.9 * u^+(10\,000 - w) - 0.1u^-(w) \\ u^-(w + 9000) &> 0.9 * u^-(w + 10\,000) + 0.1u^-(w) \end{aligned}$$

Mivel u^- szigorúan konkáv, a Jensen-egyenlőtlenség alapján:

$$\begin{aligned} u^-(w + 9000) &= u^-(0.9(w + 10\,000) + 0.1w) \\ &> 0.9 * u^-(w + 10\,000) + 0.1u^-(w). \end{aligned}$$

Tehát a második egyenlőtlenség minden $w \in (0, 9000)$-re teljesül. Valóban, a megadott feltételek mellett az, aki az első kérdésre a biztosat választotta, a második kérdésre a bizonytalant kell válassza.

Ha az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadjuk, akkor kapjuk:

$$\begin{aligned} &0.5u^+(9000 - w) + 0.5u^-(w + 9000) \\ &\qquad > 0.45u^+(10\,000 - w) + 0.45u^-(w + 10\,000). \end{aligned}$$

Ez az összefüggés azt mutatja meg, hogy az $L_5 = [9000, 0.5; -9000, 0.5]$ lottót preferáljuk az $L_6 = [10\,000, 0.45; -10\,000, 0.45]$ lottóhoz képest. Látható, hogy az L_6 lottó valószínűségeinek összege nem egyenlő 1-gyel. Kilátáselméletben torzulnak a valószínűségek is, és ezért legtöbbször nem lesz a valószínűségek összege 1. Hogy ezt a különbséget a hasznosságelméletben bevezetett lottókhoz képest érzékeltessék, a kilátáselméletben a lottókat ***kilátásoknak*** nevezik. Ezért a fenti preferenciákra vonatkozó kijelentést úgy pontosítjuk, hogy az L_5 kilátást preferáljuk az L_6 kilátással szemben. Ez a kijelentés egyben megmutat egy másik döntési tulajdonságot is: az emberek azonos várható érték mellett azt a kilátást részesítik előnyben, amelynek szórása kisebb.

2. Bizonyossági hatás: az emberek túlértékelik a bizonyosnak tekintett kimeneteleket a csupán valószínűekkel szemben (kockázatelutasító preferencia). A népi bölcsesség ezt így fogalmazza meg: „Járt utat járatlanért el ne hagyj”. A bizonytalan dolgok elkerülése belevihet minket olyan választásokba is, melyeknél járhattunk volna jobban is, de a sok ismeretlen tényező miatt inkább nem választjuk azokat.

1.7. mintapélda (Ellsberg-paradoxon 1961-ből). Van két dobozunk:

A. dobozban van 100 db piros, illetve fekete golyó fele-fele arányban.

B. dobozban van 100 db piros, illetve fekete golyó ismeretlen arányban. Lehet, hogy 1 db piros golyó van, de az is lehet, hogy 99 db – nem tudhatjuk.

Tulajdonképpen két lottó közül kell választani: $L_1 = [100, 0.5; 0, 0.5]$ illetve $L_2 = [100, p; 0, 1-p]$.

1. kérdés. Húzzunk ki egy golyót valamelyik dobozból, és ha piros, akkor kapunk 100 dollárt, ha fekete, akkor viszont nem kapunk semmit. Melyik dobozból húznánk szívesebben?

A kísérleti személyek jobban preferálták az A dobozt, amelyben biztosan tudták, hogy van 50 db piros golyó. Míg a B dobozból való húzást nem részesítették előnyben, mert nem lehetett tudni, hogy ott mennyi a piros golyók száma.

2. kérdés. Húzzunk ki egy golyót valamelyik dobozból, és ha fekete, akkor kapunk 100 dollárt, ha piros, akkor viszont nem kapunk semmit. Melyik dobozból húznánk szívesebben?

Ebben az esetben is a kísérleti személyek jobban preferálták az A dobozt.

Elemezzük ki a feladatot és állapítsuk meg az ellentmondást.

Megoldás. Ebben a játékban a legkisebb nyerhető összeg a nulla, ennek hasznossága $u(0) = 0$, a legnagyobb összeg a 100, ennek hasznossága $u(100) = 1$. Az L_1, illetve L_2 várható hasznosságai: $EU(L_1) = 0.5u(100) + 0.5u(0) = 0.5$, illetve $EU(L_2) = pu(100) + (1-p)u(0) = p$.

Az első kérdés alapján azt kapjuk, hogy $L_1 \succ L_2$. Tehát a várható hasznosság elve alapján a kísérletben részt vevő személyek úgy ítélték, hogy $EU(L_1) > EU(L_2)$, vagyis $p < 0.5$. Ez azzal magyarázható, hogy az A dobozban biztosan tudták, hány darab piros golyó van, és csak a kockázatot kellett vállalniuk. A B doboz választása esetén nemcsak a húzás kockázatával, hanem a piros golyók számának bizonytalanságával is szembesültek. A „Járt utat járatlanért el ne hagyj”alapelv alapján, hogy a bizonytalanságot kiküszöböljék, a piros golyók számát a B dobozban alulértékelik.

A helyzet paradoxona ott van, ha a kísérletben részt vevő személyek következetesek lennének, akkor a 2. kérdésnél már abból indulnának ki, hogy az első kérdés alapján a $p < 0.5$, azaz a piros golyók száma a B dobozban kisebb, mint 50, ezért most már a B doboz választása lenne a logikus. A bizonyossági hatás torzítja a várható hasznossági elv alapján történő döntéshozatalt.

Ez a híres kísérlet jó magyarázatot ad arra, hogy miért kedvelik többen a biztonságos befektetéseket. Miért részesítik nagyon sokan előnyben az állampapírokat és a banki befektetéseket? Nagyon egyszerű! Mert az állampapírok és bankbetétek esetében a kedvező kimenetelek valószínűsége ismert. A részvénybefektetéseknél azonban a kedvező kimenetelek valószínűsége ismeretlen, így sokan nem szívesen választják. Inkább lemondanak a nagyobb hozam lehetőségéről, csak ne kelljen ismeretlen kimenetelű dolgot választani.

3. Elszigetelési hatás. A lottók közötti választás egyszerűsítése érdekében a döntéshozók gyakran eltekintenek azoktól az összetevőktől, amelyek minden lottóban megvannak, és azokra összpontosítanak, amelyek megkülönböztetik őket.

1.8. mintapélda (Kétfordulós játszma). A kísérletben részt vevő személyek az alábbi kérdésekre kellett válaszoljanak:

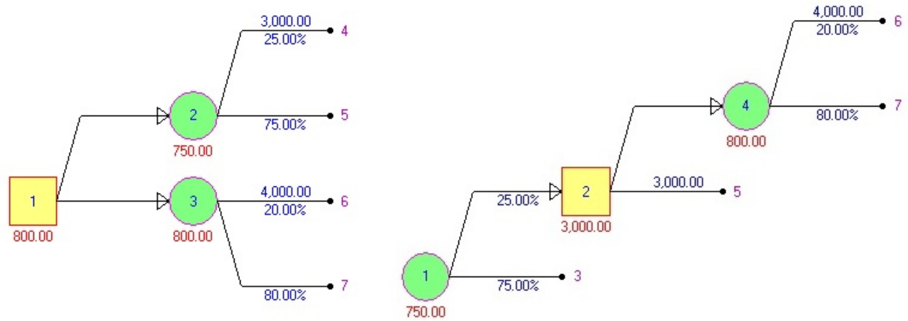
1. kérdés. Válassz az $L_1 = [4000, 0.2; 0, 0.8]$, illetve az $L_2 = [3000, 0.25; 0, 0.75]$ lottók közül.

2. kérdés. Egy kétfordulós játszmát játszanak. Az első fordulóban 0.75 a valószínűsége, hogy nyeremény nélkül fejezik be a játszmát, és 0.25 a valószínűsége, hogy eljutnak egy másik fordulóba. Ha eljutnak ebbe a szakaszba, választhatnak az $L_3 = [4000, 0.8; 0, 0.2]$ lottó, illetve az $L_4 = [3000, 1]$ biztos lottók közül.

Hogy az L_3 vagy L_4 közül melyiket választják, még azelőtt meg kell mondaniuk, hogy elkezdődne a játék, azaz mielőtt az első forduló következményét megtudnák.

Érdekes módon az első kérdésre a személyek nagy többsége az L_1-et, a második kérdésre pedig az L_4-et választották. Hol van az ellentmondás?

Megoldás. A második kérdésnél leírt játszmában $0.25 * 0.8 = 0.2$ valószínűséggel lehet nyerni 4000-et és 0.25 valószínűséggel 3000-et. Így tulajdonképpen választani kell az $L_1 = [4000, 0.2; 0, 0.8]$, illetve $L_2 = [3000, 0.25; 0, 0.75]$ lottók közül. Látható, hogy mégis éppen ellentétesen választottak. A döntés leírása két különböző módon történt (1.2. ábra): az eső kérdésre a válasz a *szokásos döntési fát használta, a másodikban pedig a sorozatos formát.* Az első esetben a döntéshozónak szokásos módon két független kockázatos kimenetel között kellett döntenie, a második esetben a döntéshozónak egy biztos, illetve egy kockázatos előrehozott döntést kell hoznia. Mivel a döntés csak a második forduló kimenetelére vonatkozik, a



1.2. ábra. Az 1.7. mintapélda döntési fái. Az első a szokásos forma, a második a sorozatos forma

döntéshozó a választás során nem figyel az első forduló kimenetelére. Úgy érzi, hogy ha a biztos 3000-et választja, akkor kisebb a nulla összeg bekövetkezésének az esélye. Így függőség teremtődött a kimenetelek között. Pontosabban a nem nyer 3000-et kimenetel bennefoglaltatik abban, hogy nem nyer 4000-et.

Az események függőségéből eredő preferenciamegváltozás megsérti a hasznosságelmélet azon következményét, hogy a döntéshozók választását a végső állapotok valószínűségei határozzák meg.

Több kritika érte a kilátáselméletet, mert nem felelt meg az elsőrendű sztochasztikus dominancia kritériumának. Utóbbi kiküszöbölésére Tversky és Kahneman 1992-ben kifejlesztették a kilátáselmélet újabb verzióját, a ***kumulált kilátáselméletet***. A szerzők kumulált súlyokat vezettek be az egyedi súlyok helyett a bizonytalan és biztos kilátásokra, a nyereségekhez és veszteségekhez pedig különböző súlyozási függvényeket kapcsoltak.

A kumulált kilátáselmélet a következő pontokban haladja meg a klasszikus kilátáselméletet:

– alkalmazható diszkrét és a folytonos eloszlású kilátásokra is;
– alkalmazható nemcsak a valószínűségi együtthatókkal mért kockázatos döntési helyzetekre, hanem az igen nehezen mérhető bizonytalan döntésekre is;
– ellentétben a klasszikus kilátáselmélettel, ez a modell már kielégíti a sztochasztikus dominancia követelményeit is.

A Kahneman–Tversky szerzőpáros kérdőíves vizsgálatok nyomán a következő függvényformákat illeszti a tapasztalati adatokra.

A ***kumulált értékfüggvény:***

$$u\left(r,w\right)=\begin{cases}\left(r-w\right)^{\alpha}, \text{ ha } r\geq w,\\ -\lambda\left(w-r\right)^{\beta}, \text{ ha } r<w,\end{cases} \tag{1.1}$$

ahol w a referenciaérték (referenciapont). A ***kumulált súlyfüggvény*** (1.3. ábra):

$$\omega^{+}\left(p\right)=\frac{p^{c}}{\left(p^{c}+\left(1-p\right)^{c}\right)^{1/c}},\ \omega^{-}\left(p\right)=\frac{p^{d}}{\left(p^{d}+\left(1-p\right)^{d}\right)^{1/d}} \tag{1.2}$$

Az $L=\left[r_1,p_1;r_2,p_2;...;r_n,p_n\right]$ ***kilátás hasznossága:***

$$U\left(L,w\right)=\sum_{i=1}^{n}\omega\left(p_i\right)u\left(r_i,w\right), \tag{1.3}$$

ahol $\omega\left(p_i\right)=\omega^{+}\left(p_i\right)$, ha $r_i\geq w$ és $\omega\left(p_i\right)=\omega^{-}\left(p_i\right)$, ha $r_i<w$. Az r_i az i alternatíva vagyonszintje, p_i az i alternatíva valószínűsége, amelynek torzult érzékelését az ω súlyfüggvény méri (1.3. ábra). Az értékfüggvény $\alpha,\beta,\lambda>0$, illetve a súlyfüggvény $c,d>0$ paramétereinek becsült értékei (továbbiakban *KT értékek*) Kahneman és Tversky 1992-ben publikált cikke alapján:

$$\alpha=\beta=0.88,\ \lambda=2.25,\ c=0.61,\ d=0.69.$$

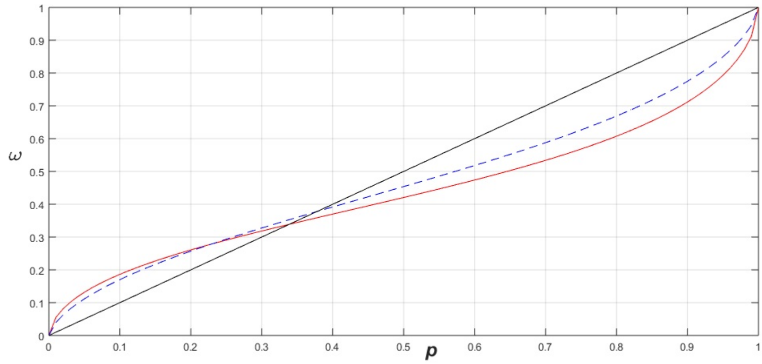
A felsorolt paraméterekre a továbbiakban mint ***KT paraméterekre*** hivatkozunk.

Az α és β paraméterek a kockázatelutasítás eltérő paraméterei a nyereséges és veszteséges szakaszokon, a λ a nyereség-veszteség aszimmetria paramétere, a c és d pedig a valószínűségi torzítás eltérő paraméterei a nyereséges és veszteséges szakaszokon.

A λ paraméter kiemelkedő jelentőségű, értéke úgy értelmezendő, hogy a döntéshozók átlagosan 2.25-ször nagyobb mértékben kerülik azt a veszteséget, mint amekkora haszontöbbletet jelentene számukra a veszteséggel egyenlő értékű nyereség.

A c és d paraméterek eltérő értékei az alábbi tapasztalati tényeket biztosítják:

- kockázatelutasító magatartás nagy valószínűségű nyereségek esetén;
- kockázatkereső magatartás nagy valószínűségű veszteségek esetén;
- kockázatkereső magatartás kis valószínűségű nyereségek esetén;
- kockázatelutasító magatartás kis valószínűségű veszteségek esetén.



1.3. ábra. Az ω^- és az ω^+ döntési súlyfüggvények KT paraméterekkel. Szaggatott vonal jelöli a ω^- függvényt, folytonos vonal pedig az ω^+ függvényt

A döntéshozó azt az L_k kilátást (cselekvésmódot) választja az L_1, $L_2, ..., L_m$ kilátások közül, amelyre

$$U\left(L_k\right) = \max_{i=1,m} U\left(L_i\right).$$

Érdemes megjegyezni, hogy további kutatások igyekeztek más függvényformákat is megadni a súlyfüggvényeknek. Az egyik legnépszerűbb függvényforma Prelec (1998) által definiált:

$$\omega\left(p\right) = e^{-(-\ln p)^r},$$

ahol $r > 0$ a regressziós paraméter, amely a kockázatelutasító magatartás mértékét méri. A Prelec-féle függvényforma kétségtelen előnye, hogy a Kahneman–Tversky döntési súlyfüggvény két paraméterét egyetlen paraméterrel (r) helyettesíti, miközben a modell illeszkedése a tapasztalati adatokra nem romlik.

A következő fejezetben a hulladéktároló mintapélda elemzését a kilátáselmélet szemszögéből is elvégezzük.

1.3. Játékelméleti feladatok elemzése a kilátáselmélet alapján

Játékelméleti problémák hagyományos elemzésénél hallgatólagosan azzal a hipotézissel élünk, hogy a játékosok a Neumann–Morgenstern preferenciarendezési axiómák alapján döntenek. Legtöbbször azt is feltételezzük, hogy kockázattal szemben semleges a magatartásuk. Az ilyen játékosokról szokták mondani, hogy racionálisan döntenek. Közgazdasági modellekben ezen döntéshozókat ökonoknak nevezik. Ha mi, emberek ebben az értemben racionálisak lennénk, akkor Richard Thaler szerint „úgy gondolkodnánk, mint Albert Einstein, akkora memóriánk lenne, mint az IBM Big Blue számítógépének, és olyan akaraterővel bírnánk, mint Mahatma Gandhi". De mi emberek vagyunk, és nem vagyunk ilyen racionális teremtmények. Befolyásolnak az érzelmeink és a környezetünk, a többi ember viselkedése, és figyelünk, hogy vajon mások mit is gondolnak rólunk.

Ebben a részben elemezzük, hogyan alakul a kétszemélyes, nem nulla összegű, nem kooperatív, két stratégiával rendelkező játékokban a kevert Nash-féle egyensúly, ha figyelembe vesszük a kilátáselméletben leírt tükrözési hatást. Vizsgáljuk a referenciaérték hatását a játék kimenetelére.

Az üzleti döntéseket modellező játékok általában nem konstans összegűek, hiszen meglehetősen ritka, hogy az üzleti versenytársak között teljes az érdekellentét. A legegyszerűbb játék az, amikor két játékos játszik úgy, hogy mindkettőjüknek csak két-két választási lehetősége van. A játék kifizetésmátrixa ebben az esetben az alábbi alakba írható:

I	**II**	
	1. stratégia	2. stratégia
1. stratégia	(a_1, b_1)	(a_2, b_2)
2. stratégia	(a_3, b_3)	(a_4, b_4)

A kétszemélyes, kétválasztásos, szimmetrikus játékoknak négy csapdatípusa a Fogolydilemma, Nemek harca, Vezérürü és Gyáva nyúl fantázianevű játékok. A játszmák nevüket azokról a (ma már klasszikusnak számító) példákról kapták, amelyeken keresztül a legtalálóbban lehet őket bemutatni.

A játékosok valamely (i^*, j^*) stratégia választása ***Nash-féle egyensúlypont***, ha semelyik játékos nem profitálhat abból, hogy egyoldalúan megváltoztatja a stratégiáját.

Ha a játékos a kimenetelek valószínűségeivel összhangban lévő stratégiát választ, akkor az ilyen stratégiát kevert stratégiának nevezzük. Jelölje:

– x_1 annak valószínűségét, hogy az I-es játékos az 1. stratégiát választja;
– x_2 annak valószínűségét, hogy az I-es játékos a 2. stratégiát választja;
– y_1 annak valószínűségét, hogy a II-es játékos az 1. stratégiát választja;
– y_2 annak valószínűségét, hogy a II-es játékos a 2. stratégiát választja.

Ha $x_1, x_2 \geq 0$ és $x_1 + x_2 = 1$, akkor (x_1, x_2) egy kevert stratégiája az I-es játékosnak. Hasonlóan, ha $y_1, y_2 \geq 0$ és $y_1 + y_2 = 1$, akkor (y_1, y_2) egy kevert stratégiája a II-es játékosnak.

Általában, a sorjátékos (I-es) számára az $(x_1, x_2, ..., x_m)$ ***kevert stratégia***, ha $x_1, x_2, ..., x_m \geq 0$ és $x_1 + x_2 + ... + x_m = 1$. Egy $(x_1, x_2, ..., x_m)$ kevert stratégia a sorjátékos számára ***tiszta stratégia*** lesz, ha valamelyik $x_i = 1$. Hasonlóan, az oszlopjátékos (II-es) számára az $(y_1, y_2, ..., y_n)$ ***kevert stratégia***, ha $y_1, y_2, ..., y_n \geq 0$ és $y_1 + y_2 + ... + y_n = 1$. Egy $(y_1, y_2, ..., y_n)$ kevert stratégia az oszlopjátékos számára ***tiszta stratégia*** lesz, ha valamelyik $y_j = 1$. A nem konstans összegű játékban nincs feltétlenül Nash-féle egyensúlypont a tiszta stratégiák között. John Forbes Nash (1928–2015) amerikai matematikus igazolta az alábbi tételt.

1.2. Tétel. *(Nash-féle egyensúlypont létezése) Bármely többszemélyes nem konstans összegű játékban van a játékosoknak tiszta vagy kevert stratégiahalmazán Nash-féle egyensúlypontja.*

1.9. mintapélda (Nemek harca játék). Egy fiatal pár reggel összeveszik az esti programon. A fiú focimeccsre (F), míg a lány színházba (Sz) szeretne menni. Reggel nincs idő a megbeszélésre, este későn végeznek a munkájukkal, és ekkor kell dönteni, ki hova menjen. Ahhoz, hogy ez játékelméleti probléma legyen, pontos preferenciával kell rendelkezniük: mindketten elsősorban együtt szeretnék tölteni az estét, és csak másodsorban az általuk preferált helyen. Mindkettőjük számára a legrosszabb lehetőség az, ha külön töltik az estét, méghozzá úgy, hogy a lány nézi a focimeccset és a fiú megy a színházba. Ezt a helyeztet SzF betűkombináció jelöli. Az FSz betűkombináció jelöli azt az enyhén jobb helyzetet, ha külön mennek el ugyan, de mind a ketten az általuk választott programra. A lány számára a legjobb helyzet az $SzSz$, ha mindketten színházba mennek, és kicsivel rosszabb az FF, ha mindketten meccsre mennek. A fiú számára a legjobb az FF helyzet, ha mindketten focimeccsre mennek, és kicsivel rosszabb az $SzSz$, ha mindketten színházba mennek.

a) Ha mindketten hasznosságelméleti szempontból racionálisan gondolkodnak és kockázattal szemben semleges a magatartásuk, határozzuk meg a játék Nash-féle egyensúlypontjait.

b) Ha mindketten hasznosságelméleti szempontból racionálisan gondolkodnak és kockázatelutasító a magatartásuk, határozzuk meg a játék Nash-féle egyensúlypontjait.

c) Ha mindkettőjüknél figyelembe vesszük a kilátáselméleti torzító hatásokat, határozzuk meg a játék Nash-féle egyensúlypontjait.

d) Ha mindkettőjüknél figyelembe vesszük a kilátáselméleti torzító hatásokat, határozzuk meg a játék referenciapont-egyensúlyát.

Megoldás. Ez egy nem zéró összegű játék. A játék kifizetési táblázata:

		Lány	
		Foci (F)	Színház (Sz)
Fiú	Foci (F)	(a_4, b_3)	(a_2, b_2)
	Színház (Sz)	(a_1, b_1)	(a_3, a_4)

A nemek harca játékban a kifizetési mátrixok elemei között fennáll az $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ és a $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$ sorrendiség. A tiszta Nash-egyensúly meghatározásához elégséges a preferencia-sorrend, de már a kevert Nash-egyensúlyok meghatározáshoz szükséges, hogy a kifizetések számszerűsítettek legyenek. Az egyik lehetőség az egyéni jutalmak meghatározására a 4. fejezetben bemutatásra kerülő hierarchikus elemző módszer (Analytic Hierarchy Process – AHP) alkalmazása. Az AHP módszer segítségével a játékosok meghatározzák, hogy az egyes jutalmak mekkora súllyal szerepelnek a saját döntéshozatali folyamatukban. Ennek érdekében minden játékos külön-külön párosával összehasonlítja az SzF, FSz, $SzSz$ és FF választási helyzetek egymáshoz viszonyított (a saját nézőpontjából tekintett) fontosságát. Az így kapott fontossági értékek alapján kiszámítja az egyes jutalmak súlyait és a következetességi mutatót. Ha ez utóbbi elfogadható, akkor a súlyok úgy is tekinthetők, mint az illető játékos kifizetéseinek számszerű értékei.

A nemek harca játéknak tiszta stratégiák választása esetén két Nash-féle egyensúlya van: (F, F) – mindketten focimeccsre mennek, illetve (Sz, Sz) – mindketten színházba mennek).

Kevert stratégia tanulmányozása esetén a játékosok csak az egyes stratégiák kiválasztásának valószínűségeit döntik el, és a véletlenre bízzák a tényleges követett stratégia kiválasztását. Esetünkben legyen $x_1 = x$ annak valószínűsége, hogy a fiú focimeccsre megy, és $x_2 = 1 - x$ annak valószínűsége, hogy a fiú színházba megy, valamint $y_1 = y$ annak valószínűsége, hogy a lány focimeccsre megy és $y_2 = 1 - y$ annak valószínűsége, hogy a lány színházba megy, ahol $x, y \in [0,1]$. A fiú játékos kevert stratégiája ekkor $(x, 1-x)$, a lány játékos kevert stratégiája pedig $(y, 1-y)$. Ezen kevert stratégiák esetén a játék együttes eloszlása:

$$P = \begin{bmatrix} xy & x(1-y) \\ (1-x)y & (1-x)(1-y) \end{bmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy a szereplők az AHP-módszer segítségével a jutalmak súlyainak az alábbi értékeket kapták:

$$a_4 = 0.6,\ a_3 = 0.242,\ a_2 = 0.115,\ a_1 = 0.043,$$
$$b_4 = 0.5,\ b_3 = 0.25,\ b_2 = 0.18,\ b_1 = 0.07.$$

Elképzelhető, hogy a szereplők már a játék előtt ismerik egymás páros összehasonlítási mátrixait. Így a játék teljes informáltsága megmarad. Észrevehető, hogy a súlyok összege 1. Ha tiszta stratégiát játszanak, akkor a megfelelő súly értékét nyerik el.

a) Ebben az esetben, a hasznosságelmélet alapján, a játékosok hasznossági függvényei lineárisak. A skálát úgy választjuk, hogy a legkisebb haszonnak 0, a legnagyobbnak pedig 1 feleljen meg. Ekkor az alábbi hasznossági függvényt kapjuk:

$$u_I(a_1) = 0,\ u_I(a_4) = 1,\ 0 < u_I(a_2) < u_I(a_3) < 1,$$
$$u_{II}(b_1) = 0,\ u_{II}(b_4) = 1,\ 0 < u_{II}(b_2) < u_{II}(b_3) < 1.$$

Mivel a szereplők kockázati magatartása semleges, az u_I és u_{II} függvények lineárisak.

$$u_I(r) = \frac{r - a_1}{a_4 - a_1} = \frac{r - 0.043}{0.557},$$
$$u_{II}(r) = \frac{r - b_1}{b_4 - b_1} = \frac{r - 0.07}{0.43}.$$

Ha a súlyokat megadó táblázatba bevezetjük a hasznosságokat, akkor megkapjuk a feladat hasznossági táblázatát:

		Lány	
		F	Sz
Fiú	F	$(1, u_{II}(b_3))$	$(u_I(a_1), u_{II}(b_1))$
	Sz	$(0,0)$	$(u_I(a_3), 1)$

Számszerűleg:

		Lány	
		F	Sz
Fiú	F	$(1, 0.419)$	$(0.129, 0.256)$
	Sz	$(0, 0)$	$(0.357, 1)$

A hasznossági táblázatban már számszerűsített kifizetések szerepelnek (hagyományos értelemben műveletek végezhetők velük), és hagyományos módon határozzuk meg az egyensúlyi pontokat. Mivel a hasznossági függvény növekvő, a tiszta Nash-egyensúlyok a hasznossági táblázat alapján is tiszta Nash-féle egyensúlypontok lesznek. A játékosok várható hasznát megadó függvények:

$$EU_I(x,y) = xy + u_I(a_2)\,x(1-y) + u_I(a_3)(1-x)(1-y),$$
$$EU_{II}(x,y) = u_{II}(b_3)\,xy + u_{II}(b_2)\,x(1-y) + (1-x)(1-y).$$

Két stratégiával rendelkező játékok esetén a kevert $(x^*, 1-x^*)$, illetve $(y^*, 1-y^*)$ Nash-féle egyensúlypont az alábbi egyenletrendszer (x^*, y^*) megoldásai alapján határozhatók meg:

$$\frac{\partial EU_I(x,y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial EU_{II}(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Azaz

$$x^* = \frac{1}{1 + u_{II}(b_3) - u_{II}(b_2)} = 0.86 \in (0,1),$$
$$y^* = 1 - \frac{1}{1 + u_I(a_3) - u_I(a_2)} = 0.186 \in (0,1),$$
$$EU_I(x^*, y^*) = 0.291, \ EU_{II}(x^*, y^*) = 0.36,$$
$$\ddot{O}sszhaszon(x^*, y^*) = EU_I(x^*, y^*) + EU_{II}(x^*, y^*) = 0.651,$$
$$r_I^* = (a_4 - a_1)\,EU_I(x^*, y^*) + a_1 = 0.205 \in (a_2, a_3),$$
$$r_{II}^* = (b_4 - b_1)\,EU_{II}(x^*, y^*) + b_1 = 0.195 \in (b_2, b_3).$$

Az r_I^* és r_{II}^* értékek azt mutatják, hogy Nash-egyensúly esetén az $EU_I(x^*, y^*)$ és $EU_{II}(x^*, y^*)$ várható hasznokhoz mekkora súlyok rendelődnek hozzá, másképpen fogalmazva az $EU_I(x^*, y^*)$ és $EU_{II}(x^*, y^*)$ hasznok mekkora kifizetést eredményeznek. Képletüket a hasznossági függvények inverzei adják meg. Az r_I^* és r_{II}^* értékei alapján kijelenthető, hogy hosszú távon, többszöri lejátszás után, az egyensúly valahol az (a_2, a_3), illetve (b_2, b_3) jutalmak között valósul meg.

A megoldásból látszik, hogy a kevert stratégiában a valószínűségek tulajdonképpen attól függnek, hogy a játékosok mekkora szubjektív hasznosságbeli különbséget érzékelnek az együttlét, illetve a helyszínek között. Látható, ha valóban számukra fontosabb az együttlét ($a_2 < a_3$, $b_2 < b_3$), akkor van kevert Nash-egyensúly. Ha számukra az együttlét és a helyszín egyformán fontos ($a_2 = a_3$, $b_2 = b_3$), akkor $x = 1$ és $y = 0$. A fiú megy focimeccsre, a lány pedig színházba. Érdekes az az eset is, amikor mondjuk csak a fiúnak egyformán fontos a helyszín és az együttlét ($a_2 = a_3$, $b_2 < b_3$), akkor $y = 0$ és $x \in (0,1)$, de ekkor a fiú focimeccs-stratégiája dominálja a színház-stratégiát, tehát a fiú meccsre megy. A lány egyértelműen színházba megy. Ez már nem csapdahelyzet. Következésképpen a játékban lényeges tényező, hogy a szereplők nagyobbra értékeljék az együttlétet, mint a helyszínt.

b) A nemek harca játékban a kockázatelutasító magatartás tulajdonképpen azt tükrözi, hogy a szereplők inkább lemondanak a számukra kedvezőbb helyszínről csak azért, hogy együtt lehessenek. Ekkor a hasznossági függvényeik konkávak és hatványfüggvény formájában becsülhetők:

$$u_I(r) = \left(\frac{r - a_1}{a_4 - a_1}\right)^{\alpha} = \left(\frac{r - 0.043}{0.557}\right)^{\alpha}, \ \alpha \in (0,1)$$

$$\text{és } u_{II}(r) = \left(\frac{r - b_1}{b_4 - b_1}\right)^{\beta} = \left(\frac{r - 0.07}{0.43}\right)^{\beta}, \ \beta \in (0,1)$$

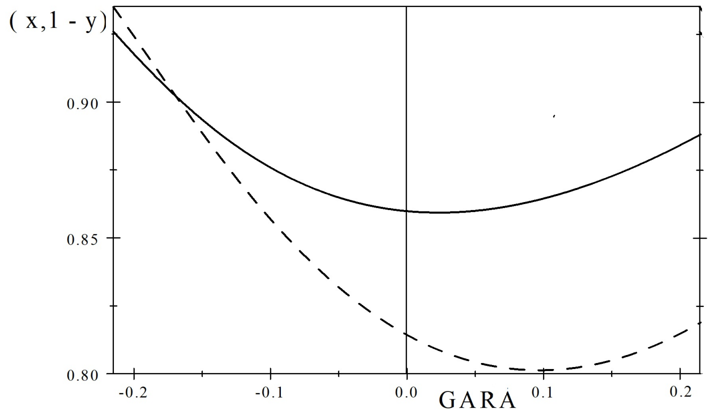
Mivel a hasznossági függvények növekvőek, ezért a tiszta Nash-egyensúlyok ugyanazok, mint az előző pontban. A kevert Nash-féle egyensúlypontot is hasonlóan számoljuk ki, ahol:

$$x^* = \frac{1}{1 + u_{II}(b_3) - u_{II}(b_2)} = \frac{1}{1 + (0.419)^{\beta} - (0.256)^{\beta}}$$

$$y^* = \frac{u_I(\bar{3}) - u_I(\bar{1})}{1 + u_I(a_3) - u_I(a_2)} = 1 - \frac{1}{1 + (0.357)^{\alpha} - (0.129)^{\alpha}}.$$

Példaként vegyük a nyereségre vonatkozó $\alpha = \beta = 0.88$ KT paramétereket. Ekkor

$$\begin{aligned} x^* = 0.859,\ y^* &= 0.193, \\ EU_I(x^*, y^*) = 0.606,\ EU_{II}(x^*, y^*) &= 0.4, \\ Összhaszon(x^*, y^*) = EU_I(x^*, y^*) + EU_{II}(x^*, y^*) &= 1.06, \\ r_I^* = (a_4 - a_1)\left[EU_I(x^*, y^*)\right]^{1/\alpha} + a_1 &= 0.358 \in (a_3, a_4), \\ r_{II}^* = (b_4 - b_1)\left[EU_{II}(x^*, y^*)\right]^{1/\beta} + b_1 &= 0.222 \in (b_2, b_3). \end{aligned}$$



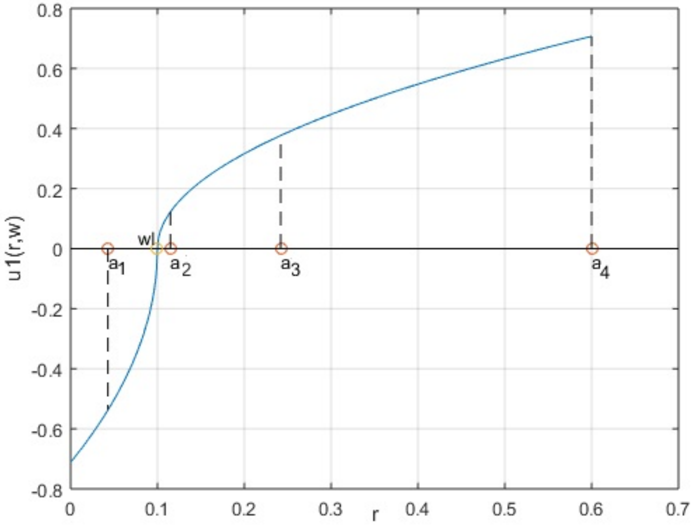
1.4. ábra. Az x^* (folytonos vonal) és $1 - y^*$ (szagatott vonal) Nash-egyensúlyok függése a globális kockázatelutasító magatartástól

A Nash-egyensúlyhoz tartozó kevert stratégia alkalmazása esetén a várható haszonhoz tartozó r_I^* és r_{II}^* értékek azt mutatják, hogy hosszú távon, többszöri lejátszás után az egyensúly a fiú játékosnál valahol az (a_3, a_4) jutalmak között, míg a lány játékosnál valahol a (b_2, b_3) jutalmak között valósul meg. Ez azzal magyarázható, hogy a fiú játékosnál az a_4/a_3 arány nagyobb, mint a lány játékosnál a b_4/b_3.

A játékosok globális kockázatelutasító mutatói:

$$GARA\,(fi\acute{u}) = \frac{1}{1+\alpha} - \frac{1}{2},$$
$$GARA\,(l\acute{a}ny) = \frac{1}{1+\beta} - \frac{1}{2}.$$

Egy bizonyos kis értéktől kezdődően, ha a $GARA\,(lány)$ nő, akkor az x^* is nő (lásd az 1.4. ábrát). Azaz ha a lány a játékkal kapcsolatos kockázatelutasító magatartása erősödik, akkor a fiú is nagyobb valószínűséggel fogja választani a focimeccsre megy stratégiát. Ha pedig a lány a játékkal kapcsolatos kockázatelutasító magatartása gyengül, akkor a fiú is kisebb valószínűséggel választja a focimeccs-stratégiát. Ez pontosan azt mutatja, ha a lánynak az együtt legyünk magatartás egyre fontosabbá válik, akkor egyre kevesebb kockázatot vállal azzal, hogy esetleg színházba megy. Ha ezt



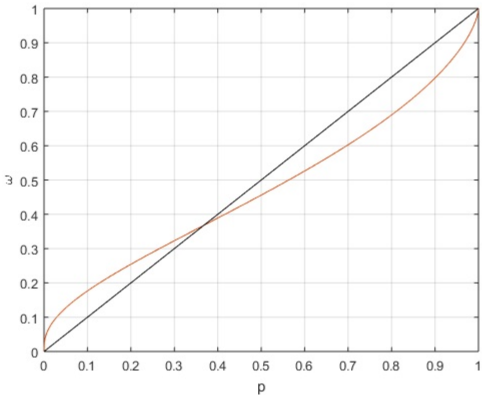
1.5. ábra. A fiú játékos értékfüggvénye

a fiú is megérzi, de az ő kockázatelutasító magatartása állandó, akkor természetes, hogy inkább a focimeccsre megy stratégiát fogja választani. A grafikon másik ága hasonló magatartást mutat a kockázatkereső magatartásra vonatkozóan. Mind a két esetben az x^* és $1-y^*$ minimális értéke a GARA nulla körüli értéke körül van.

Határesetben, ha $GARA\,(fiú) = GARA\,(lány) = 0$, akkor $\alpha = \beta = 1$, és visszakapjuk az előző alpont kevert Nash-féle egyensúlypontját.

c) Az előző alpontokban feltételeztük, hogy a szereplők a játékot csak nyereségként élik meg. Referenciapontjuk az a helyzet, amikor a fiú színházba megy, a lány pedig focimeccsre. Ennek a hasznossága nulla. Minden más helyzetet nyereségként élnek meg. A kilátáselmélet középpontjában az áll, hogy az értékfüggvény megtörik, és a töréspont képezi a referenciapontot, amely elválasztja egymástól a nyereséget és a veszteséget, egymáshoz viszonyítva aszimmetrikus részekre.

A nemek harca játékban a szereplő veszteségként éli meg, méltánytalanak tartja, ha párja kedvében akar járni, de az elutasítja őt. Ez az a helyzet, amikor a fiú elmegy színházba, a lány pedig focimeccsre. Ezért tekinthetjük referenciaértéknek a $w_I \in (0.043, 0.115]$, $w_{II} \in (0.07, 0.18]$ jutalmakat.



1.6. ábra. A Prelec-féle súlyfüggvény grafikonja

A kumulált kilátáselmélet alapján a játékosok értékfüggvényei (lásd 1.5. ábrát):

$$u_I(r, w_I) = \begin{cases} (r - w_I)^{\alpha}, \text{ ha } r \geq w_I, \\ -\lambda (w_I - r)^{\beta}, \text{ ha } r < w_I, \end{cases}$$

$$u_{II}(r, w_{II}) = \begin{cases} (r - w_{II})^{\mu}, \text{ ha } r \geq w_{II}, \\ -\lambda (w_{II} - r)^{\nu}, \text{ ha } r < w_{II}, \end{cases}$$

ahol w_I és w_{II} a játékosok referenciaértékei (referenciapontjai). Ez alapján a hasznossági táblázat:

Fiú	Lány	
	F	Sz
F	$\left((a_4 - w_I)^{\alpha}, (b_3 - w_{II})^{\mu}\right)$	$\left((a_2 - w_I)^{\alpha}, (b_2 - w_{II})^{\mu}\right)$
Sz	$\left(-\lambda_I (w_I - a_1)^{\beta}, -\lambda_{II} (w_{II} - b_1)^{\nu}\right)$	$\left((a_3 - w_I)^{\alpha}, (b_4 - w_{II})^{\mu}\right)$

A kumulált súlyfüggvénynek a Prelec (1998) által megadott függvényt tekintjük (1.6. ábra):

$$\omega_I(p) = e^{-(-\ln p)^{r_I}}, \;\; \omega_{II}(p) = e^{-(-\ln p)^{r_{II}}}.$$

A Nash-egyensúlypont együttes eloszlása:

$$P = \begin{bmatrix} xy & x(1-y) \\ (1-x)y & (1-x)(1-y) \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$\omega_I(P) = \begin{bmatrix} e^{-(-\ln(xy))^{r_I}} & e^{-(-\ln(x(1-y)))^{r_I}} \\ e^{-(-\ln((1-x)y))^{r_I}} & e^{-(-\ln((1-x)(1-y)))^{r_I}} \end{bmatrix},$$

$$\omega_{II}(P) = \begin{bmatrix} e^{-(-\ln(xy))^{r_{II}}} & e^{-(-\ln(x(1-y)))^{r_{II}}} \\ e^{-(-\ln((1-x)y))^{r_{II}}} & e^{-(-\ln((1-x)(1-y)))^{r_{II}}} \end{bmatrix}.$$

A kumulált kilátáselmélet alapján a játékosok hasznossági függvényei:

$$\begin{aligned} U_I(x,y,w) &= e^{-(-\ln(xy))^{r_I}} (a_4 - w_I)^\alpha \\ &+ e^{-(-\ln(x(1-y)))^{r_I}} (a_2 - w_I)^\alpha \\ &- \lambda_I e^{-(-\ln((1-x)y))^{r_I}} (w_I - a_1)^\beta \\ &+ e^{-(-\ln((1-x)(1-y)))^{r_I}} (a_3 - w_I)^\alpha ; \\ U_{II}(x,y,w) &= e^{-(-\ln(xy))^{r_{II}}} (b_3 - w_{II})^\mu \\ &+ e^{-(-\ln(x(1-y)))^{r_{II}}} (b_2 - w_{II})^\mu \\ &- \lambda_{II} e^{-(-\ln((1-x)y))^{r_{II}}} (w_{II} - b_1)^\nu \\ &+ e^{-(-\ln((1-x)(1-y)))^{r_{II}}} (b_4 - w_{II})^\mu . \end{aligned}$$

Az U_I és U_{II} hasznossági függvények x és y szerinti parciális deriváltjaiból kapott egyenletrendszer

$$\begin{cases} \begin{array}{c} \frac{1}{x}(-\ln xy)^{r_I-1}(a_4 - w_I)^\alpha \\ +\frac{1}{x}(-\ln(x(1-y)))^{r_I-1}(a_2 - w_I)^\alpha \\ = \frac{1}{1-x}(-\ln(1-x)(1-y))^{r_I-1}(a_3 - w_I)^\alpha \\ -\lambda_I \frac{1}{1-x}(-\ln(y(1-x)))^{r_I-1}(w_I - a_1)^\beta , \\ \\ \frac{1}{1-y}(-\ln(x(1-y)))^{r_{II}-1}(b_2 - w_{II})^\mu \\ +\frac{1}{1-y}(-\ln(1-x)(1-y))^{r_{II}-1}(b_4 - w_{II})^\mu \\ = \frac{1}{y}(-\ln xy)^{r_{II}-1}(b_3 - w_{II})^\mu \\ -\lambda_{II}\frac{1}{y}(-\ln(y(1-x)))^{r_{II}-1}(w_{II} - b_1)^\nu . \end{array} \end{cases}$$

Abban a sajátos helyzetben, amikor a KT paramétereket használjuk: $\lambda_I = \lambda_{II} = 2.25$, $\alpha = \beta = \mu = \nu = 0.88$, $r_I = r_{II} = 0.66$, $w_I = w_{II} = 0.1$, az alábbi egyenletrendszer (x^*, y^*) megoldásai segítségével adhatók meg a kevert a Nash-egyensúlypontok:

$$\begin{cases} (1-x)\left[\frac{0.548}{(-\ln xy)^{1/2}}+\frac{0.017}{(-\ln(x(1-y)))^{1/2}}\right] \\ = x\left[\frac{0.174}{(-\ln(1-x)(1-y))^{1/2}}-2.25\frac{0.087}{(-\ln(y(1-x)))^{1/2}}\right], \\ \\ y\left[\frac{0.377}{(-\ln(1-x)(1-y))^{1/2}}+\frac{0.3}{(-\ln(1-x)(1-y))^{1/2}}\right] \\ = (1-y)\left[\frac{0.108}{(-\ln xy)^{1/2}}-2.25\frac{0.132}{(-\ln(y(1-x)))^{1/2}}\right]. \end{cases}$$

Numerikus elemzéssel kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} x^* &= 0.978,\ y^* = 0.175, \\ U_I\left(0.01\right) &= 0.151, U_{II}\left(0.01\right) = 0.152, \\ \ddot{O}sszhaszon &= 0.3021, \\ r_I^* &= \left[U_I\left(x^*, y^*\right)\right]^{1/\alpha} + w_I = 0.2164 \in \left(a_2, a_3\right), \\ r_{II}^* &= \left[U_{II}\left(x^*, y^*\right)\right]^{1/\beta} + w_{II} = 0.2164 \in \left(b_2, b_3\right). \end{aligned}$$

A Nash-egyensúlyhoz tartozó kevert stratégia alkalmazása esetén a várható haszonhoz tartozó r_I^* és r_{II}^* súlyok azt mutatják, hogy hosszú távon, többszöri lejátszás után, az egyensúly valahol az (a_2, a_3), illetve (b_2, b_3) intervallumokban valósul meg.

A játék Nash-egyensúlya együttes eloszlás formájában:

$$P^* = \left[\begin{array}{cc} 0.171 & 0.806 \\ 0.004 & 0.018 \end{array}\right].$$

A szereplők egyensúlyi helyetben az egyes események bekövetkezéséhez az alábbi súlyokat rendelik:

$$\omega_I\left(P\right) = \omega_{II}\left(P\right) = \left[\begin{array}{cc} 0.233 & 0.696 \\ 0.045 & 0.082 \end{array}\right].$$

Látható, hogy a szereplők a kis valószínűségeket felülértékelik, a nagy valószínűségeket pedig leértékelik.

d) A neurogazdaságtan keretében vizsgálták, hogy különböző játékhelyzetekben a méltánytalanság és az önző racionalitás hogyan kerül konfliktusba a döntéshozó fejében. Arra a következtetésre jutottak, hogy méltánytalanság esetén az agy egyik területe azért küzd, hogy feloldja a konfliktust a várható jutalom és a méltánytalan bánásmód okozta undor (inszulta) között. Ezt a helyzetet próbálja modellezni a referenciapont-egyensúly.

Azt a stratégiát, amelyre a játékosok minden lehetséges tiszta stratégiájára a várható haszon (veszteségkerülési hatás figyelembevételével) megegyezik a referenciaértékkel, és semelyik játékos nem profitálhat abból, hogy egyoldalúan megváltoztatja ezt a referenciaértékét, ***referenciapont-egyensúlynak*** nevezzük.

A referenciapont-egyensúlyt abban az esetben vizsgáljuk, ha súlyfüggvényekben az $r_I = r_{II} = 1$. Ekkor egy L lottó hasznossági függvénye:

$$U(L, w) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(r_i, w). \tag{1.4}$$

A kilátáselméleten belül ezt az esetet ***egyszerűsített kilátáselméletnek*** nevezik. Ebben az esetben a játékosok hasznossági függvényei:

$$\begin{aligned} U_I(x, y, w) &= xy(a_4 - w_I)^{\alpha} + x(1-y)(a_2 - w_I)^{\alpha} \qquad (1.5)\\ &- \lambda(1-x)y(w_I - a_1)^{\beta}\\ &+ (1-x)(1-y)(a_3 - w_I)^{\alpha}. \qquad (1.6)\\ U_{II}(x, y, w) &= xy(b_3 - w_{II})^{\mu} + x(1-y)(b_2 - w_{II})^{\mu}\\ &- \lambda_{II}(1-x)y(w_{II} - b_1)^{\nu}\\ &+ (1-x)(1-y)(b_4 - w_{II})^{\mu}. \qquad (1.7) \end{aligned}$$

A feladatban a fiú játékosra vonatkozó referenciapont $w_I \in [a_1, a_2]$. A $\bar{w}_I$ kiszámításához meg kell oldani az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} yu_I(a_4, w_I) + (1-y)u_I(a_2, w_I) = w_I,\\ yu_I(a_1, w_I) + (1-y)u_I(a_3, w_I) = w_I. \end{cases}$$

A rendszer felírható az alábbi alakban:

$$\begin{cases} y(u_I(a_4, w_I) - u_I(a_2, w_I)) = w_I - u_I(a_2, w_I),\\ y(u_I(a_1, w_I) - u_I(a_3, w_I)) = w_I - u_I(a_3, w_I). \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megfelelő oldalait egymásból kivonva és az y változót kifejezve kapjuk:

$$y = \frac{u_I(a_3, w_I) - u_I(a_2, w_I)}{u_I(a_3, w_I) - u_I(a_2, w_I) + u_I(a_4, w_I) - u_I(a_1, w_I)}.$$

Ez az összefüggés éppen azt mutatja meg, hogy $(y, 1-y)$ Nash-egyensúlya annak a játéknak, amelyben az I. játékos referenciapontja éppen a w_I.

Következésképpen *az* $(\bar{x}, 1-\bar{x})$, *illetve* $(\bar{y}, 1-\bar{y})$ *akkor és csakis akkor referenciapont-egyensúly, ha* $(\bar{x}, 1-\bar{x})$, *illetve* $(\bar{y}, 1-\bar{y})$ *kevert Nash-egyensúlya annak a játéknak, amelyben a referenciapont éppen a* $\bar{w}_I$ *és a* $\bar{w}_{II}$.

Egy adott $L = [r_1, p_1; r_2, p_2; ...; r_n, p_n]$ kilátás esetén azt mondjuk, hogy a ***referenciaérték konzisztens*** az L-lel, ha L hasznossága egyenlő a referenciaértékkel. Másképpen fogalmazva, a referenciaérték egyenlő az L kilátás bizonyossági egyenértékével, ha az L hasznosságát az 1.4. képlettel adjuk meg.

A fiú játékosnak tulajdonképpen két kilátás között kell választania: $L_1 = [a_4, y; a_2, 1-y]$, illetve $L_2 = [a_1, y; a_3, 1-y]$. A játékos úgy próbálja meghatározni a saját referenciapontját, hogy mind az L_1-nek, mind az L_2-nek a bizonyossági egyenértéke éppen w_I legyen, amikor a hasznossági függvények a 1.5. képletekkel vannak megadva. A Kakutani fixpont tétel segítségével igazolni lehet, hogy minden játéknak van referenciapont-egyensúlya.

1.3. Tétel. *(Shalev, 2010) Minden n személyes, nem kooperatív, teljes információs játéknak van referenciapont-egyensúlya.*

Feladatunk meghatározni a referenciapont-egyensúlyokat. Ennek érdekében a fiú játékos számára az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{cases} y\left(a_4 - w_I\right)^{\alpha} + (1-y)\left(a_2 - w_I\right)^{\alpha} = w_I, \\ -\lambda_I y\left(w_I - a_1\right)^{\beta} + (1-y)\left(a_3 - w_I\right)^{\alpha} = w_I. \end{cases}$$

Azaz

$$\begin{cases} y\left(0.6 - w_I\right)^{0.88} + (1-y)\left(0.115 - w_I\right)^{0.88} = w_I, \\ -2.25y\left(w_I - 0.043\right)^{0.88} + (1-y)\left(0.242 - w_I\right)^{0.88} = w_I. \end{cases}$$

A rendszer megoldása:

$$\bar{w}_I = 0.107 \in \left(a_1, a_2\right), \ \bar{y} = 0.176.$$

A lány játékos esetén is hasonlóan járunk el:

$$\begin{cases} x\left(b_3 - w_{II}\right)^{\mu} - \lambda_{II}\left(1-x\right)\left(w_{II} - b_1\right)^{\nu} = w_{II}, \\ x\left(b_2 - w_{II}\right)^{\mu} + (1-x)\left(b_4 - w_{II}\right)^{\mu} = w_{II}. \end{cases}$$

Azaz

$$\begin{cases} x\left(0.25 - w_{II}\right)^{0.88} - 2.25\left(1-x\right)\left(w_{II} - 0.07\right)^{0.88} = w_{II}, \\ x\left(0.18 - w_{II}\right)^{0.88} + (1-x)\left(0.5 - w_{II}\right)^{0.88} = w_{II}. \end{cases}$$

A rendszer megoldása:

$$\bar{w}_{II} = 0.123 \in (b_1, b_2)\,, \; \bar{x} = 0.877.$$

Ezen optimális $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$ referenciapontokra a játék Nash-féle egyensúlypontja $(\bar{x}, 1-\bar{x})$, illetve $(\bar{y}, 1-\bar{y})$, és

$$\begin{aligned}
&U_I(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}_I) = 0.106, U_{II}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}_{II}) = 0.122,\\
&\ddot{O}szhasszon = 0.228,\\
&\qquad\qquad r_I^* = \left[U_I(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}_I)\right]^{1/\alpha} + w_I = 0.185 \in (a_2, a_3)\,,\\
&\qquad\qquad r_{II}^* = \left[U_{II}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}_{II})\right]^{1/\beta} + w_{II} = 0.215 \in (b_2, b_3)\,.
\end{aligned}$$

A referenciapont-egyensúlynak megfelelő kevert stratégia alkalmazása esetén a haszonhoz tartozó r_I^* és r_{II}^* súlyok azt mutatják, hogy hosszú távon, többszöri lejátszás után, az egyensúly valahol az a_2, a_3, illetve b_2, b_3 jutalmak között valósul meg.

A feladat eredményeit az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

	Nash-egyens.		Nash-súlyok		Haszon		
Kockázat	x^*	y^*	r_I^*	r_{II}^*	U_I	U_{II}	$\ddot{O}sszh.$
Semleges	0.86	0.186	0.205	0.195	0.291	0.36	0.651
Elutasító	0.859	0.193	0.358	0.222	0.606	0.4	1.06
Veszteségker.	0.978	0.175	0.216	0.216	0.151	0.152	0.302
Ref.pont.e.	0.877	0.176	0.185	0.215	0.106	0.123	0.228
Tiszta Nash I.	1	0	0.6	0.25	1	0.419	1.419
Tiszta Nash II.	0	1	0.242	0.5	0.357	1	1.357

1.4. Kitűzött feladatok

1. Egy közszállítási vállalat szeretné bővíteni kapacitását. Erre három lehetőséget látnak, de csak az egyiket tudják kivitelezni: autóbuszainak felújítását (x_1), új autóbuszok beszerzését (x_2) és autóbuszok bérlését (x_3). Egy előzetes piaci felmérés alapján úgy becsülik, hogy az egyes lehetőségeknek négy kimenetele lehetséges azonos valószínűséggel: nagy lesz a kereslet (s_1), közepes a kereslet (s_2), kis kereslet

(s_3), teljes csőd (s_4). Az alábbi táblázat a napi becsült nyereségnövekedéseket mutatja euróban kifejezve:

	s_1	s_2	s_3	s_4
x_1	300	200	-100	-400
x_2	600	300	-300	-500
x_3	200	150	-50	-200

A felsorolt döntési kritériumokat használva határozzuk meg a vállalat legnagyobb nyereségnövekedését biztosító tervet.

2. Egy befektető egy szállodát szeretne építeni egy nagyon jelentős forgalommal rendelkező turistaútvonalon. Megvásárol egy 50 ár nagyságú telket, és azt szeretné eldönteni, hogy mekkora szállodát építsen: 20, 30, 40 vagy 50 szobást? Előzetes becslések alapján úgy gondolja, hogy 40% valószínűséggel a 30 szoba kihasználtsága lenne a legmegfelelőbb, a többi lehetőségre 20% valószínűséget jósol. Elemi számítással a következő eredményre jut:
   – a szobák számától függetlenül az éves fix fenntartási költség: 2500 euró;
   – a szobák számától függően a változó fenntartási költségek: 20 szoba esetén 9500 euró, 30 szoba esetén 14 000 euró, 40 szoba esetén 20 000 euró és 50 szoba esetén pedig 23 000 euró;
   – a szobák kihasználtságától függő fenntartási költségek: 0 szoba esetén 0, 10 szoba esetén 3000 euró, 20 szoba estén 5500 euró, 30 szoba esetén 8000 euró, 40 szoba esetén 10 000 euró és 50 szoba esetén 11 000 euró;
   – egy szoba ára napi 60 euró, így éves bevételei (évi 300 nappal számítva): 0 szoba esetén 0, 10 szoba esetén 18 000 euró, 20 szoba esetén 36 000 euró, 30 szoba esetén 54 000 euró, 40 szoba esetén 72 000 euró és 50 szoba esetén 90 000 euró.

   A felsorolt döntési kritériumokat használva határozzuk meg a befektető legnagyobb nyereségét biztosító tervét.
3. Egy kenyérsütöde egy kilogramm kenyeret 10 pénzegységért árul. Egy adott napon megmaradt kenyereket másnap 5 pénzegységért lehet eladni, de már a rákövetkező napon nem adhatók el a megmaradt kenyerek. Egy kilogramm kenyér előállítási költsége 6 pénzegység. A napi eladott kenyérmennyiség véletlenszerűen változik. Az alábbi

táblázat az eladott kenyerek számának gyakorisági eloszlását mutatja:

Kereslet	Napok száma
1000–1200	24
1200–1400	21
1400–1600	58
1600–1800	80
1800–2000	28
2000–2200	24
2200–2400	15
Összesen	250 nap

A felsorolt döntési kritériumokat használva határozzuk meg a kenyérsütöde legnagyobb nyereségét biztosító tervét.

4. Egy lemezkiadó olyan zenei cd-ket állít elő, amelyeket postai úton juttatnak el a közönségnek. Méretgazdaságossági és ütemezési problémák miatt a lemezkiadó üzletpolitikája az, hogy egy adott hanganyagból legyártani szánt példányokat egyetlen termelési ütem alatt állítják elő. Ha a piaci kereslet nagyobb, mint a legyártott mennyiség, akkor a vevők (akik megrendelték, de nem jutott cd) egy 50 lejes kupont kapnak, amelyet a vevő bármelyik más cd megvásárlásakor felhasználhat. Ha a legyártott mennyiség meghaladja a piaci keresletet, akkor a fennmaradó cd-ket 50 lejért adják el egy áruháznak. Egy cd előállítási költsége 50 lej.

   A lemezkiadó egy újonnan kötött megállapodás értelmében most fizetett 100 000 lejes jogdíjat egy adott hanganyagért, amelyről készült cd-t 100 lejes áron kíván értékesíteni. A piackutató részlegük előrejelzése szerint az alábbi piaci keresleti szintek fordulhatnak elő: 2000, 4000, 6000, és 8000 db. Korábbi tapasztalatok alapján az egyes keresleti szintek 0.1; 0.3; 0.4, illetve 0.2 valószínűséggel következhetnek be.

   A felsorolt döntési kritériumokat használva határozzuk meg, hány darabot gyártson a cd-kből.

5. Kedvező feltételek esetén egy kockázatos részvény háromszorosan megtérül, közepesen kedvező feltételek esetén megduplázódik, ha pedig rosszul alakulnak a dolgok, akkor teljes egészében elveszítődik a befektetett V összeg. E három állapot valószínűségei sorra: 0.2; 0.5; 0.3. A várható megtérülés egy kicsit kedvezőbb, mint ha kockázatmentes értékpapírba fektet, amelynek megtérülése másfélszeres. A V összegből mennyit kellene e kockázatos részvénybe és mennyit

kockázatmentes értékpapírban tartania, ha a hasznossági függvény $u(r) = \ln(r + V)$, és mindkét befektetés egységára 1.

6. A második világháború alatt Wald Ábrahám (1902–1950, kolozsvári születésű matematikus) az AEÁ Statisztikai Kutatócsoport (SKCS) nevű különleges program keretében dolgozott. Az SKCS egyik feladata az volt, hogy megtalálják azt a részt a repülőgépen, ahová a legtöbb páncélzatot kell felszerelni, amivel megakadályozhatják, hogy az ellenség lelője az amerikai repülőgépeket. Amikor az amerikai gépek visszatérnek az európai bevetésekből, televannak golyó ütötte lyukakkal. Ezek azonban nem egyformán oszlanak el a gép felületén. A törzsön több lyuk van, a hajtóműnél kevesebb. Ezzel kapcsolatosan a katonaság átadott néhány hasznosnak vélt adatot az SKCS-nek:

Repülőgép részei	Golyónyomok négyzetlábanként
Hajtómű	1.1
Törzs	1.73
Üzemanyagrendszer	1.55
A gép többi része	1.8

Wald megvizsgálta a táblázatban megadott adatokat, és azonnal meg is adta a helyes választ. Szerinted mit javasolt, a repülőgép melyik részére kell szerelni a páncélzatot?

7. Valakinek az egyéni hasznossági függvénye az $S = [0, 1\,000]$ intervallumban
$$u(r) = \left(\frac{r}{1\,000}\right)^{1/2}.$$
   a) Felajánlják neki, hogy választhat az $L_1 = [800, 0.2; 400, 0.6; 150, 0.2]$ kockázatos és az $L_2 = [300, 1]$ biztos nyereményt adó lottók közül. Melyiket fogja választani? Határozzuk meg az L_1 lottó bizonyossági egyenértékét és kockázati prémiumát.
   b) Jelöljük w-vel a döntéshozó referenciaértékét. Határozd meg azt a w értéket, amely konzisztens az L_1 lottóval.
   c) Ha te lennél ebben a helyzetben, melyik lottót választanád? Határozd meg a saját bizonyossági egyenértékedet és kockázati prémiumodat az L_1 lottóval szemben.

8. Egy egyénnek felajánlják, hogy választhat az $L_1 = [600, 0.1; 300, 0.7; 100, 0.2]$, illetve az $L_2 = [450, 0.5; 350, 0.5]$ lottók közül. Az illető úgy gondolja, hogy az $L = [r_1, p_1; r_2, p_2; ...; r_n, p_n]$

lottó hasznosságát az

$$U(L) = (1 + r_1)^{p_1} (1 + r2)^{p_2} \ldots (1 + r_n)^{p_n}$$

függvénnyel lehet kiszámolni.

a) Az illető melyik lottót fogja választani?

b) A szóban forgó személy preferenciarendezése teljesíti-e a Neumann–Morgenstern-féle axiómákat?

c) Határozzuk meg az L_1 és L_2 lottók bizonyossági egyenértékeit és kockázati prémiumait.

d) Milyen a kockázati magatartása az illetőnek?

9. Az alábbi egyéni hasznossági függvények milyen kockázati magatartásnak feleltethetők meg:

$$u(r) = \ln r;\ u(r) = \frac{r-10}{100};\ u(r) = \left(\frac{r-10}{100}\right)^2$$
$$u(r) = e^r;\ u(r) = e^{-r};\ u(r) = \sqrt{\frac{r-10}{100}}.$$

10. Péternek a hasznossági függvénye (euróban kifejezve):

$$u(r) = \left(\frac{r + 10\,000}{90\,000}\right)^{1/2}.$$

a) Ha az u legkisebb értéke nulla, legnagyobb értéke pedig egy, határozzuk meg a jutalékok intervallumát.

b) Határozzuk meg az $L = [70\,000, 0.4; -1\,000, 0.6]$ lottó bizonyossági egyenértékét és kockázati prémiumát.

c) Ha Péternek van egy 9000 eurós autója, amelynek ellopására úgy értékeli, hogy 2% esélye van, akkor mennyi az a legnagyobb összeg, amit hajlandó fizetni egy olyan biztosításért, amely teljes egészében megtéríti a kárt?

d) Ha Péter a meghatározott legnagyobb összeget fizeti a biztosításért, határozzuk meg a bizonyossági egyenértéket és a kockázati prémiumot is.

e) Mennyi a várható bevétele a biztosítótársaságnak a Péter által befizetett biztosítási díjból?

11. Becsüljük meg annak a döntéshozónak az egyéni hasznossági függvényét, amelyről tudjuk:

$$u(-10\,000) = 0;\ u(30\,000) = 1;\ u(0) = 0.5;$$
$$u(-5000) = 0.25;\ u(10\,000) = 0.75.$$

a) Határozzuk meg kockázattoleranciáját, az ARA-t, az RRA-t és a kockázatelutasító magatartás globális értékét is.
b) Ha a döntéshozó referenciaértéke $w = 0$, a KT paraméterek felhasználásával írjuk fel a döntéshozó értékfüggvényét.

12. Annak a döntéshozónak, amelynek egyéni hasznossági függvényéről tudjuk:

$$u(-2000) = 0;\ u(6000) = 1;\ u(-300) = 0.1;$$
$$u(-200) = 0.12;\ u(0) = 0.2; u(1000) = 0.5$$
$$u(4000) = 0.75,$$

kockázatkereső az alsó értékekre és kockázatelutasító a nagyobb értékekre.
a) Becsüljük meg azt az r_0 jutalmat, ameddig a döntéshozónak kockázatelutasító a magatartása.
b) Becsüljük meg a hasznossági függvényét az $S_1 = [-2000, r_0]$ intervallumon.
c) Becsüljük meg a hasznossági függvényét az $S_2 = [r_0, 6000]$ intervallumon.
d) Adjuk meg a hasznossági függvényt az $S = [-2000, 6000]$ intervallumon.
e) Határozzuk meg kockázattoleranciáját és a kockázatelutasító magatartás globális értékét is külön-külön az S_1, S_2 és S intervallumokra. Mit tapasztalunk?

13. Egy perc gondolkodási idő után válassz az alábbi két lehetőség közül:
L1: 10% valószínűséggel nyerhetsz 100 lejt és 90% valószínűséggel veszíthetsz 10 lejt;
L2: fizetsz 10 lejt egy olyan szerencsejátékban való részvételért, amelyben 10% valószínűséggel nyerhetsz 110 lejt és 90% valószínűséggel nem nyersz semmit.
Elemezd ki a válaszodat. Racionális volt-e a döntésed?

14. Képzeld el, hogy a városodban egy új betegség járványszerű kitörésére számítanak, amely várhatóan 1000 ember halálát okozza majd. A betegség megelőzésére két javaslat született.
A *Hargita Népe* újságban az alábbiakat közlik a két javaslat várható eredményességéről:
L1: Ha az első javaslatot fogadják el, akkor 300 emberéletet meg lehet menteni az 1000-ből.

L2: Ha a második javaslatot fogadják el, akkor 30% valószínűséggel meg lehet menteni mind az 1000 emberéletet, és 70% valószínűséggel nem lehet megmenteni senki életét.

A döntés megkönnyítése érdekében a *Hargita Népe* szavazást kezdeményez. Az $L1$ és az $L2$ közül csak az egyikre lehet szavazni. Te melyiket választanád?

A *Székelyhon* internetes portál az alábbiakat közli a javaslatok eredményességéről:

L3: Ha az első javaslatot fogadják el, akkor 700 ember meghal az 1000-ből.

L4: Ha a második javaslatot fogadják el, akkor 30% valószínűséggel nem hal meg senki, és 70% valószínűséggel 1000 ember hal meg.

A *Székelyhon* internetes portál is kezdeményez egy szavazást: az $L3$ és az $L4$ közül csak az egyikre lehet szavazni. Te melyiket választanád?

Elemezd ki a válaszaidat a hasznosságelmélet és a kilátáselmélet szemszögéből is. Racionálisak voltak-e a döntéseid?

15. Hogyan döntenél az alábbi két helyzetben?

L1: Képzeld el, hogy városodba látogat egy neves költő. Az előadásra a belépőjegy ára 50 lej. Megvásárolsz két jegyet magad és barátod számára. Megérkezel a művelődési házhoz, és döbbenten veszed észre, hogy a jegyek nincsenek nálad. Veszel-e két jegyet, hogy mégis megnézhesd az előadást?

L2: Képzeld el, hogy városodba látogat egy neves költő. Te és barátod megérkeztek a művelődési házhoz, és döbbenten veszed észre, hogy a jegyekre félretett 100 lejed hiányzik a pénztárcádból. Hitelkártyát is használhatsz a jegyvásárláshoz. Megveszed-e a jegyeket, hogy mégis megnézhesd az előadást?

Elemezd ki a válaszaidat a hasznosságelmélet és a kilátáselmélet szemszögéből is. Racionálisak voltak-e a döntéseid?

16. Két autótulajdonos, Péter és a környezettudatos János csökkenteni szeretnék üzemanyagköltségeiket. Ezért:

Péter az 1 liter üzemanyaggal 12 km-t megtevő autóját lecseréli egy olyan autóra, amely 1 liter üzemanyaggal 14 km-t tesz meg.

János az 1 liter üzemanyaggal 20 km-t megtevő autóját lecseréli egy olyan autóra, amely 1 liter üzemanyaggal 25 km-t tesz meg.

Első látásra melyikük takarít meg több üzemanyagot, feltéve, hogy mind a ketten évente ugyanannyit autóznak? Miután megbecsülted a fogyasztást, végezz egy számítást is. Helyes volt-e az első látásra megadott válaszod? Döntéselméleti szempontból miért tűnt becsapósnak a feladat?

17. Egy bankrablás kapcsán két gyanúsítottat letartóztat a rendőrség. Elítélésükhöz azonban nincs közvetlen bizonyíték, szükség van legalább az egyikük beismerő vallomására. A vizsgálóbíró nagyon szeretné végre lezárni az ügyet, ezért külön-külön magához hívatja őket, és mindkettőnek a következő ajánlatot teszi: Ha bevallod a bankrablást, és ezzel segítesz tisztázni az ügyet, akkor téged szabadon bocsátlak. Ebben az esetben a társadra 10 év börtönbüntetést szabok ki. Ez az ajánlat azonban csak akkor érvényes, ha társad nem vall, és így nem segít nekünk az ügy tisztázásában. De ha ő is vall, akkor nem sokat ér a vallomásod, és mind a ketten öt-öt évet kaptok. Ha egyikőtök sem vall, akkor a bankrablást megússzátok, de mindkettőtöket lecsukunk egy-egy évre, apróbb szabálytalanságokért. A letöltendő börtönévek mennyisége negatív haszonnak tekinthető, tehát a lehetséges legjobb eredmény a nulla.
    a) Ha mindketten hasznosságelméleti szempontból racionálisan gondolkodnak, és kockázattal szemben semleges a magatartásuk, határozzuk meg a játék Nash-féle egyensúlypontjait.
    b) Ha mindketten hasznosságelméleti szempontból racionálisan gondolkodnak, és kockázatelutasító a magatartásuk, határozzuk meg a játék Nash-féle egyensúlypontjait.
    c) Ha mindkettőjüknél figyelembe vesszük a kilátáselméleti torzító hatásokat, határozzuk meg a játék Nash-féle egyensúlypontjait.
    d) Ha mindkettőjüknél figyelembe vesszük a kilátáselméleti torzító hatásokat, határozzuk meg a játék referenciapont-egyensúlyát.
18. Két zöldséges van egymás közelében. Mindkettő tulajdonosának havonta dönteni kell az árakról úgy, hogy nem ismeri konkurenciájának tarifáit. Az új árakat egyszerre kell kiírniuk, minden hónap első munkanapjának reggelén. Ha az egyikük csökkenti az árakat azért, hogy vásárlókat hódítson el a másik üzlettől és így megnövelje nyereségét, azt kockáztatja, hogy a másik is ekképpen gondolkodik, és így mindketten veszítenek. Ha azonban nem lesz olcsóbb a terméke, és riválisa mérsékli árait, újfent rosszul jár, akár tönkre is mehet. Ez a helyzet is ábrázolható táblázatos formában (a súlyokat az AHP-módszerrel

határoztuk meg):

I. zöldséges	**II. zöldséges**	
	árat csökkent	nem csökkent árat
árat csökkent	$(0.11, 0.15)$	$(0.53, 0.1)$
nem csökkent árat	$(0.05, 0.5)$	$(0.31, 0.25)$

A veszteségtől való félelem és a nyereségképzés vágya egyaránt amellett szólnak, hogy csökkentse árait, de ha ezt teszi, a logikus gondolatmenet egyezősége miatt vetélytársa is olcsóbban árusítja termékét, és így mindketten elvesztik összes nyereségüket. Ez egy sokmenetes fogolydilemma, hiszen a következő hónapban ismét találkoznak ezzel a döntési helyzettel, hacsak nem az, aki egyoldalúan kooperált, közben tönkre nem megy.

a) Ha mindketten hasznosságelméleti szempontból racionálisan gondolkodnak, és kockázattal szemben semleges a magatartásuk, határozzuk meg a játék Nash-féle egyensúlypontjait.
b) Ha mindketten hasznosságelméleti szempontból racionálisan gondolkodnak, és kockázatelutasító a magatartásuk, határozzuk meg a játék Nash-féle egyensúlypontjait.
c) Ha mindkettőjüknél figyelembe vesszük a kilátáselméleti torzító hatásokat, határozzuk meg a játék Nash-féle egyensúlypontjait.
d) Ha mindkettőjüknél figyelembe vesszük a kilátáselméleti torzító hatásokat, határozzuk meg a játék referenciapont-egyensúlyát.

19. Két nagyon illedelmes ember tessékeli egymást előre az ajtón. Ez a helyzet nagyon hasonlít a Nemek harca játékra, a különbség az, hogy a kölcsönös kooperáció (önzetlenség) itt nem a legrosszabb eredményre vezet, a kölcsönös versengés még rosszabb. A versengés az a stratégia, hogy ragaszkodunk ahhoz, hogy a másik menjen ki először, a kooperálás pedig az, hogy a másik megvetését vállalva elsőként megyünk ki. A legrosszabb helyzet a kölcsönös versengés, mert akkor egyikük sem jut át az ajtón. Ennél jobb a kooperáció, mert akkor mindketten egyszerre átpréselik magukat az ajtón. A legnagyobb közös nyereség akkor alakul ki, ha az egyikük kooperál, másikuk verseng, mivel akkor mindketten átjutnak az ajtón, csak a versengő játékos plusz nyereségként még meg is vetheti „illetlen”társát, aki pedig kooperált.

a) Rendeljünk a jutalmakhoz súlyokat. Figyeljünk arra, hogy a hozzárendelés teljesítse a felsorolt preferencia-sorrendet és következetes legyen.

b) Ha mindketten hasznosságelméleti szempontból racionálisan gondolkodnak, és kockázattal szemben semleges a magatartásuk, határozzuk meg a játék Nash-féle egyensúlypontjait.
c) Ha mindketten hasznosságelméleti szempontból racionálisan gondolkodnak, és kockázatelutasító a magatartásuk, határozzuk meg a játék Nash-féle egyensúlypontjait.
d) Ha mindkettőjüknél figyelembe vesszük a kilátáselméleti torzító hatásokat, határozzuk meg a játék Nash-féle egyensúlypontjait.
e) Ha mindkettőjüknél figyelembe vesszük a kilátáselméleti torzító hatásokat, határozzuk meg a játék referenciapont-egyensúlyát.

20. Péter és János hajtanak egymással szembe egy elhagyott úton. Mindkettőjüknek két stratégiája van: kitérni vagy nem kitérni. A szereplők az egyes helyzetekhez az alábbi súlyokat rendelik:

	János	
Péter	kitér	nem tér ki
kitér	$(0.3, 0.2)$	$(0.1, 0.55)$
nem tér ki	$(0.59, 0.15)$	$(0.01, 0.1)$

a) Ha mindketten hasznosságelméleti szempontból racionálisan gondolkodnak, és kockázattal szemben semleges a magatartásuk, határozzuk meg a játék Nash-féle egyensúlypontjait.
b) Ha mindketten hasznosságelméleti szempontból racionálisan gondolkodnak, és kockázatelutasító a magatartásuk, határozzuk meg a játék Nash-féle egyensúlypontjait.
c) Ha mindkettőjüknél figyelembe vesszük a kilátáselméleti torzító hatásokat, határozzuk meg a játék Nash-féle egyensúlypontjait.
d) Ha mindkettőjüknél figyelembe vesszük a kilátáselméleti torzító hatásokat, határozzuk meg a játék referenciapont-egyensúlyát.

2. FEJEZET

KOMPLEX DÖNTÉSEK

2.1. Döntési fák

Gyakran előfordul, hogy az embereknek különböző időpontokban döntések sorozatát kell meghozniuk. Ekkor az optimális döntés meghozatalához alkalmazhatók az úgynevezett ***döntési fák***, amik lehetővé teszik, hogy egy komplex döntési problémát néhány egyszerűbb problémára bontunk fel. A döntési fákat hasznosságelméleti vagy kilátáselméleti elvek alapján értékeljük ki. A kimenetelek valószínűségeinek a meghatározásához Bayes-féle elemzést végzünk.

2.1. mintapélda (Piackutatás). Egy vállalat el szeretné dönteni, hogy piacra dobja-e az egyik új termékét (kódneve M11). A vállalat vezetése úgy gondolkodik, ha előzetesen a piacra dobás mellett dönt, akkor végeztet egy piackutatást, és ha a termék a piackutatás alapján sikertelen, akkor mégsem dobja piacra. A piackutatás költsége 100 000 euró, a régebbi tapasztalatok alapján a vállalat tudja, hogy a termékeknek csak 30%-a sikeres egy ilyen piackutatás esetén.

Ha az M11 termék sikeresen helytáll a piackutatás során, akkor a vállalat el kell döntse, hogy a termékét milyen méretű telephelyen állítja elő. Egy kicsi telephely kiépítése 150 000 euróba kerül és évi 2000 darab M11-es termék előállítását teszi lehetővé. Ha nagy telephelyen állítanák elő a terméket, akkor a telephely kiépítése 250 000 euróba kerülne, de évente 4000 darab M11 terméket állíthatnának elő.

A marketingosztály becslései szerint 40% az esélye annak, hogy a konkurencia is előáll egy hasonló termékkel, és így az ár, amit egy M11 termékért kérhetnek, a következők szerint alakulhat:

	Nagy telep	**Kicsi telep**
Konkurencia közbelép	20 euró darabja	35 euró darabja
Konkurencia nem reagál	50 euró darabja	65 euró darabja

a) Ha a vállalat a 7 évre számított várható bevételét szeretné maximalizálni, milyen döntéseket kell meghoznia?

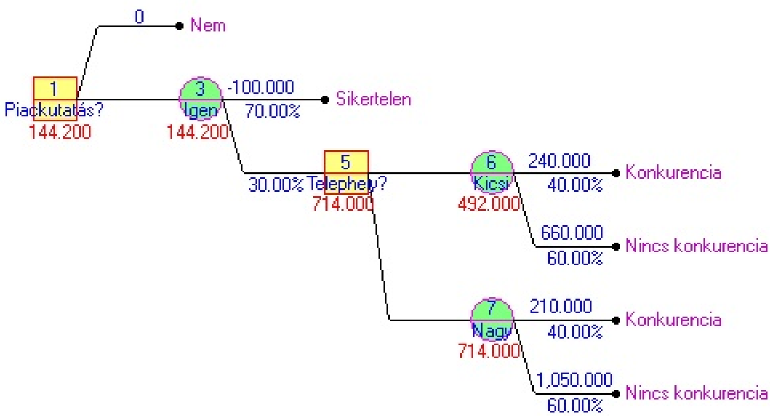
b) Mennyi az a legnagyobb összeg, amit a vállalatnak érdemes kifizetni ezért a piackutatásért?

c) Mennyi az a legnagyobb összeg, amit a vállalatnak érdemes kifizetni azért, hogy megtudja, a konkurencia belép-e vagy sem a piacra?

Megoldás.

a) A probléma megoldására döntési fát használunk. Tulajdonképpen a cég vezetésének két döntést kell meghoznia. Az egyik, hogy piacra dobja-e a terméket? A másik, hogy ha piacra dobja és a piackutatás sikert jósol, akkor milyen méretű telephelyet építsen: kicsit vagy nagyot? A döntések és a különböző véletlenszerű események időbeli sorrendjében rajzoljuk meg a döntési fát. A ***döntési csomópontokat*** négyzettel, a véletlenszerű események bekövetkezését pedig körrel ábrázoljuk. Egy döntési csomópont az időben olyan pontot képvisel, amikor a cég vezetőségének döntést kell hoznia. Minden ág, amelyik egy döntési csomópontból ered, egy lehetséges döntést jelképez. Egy ***eseménycsomópontot*** akkor rajzolunk, amikor külső tényezők határozzák meg, hogy a véletlenszerű események közül melyik következik be. Egy eseménycsomópontból kiinduló ágak a lehetséges eseményeket adják meg, és az ágakon feltüntetett számok az események bekövetkezésének valószínűségét jelentik. A döntési fának egy olyan ágát, ahonnan már nem indul ki ág, ***levélnek*** nevezzük. A leveleken feltüntetjük a különböző kimenetelekhez tartozó jutalmakat (nyereséget, veszteséget vagy döntéshozó számára jelentett egyéni hasznont).

Amint a feladatból is kiderül, természetes, hogy egyszer a piacra dobásra vonatkozó előzetes döntést hozzuk meg, aminek két kimenetele lehet: igen vagy nem. Ha a döntésünk nem, akkor nem dobjuk piacra a terméket. Így nyereségünk nulla. Ha pedig döntésünk igen, akkor piackutatást is kell végezni. A piackutatás eredménye egy véletlenszerű esemény, ami 30% eséllyel sikert fog jósolni, és 70% eséllyel sikertelenséget. Ha sikertelenséget jósol, akkor nem dobjuk piacra a terméket, így a veszteségünk a piackutatásra kiadott összeg, 100 000 euró. Ha sikert jósol, akkor a második döntésünk arra vonatkozik, hogy milyen méretű telephelyet építsünk. Ha a kicsi mellett döntünk és a konkurencia is közbelép, aminek 40% az esélye, akkor nyereségünk hét évre számolva: $35 \times 2000 \times 7 - 150\,000 - 100\,000 = 240\,000$. Ha pedig a konkurencia nem lép közbe, aminek 60% az esélye, akkor nyereségünk hét évre számolva: $65 \times 2000 \times 7 - 150\,000 - 100\,000 = 660\,000$. Másik lehetőség, hogy a nagy telephely mellett döntünk. Ekkor a nyereség a konkurencia közbelépése esetén $20 \times 4000 \times 7 - 250\,000 - 100\,000 = 210\,000$, a konkurencia közbelépése nélkül pedig $50 \times 4000 \times 7 - 250\,000 - 100\,000 = 1\,050\,000$.



2.1. ábra. A piackutatás mintapélda kiértékelt döntési fája

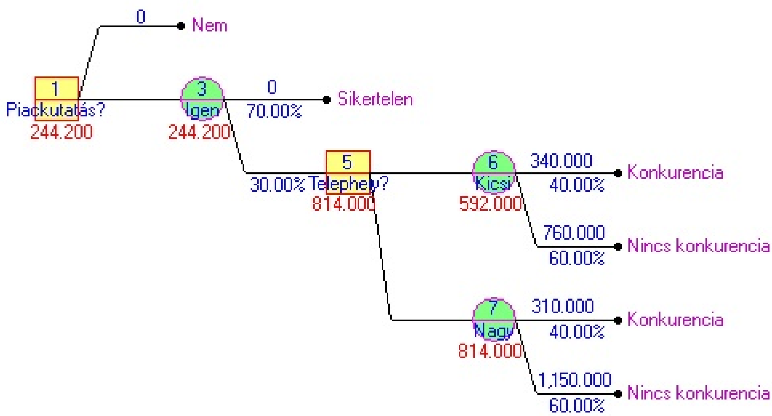
A leírtak alapján a 2.1. ábrán bemutatott döntési fa rajzolható meg.

A döntési fa kiértékelése a várható érték elve alapján történik. Kezdjük a leveleket összefogó 6. és 7. csomópontokkal. A 6. csomóponthoz tartozó várható érték: $v_6 = 240\,000 \cdot 0.4 + 660\,000 \cdot 0.6 = 492\,000$, a 7. csomóponthoz pedig: $v_7 = 210\,000 \cdot 0.4 + 1\,050\,000 \cdot 0.6 = 714\,000$. Ezeket az értékeket feltüntetjük a csomópontok alatt.

Most kiértékeljük az 5. csomóponthoz tartozó döntési helyzetet. A kicsi telephely megépítése várhatóan $v_6 = 492\,000$ euró, a nagy telephely megépítése pedig várhatóan $v_7 = 714\,000$ euró nyereséget eredményez. A várható érték elve alapján azt a kimenetet választjuk, ahol nagyobb a várható érték. Ebben az esetben a nagy telephely megépítését. Ezt úgy jelöljük, hogy az 5. csomóponthoz beírjuk a v_7 értékét.

Továbblépünk a 3. csomópont kiértékeléséhez. Ez egy véletlenszerű eseményt jelképez, tehát a csomópontból kimenő ágak várható értékét kell meghatározni: $v_3 = -100\,000 \cdot 0.7 + 714\,000 \cdot 0.3 = 144\,200$, és a csomópont alatt feltüntetni.

Ezután már csak az marad hátra, hogy meghatározzuk a helyes döntést az 1. csomópontban. Mivel a hármas csomópontban lévő érték nagyobb, mint a „nem dobjuk piacra” kimenetelhez tartozó érték, ezért döntésünk a hármas csomópontra esik.



2.2. ábra. A piackutatás mintapélda *VÉMI*-je

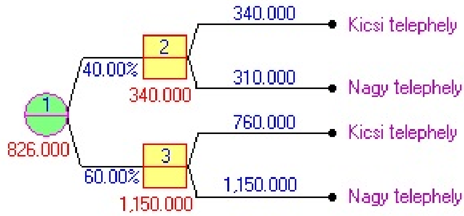
Tehát a piackutatás mellett döntünk, és ha az sikert fog jósolni, akkor a nagy telephelyet építjük meg. Ez a stratégia várhatóan 144 200 euró jövedelmet fog eredményezni.

b) A döntési fák arra is felhasználhatók, hogy megmérjük a mintavételből (piackutatásból) származó információ értékét.

Kezdjük azzal, hogy meghatározzuk a cég nyereségét abban az esetben, ha a piackutatás nem kerülne semmibe. Ezt a nyereséget (végső vagyoni helyzetet) úgy nevezzük, hogy ***várható érték mintainformációval (VÉMI, Expected Value with Sample Information-EVWSI)***. Kiszámítása ugyanúgy történik, mint az előbbi esetben, csak itt a piackutatás költsége nulla, azaz a fa leveleinek értékei a piackutatás ágon 100 000 euróval nagyobbak lesznek (2.2. ábra). A piackutatás döntés várható értéke a 3. csomópontnál van feltüntetve. Tehát, a $V\acute{E}MI = 244\,200$.

Ezután meghatározzuk azt a vagyoni helyzetet (nyereséget), amelyet a cég akkor érne el, ha nem végez piackutatást (egyenértékű azzal, hogy nem is dobja piacra a terméket). Ezt úgy nevezzük, hogy ***várható érték az eredeti információ alapján (VÉEI, Expected Value with Orginal Information: EVWOI)***. Ezt az értéket a piackutatás csomópontnak arról az ágáról olvashatjuk le, amelyik a „nem dobjuk piacra” döntéshez tartozik. A mi esetünkben ez nulla. Tehát a $V\acute{E}EI = 0$.

Így a piackutatásból nyerhető információ várható értéke, melynek elnevezése a ***mintainformáció várható értéke (MIVÉ, Expected Value***



2.3. ábra. A piackutatás mintapélda *VÉTI*-je

of Sample Information: EVSI), így adható meg:

$$MIV\acute{E} = V\acute{E}MI - V\acute{E}EI.$$

Ebben a példában az $MIV\acute{E} = 244\,200$.

Az $MIV\acute{E}$ az a legnagyobb pénzösszeg, amit a cég a piackutatásból származó információért fizethet, mert ha ennél többet fizet, akkor a várható nyeresége piackutatás nélkül nagyobb lesz, mint piackutatással.

c) A $MIV\acute{E}$ meghatározására alkalmazott elemzést kiterjeszthetjük a *tökéletes információ* meghatározására is. Tökéletes információn azt értjük, hogy bár a konkurencia belépése a piacra ugyanúgy 40% valószínűséggel következik be, de a marketingosztály valamilyen külső információ alapján már előre, a telephely megépítése előtt megmondja, hogy a konkurencia belép-e a piacra vagy sem. Ez az információ aztán felhasználható a vállalat optimális marketingstratégiájának meghatározására. A ***várható érték a tökéletes információ alapján (VÉTI, Expected Value with Perfect Information: EVWPI)*** kiszámítható, ha rajzolunk egy döntési fát, ahol a döntéshozónak a döntéshozás előtt tökéletes információja van arról, hogy melyik állapot fog bekövetkezni (2.3. ábra). Ebben az esetben a kiinduló csomópont egy véletlenszerű esemény, amelynek az ágain a konkurencia belépésének valószínűségeit tüntetjük fel. Majd mind a két esetben jön egy döntés, ami a telephelyek kiválasztására vonatkozik. A döntési csomópont ágain a nulla piackutatási költséggel számított nyereségeket tartalmazó levelek vannak. A döntési fát az előbbiekben leírtak alapján értékeljük ki. A *VÉTI* a végső várható anyagi helyzet. Ebben a feladatban a *VÉTI*= 826 000.

Ezután a ***tökéletes információ várható értéke (TIVÉ, Expected Value of Perfect Information: EVPI)*** a

$$TIVÉ = VÉTI - VÉEI$$

képlettel számítható ki. A tanulmányozott példában a $TIVÉ = 826\,000$ euró. A marketingosztály maximálisan ezt az összeget adhatja egy olyan információért, ami egyértelműen megmondja, hogy a konkurencia belép-e vagy sem a piacra. A $TIVÉ$ és a $MIVÉ$ aránya szemlélteti az információ minősítését. Ha ezt kivetítjük egy 0–10-es skálára, akkor a ***mintavételi információ minősítése (MVIM)***:

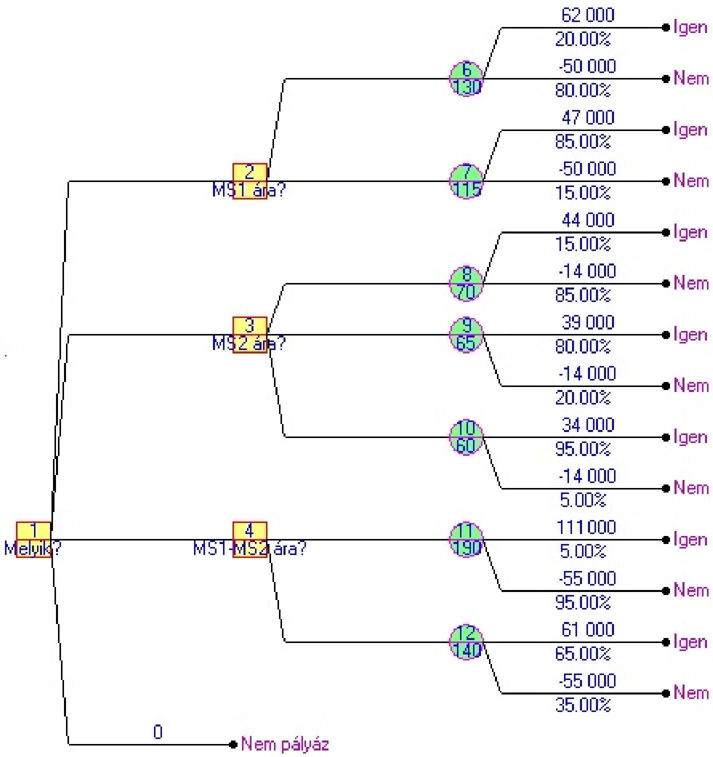
$$MVIM = \frac{MIVÉ}{TIVÉ} * 10.$$

Ebben a mintapéldában a $MVIM \simeq 3$.

2.2. Döntési fa elemzése a WinQSB segítségével

2.2. mintapélda (Pályázat). Egy cég el kell döntse, hogy megpályázza-e az állam által kiírt MS1 és MS2 eszközbeszerzési projekteket. A cégnek több lehetősége van: csak az egyik projektet pályázza meg, vagy mindkettőt egy pályázatban, vagy egyáltalán nem készít pályázatot. A cég csak egy pályázatot nyújthat be. A pályázati anyag összeállítása, ha csak az MS1 projektre pályáz, 50 000, ha csak az MS2-re pályáz, 14 000, ha mindkettőre, akkor 55 000 euróba kerül. Sikeres pályázás esetén pluszkiadások lépnek fel: az MS1 pályázat esetén 18 000 euró, az MS2 pályázat esetén 12 000 euró és mindkét projekt elnyerése esetén 24 000 euró. Az egyes projekt eszközbeszerzésére felajánlott összegek és ezen értékek mellett a projektek elnyerési valószínűségét a következő táblázat adja meg.

Lehetőségek	**Pályázati bevételek**	**Szerződéskötés valószínűsége**
csak MS	130 000	20%
	115 000	85%
csak MS2	70 000	15%
	65 000	80%
	60 000	95%
MS1 és MS2	190 000	5%
	140 000	65%



2.4. ábra. A 2.2. mintapélda (Pályázat) döntési fája

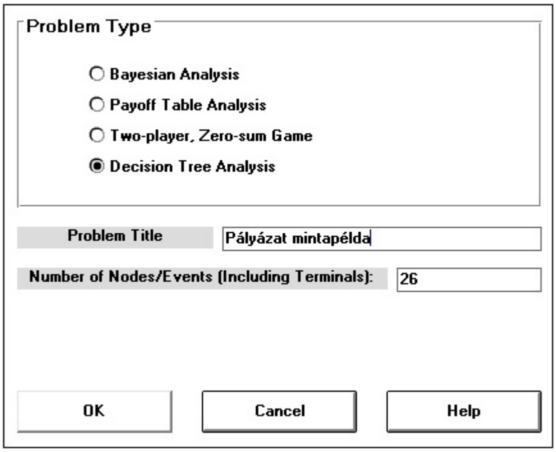
Ha az MS1 és MS2 projektet egyben pályázzák, akkor vagy mindkettőt elnyerik, vagy egyiket sem.

a) Hogyan kellene eljárjon a cég, hogy a lehető legnagyobb nyereségre tegyen szert?

b) Ha volna lehetőség egy pályázatíró céget is bevonni a pályázati anyag összeállításába 20 000 euróért, amely segítségével az MS2 projekt 60 000 eurós összegének elnyerése garantált lenne, érdemes lenne-e igénybe venni a segítségét?

Megoldás.

a) A cégnek két döntést kell meghoznia a következő sorrendben: I. hogy pályázzon-e, és ha igen, akkor melyik projektre, valamint II. mekkora összegre pályázzon?



2.5. ábra. A döntéselemzési eszköztár (Decision Analysis) kezdőablaka

Ha nem pályázik, akkor vagyoni helyzete nem változik, azaz nyeresége nulla. Ha pályázik, akkor három változat közül választhat: csak az MS1-re, vagy csak az MS2-re, vagy mindkettőre.

Ezeket szemléltetik a 2.4. döntési fa 1. csomópontjából kiinduló ágak. Ha az MS1-re pályázik, akkor két döntése lehet, vagy a 130 000 euróra, vagy a 115 000 euróra pályázik. Ezt a döntést mutatják a döntési fa 2. csomópontjából kiinduló ágak. Ha a 130 000 euróra pályázik, akkor a döntési fa 6. csomópontjával jelzett véletlenszerű esemény alapján 20% az esélye, hogy megnyerje a pályázatot és 80% az esélye, hogy ne nyerje meg. Ha megnyeri, akkor a nyeresége: $130\,000 - 50\,000 - 18000 = 62\,000$ euró. Ha nem nyeri meg, akkor nyeresége: $0 - 50\,000 = -50\,000$ euró. Ez a két érték szerepel a 6. csomópontból kimenő ágakon. A 2. döntési csomópontból kiinduló másik ág a 115 000 eurós pályázat melletti döntést szemlélteti. Ebben az esetben 85% az esélye, hogy megnyerje a pályázatot. Ezt a véletlenszerűséget a 7. csomópont beiktatásával szemléltetjük. Ennek két kimenő ága van: ha elnyeri a pályázatot, ekkor nyeresége: $115\,000-50\,000-18\,000 = 47\,000$ euró, különben pedig: $-50\,000$ euró. Ezen értékeket a 7. csomópontból kimenő ágakon tüntetjük fel. Hasonló meggondolások alapján rajzoljuk meg a döntési fa 3. és 4. csomópontjaiból kiinduló ágakat.

A 2.4. döntési fa alakját papíron vázoljuk, majd a fa alapján kitöltjük a WinQSB döntéselemzési (Decision Analysis) eszköztára által igényelt adatbeviteli táblázatokat. A 2.5. kezdőablakában kiválasztjuk a döntési fa elemzése (Decision Tree Analysis) feladattípust, és megadjuk a csomópontok és levelek számát (Number of Nodes/Events (Including Terminals). Ebben a feladatban ez 26.

Az OK-ra kattintás után betöltődik a döntési fa 2.6. adatbeviteli ablaka. A táblázat első oszlopában (Node/Event Number) a csomópontok számai szerepelnek. A második oszlopban (Node Name or Description) a csomópontok szóbeli leírását adjuk meg. A harmadik oszlopban (Node Type) a csomópont típusát választjuk ki. Ha döntési, akkor D-t, ha véletlenszerű esemény, akkor C-t írunk, a levelek esetén pedig üresen hagyjuk a mezőt. Esetünkben az 1–4. döntési csomópontok, a 6–12. pedig véletlenszerű eseménycsomópontok. Az 5-ös és a 13–26. a leveleket jelentik. A negyedik oszlopban (Immediate Following Node, number separated by ',') megadjuk a csomópontra közvetlenül rákövetkező csomópontokat. Az elválasztójel a vessző. Például: a 2-es rákövetkezői a 6, 7; a 6-os rákövetkezői a 13, 14. A leveleknek nincs rákövetkező csomópontjaik, ezért a mezőjüket üresen hagyjuk. Az ötödik oszlopban [Node Payoff (+profit, -cost)] a levelek értékeit adjuk meg. Plusz előjellel a nyereséget és mínusz előjellel a veszteséget. A hatodik oszlopban [Probability (if available)] a csomóponthoz tartozó valószínűségeket írjuk be, ha a csomópont előtti ág egy véletlenszerű esemény kimenetele. Például a 13. csomópont a 6. csomópont egy kimenetele, és tudjuk, hogy a 6-os egy véletlenszerű esemény, amelynek a 13. csomóponthoz vezető ága 20% valószínűséggel következik be. Ezért a 13 csomópont valószínűségi (Probability) mezőjébe 0.2-t írunk.

A síző emberke ikonra kattintva a WinQSB az előző mintapéldában leírtak szerint kiértékeli a döntési fát, majd a „döntési fa" ikont kiválasztva kirajzolódik a 2.4. ábrán bemutatott döntési fa. Ahhoz, hogy a csomópontok alatt megjelenjenek a várható értékek, be kell jelölni a kiértékelés (Display the expected values for each node or event) mezőt. Ebben az ablakban lehet méretezni a csomópontokat és az éleket is. A 2.7. ábrán a csomópontok alatti várható értékeket a WinQSB jeleníti meg.

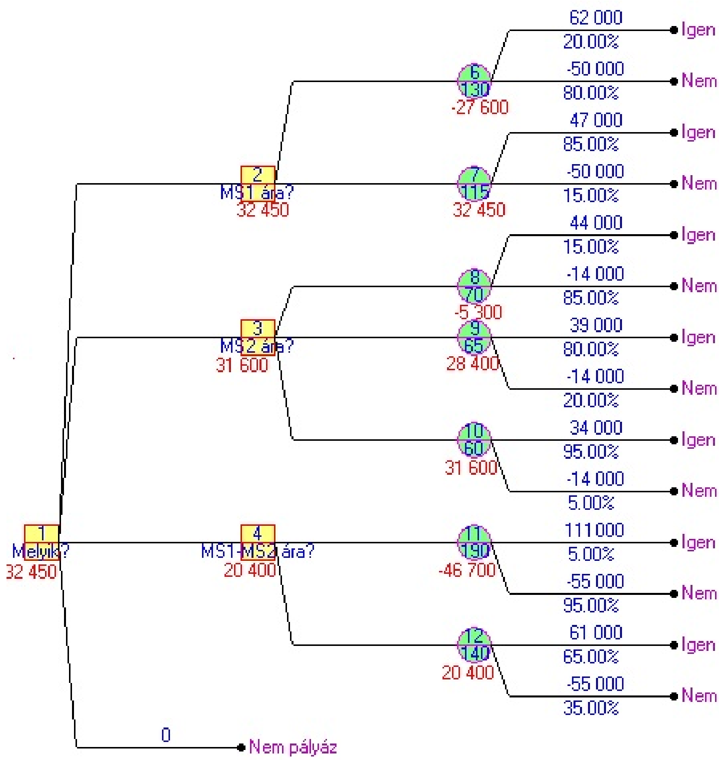
A döntési fa 1. csomópontja alatti érték megadja a végső várható nyereséget. Ez a mintapéldában 32 450 euró. Továbblépve a döntési fán, láthatjuk, hogy a 32 450 érték a 2-es csomópont alatt szerepel. Tehát első döntésnél 2-es csomópontot, azaz az MS1 projektet választja a cég. A második döntés, hogy a 115 000 eurós pályázatot célozza meg, mert ebben az esetben a várható nyeresége (32 450) nagyobb, mint a 130 000 eurós pályázat esetén ($-27\,600$).

Node/Event Number	Node Name or Description	Node Type (enter D or C)	Immediate Following Node (numbers separated by ',')	Node Payoff (+ profit, - cost)	Probability (if available)
1	Melyik?	D	2,3,4,5		
2	MS1 ára?	D	6,7		
3	MS2 ára?	D	8,9,10		
4	MS1-MS2 ára?	D	11,12		
5	Nem pályáz			0	
6	130	C	13,14		
7	115	C	15,16		
8	70	C	17,18		
9	65	C	19,20		
10	60	C	21,22		
11	190	C	23,24		
12	140	C	25,26		
13	Igen			62000	0.2
14	Nem			-50000	0.8
15	Igen			47000	0.85
16	Nem			-50000	0.15
17	Igen			44000	0.15
18	Nem			-14000	0.85
19	Igen			39000	0.8
20	Nem			-14000	0.2
21	Igen			34000	0.95
22	Nem			-14000	0.05
23	Igen			111000	0.05
24	Nem			-55000	0.95
25	Igen			61000	0.65
26	Nem			-55000	0.35

2.6. ábra. A 2.2. mintapélda adattáblája

b) Ha a várható érték elve alapján gondolkodik a cég vezetősége, azaz a hasznosságfüggvénye kockázatsemleges, akkor nem érdemes szakértőt felfogadnia, mert ebben az esetben a nyeresége: $34\,000 - 20\,000 = 14\,000$ kisebb, mint 32 450. Egy ilyen szakértőnek a tökéletes információért maximálisan $TIV\acute{E} = 34\,000 - 32\,450 = 1550$ eurót érdemes fizetnie.

Ha a hasznosság függvénye kockázatelutasító, akkor előfordulhat, hogy a biztos 14 000 eurót választja 32 450 eurós várható értékű $L = [47\,000, 0.85; \;\; - 50\,000, 0.15]$ lottó helyett.



2.7. ábra. A 2.2. mintapélda (pályázat) kiértékelt döntési fája

2.3. Bayes-féle döntési fák

2.3. mintapélda (Hulladéktároló). A környezetvédelmi minisztériumnak el kell döntenie, hogy Csíkszentsimonban vagy Maksán építsen hulladéktárolót. A hulladéktároló építési költsége 10 millió euró Csíkszentsimonban és 20 millió euró Maksán. Ha Csíkszentsimonban épít, és ott a következő öt év alatt valamikor földcsuszamlás lesz, akkor az építkezés megsemmisül, és a veszteség 10 millió euró, és akkor mégis meg kell építeni a tárolót Maksán. A minisztérium úgy gondolja, hogy 20% esélye van annak, hogy a következő öt évben Csíkszentsimonban földcsuszamlás lesz. Egymillió euróért alkalmazhatnak egy geológust, aki kielemzi a csíkszentsimoni földcsuszamlás esélyeit. A geológus előrejelzése vagy az, hogy lesz földcsuszamlás, vagy az, hogy nem. A geológus eddigi tevékenységére vonatkozó adatok azt mutatják, hogy amikor földcsuszamlás volt, az ilyen esetek 95%-ában ő is azt mondta előre, hogy földcsuszamlás lesz. Másrészt 90%-ban nem jelzett előre földcsuszamlást, amikor a valóságban sem volt földcsuszamlás.

a) Alkalmazza-e a minisztérium a geológust?

b) Mennyi az a legnagyobb összeg, amit a minisztériumnak érdemes kifizetni az elemzésért (azaz mennyi az $MIV\acute{E}$)?

c) Mennyi az a legnagyobb összeg, amit a minisztériumnak érdemes kifizetnie egy olyan geológusnak, aki pontosan megmondja, lesz-e földcsuszamlás (azaz mennyi az $TIV\acute{E}$)?

Megoldás.

a) A 2.2. mintapéldában (pályázat) döntéshozónak kísérletezés nélkül kellett eldöntenie, hogy egy bizonyos esemény milyen valószínűséggel következett be. Ha azonban lehetséges bizonyos kísérletezés, esetleg némi költség árán, a kísérlettel kapott adatokat be kell építeni a döntési fába.

A feladat megoldása két lépésből tevődik össze.

I. lépés (Bayes-analízis). A mintapéldában a kísérletezést a geológus végzi 1 millió euróért. A döntéshozónak ki kell számolnia a geológus által adott becslések valószínűségét. Jelöljük A_1-gyel azt az eseményt, hogy földcsuszamlás lesz és A_2-vel azt az eseményt, hogy nem lesz földcsuszamlás, illetve B_1-gyel azt az eseményt, hogy a geológus földcsuszamlást fog jelezni, és B_2-vel azt az eseményt, hogy a geológus nem fog földcsuszamlást jelezni.

A valószínűségszámításban azt a feltételes valószínűséget, amely megadja egy eseményre vonatkozó előrejelzés valószínűségét az esemény bekövetkezésének feltétele mellett, ***találati valószínűségnek (likelihoodnak)*** nevezik. Ebben a feladatban két találati valószínűség ismert:

$P(B_1|A_1) = 0.95$ a találati valószínűsége annak, hogy amikor földcsuszamlás volt, az ilyen esetek 95%-ában a geológus is azt mondta előre, hogy földcsuszamlás lesz;

$P(B_2|A_2) = 0.9$ a találati valószínűsége annak, hogy a geológus nem jelzett előre földcsuszamlást, amikor a valóságban sem volt földcsuszamlás.

A minisztérium úgy gondolja, hogy a földcsuszamlás esélye $P(A_1) = 0.2$. Mivel A_2 az A_1 kiegészítő eseménye, ezért: $P(A_2) = 0.8$. Ezeket a valószínűségeket ***előzetes (priori) valószínűségeknek*** nevezzük. A döntési fa megrajzolásához szükség van a $P(B_1)$, $P(B_2)$ valószínűségeken kívül az alábbi feltételes valószínűségekre is:

$P(A_1|B_1)$ – a geológus földcsuszamlást jelez, és bekövetkezik a földcsuszamlás;

$P(A_2|B_1)$ – a geológus földcsuszamlást jelez, és nem következik be a földcsuszamlás;

$P(A_1|B_2)$ – a geológus nem jelez földcsuszamlást, és bekövetkezik a földcsuszamlás;

$P(A_2|B_2)$ – a geológus nem jelez földcsuszamlást, és nem következik be a földcsuszamlás.

A $P(A_i|B_j)$ $(i,j=1,2)$ valószínűségeket a szakirodalomban ***utólagos (posteriori) valószínűségeknek*** nevezik, mivel ezek az értékek csak a geológus utólagos becslése alapján tudjuk kiszámolni Bayes-tétele segítségével.

2.1. Tétel. *(Bayes tétele) Legyenek $A_1, A_2, ..., A_n$ olyan események, amelyekre igaz az, hogy egyszerre ezen események közül mindig pontosan egy következik be, vagy más szóval teljes eseményrendszert alkotnak. Legyen továbbá B egy tetszőleges esemény, ekkor*

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + ... + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$$

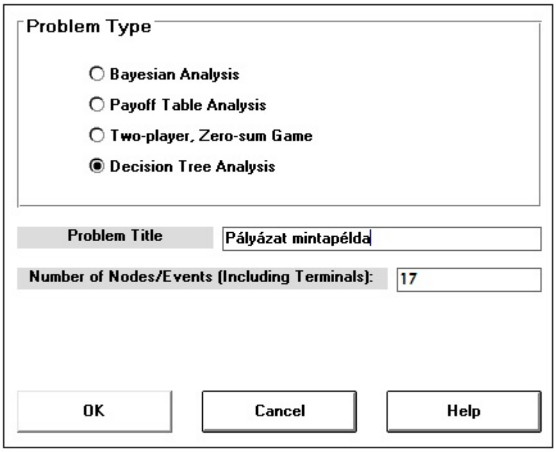
és

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}. \tag{2.1}$$

Ebben a feladatban A_1 és A_2 teljes eseményrendszer, mivel csak két eset lehetséges, vagy lesz földcsuszamlás, vagy nem. Ezért Bayes tétele alapján:

$$\begin{aligned}
P(B_1) &= P(B_1|A_1) \cdot P(A_1) + P(B_1|A_2) \cdot P(A_2) \\
&= P(B_1|A_1) \cdot P(A_1) + (1 - P(B_2|A_2)) \cdot P(A_2) \\
&= 0.95 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8 = 0.27; \\
P(B_2) &= P(B_2|A_1) \cdot P(A_1) + P(B_2|A_2) \cdot P(A_2) \\
&= (1 - P(B_1|A_1)) \cdot P(A_1) + P(B_2|A_2) \cdot P(A_2) \\
&= 0.05 \cdot 0.2 + 0.9 \cdot 0.8 = 0.73;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A_1|B_1) &= \frac{P(B_1|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B_1)} = \frac{0.95 \cdot 0.2}{0.27.} = 0.704; \\
P(A_2|B_1) &= \frac{P(B_1|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B_1)} = \frac{0.1 \cdot 0.8}{0.27.} = 0.296; \\
P(A_1|B_2) &= \frac{P(B_2|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B_2)} = \frac{0.05 \cdot 0.2}{0.73.} = 0.014; \\
P(A_2|B_2) &= \frac{P(B_2|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B_2)} = \frac{0.9 \cdot 0.8}{0.73.} = 0.986.
\end{aligned}$$



2.8. ábra. A 2.3. mintapélda kezdőablaka

II. lépés (Döntési fa elemzése). Elkészítjük a feladat döntési fáját. Két döntést kell meghozni: alkalmazzon vagy sem geológust, valamint hová építse a hulladéktárolót?

A döntési fa első csomópontja az a döntés, hogy fogadjon vagy sem geológust. Ha nem fogad geológust, akkor a geológusra leírtakat nem kell figyelembe venni. Így a második döntési csomópontban azt kell eldöntse, hogy Maksára vagy Csíkszentsimonban építse meg a hulladéktárolót. Ha Maksára építi, akkor a költsége 20 millió euró, ha pedig Csíkszentsimonban, akkor egy olyan 3-assal jelzett eseménycsomópontot kell berajzolni, amelynek két kimenetele lehetséges. 20% valószínűséggel földcsuszamlás lesz, és így a költsége $20 + 10 = 30$ millió euró, vagy 80% valószínűséggel nem lesz földcsuszamlás, és ekkor a költsége 10 millió euró.

Az első csomópont másik döntési ága: alkalmaz egy geológust 1 millió euróért. Ekkor a geológus tevékenységére vonatkozó adatok alapján tudja, hogy a geológus $P(B_1) = 0.27$ földcsuszamlást fog jósolni és $P(B_2) = 0.73$ valószínűséggel nem. Ezt a véletlenszerű elágazást 4-es csomópont jelzi. Mind a két esetben el kell döntenie, hogy hová építi a tárolót.

Abban az esetben, ha a geológus földcsuszamlást jelez, akkor az 5-ös döntési csomópontban két döntés hozható. Ha Maksát választja, akkor költsége $20+1 = 21$ millió euró, ha pedig Csíksentsimonban építi meg a tárolót, akkor a fa a 6-os csomóponttal folytatódik. Ennek két kimenete van. Mivel a földcsuszamlást jósoló ágon van, ezért a földcsuszamlás bekövetkezése ág

Node/Event Number	Node Name or Description	Node Type (enter D or C)	Immediate Following Node (numbers separated by ',')	Node Payoff (+ profit, - cost)	Probability (if available)
1	Alkalmaz-e	D	2,4		
2	Hová?	D	3,9		
3	Földcsuszamlás?	C	10,11		
4	A geológus	C	5,7		
5	Hová?	D	6,12		0.27
6	Földcsuszamlás?	C	13,14		
7	Hová?	D	8,15		0.73
8	Földcsuszamlás?	C	16,17		
9	Maksa			-20000000	
10	Igen			-30000000	0.2
11	Nem			-10000000	0.8
12	Maksa			-21000000	
13	Igen			-31000000	0.704
14	Nem			-11000000	0.296
15	Maksa			-21000000	
16	Igen			-31000000	0.014
17	Nem			-11000000	0.986

2.9. ábra. A 2.3. mintapélda adattáblája

valószínűsége $P(A_1|B_1) = 0.704$ és költsége: $20 + 10 + 1 = 31$ millió euró, a földcsuszamlás nem következik be ág valószínűsége pedig $P(A_2|B_1) = 0.296$ és költsége: $10 + 1 = 11$ miilió euró.

Másik lehetőség, hogy a geológus nem jelez földcsuszamlást. Ekkor a 7-es csomópontban is két döntés hozható. Ha Maksát választja, akkor költsége $20+1 = 21$ millió euró, ha pedig Csíksentsimonban építi meg a tárolót, akkor a fa a 8-as csomóponttal folytatódik. Ennek két kimenetele van. Mivel ebben az esetben nem jeleztek földcsuszamlást, ezért a földcsuszamlás bekövetkezése ág valószínűsége $P(A_1|B_2) = 0.014$ és költsége $20 + 10 + 1 = 31$ millió euró, a földcsuszamlás nem következik be ág valószínűsége pedig $P(A_2|B_2) = 0.986$ és költsége $10 + 1 = 11$ millió euró.

A leírt döntési fát papíron vázoljuk és WinQSB döntéselemzési (Decision Analysis) eszköztára segítségével értékeljük ki. A kezdőablakban (2.8. ábra) kiválasztjuk a Döntési fa elemzése (Decision Tree Analysis) feladattípust, és megadjuk a csomópontok és levelek számát [Number of Nodes/Events (Including Terminals)]. Ebben a feladatban ez 17.

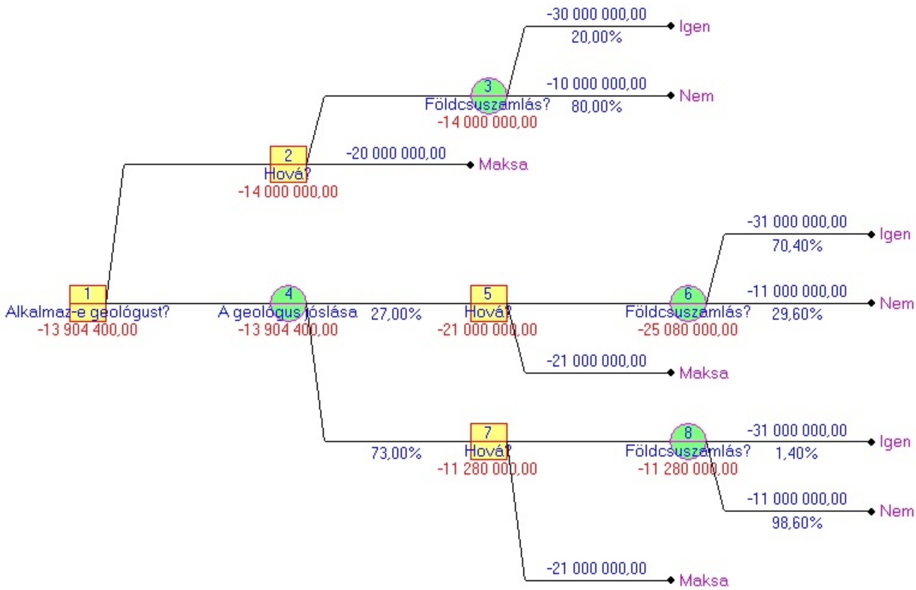
Majd az OK-ra kattintva betöltődik a döntési fa adatbeviteli ablaka (2.9. ábra). A táblázat első oszlopában (Node/Event Number) a csomópontok számai szerepelnek. A második oszlopban (Node Name or Description) a csomópontok leírását adhatjuk meg. A harmadik oszlopban (Node Type) a csomópont típusát írjuk be. Ha döntési, akkor D-t, ha véletlenszerű esemény, akkor C-t írunk, a levelek esetén pedig üresen hagyjuk a mezőt. Az 1, a 2, az 5 és a 7 a döntési csomópontok, a 3, a 4, a 6 és a 8 az eseménycsomópontok, a 9–17 pedig a levelek. A negyedik oszlopban (Immediate Following Node, number separated by ',') megadjuk a csomópontra közvetlenül rákövetkező csomópontokat. Az elválasztójel a vessző. Például: a 2-es rákövetkezői a 9, 3; a 4-es rákövetkezői az 5, a 7. A leveleknek nincs rákövetkező csomópontjuk, ezért a mezőjüket üresen hagyjuk. Az ötödik oszlopban [Node Payoff (+profit, -cost)] a levelek értékeit adjuk meg. A hatodik oszlopban [Probability (if available)] a csomóponthoz tartozó valószínűségeket írjuk be, ha a csomópont előtti ág egy véletlenszerű esemény kimenetele. Például az 5. csomópont a 4. csomópont egy kimenetele, és tudjuk, hogy a 4-es egy véletlenszerű esemény, amelynek az 5. csomóponthoz vezető ága 27% valószínűséggel következik be. Ezért az 5. csomópont valószínűségi (Probability) mezőjébe 0.27-et írunk.

A síző emberke ikonra kattintva a WinQSB a döntési fáknál leírtak szerint kiértékeli a döntési fát, majd a „döntési fa” ikont kiválasztva kirajzolódik a 2.10. ábrán bemutatott döntési fa. Ahhoz, hogy a csomópontok alatt megjelenjenek a várható értékek, be kell jelölni a kiértékelés (Display the expected values for each node or event) mezőt. Ebben az ablakban lehet méretezni a csomópontokat és az éleket is.

A döntési fa első csomópontja alatti érték megadja a végső várható kiadást. Ez az érték 13 904 400 euró. Továbblépve a döntési fán, láthatjuk, hogy a 13 904 400 érték a 4-es csomópont alatt szerepel. Tehát első döntés, hogy alkalmazni kell a geológust. Ekkor két lehetőség van. Ha a geológus földcsuszamlást jósol, akkor az 5-ös csomópont irányába lépünk tovább. Az 5-ös csomóponthoz tartozó várható érték $-21\,000\,000$. Tehát ebben az esetben a minimális várható kiadás 21 000 000 euró, ami úgy érhető el, ha a hulladéktárolót Maksán építik meg. Ha pedig a geológus nem jósol földcsuszamlást, akkor a 7-es csomópont irányába haladunk. Itt a várható érték $-11\,280\,000$. Így ebben az esetben a minimális várható kiadás 11 280 000 euró. Ez úgy érhető el, hogy a telephelyet Csíkszentsimonban építik meg.

Összefoglalva tehát, ha a minisztérium a várható érték elve alapján hozza meg a döntését, és magatartása a kockázattal szemben semleges, akkor geológust alkalmaz, és ha az földcsuszamlást jósol, akkor Maksán, ellenkező esetben pedig Csíkszentsimonban építi meg a tárolót.

b) Kezdjük azzal, hogy meghatározzuk a kiadást abban az esetben, ha a geológus nem kerülne semmibe, azaz a várható értéket mintainformációval ($V\acute{E}MI$). Kiszámítása ugyanúgy történik, mint az előző pontban, csak itt a geológus költsége nulla, azaz a fa leveleinek értékei a geológust alkalmaz



2.10. ábra. A 2.3. mintapélda (Hulladéktároló) döntési fája

ágon abszolút értékben 1 millió euróval nőnek (2.11. ábra). A geológust alkalmaz ág várható értéke a 4. csomópontnál van feltüntetve. Ez lesz az $V\acute{E}MI = -12\,904\,400$.

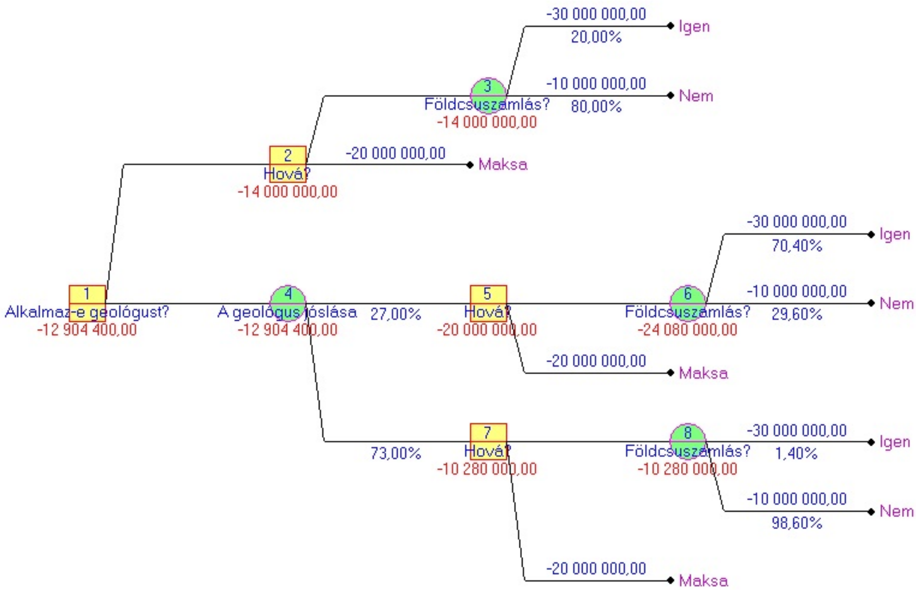
Ezután meghatározzuk azt a vagyoni helyzetet, amelyet akkor érnének el, ha nem alkalmaznak geológust, vagyis a várható értéket az eredeti információ alapján ($V\acute{E}EI$). Ez az érték a 2-es csomópont várható értéke, azaz $V\acute{E}EI = -14000000$.

Tehát a geológus által adott információ várható értéke:

$$\begin{aligned} MIV\acute{E} &= V\acute{E}MI - V\acute{E}EI \\ &= -12\,904\,400 + 14\,000\,000 \\ &= 1\,095\,600 \end{aligned}$$

Az $MIV\acute{E}$ az a legnagyobb pénzösszeg, amit a geológus által megadott információért érdemes kifizetni. Mert ennél nagyobb összeg esetén a kiadás a geológus alkalmazása nélkül kisebb lesz.

c) Bár a földcsuszamlás 20% valószínűséggel következik be, ha találnának egy olyan geológust, aki 100%-ban megjósolja a földcsuszamlás



2.11. ábra. A 2.3. mintapélda (Hulladéktároló) $MIV\acute{E}$-je

bekövetkezését vagy elmaradását, akkor egyértelmű, hogy érdemes elfogadniuk a geológus becslését. Éspedig ha földcsuszamlást jósol, akkor Maksán, ellenkezőleg pedig Csíkszentsimonban építik meg a tárolót. Így a tökéletes információval kapott várható érték

$$\begin{aligned} V\acute{E}TI &= -\left(0.2 \cdot 20\,000\,000 + 0.8 \cdot 10\,000\,000\right) \\ &= -12\,000\,000. \end{aligned}$$

Ezután a tökéletes információ várható értéke

$$\begin{aligned} TIV\acute{E} &= V\acute{E}TI - V\acute{E}EI \\ &= -12\,000\,000 + 14\,000\,000 \\ &= 2\,000\,000 \end{aligned}$$

képlettel számítható ki. Ez az a maximális összeg, amit még érdemes kifizetni egy olyan geológusnak, aki pontosan megmondja, lesz-e földcsuszamlás. A geológus szakvéleményének minősítése:

$$MVIM = \frac{MIV\acute{E}}{TIV\acute{E}} * 10 = 5.48.$$

2.4. mintapélda (Pékség). Egy újonnan alakult pékség friss árujának napi kétszeri kiszállítását tervezi a város 11 boltjába. Tervének megvalósítása előtt azonban szeretne meggyőződni arról, hogy szolgáltatása nem lesz-e veszteséges, ezért döntése előtt elvégezné az igények felmérését. Korábbi tapasztalatok alapján az alábbi információk állnak rendelkezésére:

– amennyiben csupán két bolt igényli a szállítást, akkor új gépkocsi beszerzése nem szükséges, ebben az esetben csak havi fuvaróranövekményt kell figyelembe venni, ami 500 euró;
– amennyiben csak három, négy vagy öt bolt igényli az új szolgáltatást, akkor ez már új gépkocsijárat beszerzését teszi szükségessé, melynek havi fuvaróradíja 300 euró, a gépkocsi havi hiteldíja pedig 400 euró;
– amennyiben több mint öt bolt igényli a kiszállítást, akkor két járatot kell beindítani. Mindkettőnek külön-külön havi 300 euró a fuvaróradíja és 350 euró a hiteldíja.

A szolgáltatás teljes árbevétele az igénylők számától függ. Előzetes számítások alapján, megbecsülték a várható jövedelmeket, és ennek bekövetkezési valószínűségeit (P) az alábbi táblázat tartalmazza:

Boltok száma	**Várható jöved.** (euró)	**P**	**Várható jöved.** (euró)	**P**	**Várható jöved.** (euró)	**P**
1-2 bolt	1000	60%	700	30%	300	10%
3-5 bolt	2000	70%	1500	20%	700	10%
6-11 bolt	5000	70%	2500	10%	1000	20%

Mivel az esetleges új, a célnak megfelelő gépkocsi beszerzése időt igényel, ezért a döntést időben kell meghozni. A járműveket még a szolgáltatás bevezetése előtt meg kell vásárolnia, hogy igény esetén az ügyfelek kiszolgálása azonnal megtörténjen.

Előzetes felmérés hiányában a vállalkozó hajlik arra, hogy 60% valószínűséggel két és 20% valószínűséggel pedig egy gépkocsit vásároljon.

A döntéshozatali kényszer válságos pillanatában egy szakértő jelentkezett, hogy csekély 100 eurós térítés ellenében elvállal egy tájékoztató felmérést. A szakértő díja azon tapasztalati tudás ellenértéke, amelynek birtokában a szakértő megmondja, hogy ha a szolgáltatást a boltok meghatározott száma veszi igénybe, akkor milyen valószínűséggel találja is ezt el. Az alábbi táblázat ezeket a valószínűségeket foglalja össze:

A szakértő becslései	**Az igénybevétel mértéke**		
	1-2 bolt	3-5 bolt	6-11 bolt
becslés: 1-2 bolt	65%	15%	15%
becslés: 3-5 bolt	25%	70%	30%
becslés: 6-11 bolt	10%	15%	55%

a) A vállalkozó hány darab gépkocsit vásároljon, megbízza-e a szakértőt a felmérés elvégzésére?

b) Mennyi az a legnagyobb összeg, amit a szakértőnek a felmérésért érdemes kifizetni?

c) Mennyit érdemes fizetnie egy olyan tökéletes információért, amely pontosan megmondja, hogy hány bolt veszi igénybe a szolgáltatást?

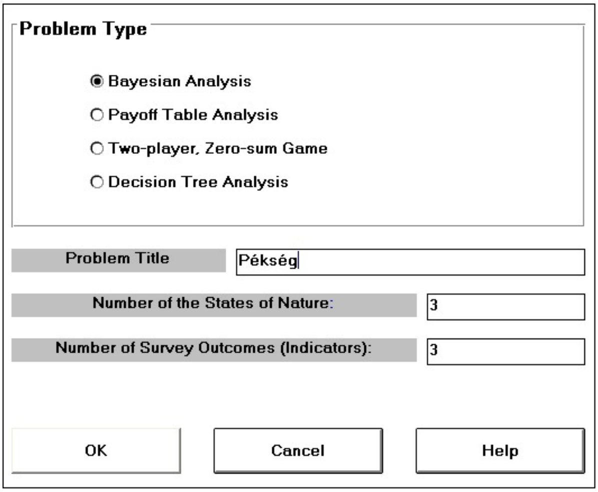
Megoldás

a) Első lépésként a vállalkozó el kell végezze a szakértő által szolgáltatott adatok Bayes-féle elemzését. Bevezeti az alábbi jelöléseket:

A_1: 1-2 bolt veszi igénybe a szolgáltatást;
A_2: 3-5 bolt veszi igénybe a szolgáltatást;
A_3: 6-11 bolt veszi igénybe a szolgáltatást;
B_1: a szakértő becslése, 1-2 bolt veszi igénybe a szolgáltatást;
B_2: a szakértő becslése, 3-5 bolt veszi igénybe a szolgáltatást;
B_3: a szakértő becslése, 6-11 bolt veszi igénybe a szolgáltatást.

A szakértőre vonatkozó táblázat tartalmazza a $P(B_j|A_i)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ találati valószínűségeket (likelihoodokat). Ki kell számítani a $P(A_i|B_j)$ bekövetkezési valószínűségeket a Bayes-tétel segítségével. Ezt a WinQSB döntéselemzési (Decision Analysis) eszköztárának Bayes-elemzés (Bayesian Analysis) segítségével végezzük. Itt meg kell adni a lehetséges események számát (Number of the States of Nature) és a felmérés által adott lehetséges becslések [Number of Survey Outcomes (Indicators)] számát. Ebben a feladatban mind a kettő 3. A Bayes-elemzés eszköztár kezdőablakát mutatja a 2.12. ábra.

Az OK gombra kattintva betöltődik a 2.13. beviteli ablak. Itt első lépésként megadjuk az elnevezéseket. Az Edit menüpontból kiválasztjuk a lehetséges események megnevezései (State of Nature Name) almenüpontot, ahol az eseményeket (State) átnevezzük az igénybevétel mértéke alapján, majd ugyancsak az Edit menüpont becslések megnevezései (Survey Outcome/Indicator Name) almenüpontnál a becsléseket (Indicators) átnevezzük a szakértő becslései alapján.



2.12. ábra. A Bayes-elemzés kezdőtáblája

A táblázat elsődleges valószínűségek (Prior Probability) sorába be kell írni a vállalkozó elsődleges valószínűségi eloszlását az események bekövetkezésére vonatkozóan. Tudjuk, 60%-ban 6-11 bolt (két gépkocsit vásárol), 20%-ban 3-5 bolt (egy gépkocsit vásárol), a megmaradt 20%-ban pedig 1-2 bolt (nem vásárol gépkocsit). A táblázat mezőibe beírjuk a szakértő becsléseire vonatkozó találati valószínűségeket. A táblázat helyes kitöltése esetén a találati valószínűségek összege az oszlopok mentén egy.

Outcome \ State	1-2 bolt	3-5 bolt	6-11 bolt
Prior Probability	0.2	0.2	0.6
becslés:1-2 bolt	0.65	0.15	0.15
becslés: 3-5 bolt	0.25	0.7	0.3
becslés: 6-11 bolt	0.1	0.15	0.55

2.13. ábra. A 2.4. mintapélda Bayes-elemzési adattáblája

A síző emberke ikonra kattintva betöltődik a 2.14. Bayes-elemzés eredménytáblája. Ennek a mezői tartalmazzák az utólagos $P(A_i|B_j)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ valószínűségeket, amelyet a WinQSB a (2.1.) képlet segítségével számolt ki.

Hogyan is kell ezt a táblázatot értelmezni? Például a táblázat első eleme azt mutatja, hogy ha a szakértő becslése 1-2 bolt, akkor annak valószínűsége, hogy valóságban is 1-2 bolt fogja a szolgáltatást megrendelni, 0.52. Teljesen hasonlóan, ha a táblázat második sorának harmadik eleme azt mutatja, hogy a szakértő becslése 3-5 bolt, akkor annak valószínűsége, hogy a valóságban legalább hat bolt megrendeli a szolgáltatást, 0.4865.

Indicator\State	1-2 bolt	3-5 bolt	6-11 bolt
becslés:1-2 bolt	0,52	0,12	0,36
becslés: 3-5 bolt	0,1351	0,3784	0,4865
becslés: 6-11 bolt	0,0526	0,0789	0,8684

2.14. ábra. A 2.4. mintapélda Bayes-elemzési eredménytáblája

Ezek az értékek megmutatják a döntési fa leveleit tartalmazó ágak bekövetkezésének valószínűségeit. Annak utólagos valószínűségei, hogy mi lesz a szakértő becslése, az eredmények (Results) menüpont marginális eloszlások (Show Marginal Probability) eszköztára adja meg (2.15. ábra). A táblázatból kiolvasható, hogy a szakértő $P(B_1) = 0.25$ valószínűséggel 1-2 boltot, $P(B_2) = 0.37$ valószínűséggel 3-5 boltot és $P(B_3) = 0.38$ valószínűséggel 6-11 boltot jósol.

Outcome or Indicator	Marginal Probability
becslés:1-2 bolt	0,25
becslés: 3-5 bolt	0,37
becslés: 6-11 bolt	0,38

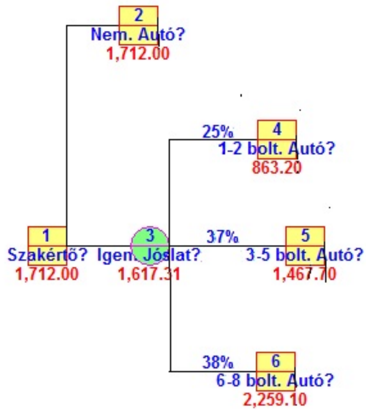
2.15. ábra. Marginális eloszlások a 2.4. mintapéldában

Második lépésként meg kell rajzolni a feladat döntési fáját. Nézzük meg, milyen döntési lehetőségei vannak a vállalkozónak.

I. Igénybe vegye-e a szakértő szolgáltatását?

II. Hány darab gépkocsit vásároljon (nulla, egy vagy kettőt)?

I.1. Ha nem veszi igénybe a szakértő szolgáltatását, akkor döntenie kell, hogy hány gépkocsit vásároljon. Mind a három lehetőséghez egy véletlenszerű esemény tartozik, amelynek szintén három elágazása lehet: 0.2 valószínűséggel 1-2 bolt rendel, 0.2 valószínűséggel 3-5 bolt rendel és 0.6 valószínűséggel pedig legalább 6 bolt. Ezek a kimenetelek tartalmazzák a nyereségeket mutató leveleket.



2.16. ábra. A 2.4. mintapélda (Pékség) döntési fájának kiinduló ágai

II.1. Abban az esetben, ha nem vásárol járművet, és 1-2 bolt rendel árut, akkor a várható jövedelme rendre: 0.6 valószínűséggel $1000 - 500 = 500$, 0.3 valószínűséggel $700 - 500 = 200$ és 0.1 valószínűséggel $300 - 500 = -200$

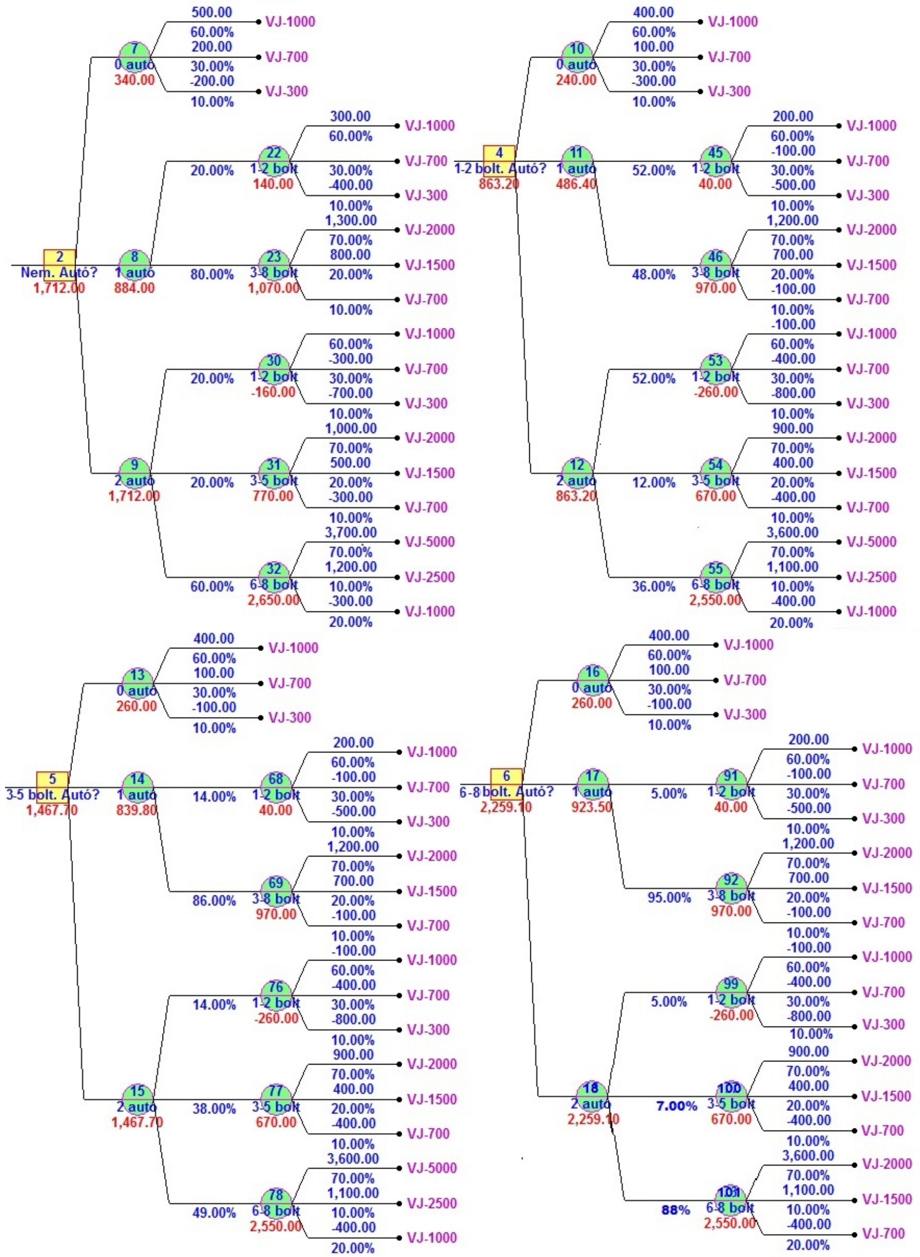
Ha legalább 3 bolt rendel, mivel nincs autója, csak 1-2 boltot tud ezekből a kérésekből felvállalni, így várható jövedelme rendre szintén: 0.6 valószínűséggel 500, 0.3 valószínűséggel 200 és 0.1 valószínűséggel -200.

II.2. Egy jármű vásárlása esetén, ha csak 1-2 bolt rendel, akkor várható jövedelme rendre: 0.6 valószínűséggel $1000 - 300 - 400 = 300$, 0.3 valószínűséggel $700 - 300 - 400 = 0$ és 0.1 valószínűséggel $300 - 300 - 400 = -400$.

Ha legalább 3 bolt rendel, mivel csak egy gépkocsija van, ezért legtöbb 3-5 bolt rendelését tudja vállalni. Így várható jövedelme rendre: 0.7 valószínűséggel $2000 - 300 - 400 = 1300$, 0.2 valószínűséggel $1500 - 300 - 400 = 800$ és 0.1 valószínűséggel $700 - 300 - 400 = 0$.

II.3. Két gépkocsi vásárlása esetén, ha csak 1-2 bolt rendel, akkor legfeljebb egyik gépkocsiját működteti, mert ennek a fuvardíja kisebb, mint ha gépkocsit bérelne, de mindkettőnek a hiteldíját fizetnie kell. Ekkor várható jövedelme rendre: 0.6 valószínűséggel $1000 - 300 - 700 = 0$, 0.3 valószínűséggel $700 - 300 - 700 = -300$ és 0.1 valószínűséggel $300 - 300 - 700 = -700$.

Ha 3-5 bolt rendel, akkor is elég, ha csak az egyik gépkocsiját használja. Ebben az esetben várható jövedelme rendre: 0.7 valószínűséggel $2000 - 300 - 700 = 1000$, 0.2 valószínűséggel $1500 - 300 - 700 = 500$ és 0.1 valószínűséggel $700 - 300 - 700 = -300$.



2.17. ábra. A 2.4. mintapélda (Pékség) döntési fájának lombozata

Ha legalább 6 bolt rendel, akkor már mind a két gépkocsiját kell használja. Ekkor a várható jövedelme rendre: 0.7 valószínűséggel $5000-600-700 = 3700$, 0.1 valószínűséggel $2500 - 600 - 700 = 1200$ és 0.2 valószínűséggel $1000 - 600 - 700 = -300$.

Ezeket az értékeket a döntési fa „Nem ágában"tüntettük fel (2.17. ábrán a 2. csomóponthoz tartozó rész).

I.2. A kezdő döntési csomópont másik ága, hogy alkalmazza a szakértőt (2.17. ábrán a 4., 5. és 6. csomópontokhoz tartozó részek). Ekkor az ágak végződésén levő csomópontok azt a véletlenszerű eseményt jelképezik, amelynek három kimenetele lehet. A szakértő $P(B_1) = 0.25$ valószínűséggel 1-2 boltot, $P(B_2) = 0.37$ valószínűséggel 3-5 boltot és $P(B_3) = 0.38$ valószínűséggel 6-11 boltot jósol. Mind a három esetben a kimenetelek végződésén egy döntési csomópont van. Itt a vállalkozó el kell döntse, hány darab gépkocsit vásárol. A továbbiakban a II.1–II.3. bekezdéseknél leírtak szerint épül fel a fa, csak a nyereségek mindenütt 100 euróval kisebbek lesznek, hiszen ezt az összeget a vállalkozó ki kell fizesse a szakértőnek. Szintén mások lesznek a valószínűségek az árut igénylő boltok számánál, mivel itt a 0.2, 0.2, 0.6 valószínűségeket helyettesíteni kell az utólagos valószínűségekkel. A fa teljes felépítését tartalmazzák a 2.16. és 2.17. ábrák.

Miután lapon vázoltuk a döntési fát, összeszámláljuk a csomópontok és a levelek számát. Ennek 110-et kapunk. Ezekután a WinQSB döntéselemzés kezdőtáblájának csomópontok száma mezőjébe beírjuk a 110-et, és az OK gombra kattintunk. A megjelent adattáblát az előző feladatban leírtak alapján töltjük ki.

A fa elemzése után látható, hogy nem érdemes a szakértőt alkalmazni, mivel ebben az esetben a várható jövedelem 1617.31 euró, és ha nem alkalmaz, csak a vállakozó a saját információja alapján dönt, akkor várható jövedelme 1712 euró. Tehát kockázatsemleges magatartás esetén, a várható érték elve alapján hozható optimális döntés: nem alkalmazza a szakértőt és vásárol két gépkocsit.

b) Ha még egyszer a WinQSB segítségével elemzzük a döntési fát, de úgy, hogy a nyereségből nem vonjuk le a szakértő díját, akkor a döntési fa várható értéke az $V\acute{E}MI = 1717.31$. A $V\acute{E}EI$ pedig a 2. csomópont várható értéke, azaz 1712. Következésképpen az

$$MIV\acute{E} = 1717.31 - 1712 = 5.31.$$

Tehát a szakértő által nyújtott információért maximálisan 5.31 eurót érdemes kifizetni.

c) A tökéletes információ várható értékét megkapjuk, ha feltételezzük, hogy bár a vállalkozó most is hajlik arra, hogy 60% valószínűséggel két és 20% valószínűséggel pedig egy gépkocsit vásároljon, de valaki pontosan megmondja, hogy 1-2 vagy 3-5 vagy 6-11 bolttól kap megrendelést. Ha ezt ő tudja, akkor a maximális várható nyereségei rendre: $m_1 = 0.6 \cdot 1000 + 0.3 \cdot 700 + 0.1 \cdot 300 - 500 = 340.0$, $m_2 = 0.7 \cdot 2000 + 0.2 \cdot 1500 + 0.1 \cdot 700 - 700 = 1070$, $m_3 = 0.7 \cdot 5000 + 0.1 \cdot 2500 + 0.2 \cdot 1000 - 600 - 700. = 2650.0$ Tehát a

$$V\acute{E}TI = 0.2 \cdot 340 + 0.2 \cdot 1070 + 0.6 \cdot 2650 = 1764.$$

Következésképpen a

$$TIV\acute{E} = 1872 - 1712 = 160.$$

Ez az összeg, amit maximálisan érdemes kifizetnie bármilyen szakértőnek. A szakértő által adott információ minősítése:

$$MVIM = \frac{MIV\acute{E}}{TIV\acute{E}} * 10 = 0.331.$$

Az alacsony minősítés azzal magyarázható, hogy a szakértő csak a boltok számára fogalmazott meg becslést, de az egyes boltok várható jövedelmére nincs információja.

2.4. Bayes-féle következtetési hálók

Az előző paragrafus feladataiban a feltételes valószínűségek egy táblázatban voltak összefoglalva. Például a Pékség feladatnál a szakértő véleményét a 2.13. táblázat tartalmazta. Ennek a táblázatnak a grafikus szemléltetése a 2.18. ábrán látható, ahol X valószínűségi változó a való-

2.18. ábra. A 2.4. mintapélda (Pékség) Bayes-féle következtetési hálója

ságot mutatja (ebben az esetben azt mutatja, hogy hány bolt veszi igénybe a szolgáltatást), az Y valószínűségi változó pedig a becsült eloszlást adja meg. Az irányított él azt jelzi, hogy a múltban az X méréséből az Y-ra következtettek. Az X eloszlását a priori valószínűségek adják meg, azaz

$$X = \begin{pmatrix} 1-2 \text{ bolt} & 3-5 \text{ bolt} & 6-11 \text{ bolt} \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

A 2.13. táblázat pedig a $P\left(Y = y | X = x\right)$ feltételes valószínűségeket tartalmazza, ahol

$$x \in \{1-2 \text{ bolt}, 3-5 \text{ bolt}, 6-11 \text{ bolt}\},$$
$$y \in \{\text{becsült } 1-2 \text{ bolt}, \text{becsült } 3-5 \text{ bolt}, \text{becsült } 6-11 \text{ bolt}\}.$$

Ezt a gráfot az X és Y csomópontokkal és az X eloszlással, valamint a megadott feltételes valószínűséggel Bayes-féle következtetési hálónak nevezik. Általános esetben ez bonyolultabb is lehet.

A ***Bayes-féle következtetési háló*** egy irányított gráf, amelyben minden csomóponthoz számszerű valószínűségi információk vannak csatolva, és az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik.

1. A háló csomópontjai diszkrét vagy folytonos valószínűségi változók.

2. Az irányított élek (nyilak) csomópontpárokat kötnek össze. Ha létezik nyíl az X csomóponttól az Y csomópontig, azt mondjuk, hogy az X *szülője* az Y-nak.

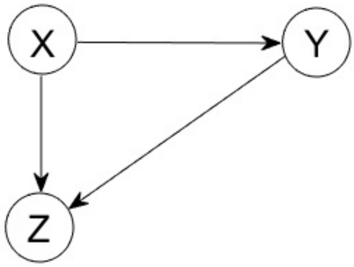
3. A szülők hatását az X_i csomópontra a $P(X_i|Szülok(X_i))$ feltételes valószínűség adja meg.

4. A gráf nem tartalmaz irányított kört.

Bayes tételét alkalmazva egy adott $X = x$ lekérdezésre és $Y = y$ megfigyelt eseményre, annak valószínűsége, hogy a X valószínűségi változó értéke éppen x az alábbi képlettel adható meg:

$$\begin{aligned} P\left(X = x|Y = y\right) &= \frac{P\left(X = x \text{ és } Y = y\right)}{P\left(Y = y\right)} \\ &= \frac{\sum\limits_{z} \prod\limits_{i=1}^{n} P\left(X_i = x_i|Szülok(X_i)\right)}{\sum\limits_{u} \sum\limits_{z} \prod\limits_{i=1}^{n} P\left(X_i = x_i|Szülok(X_i)\right)}, \end{aligned}$$

ahol z a meg nem figyelt változók értékeinek összes lehetséges kombinációját, u pedig az X célváltozó összes lehetséges értékét veheti fel. A képletben szereplő valószínűségek kiolvashatók a Bayes-féle következtetési háló feltételes valószínűségi eloszlásaiból.



2.19. ábra. Három csomópontos Bayes következtetési háló

Például a 2.19. háló kiindulópontja az X. Ez a ***gyökér-változó*** és eloszlása:

$$X = \begin{pmatrix} i & h \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Az Y valószínűségi változó szülője az X, és ezért Y feltételes valószínűség formájában van megadva:

	$x = i$	$x = h$
$P(Y = i \| X = x)$	0.4	0.2
$P(Y = h \| X = x)$	0.6	0.8

A Z valószínűségi változónak két szülője van, és eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza:

x	y	$P(Z = i \| X = x$ és $Y = y)$	$P(Z = h \| X = x$ és $Y = y)$
i	i	0.2	0.8
i	h	0.5	0.5
h	i	0.7	0.3
h	h	0.6	0.4

Határozzuk meg az Y és a Z valószínűségi változókat. Mennyi a $P(X = i|Z = h)$ valószínűség? Teljes valószínűség tételét alkalmazzuk táblázatos alakba felírva:

	$X = i$	$X = h$	$P(Y = y)$
Priori	0.3	0.7	
$P(Y = i)$	0.4	0.2	$0.3 * 0.4 + 0.7 * 0.2 = 0.26$
$P(Y = h)$	0.6	0.8	$0.3 * 0.6 + 0.7 * 0.8 = 0.74$

Következésképpen,

$$Y = \begin{pmatrix} i & h \\ 0.26 & 0.74 \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan járunk el a Z esetén is, de itt a priori valószínűségek az X és Y együttes valószínűségi változó értékei lesznek:

	$X = i$ és $Y = i$	$X = i$ és $Y = h$	$X = h$ és $Y = i$	$X = h$ és $Y = h$	$P(Z = z)$
Priori	$0.3 * 0.26 = 0.078$	$0.3 * 0.74 = 0.222$	$0.7 * 0.26 = 0.182$	$0.7 * 0.74 = 0.518$	
$P(Z = i)$	0.2	0.5	0.7	0.6	0.5648
$P(Z = h)$	0.8	0.5	0.3	0.4	0.4352

Következésképpen,

$$Z = \begin{pmatrix} i & h \\ 0.5648 & 0.4352 \end{pmatrix}.$$

Bayes tételét alkalmazva, az utóbbi feltételes valószínűségi táblázatból kiolvasható, hogy:

$$\begin{aligned} P(X = i | Z = h) &= \frac{P(X = i \text{ és } Z = h)}{P(Z = h)} \\ &= \frac{0.078 * 0.8 + 0.222 * 0.5}{0.4352} = 0.398 \end{aligned}$$

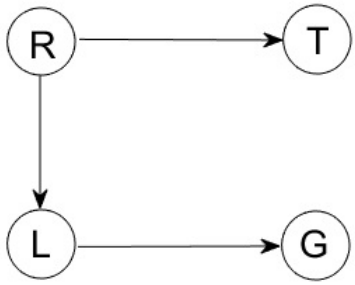
2.5. mintapélda (Humánerőforrás-elemzés). Képzelje el, hogy egy nagy vállalat humánerőforrás osztályán dolgozik, és embereket kell felvennie. Úgy gondolja, hogy egy pályázó jól el tudja végezni az adott tevékenységet, ha felelős magatartást mutat és rendezett. Ezek a kompetenciák tanulási szokásaiban és implicit módon a tanulmányi eredményeiben is meg kell mutatkozzanak. Bevezetünk négy valószínűségi változót:

- T – a pályázó el tudja (1) vagy nem tudja elvégezni (0) az álláshoz tartozó tevékenységeket.
- R – a pályázó rendezett (1) vagy sem (0).
- L – rendszeresen tanul (1), vagy nem tanul rendszeresen (0).
- G – tanulmányi eredményeinek szintjei: alacsony (0), közepes (1), vagy jó (2).

Az állás tevékenységeire vonatkozó statisztikai vizsgálatokat az alábbi táblázatok tartalmazzák:

	$x = 1$	$x = 0$
$P(T = 1 \| R = x)$	2/3	1/3
$P(T = 0 \| R = x)$	1/3	2/3

	$x = 1$	$x = 0$
$P(L = 1 \| R = x)$	2/3	1/3
$P(L = 0 \| R = x)$	1/3	2/3



2.20. ábra. Humánerőforrás-elemzés mintapélda Bayes-féle következtetési hálója

	$x=1$	$x=0$
$P\,(G=2\|L=x)$	$2/3$	0
$P\,(G=1\|L=x)$	$1/3$	$1/3$
$P\,(G=0\|L=x)$	0	$2/3$

Ha a jelöltnek jó a tanulmányi eredménye, és a felmérés alapján a felelős magatartását és rendezettségét az alábbi eloszlás adja meg:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

akkor mi a valószínűsége, hogy a jelölt el tudja végezni az álláshoz tartozó tevékenységeket?

Megoldás. A feladat Bayes-féle következtetési hálóját a 2.20. ábra szemlélteti.

Ha nem vesszük figyelembe a tanulmányi eredményét, akkor a teljes valószínűség tétele alapján

	$R=1$	$R=0$	
Priori	$2/3$	$1/3$	
$P\,(T=1)$	$2/3$	$1/3$	$2/3 * 2/3 + 1/3 * 1/3 = 5/9$
$P\,(T=0)$	$1/3$	$2/3$	$2/3 * 1/3 + 1/3 * 2/3 = 4/9$

Következésképpen, ha csak a pályázó rendezettségét vesszük figyelembe, annak valószínűsége, hogy el tudja végezni az álláshoz tartozó tevékenységeket, $5/9 = 0.5555 = 55.55\%$.

Ha figyelembe vesszük a jelölt tanulmányi eredményét, akkor a $P\,(T = 1|G = 2)$ feltételes valószínűséget kell kiszámolni. Ennek érdekében a Bayes-féle következtetési hálóban R csomóponttól a G csomópontig haladva kiszámítjuk a G-re vonatkozó valószínűségeket.

Kiindulunk az ismert $P\,(R = x|L = y)$ feltételes valószínűségek táblázatából:

	$R = 1$	$R = 0$	
Priori	$2/3$	$1/3$	
$P\,(L = 1)$	$2/3$	$1/3$	$5/9$
$P\,(L = 0)$	$1/3$	$2/3$	$4/9$

Majd az alábbi táblázatban kiszámoljuk a $P\,(G = x)$ valószínűségeket:

	$L = 1$	$L = 0$	
Priori	$5/9$	$4/9$	
$P\,(G = 2)$	$2/3$	0	$5/9 * 2/3 + 4/9 * 0 = 10/27$
$P\,(G = 1)$	$1/3$	$1/3$	$5/9 * 1/3 + 4/9 * 1/3 = 9/27$
$P\,(G = 0)$	0	$2/3$	$5/9 * 0 + 4/9 * 2/3 = 8/27$

Bayes tételét alkalmazva a G csomóponttól az R csomópontig haladva kiszámoljuk a $P\,(L = x|G = y)$, valamint a $P\,(R = x|L = y)$ feltételes valószínűségeket:

$P\,(L = x\|G = y)$	$L = 1$	$L = 0$	
Priori	$5/9$	$4/9$	
$G = 2$	$\frac{2/3*5/9}{10/27} = 1$	$\frac{0*4/9}{10/27} = 0$	$10/27$
$G = 1$	$\frac{1/3*5/9}{9/27}\frac{5}{9}$	$\frac{1/3*4/9}{9/27} = \frac{4}{9}$	$9/27$
$G = 0$	$\frac{0*5/9}{8/27} = 0$	$\frac{2/3*4/9}{8/27} = 1$	$8/27$

Ebből a táblázatból kiolvashatók az alábbi információk:

- ha egy jelöltnek jó a minősítése ($G = 2$), akkor rendszeresen tanul ($L = 1$);
- ha egy jelöltnek közepes a minősítése ($G = 1$), akkor annak valószínűsége, hogy rendszeresen tanul ($L = 1$) $5/9$;
- ha egy jelöltnek gyenge a minősítése ($G = 0$), akkor nem tanul rendszeresen ($L = 0$).

Bayes tételét alkalmazva, hasonló módon kiszámoljuk a $P(R=x|L=y)$ feltételes valószínűségeket:

$P(R=x\|L=y)$	$R=1$	$R=0$	
Priori	$2/3$	$1/3$	
$L=1$	$\frac{2/3*2/3}{5/9}=\frac{4}{5}$	$\frac{1/3*1/3}{5/9}=\frac{1}{5}$	$5/9$
$L=0$	$\frac{1/3*2/3}{4/9}=\frac{1}{2}$	$\frac{2/3*1/3}{4/9}=\frac{1}{2}$	$4/9$

Ebből a táblázatból kiolvashatók az alábbi információk:

- ha egy jelölt rendszeresen tanul ($L=1$), akkor annak valószínűsége, hogy rendezett is, ($R=1$) $4/5$;
- ha egy jelölt nem tanul rendszeresen ($L=0$), akkor annak valószínűsége, hogy mégis rendezett legyen, ($R=1$) $1/2$.

Összefoglalva, ha egy jelöltnek jó a minősítése ($G=2$), akkor rendszersen tanul ($L=1$), és annak valószínűsége, hogy rendezett is, ($R=1$) $4/5$. Ezt az információt bevezetjük a $P(R=x|T=y)$ táblázatába:

$P(R=x\|T=y)$	$R=1$	$R=0$	
Priori	$4/5$	$1/5$	
$P(T=1)$	$2/3$	$1/3$	$4/5*2/3+1/5*1/3=9/15$
$P(T=0)$	$1/3$	$2/3$	$4/5*1/3+1/5*2/3=6/15$

A táblázatból kiolvasható, hogy ha egy jelöltnek jó a minősítése, akkor annak valószínűsége, hogy a tevékenységeket el is tudja végezni, $9/15=0.6=60\%$. Látható, hogy a jelölt jó minősítése növelte az előzetes információ alapján kapott 55.55% valószínűségértéket.

Számos valós problémában fordulnak elő folytonos mennyiségek, mint a magasság, tömeg, hőmérséklet és pénz. A folytonos változóknak végtelen számú értéke lehet, így lehetetlen feltételes valószínűségeket megadni minden egyes értékre. Egy lehetséges módszer a folytonos változók kezelésére, ha elkerüljük őket diszkretizálással – azaz felosztjuk a lehetséges értékeket intervallumok adott halmaza szerint. A diszkretizálás néha elfogadható megoldás, de gyakran eredményezi a pontosság jelentős romlását, valamint nagyon nagy hálót eredményez.

Egy másik megoldás, ha a valószínűség sűrűségfüggvények alapvető családjaiból választunk, amelyek véges számú paraméterrel megadhatók. Például a normál eloszláshoz $N(m;\sigma^2)$, két paraméter tartozik: az m az átlag és a σ^2 szórásnégyzet. A helyzet, amelynek elemzésével foglalkozunk, a következőképpen írható le. A döntéshozónak két lehetséges cselekvés közül kell választania, amellyel a várható profitot szeretné maximalizálni. A várható profit mindegyik cselekvés esetén egy normál eloszlású $X \sim N(m;\sigma^2)$ valószínűségi változó várható értékének lineáris függvénye.

Tekintsük a Pékség példa folytonos változatát.

2.6. mintapélda (Pékség – folytonos változat). Egy pékségnek bolt-hálózata van az egész városban. A pékség egy újabb termék bevezetését fontolgatja. Korábbi tapasztalatok alapján a pékség most úgy gondolja, hogy az új termék havi eladása minden egyes boltjában normális eloszlású egy ismeretlen m várható értékkel és $\sigma^2 = 121$ szórásnégyzettel. Az új termék bevezetése minden boltba havi fix 100 lejes költséget jelent. Az új termék eladási ára 5 lej, és ez 3 lej változó költséget tartalmaz. A pékség két lehetőség közül választhat. Bevezeti, vagy nem vezeti be az új terméket. Ha bevezeti, akkor a boltonkénti várható nyereség

$$Q = (5-3) * m - 100 = 2m - 100 \text{ lej.}$$

A jobb döntés reményében a pékség próbaárusítást is végezhet valamelyik boltban $n = 12$ hónapig folyamatosan árusítják az új terméket, és ezalatt 960 új terméket adtak el. Határozzuk meg az utólagos eloszlást, és hogy ez alapján érdemes-e bevezetni a terméket.

Megoldás. A döntéshozó megkérdi a boltosokat, hogy szerintük átlagosan hány darabot lehetne eladni az új termékből. A boltosok válasza alapján az átlagolt becslés: $m_{priori} = 110$. Mivel normál eloszlásban gondolkodik, ezért az egyes boltokban az eladások várható száma ugyanakkora valószínűséggel lesz 110 felett, mint 110 alatt. A σ^2_{priori} becsléséhez megkéri a boltosokat arra is, hogy becsüljék meg azt a k számot, hogy $p = 50\%$ eséllyel az új termék eladási száma a $[110-k, 110+k]$ értéktartományba kerüljön. Az így kapott k értékek átlaga 9.8. Ebből az információból kiszámolható a σ^2_{priori}. A standard normál eloszlás eloszlásfüggvényének értékeit tartalmazó táblázat alapján $p = 0.5$-nek megfelel a $\Phi(p) = 0.69$ és a σ_{priori} kiszámítható a

$$\frac{k}{\sigma_{priori}} = \Phi(p)$$

összefüggésből. Vagyis $\sigma_{priori} = 14.203$. Így a boltokban eladott új péktermékek eloszlása $N\left(110; 14.203^2\right)$. Priori becslés alapján az egyes boltokban egy hónapi várható nyereség

$$Q_{priori} = 2m_{priori} - 100 = 120 \text{ lej.}$$

Tehát a pékségnek az előzetes becslés alapján érdemes bevezetni az új terméket.

Igazolható, hogy a próbaárusítással kapott mintainformáció alapján az eladások szintén normál eloszlást mutatnak, ahol

$$m_n = \frac{960}{12} = 80,$$
$$\sigma_{pos}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_{priori}^2} + \frac{n}{\sigma^2}} = 9.6033$$
$$m_{pos} = \left(\frac{\sigma_{pos}}{\sigma_{priori}}\right)^2 m_{priori} + n\left(\frac{\sigma_{pos}}{\sigma}\right)^2 m_n = 81.428,$$

Így a boltokban eladott új péktermékek eloszlása utólagos becslés alapján $N\left(m_{pos}; \sigma_{pos}^2\right) = N\left(81.428; 9.6033\right)$. Utólagos becslés alapján az egyes boltokban egy hónapi várható nyereség

$$Q_{pos} = 2m_{pos} - 100 = 62.856 \text{ lej}.$$

Tehát a pékségnek az utólagos becslés alapján is érdemes bevezetni az új terméket.

2.5. Döntési fa elemzése a kumulált kilátáselmélet alapján

2.7. mintapélda (Hulladéktároló mintapélda elemzése a kumulált kilátáselmélet szemszögéből). A 2.3. mintapéldát egy pluszinformációval egészítsük ki: a minisztériumnak 15 millió euró áll rendelkezésre a projekt megvalósításához.

a) Elemezzük a feladatot egy olyan döntéshozó szemszögéből is, amely a kumulált kilátáselmélet elvei alapján dönt.

b) Vizsgáljuk meg, hogy a döntéshozó hasznosságérzékelése miként változik a referenciaértékek függvényében. Próbáljuk meghatározni azokat a referenciaértékeket, amelyeknél a döntés megváltozik.

Megoldás.

a) Mint az eredeti feladatban, először Bayes-elemzéssel meghatározzuk a geológus szakértelmére vonatkozó utólagos valószínűségeket. Ezeket már kiszámoltuk a 2.3. mintapéldánál. Az alábbi táblázat tartalmazza az utólagos valószínűségeket.

	Földcsuszamlás lesz	Nem lesz földcsuszamlás	Marg. val.
Priori	0.2	0.8	
Földcsuszamlást jelez	0.704	0.296	0.27
Nem jelez földcsuszamlást	0.014	0.986	0.73

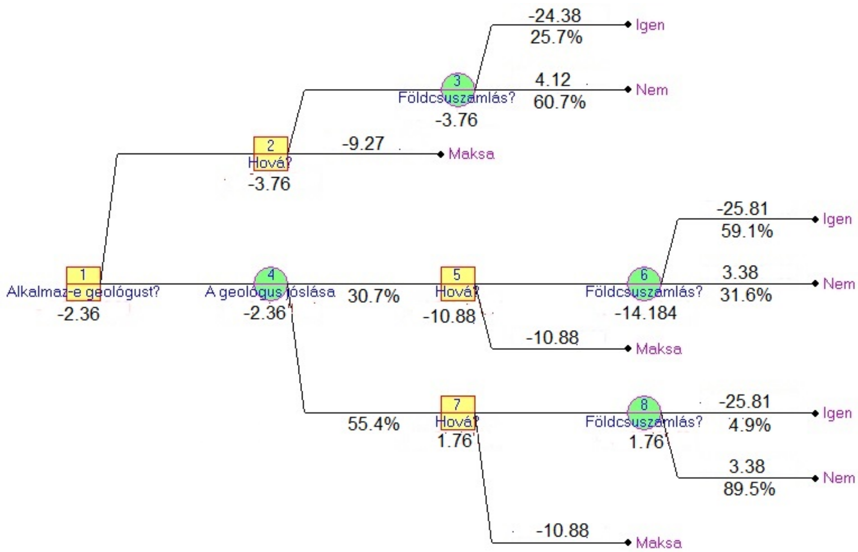
Ezután kiszámoljuk a kimenetelek hasznosságát az (1.1) értékfüggvény segítségével. Mivel a minisztérium döntéshozóinak nem ismerjük a helyzettel kapcsolatos hasznosságaikat, ezért az empirikusan meghatározott KT paramétereket használjuk: $\alpha = \beta = 0.88$, $\lambda = 2.25$. Referenciaérték $W = 15$ millió euró. A döntéshozók nyereségként értékel minden olyan összeget, ami a W-ből megmarad a tároló megépítése után (prémium), és veszteségként minden olyan összeget, amit még a tároló megépítésére kell fordítaniuk (büntetés). Ezért a döntési fa kimenetelén megjelenő összegekhez hozzáadjuk a W-t. Az így kapott értékeknek kiszámoljuk a hasznosságát:

x(millió euró)	$v(x)$
-15	-24.386
5	4.122
-5	-9.274
-16	-25.811
4	3.387
-6	-10.888

Majd kiszámoljuk a döntéshozó valószínűségekre vonatkozó kételyeit az (1.2) súlyfüggvények segítségével:

p	$\omega^-(p)$	$\omega^+(p)$
0.2	0.257	0.261
0.8	0.669	0.607
0.704	0.591	0.536
0.296	0.296	0.316
0.014	0.049	0.066
0.986	0.933	0.895
0.27	0.307	0.302
0.73	0.611	0.554

A feladat 2.21. döntési fáján az így kapott értékekre lecseréljük a kimeneti értékeket és a valószínűségeket. Kiértékeljük a 3., 6. és 8. csomópontok



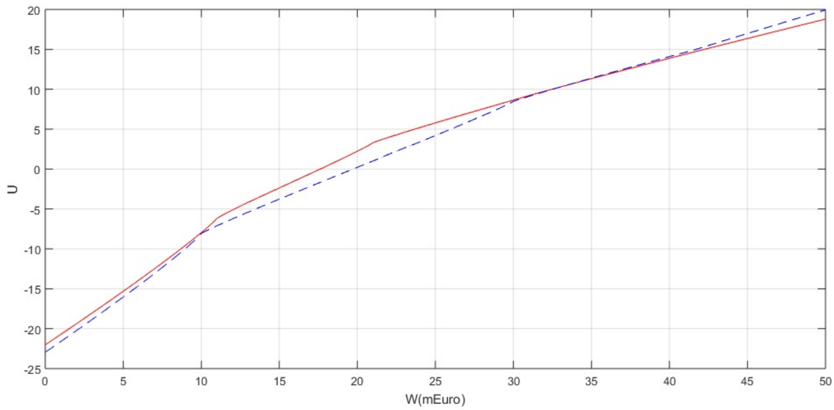
2.21. ábra. Hulladéktároló mintapélda döntési fája a kumulált kilátáselmélet szemszögéből

hasznosságát az (1.3) értékelő függvénnyel, majd a 2., 5. és 7. csomópontokban azt a döntést választjuk, melynek nagyobb a hasznossági érték. A kiválasztott alternatívákra kiszámoljuk a 4. és az első csomópont hasznossági értékeit.

A számolás eredményei:

$$U\left(6\right)=-25.811*0.591+3.387*0.316=-14.184$$
$$U\left(8\right)=-25.811*0.049+3.387*0.895=1.767$$
$$U(3)=-24.386*0.257+4.122*0.607=-3.765$$
$$U(5)=\max\left\{U\left(6\right),v\left(-6\right)\right\}=\max\left\{-14.184,-10.888\right\}=-10.888$$
$$U(7)=\max\left\{U\left(8\right),v\left(-6\right)\right\}=\max\left\{1.767,-10.888\right\}=1.767$$
$$U(2)=\max\left\{U\left(3\right),v\left(-5\right)\right\}=\max\left\{-3.765,-9.274\right\}=-3.765$$
$$U(4)=U(5)*\omega^{-}\left(0.27\right)+U(7)*\omega^{+}\left(0.73\right)=-2.364$$
$$U(1)=\max\left\{U\left(2\right),U\left(4\right)\right\}=-2.364$$

Ezek alapján a helyes döntés: érdemes alkalmazni a geológust. Ha a geológus azt mondja, „lesz földcsuszamlás”, akkor Maksán érdemes építeni,



2.22. ábra. A W függvényében rajzoltuk meg a 2. és 4. csomópontok U hasznossági értékeit. Folytonos vonal a 4., szaggatott vonal pedig a 2. csomópont U hasznosságait jelöli.

ha pedig a geológus azt mondja, „nem lesz földcsuszamlás", akkor pedig Csíkszentsimonban érdemes építeni.

b) Elemezzük azt, hogy az első csomópont hasznossági értéke hogyan függ a 2. és 4. csomópontok hasznossági értékeitől. Ennek érdekében a W referenciaértéket változtatjuk a $[0, 50]$ intervallumba, majd megrajzoljuk a 2. és 4. csomópontok hasznosságait a W függvényében.

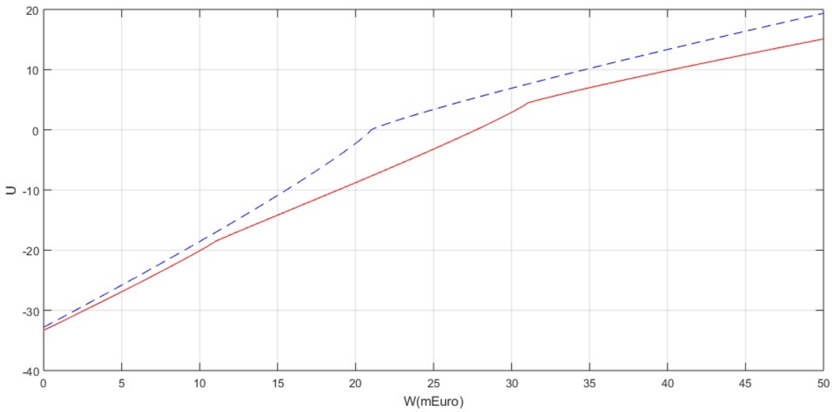
A 2.22. grafikonról leolvasható: ha $W \leq 33$ millió euró, a 2. csomópont értéke mindig a 4. csomópont értéke alatt van, ezért az első döntés, hogy érdemes alkalmazni a geológust. Ha pedig $W > 33$, akkor pedig nem érdemes alkalmazni a geológust.

Megnézzük a 7. csomópont hasznosságának a függését a W-től.

A 2.23. ábrán látható, hogy a 8. csomópont értéke mindig a 9. kimenetel hasznossági értéke alatt van, ezért, ha a geológus „nem lesz földcsuszamlás"-t jelez, akkor a „Maksán épít" döntést érdemes választani.

Majd elemezzük az 5. csomópont hasznosságának függését a W-től. A 2.24. ábrán látható, hogy a 6. csomópont hasznossági értéke mindig a 12. kimenetel hasznossági értéke felett van, ezért ha a geológus „lesz földcsuszamlás"-t jelez, akkor a „Csíkszentsimonban épít" döntést érdemes választani.

A végén megvizsgáljuk, hogy a 2. csomópont hogyan függ a W-től.



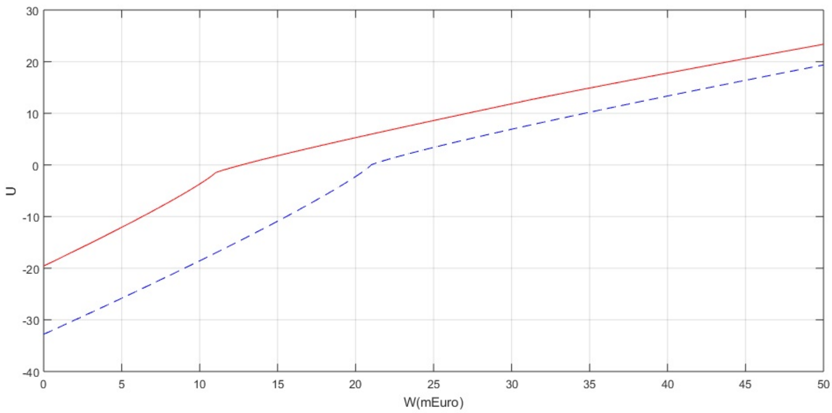
2.23. ábra. A W függvényében rajzoltuk meg a 8. csomópont és 9. kimenet U hasznossági értékeit. A folytonos vonal a 8. csomópont, a szaggatott vonal pedig a 9. kimenet U hasznosságait jelöli

A 2.22. ábrán látható, hogy a 2. csomópont választása csak akkor következik be, ha W értéke nagyobb, mint 33, ezért itt a 2.25. grafikonnak csak a $W \geq 33$ része érdekel. Itt látható, hogy ha $W \leq 41$, akkor a 3. csomópont hasznossága nagyobb, mint a 15. kimenet hasznossága. Ebben az esetben a „Csíkszentsimonban épít”, ha pedig $W > 41$, akkor pedig a „Maksán épít” döntést érdemes választani.

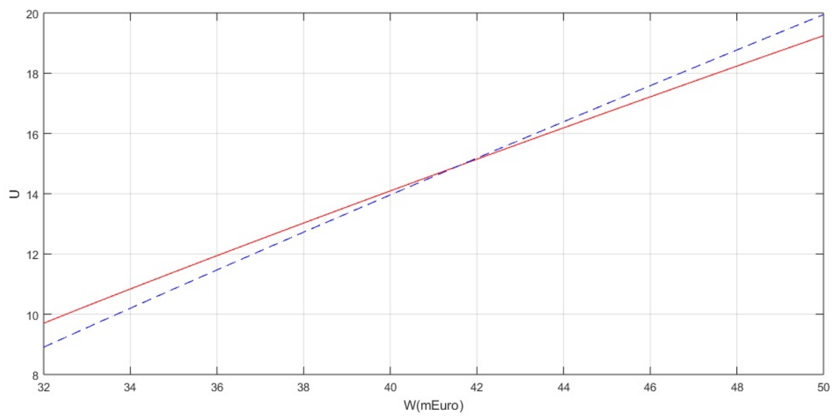
Összefoglalva:

- ha $W \leq 33$, akkor a minisztériumnak érdemes alkalmaznia a geológust. Ha a geológus azt mondja, „lesz földcsuszamlás”, akkor Maksán érdemes építenie, ha pedig a geológus azt mondja, „nem lesz földcsuszamlás”, akkor Csíkszentsimonban érdemes építenie;
- ha $33 < W \leq 41$, akkor a minisztériumnak nem szükséges alkalmaznia a geológust, és Csíkszentsimonban érdemes építenie.
- ha $W > 41$, akkor a minisztériumnak nem szükséges alkalmaznia a geológust, és Maksán érdemes építenie.

A feladat eredménye rávilágít egy vásárlási magatartásra: ha valakinek sok pénze van, és meg akar vásárolni egy drágább terméket, alapvetően nem sokat kísérletezik, hanem bemegy az első üzletbe, és megvásárolja a terméket. Ha pedig valakinek kisebb a tőkéje, akkor előbb piackutatást végez, és utána vásárol.



2.24. ábra. A W függvényében rajzoltuk meg a 6. csomópont és a 12. kimenet U hasznossági értékeit. A folytonos vonal a 6. csomópont, a szaggatott vonal pedig a 12. kimenet U hasznosságait jelöli



2.25. ábra. A W függvényében rajzoltuk meg a 3. csomópont és a 15. kimenet U hasznossági értékeit. A folytonos vonal a 3. csomópont, a szaggatott vonal pedig a 15. kimenet U hasznosságait jelöli

2.6. Kitűzött feladatok

1. Egy üzem, ahhoz, hogy elkerülje a rövid távú termelési kapacitásának túllépését, két új termék rövid gyártási folyamatát tervezi, egy hőmérséklet- vagy egy nyomásérzékelőét. Az egyes termékek piacát ismerjük. Tudjuk, amennyiben sikeres a legyártási folyamatuk, akkor 1 000 000 lejes bevétel származhat a hőmérők eladásából, míg a nyomásérzékelők eladásából 400 000 lejes bevétellel számolhatunk. Egyik összeg sem tartalmazza a fejlesztési költségeket. De az is előfordulhat, hogy a termékeket nem tudjuk teljesen kifejleszteni. Ha a fejlesztés sikertelen, akkor a terméket nem lehet értékesíteni, és a fejlesztési költségek veszteségként jelentkeznek. A fejlesztési költség 100 000 lej a hőmérőnél és 10 000 lej a nyomásérzékelőnél. A fejlesztés sikerének valószínűsége 0.5 a hőmérő és 0.8 a nyomásérzékelő esetében.
   Várható érték elvét alkalmazva, melyik termék fejlesztésébe érdemes az üzemnek befektetni?
2. Egy vállalat fontolgatja, hogy ajánlatot tegyen-e egy nemzetközi cégnek egy megbízatási szerződés megkötésére. Az előzetes becslések alapján úgy vélik, hogy az ajánlat előkészítése 10 000 euróba fog kerülni, annak az esélye, hogy az ajánlatukat a cég fontolóra veszi, 50%. Ebben az esetben a vállalat újabb adatokat kell szolgáltasson, amely költsége 5000 euróra becsülhető. Ha az ajánlatuk ebben az esetben is meggyőző volt, csak akkor kapják meg a megbízatást. A feladat teljesítéséhez szükséges agyagi és laboratóriumi költségek 127 000 euróba kerülnek. Az ajánlatba három árat tüntethetnek fel 155 000, 170 000 és 190 000 eurót. Annak a valószínűsége, hogy ezen árajánlatok mellett a szerződés megköttetik, 0.90, 0.75, illetve 0.35. A várható érték elve alapján határozzuk meg a vállalat optimális cselekedeteinek sorozatát!
3. Az FÜ fémügynökség megvásárolta a lehetőséget, hogy egymillió kg részlegesen finomított ércet vásároljon kilogrammonként 5 lejért. Az érc több különböző termékké alakítható, amelyeket a félvezetők gyártása során használnak. Az ügynökség úgy becsli, hogy a behozatal után 9 lejért eladhatja az ércet. A kormány azonban jelenleg tárgyalásokat folytat az eladóval, amelynek következményeként megtilthatja olyan termékek behozatalát, amelyek magukban foglalják a szóban forgó ércet. Ha ez bekövetkezik, akkor a fémügynökségnek

1 lej/kg összegű bírságot kell fizetnie az eladónak, hogy érvényteleníts az érc megvásárlását. Az ügynökség felkér egy elemző közgazdászt, hogy segítsen a helyes döntés meghozatalában. Az elemzővel folytatott beszélgetés:

Elemző: Szóval, megvásárolhatja az egymillió kilogramm ércet 5 lejért kilogrammonként, és eladhatja 8 lejért, ami $(8-5) \times 1\,000\,000 = 3\,000\,000$ lej nyereséget jelent. Annak az esélye, hogy nem kap importengedélyt, 10%. Ebben az esetben 1 lejt kell fizetnie kilogrammonként, hogy megszüntesse a vásárlási szerződést. Ebben az esetben nem kell ténylegesen elvinni az ércet, de fizetnie kell, azaz elveszít $1 \times 1\,000\,000 = 1\,000\,000$ lejt a szerződés érvénytelenítéséért.

Ügynök: A cég vagyonmérlege 2 000 000 lej. Ezért az 1 000 000 lejes veszteség lényeges, bár nem végzetes. Másrészről a 3 000 000 lej növelné a vagyonmérleget.

Elemző: Talán van mód a kockázat csökkentésére. Ahogy értem, az ok, amiért gyors döntést kell hoznunk, az, hogy az eladó más ügynökségnek is felajánlotta ezt az üzletet. Talán előre kérheti az importengedélyt, és vár addig, amíg már tudni fogja, hogy a kormány jóváhagyta-e, mielőtt lezárná az eladóval kötött ügyletet.

Ügynök: Ez nem túl valószínű. Néhány ilyen ügynökség elég nagy üzemeltető, és az 1 000 000 lejes veszteség nem lenne megterhelő számukra. Azt mondanám, hogy 70% a valószínűsége annak, hogy valaki más fogja az eladó ajánlatát elfogadni, ha várok, amíg az importengedélyt megkapjuk. Természetesen az importengedély iránti kérelemért semmit sem kell fizetni, ezért érdemes lehet várni, hogy mi történik.

Ha a kereskedő a várható haszon elve alapján kockázatelutasító magatartást mutat, és a vagyonmérlegére vonatkozó hasznosságfüggvénye megközelíthető az $f(x) = lg(x)$ függvénnyel, hogyan járjon el, várjon, vagy azonnal megkösse a szerződést az eladóval?

4. A közigazgatás egy felhő alapú mesterséges intelligencia megfigyelőrendszer létrehozását tervezi, amely növelné a polgárok életének kényelmét, biztonságát és minőségét. A közigazgatás célja, hogy maximalizálja a rendszerek minőségének és árának arányát (QP – Quality/Price), és úgy véli, hogy az ötlet megvalósítására alkalmas lehet egy nyilvános verseny megszervezése vagy egy nyilvános pályázati felhívás a megfelelő kritériumok alapján. Mindkét lehetőség teljesen eltérő eredményeket hozhat viszonylag magasabb vagy alacsonyabb minőségű rendszerek bizonyos valószínűségekkel és QP-értékekkel, amelyek különböző független tényezőkön alapulnak,

mint például a fejlesztők készségei vagy a vállalatok hatékonysága. A probléma az, hogy a közigazgatásnak először el kell döntenie, hogy versenyt szervezzen-e vagy inkább nyilvános pályázatot. A döntés meghozatalát követően a közigazgatás az ajánlat részleteire összpontosíthat, mint például a költség, a specifikációk vagy az időzítés. Érdemes megjegyezni, hogy néhány alternatíva költségesebb lehet, mint mások, de ezáltal a megfigyelőrendszer sokkal hatékonyabb lehet. Mindegyik alternatíva eredményezhet jó megoldást vagy kudarcot, és a minőség is különbözhet. Erre a legjobb összehasonlítási mód a QP arányok mérése.

A versenyre vonatkozóan két forgatókönyvet veszünk figyelembe: az első magasabb minőségű megoldást eredményez, amelynek megvalósíthatósági valószínűsége 30% és a minőség/ár arány pedig 6 QP. A kudarc esélye 40%, és ekkor a minőség/ár arány csak 0.5 QP lesz; a második megvalósíthatósági valószínűsége 60%, és a minőség/ár arány pedig 4 QP. Kudarc esetén pedig a minőség/ár arány 1.5 QP. Nyilvános pályázat esetén két kritérium van. A közigazgatás az alábbiakra összpontosít: az ár és a gazdaságilag legelőnyösebb ajánlat (GLA). Az ár és GLA 3 : 1-es kritériumarány esetén a magasabb színvonalú megfigyelőrendszer fejlesztésének esélye 40%, az eredmény pedig 10 QP, az alacsonyabb minőségű rendszer kialakításának esélye 60%, és 1.5 QP rendszert eredményez. Az 1 : 1-es kritérium arány esetén a magasabb minőségű megfigyelőrendszer fejlesztésének esélye 50%, az eredmény pedig 2 QP. Kudarc esetén pedig 1 QP. Végül a kritériumarány 1 : 2-es beállításával magasabb minőségű rendszert megvalósításának esélye 80%, azonban a magasabb ár miatt a QP értéke 3. Kudarc esetén a QP értéke 0.1.

Ha a döntési kritérium a várható nettó nyereség, határozzuk meg az optimális cselekvési módot.

5. Egy székelyföldi kisváros népessége fogy, az egészségügyi ellátás és tanítás minősége is hanyatlik, továbbá az életkörülmények is rosszabbodnak. A gyors internet alapvető mindenkinek: a vállalkozásoknak és az embereknek, akik ott élnek. Gyors internet nélkül nem lesznek új befektetések sem a városban. Új cégek befektetése nélkül munka sem lesz a lakosok számára. Az optikai szálas kábelek nem elérhetőek, mivel az ellátó nem kíván befektetni a régióba. A közigazgatás kellene hozzájáruljon az internethálózat feljavításához, hogy bevonzza az új cégeket, és ezzel együtt állandósítsa a lakosság létszámát. Az internethálózat feljavításának beruházási költsége 2.2 millió euró.

Úgy becsülik, hogy ez a befektetés az elkövetkező néhány évben növelné az adóbevételeket 40% valószínűséggel 2 millió euró értékben, 30% valószínűséggel 1.5 millió euró értékben és 30% valószínűséggel 0.5 millió euró értékben. Ha nem hajtják végre a beruházást, a városnak a rosszabb közszolgáltatás alternatív költségeket fog okozni és a lakosság is csökkenni fog. A város vezetésének becslése szerint az alternatív költség 0.8 millió euró 35% valószínűséggel, illetve 1.2 millió euró 65%-os valószínűséggel.
A város vezetése minimalizálni akarja a várható költségeket. Rajzoljon egy döntési fát, ha a döntési kritérium a várható nettó nyereség. Melyik az előnyösebb cselekvési mód?

6. Egy vállalatnak el kell döntenie, hogy végezzen-e olajfúrást a Feketetenger mélyén. A költség 100 000 euró, és ha kőolajat találnak, becslések szerint annak értéke 600 000 euró lesz. Jelenleg a vállalat úgy gondolja, 45% esélye van annak, hogy kőolajat találjanak. A fúrás előtt a vállalat alkalmazhat egy geológust (10 000 euróért), hogy több információt kapjon. 50% az esélye annak, hogy a geológus kedvező jelentést ad, és 50% a kedvezőtlen esélye is. Ha kedvező egy ilyen jelentés, akkor 80% az esély arra, hogy a kiszemelt helyen olaj található. Kedvezőtlen jelentés esetén az olaj ottlétének valószínűsége 0.1.
Ha a döntési kritérium a várható nyereség, határozzuk meg a vállalat optimális cselekedeteinek sorozatát!
7. Egy kormányzati bizottság mérlegeli egy influenzajárványt megelőző védőoltási program gazdasági előnyeit. A becslések szerint egy ilyen program költsége 7 millió lej, és ekkor következő évben az influenza hatása 75%-kal kisebb költséget eredményez. Ha a védőoltások nem kerülnek bevezetésre, akkor a következő évre az influenza miatt a kormány becsült költsége: 10% valószínűséggel 6 millió lej, 30% valószínűséggel 9 millió lej és 60% valószínűséggel 15 millió lej. A bizottság egy másik javaslata: egy „korai figyelmeztető” felügyeleti rendszer létrehozása 2 millió lej költséggel, ami lehetővé teszi, hogy az influenzajárvány kitörését észlelje, és ezáltal egy gyors védőoltási programot indítson 5 millió lej költséggel. A rendszer akkor jelez influenzajárványt, ha az influenza hatásainak következtében a kormány költsége eléri a 9 millió lejt. Ennek a programnak a következtében az influenza hatása 50%-kal kisebb költséget fog eredményezni.
Milyen ajánlásokat kell tennie a bizottságnak a kormány felé, ha a célja a várható költség minimalizálása?

8. Tételezzük fel, hogy egy szoftverterméket fejlesztünk. A termék részeként szükségünk van egy adott programra, amit vagy magunk fejlesztünk ki, vagy kész csomagként megvásárolunk. A várható érték elvét alkalmazva, döntési fa segítségével döntsünk arról, hogy az adott programcsomagot vegyük, vagy magunk fejlesszük ki. Úgy gondoljuk, hogy ha magunk fejlesztjük ki a csomagot, akkor nagyobb lesz az üzleti siker valószínűsége, bár ez többe fog kerülni, mint a vásárlás.

Program	Költség	Növekedés	Valsz.	Bevétel
Vesz	150 lej	nagy	0.3	100 lej
		kicsi	0.7	50 lej
Fejleszt	200 lej	nagy	0.5	90 lej
		kicsi	0.5	60 lej

9. Egy vállalat kétféle új termék kifejlesztésén gondolkodik.
A1. Egy füstérzékelő, melynek becsült fejlesztési költsége 10 000 lej. A fejlesztés sikerének valószínűsége 0.6. A füstérzékelőt csak minőségvizsgálat után lehet forgalomba hozni. A minőségvizsgálat költsége 5000 lej. A minőségvizsgálat során a termék kaphat kereskedelmi vagy lakossági minősítést vagy nem felelt meg minősítést is. A kereskedelmi minősítés valószínűsége 0.3, és ilyen minősítés esetén 100 000 lej bevételnövekedésre számíthat a vállalat. A lakossági minősítés valószínűsége 0.6, és ilyen minősítés esetén 800 000 lej bevételnövekedésre számíthat a vállalat.
A2. Egy mozgás érzékelő, melynek becsült fejlesztési költsége 1000 lej, siker esetén a várható bevételnövekedés 400 000 lej, a siker valószínűsége 0.8.
Természetesen a vállalat dönthet úgy is, hogy egyik terméket sem fejleszti ki. Ha a döntési kritérium a várható érték elve, milyen döntést hozzon a vállalat?

10. Nyáron Péter minden nap úszik. Napsütéses nyári napokon egy szabadtéri uszodába jár, ahol ingyen úszhat, esős napokon viszont fedett uszodába kell mennie. A nyár kezdetén lehetősége van arra, hogy egy 15 eurós bérletet vegyen a fedett uszodába, és ez egész nyárra érvényes. Ha nem veszi meg a bérletet, akkor minden alkalommal, amikor a fedett uszodába megy, 1 eurót kell fizetnie. Múltbeli meteorológiai jelentések azt mutatják, hogy 60% esélye van annak, hogy a nyár napos lesz (átlagosan 6 esős nap) és 40% esélye annak, hogy a nyár esős lesz (átlagosan 30 esős nap). Péternek lehetősége van a nyár

elején egy hosszú távú időjárás-előrejelzés vásárlására 1 euróért. Az előrejelzés az idő 80%-ában napos nyarat jósol, és az idő 20%-ában esőst. Ha az előrejelzés napos nyár, akkor 70% az esélye annak, hogy valóban napsütéses lesz a nyár. Ha az előrejelzés esős nyár, akkor 80% az esélye annak, hogy a valóságban is esős nyár lesz.
Feltéve, hogy Péter célja a nyári várható költség minimalizálása, mi legyen a stratégiája?

11. Egy mezőgazdász azon gondolkodik, hogy kössön-e biztosítást a búzaterületére jégeső ellen. Az eddigi tapasztalatai alapján annak valószínűsége, hogy a jégeső elverje a búzáját, 3%. Ha ez bekövetkezne, akkor 0.3, 0.3, illetve 0.4 valószínűséggel az ő vesztesége 2000, 4000, illetve 8000 euró lenne. A biztosítás az A biztosítótársaságnál 200 euróba kerül, és teljes veszteségét fedezné, a B biztosítónál pedig 100 euró, de a veszteségeinek csak 50%-át állná.
Rajzoljuk meg a mezőgazdász döntési fáját, és a várható érték elve alapján adjuk meg az optimális döntését. Ha sikerülne találnia egy olyan időjóst, aki pontosan megmondaná, hogy lesz-e jégeső, akkor ezért az információért mennyit érdemes kifizetnie?
12. Egy lakástulajdonos azon gondolkodik, hogy kössön-e lakásbiztosítást egy évre betörések ellen. A tulajdonos a lakásban található tárgyak értékét 20 000 euróra becsüli. A helyi rendőrség statisztikái alapján annak valószínűsége, hogy nála tényleg betörés történjen, 3%. Ha ez bekövetkezne, akkor 0.5, 0.35, illetve 0.15 valószínűséggel az ő vesztesége 10%, 20%, illetve 40% lenne. A lakásbiztosítás az A cégnél 150 euróba kerül, és a veszteségeit fedezné. A lakásbiztosítás a B cégnél 100 euróval olcsóbb, de a veszteségeinek csak 50%-át állná betörés esetén. A C cégnél kötött lakásbiztosítás is 75 euróval olcsóbb, mint az első cégnél, de ebben az esetben a veszteségek 60%-át fizetné ki a biztosító.
Feltételezve, hogy évente legfeljebb egy betöréstől kell tartani, rajzold meg a lakástulajdonos döntési fáját, és a várható érték elve alapján adjuk meg az optimális döntését.
13. Egy ház tulajdonosa lopás elleni biztosítást szeretne kötni. A tulajdonos a lakásban található tárgyak értékét 20 000 euróra becsüli. A helyi rendőrség statisztikái alapján annak valószínűsége, hogy nála tényleg betörés történjen, 3%. Ebben az esetben a vesztesége 10%, 20% vagy 40%-os mértékű is lehet 0.5, 0.35, illetve 0.15 valószínűségekkel. A tulajdonos három biztosítótársaság kötvényeit vizsgálja meg. Az A társaságtól származó biztosítási kötvény évente

150 euróba kerül, de garantálja, hogy a lopásból eredő veszteségeket megtéríti. A B társaságtól származó biztosítási kötvény évente 100 euró, de a háztulajdonos a veszteségből egy előre rögzített x összeget maga kell fizessen. A C társaságtól származó biztosítási kötvény évente 75 euró, de csak az elszenvedett veszteség y százalékát téríti meg. Tegyük fel, hogy évente legfeljebb egy lopás történhet.

a) Rajzolja meg a feladat döntési fáját.

b) Milyen tanácsot adna a háztulajdonosnak, ha $x = 50$ euró és $y = 40\%$, és célja a várható monetáris érték (EMV) maximalizálása?

c) Lineáris programozási modellt használva az x és y döntési változókra, határozzuk meg az x legnagyobb és legkisebb értékét, amelyre a várható monetáris érték a B társaságtól származó biztosítási kötvény esetén lesz a legnagyobb.

14. A Kék cukrászda egy új terasz megnyitását tervezi, melynek beruházási költsége 16 ezer lej lenne. A tulajdonosok a megtérülési időt két évre becsülik. A kiszámíthatatlan időjárási körülmények miatt előzetes piackutatást végeztek, mely a következő eredményt hozta: ha rossz szezon lesz, amelynek az esélye 50%, akkor 10 ezer lejes bevételre számíthatnak, ha jó szezon lesz, akkor viszont 20 ezer lejre. Függetlenül az első szezon eseteitől, a második szezonban 40% az esélye a kedvezőtlen időszaknak, ami 5 ezer lejes bevételt jelent, kedvező időszak esetében azonban 25 ezer lejes lesz a bevétel. A tulajdonosok döntési fa segítségével szeretnék kiszámolni a beruházás várható bevételének jelenértékét. Használjunk 10%-os diszkontrátát! A kockázatra vonatkozó becslés érdekében számítsuk ki a szórást és a relatív szórást is.

15. Az EMTE Gazdasági Informatika Tanszéke megpróbálja eldönteni, hogy két másológép közül melyiket vegye meg. Mind a két gép kielégítené a kar igényeit a következő öt évre. Az 1-es gép 2000 euróba kerül, és van hozzá egy karbantartási megállapodás, melynek értelmében évi 150 euróért minden javítást elvégeznek. A 2-es gép 3000 euróba kerül. Jelenleg a kar úgy gondolja, hogy 40% esély van arra, hogy a 2-es gép évi karbantartási költsége 0 euró, egy újabb 40% esély van arra, hogy ez a költség évi 100 euró, és 20% eséllyel a költség évi 200 euró. A kar még felkérhet egy szakembert, hogy értékelje a 2-es gép minőségét. Ha a szerelő úgy gondolja, hogy a 2-es gép kielégítő, akkor 60% esély van arra, hogy az évi karbantartási költség 0 euró lesz, és 40% az esélye az évi 100 eurós költségre. Ha a szerelő

úgy gondolja, hogy a 2-es gép nem kielégítő, akkor az évi karbantartási költség 20% eséllyel 0 euró lesz, 40%-os eséllyel ez a költség évi 100 euró és 40% eséllyel 200 euró.
Ha a szerelő 50% eséllyel ad a 2-es gépről kielégítő jelentést, és a vizsgálatért 40 eurót kér, mit tegyen a tanszék döntéshozó testülete? A döntési kritérium a várható érték elve.

16. Erika 2019. augusztus 5-én Londonba repül, és augusztus 20-án tér haza. 2019. február elején vehet egy csak egyik útra szóló jegyet (350 euró), vagy egy retúrjegyet (660 euró). Megteheti azt is, hogy vár 2019. augusztus elsejéig a jegyvásárlással, de akkor egy útra szóló jegy 370 euróba kerül, a retúrjegy pedig 730 euró. Lehetséges azonban, hogy július 1. és augusztus 1. között Erika nővére (aki a repülőtársaságnál dolgozik) tud szerezni egy egyirányú szabad jegyet. Annak a valószínűsége, hogy a nővér szerez egy jegyet, 0.3. Ha Erika megveszi februárban a retúrjegyet, és a nővére szerez egy ingyenjegyet, akkor Erika visszaadhatja a retúrjegynek felét a repülőtársaságnak. Ebben az esetben teljes költsége 330 euró plusz 50 euró büntetés lesz.
Ha a döntési kritérium a várható érték elve, hogyan járjon el Erika?
17. Egy helyhatósági választáson három jelölt indul. Egy közvélemény-kutatás szerint 35%, 35%, illetve 30% esélyük van a győzelemre. Mind a három jelölt választási ígéretéhez tartozik, hogy a város terelőútját megépítik. Az eddigi tevékenységük alapján úgy gondoljuk, hogy szavahihetőségük 60%, 80%, illetve 90%. A saját meglátásunk szerint mi a valószínűsége annak, hogy a terelőút megépül a választások után?
18. Egy kétfordulós helyhatósági választáson három jelölt indul. Egy közvélemény-kutatás szerint az első fordulóban a szavazatok 35, 35, illetve 30%-át szerezhetik meg. Így egyik jelöltnek sincs esélye a győzelemre már az első fordulóban. A közvélemény-kutatások szerint a második fordulóba 40% valószínűséggel az első két jelölt jut, és a második jelölt a szavazatok 55%-ára számíthat, 35% valószínűséggel az első és a harmadik jelölt jut tovább, és az első jelölt a szavazatok 60%-ára számíthat, valamint 25% valószínűséggel a második és a harmadik jelölt jut tovább, és a harmadik jelölt a szavazatok 51%-ára számíthat. Mind a három jelölt választási ígéretéhez tartozik, hogy a város terelőútját megépítik. Az eddigi tevékenységük alapján

úgy gondoljuk, hogy szavahihetőségük 60%, 80%, illetve 90%. A saját meglátásunk szerint mi a valószínűsége annak, hogy a terelőút megépül a választások után?

19. Három herceg, A, B és C egyaránt szerelmes Bergengócia királylányába. Elhatározzák, hogy egyetlen pisztolypárbajban eldöntik, melyikük legyen a kérő. Egyszerre körbeállnak, és bármelyikük lőhet bármelyikükre. Tudják egymásról, hogy ha lő, A 1, B 0.8 és C 0.5 valószínűséggel talál, ezért abban állapodnak meg, hogy először C lő, utána (ha életben van) B, végül A. Ha nincs vége a párbajnak, akkor még egy kört lőnek azonos sorrendben. Mikor a királylány meghallotta a feltételeket, a párbaj előtti este titokban kicserélte C első golyóját vaktöltényre.

    a) Bayes-háló segítségével határozzuk meg, hogy kibe szerelmes a királylány?

    b) Hogyan változnak meg a párbaj valószínűségei, ha most a felek nemcsak kettő, hanem tetszőleges számú lövést adhatnak le? A királylány most is csak az első golyót cseréli ki vaktöltényre.

20. Egy városban egy taxi cserbenhagyásos balesetet okozott. A városban két taxitársaság működik, a Zöld és a Kék. A városban üzemelő taxik 85%-a Zöld, 15%-a Kék. Egy tanú azt állítja, hogy a taxi Kék volt. A bíróság a baleset éjszakájának körülményeit reprodukálva megvizsgálta, milyen megbízható a tanú, és úgy találták, hogy az esetek 80%-ában a tanú mind a két színt helyesen, illetve az esetek 20%-ában helytelenül azonosította. Minek nagyobb a valószínűsége, hogy a balesetet okozó taxi Kék volt vagy hogy Zöld volt?

21. Egy üzemben három gép dolgozik. Az első a termelés 25%-át adja és 5%-os selejtaránnyal dolgozik. A második 40%-ot termel 4%-os selejtaránnyal, végül a harmadik 2%-os selejtaránnyal dolgozik. A termékek közül kiválasztunk egyet véletlenszerűen, és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mennyi a valószínűsége, hogy az első gép gyártotta?

22. Egy városban a lakosság 1%-át megfertőzött egy ritka vírus. Egy teszt a vizsgálati személyek 99%-áról helyesen el tudja dönteni, hogy fertőzött vagy egészséges, de 1%-ban téved. Mekkora a valószínűsége, hogy egy megvizsgált személy egészséges, ha a teszt szerint fertőzött?

23. Egy kanadai vállalat földterületek geológiai feltérképezését végzi, megvizsgálja, hogy milyen fémlelőhelyek (réz, arany, ezüst) találhatók a területen. Jelenleg a vállalat azon gondolkodik, hogy 3 millió euróért megvásároljon-e egy földterületet. Ha a vállalat megveszi a

területet, akkor geológiai kutatásokat végezne rajta, ami 1 millió euróba kerülne. Régebbi tapasztalatok alapján a vállalat úgy véli, hogy 1% annak a valószínűsége, hogy a területen rezet találnak, 0.05% hogy aranyat, és 0.2% a valószínűsége, hogy ezüstöt. A három fém közül egyszerre csak egy lehet jelen. Ha a földterületen rezet találnak, akkor a vállalat 30 millió euróért, ha aranyat, 250 millió euróért és ha ezüstöt, 150 millió euróért adhatja tovább a területet.
A vállalatnak meg van adva az a lehetőség, hogy 750 000 euróért háromnapos keresést végezzen a területen, mielőtt megvenné a földet. Három nap alatt nem lehet egyértelműen eldönteni, hogy a földterületen található-e nemesfémlelőhely. A régebbi tapasztalatok alapján a vállalat tudja, hogy a háromnapos teszt költsége 250 000 euró, és csak 50% valószínűséggel határozható meg a fémek jelenléte. Ha a háromnapos keresés lényeges mennyiségű fém jelenlétét mutatja ki, akkor annak a valószínűsége, hogy tényleg van ott réz, arany vagy ezüst 3%, 1%, illetve 2%-ra növekszik. Ha a háromnapos próba alatt a vállalat nem talál fémlelőhelyet, akkor annak a valószínűsége, hogy mégis van ott réz, arany vagy ezüst, 0.75%, 0.04%, illetve 0.175%-ra csökken.
Hogyan járjon el a vállalat vezetősége? Ha egy másik, hasonló profilú vállalat fele arányban (kiadás és bevétel) beállna a földterületvásárlásba, akkor a vállalatnak érdemes-e bevenni társnak? Döntési kritérium a várható nyereség elve.

24. Egy magyar sakkmester egy svéddel játszik egy-két játszmából álló bemutató mérkőzést. Minden megnyert mérkőzés egy pontot hoz a játékosnak, és minden döntetlen fél pontot. A mérkőzést az a játékos nyeri, akinek a két játszma után több pontja van. Ha a két játszma után a játékosok döntetlenre állnak, akkor továbbjátszanak addig, amíg valamelyikük megnyer egy játszmát, ekkor ez első olyan játékos, aki nyer egy játszmát, megnyeri a mérkőzést. Minden játszma folyamán a magyar játékosnak két lehetséges stratégiája van: vakmerő játékot játszani vagy konzervatívat.

Stratégia	**Nyer**	**Veszít**	**Döntetlen**
vakmerő	0.45	0.55	0
konzervatív	0.1	0	0.9

Mit tegyen a magyar sakkmester, ha maximalizálni akarja a mérkőzés megnyerésének valószínűségét?

25. Egy kertésznek el kell döntenie, hogy 1000 db piros vagy sárga rózsatövet vásároljon. 1000 db piros rózsatő vásárlási értéke 15 000 lej, 1000 db sárga rózsatőé viszont csak 10 000 lej. A piros rózsa a vizet kedvelő virágfajták közé tartozik, a sárgát nem befolyásolja az időjárás. A piros rózsatőn termő rózsák eladási ára 2.5 euró, azonban ha abban az évben szárazság lesz, a rózsáknak csak 40%-a vészeli túl. A sárga rózsatőn termő rózsák eladási ára 1.5 euró, és szárazság esetén is 95%-uk életben marad. Az előző évek időjárás-jelentései alapján a kertész azt feltételezi, hogy 40% a valószínűsége, hogy a jövő évben szárazság lesz. A kertésznek lehetősége van arra, hogy alkalmazzon egy időjóst 250 euróért, aki megállapíthatja az elkövetkező év időjárását. Ha a szóban forgó év időjárása esős, akkor a szakértő előrejelzése is 80%-ban esőst is jósol. A valóságban bekövetkező meleg éveknél a szakértő előrejelzése is 75%-ban szárazságot jósol.
Alkalmazzon-e a kertész időjárás-szakértőt? Döntési kritérium a várható nyereség elve.
26. Egy ügyfél bemegy a bankba, hogy egy évre 50 000 euró kölcsönt kapjon 12% kamatra. Ha a bank nem adja meg a kölcsönt, akkor az 50 000 eurót kötvényekbe fekteti, ahol az évi megtérülés 6%. Minden további információ nélkül a bank úgy gondolja, hogy 4% esélye van arra, hogy az ügyfél egyáltalán nem fizeti vissza a kölcsönt. 500 euró költség fejében a bank alaposan át tudja vizsgálni az ügyfél hitelekkel kapcsolatos előéletét, és a vizsgálat eredményeként egy kedvező vagy egy kedvezőtlen javaslatot tesz. A múltbeli tapasztalatok alapján úgy találják, hogy

$$\mathrm{P}(\text{kedvező javaslat} \mid \text{az ügyfél rendesen fizet}) = 77/96$$
$$\mathrm{P}(\text{kedvező javaslat} \mid \text{az ügyfél nem fizet}) = 1/4.$$

Rajzoljuk meg a bank döntési fáját. A várható nyereség elvét használva hogyan tudja a bank maximalizálni várható profitját? Számítsuk ki a MIVÉ és TIVÉ értékeit is!
27. Egy mezőgazdásznak el kell döntenie, hogy búzát vagy kukoricát ültessen. Ha kukoricát ültet és meleg az idő, akkor 8000 eurót keres, és ha hideg az idő, akkor 5000 eurót keres. Ha búzát ültet és meleg az idő, akkor 7000 eurót keres, és ha hideg az idő, akkor 6500 eurót keres. A múltban 40%-ban hideg évek voltak, 60%-ban pedig melegek. Mielőtt ültetne, a mezőgazdász megvehet egy szakértői időjárás-előrejelzést 600 euróért. Ha a szóban forgó év a valóságban

is hideg, olyankor 90% valószínűséggel az előre jelző specialista is hideget jósolt. A valóságban bekövetkező meleg éveknél az előre jelző specialista az esetek 80%-ában meleg évet jósolt.
Maximalizáld a várható profitot! Határozd meg a MIVÉ- és TIVÉ-értékeket!

28. Egy pár vidám kedvű fiatal alakított egy együttest. Egy éve eljárnak rendszeresen próbákra, és keményen dolgoznak azért, hogy elkészítsék első lemezüket. Miután elkészültek a felvételek, az egyik énekes úgy dönt, hogy neki egyáltalán nem tetszik, és kiszáll a csapatból. El kell dönteniük a többieknek, hogy kiadják a lemezt vagy sem. Ha a felvételek alapján készült lemez sikeres lesz, akkor várható jövedelmük 5000 euró, ha viszont nem, akkor veszítenek 1000 eurót. Az eddigi koncertek utáni visszajelzések alapján úgy gondolják, hogy a siker esélye 70%. Beszéltek egy rádiós DJ-vel, aki felajánlotta, hogy 1000 euróért mintavételezi a nagyközönség véleményét. A DJ eddigi tevékenysége azt mutatja, hogy ha egy lemez sikeres volt, akkor ezt ő is 70% pontossággal becsülte meg, ha meg nem volt sikeres, akkor ezt ő 80%-ban meg is jósolta. Megéri-e alkalmazni DJ-t, és ez mennyiben befolyásolja a döntésüket? Kiadják a lemezt vagy sem? Döntési kritérium a várható nyereség elve.
29. Janinak egy kocka van a bal kezében és egy másik a jobb kezében. Az egyik kocka mind a hat oldalára hat pont van festve. A másik kocka két oldalára egy pont van festve, a többi négy oldalára hat pont. Zsuzsi éppen most választ egy kockát, és a kiválasztott kockára festett pontok mindegyikéért 10 eurót kap. Mielőtt kiválasztja a kockát, Zsuzsi fizethet Janinak 15 eurót, amiért Jani földobja a bal kezében lévő kockát és megmondja Zsuzsinak, hogy a felső oldalára hány pont van festve. Maximalizájuk Zsuzsi profitját! Határozzuk meg a MIVÉ- és TIVÉ- értékeket!
30. Egy szekrénynek két fiókja van. Az egyik fiókban három aranyérem van, a másikban egy arany- és két ezüstérem. Választhatunk egy fiókot, és 500 eurót kapunk minden aranyéremért és 100 eurót minden ezüstéremért, amely a kiválasztott fiókból van. Mielőtt választanánk, fizethetünk valakinek 200 eurót, amiért ő véletlenszerűen kiválaszt egy érmét (mind a hat érme kiválasztásának ugyanakkora a valószínűsége), és megmondja nekünk, hogy az arany vagy ezüst, és hogy melyik fiókból választotta. Például az illető azt mondhatja, hogy egy aranyérmét választott az 1-es fiókból.
Fizessünk-e neki 200 eurót? Mennyi lesz a MIVÉ és TIVÉ értéke?

31. Egy üzem memóriachipeket gyárt tízes tételekben. Múltbeli tapasztalatokból tudják, hogy a tételek 80%-ában 10% selejt chip van, a tételek 20%-ában 50% selejt található. Ha jó egy tétel, 1000 euró a gyártási költsége, ha rossz, akkor 4000 euró a gyártási költsége. Az üzemnek van egy olyan lehetősége, hogy átdolgozzon egy tételt 1000 euró költséggel. Egy átdolgozott tétel biztosan jó. A másik lehetőség az, hogy 100 euróért az üzem megvizsgálhat egy chipet minden tételből, így megkísérelve eldönteni, hogy egy tétel selejtes-e.
Az üzem hogyan minimalizálhatja a várható összköltségét? Számítsuk ki a MIVÉ és TIVÉ értékeit!
32. Egy frissen végzett sapientiás közgazdász úgy gondolja, hogy saját vállalkozásba kezd. Mivel azonban nincs sok pénze, nem akar kockáztatni, ezért felfrissíti döntéselméleti ismereteit, és inkább alaposan átszámolja az esélyeit. Úgy gondolja, hogy számítástechnikai céget alapít és kereskedelmi tevékenységet fog folytatni. Figyelembe véve a beruházási és üzemeltetési költségeket, valamint a várható árbevételt, a tiszta haszont a következőképpen prognosztizálja: siker esetén a várható jövedelem 10 000 euró, bukás esetén pedig -5000 euró. Annak esélye, hogy sikeres lesz a tevékenység, 0.8, hogy bukás, 0.2.
Megbízható eredményre azonban, úgy tűnik, csak akkor számíthat, ha előzetesen felmérést végez. Az eddigi tapasztalatai alapján tudja, hogy az egyetemi évei alatt végzett ilyen típusú felméréseinél, ha valami jól működött, akkor ezt ő 95%-ban meg is jósolta, ha pedig valami bebukott, akkor ezt ő 85%-ban el is találta. Felkéri egyik barátját, hogy segítsen a felmérés lebonyolításában. Megegyeznek, hogy ha becslésük sikert jósol és valóban a vállalkozás sikeres is lesz, akkor a barátja segítségét 100 euróval honorálja. Ha becslésük bukást jósol és valóban bukás lesz, akkor a barátjának fizet egy vacsorát 10 euró értékben. Ha pedig tévednek, akkor nincs tartozása a barátja felé. Hogyan járjon el, végezzen-e felmérést és elindítsa-e a vállalkozását? Számítsuk ki a MIVÉ-t és a TIVÉ-t.
33. Egy távközlési eszközöket gyártó vállalat beleegyezett abba, hogy 1 000 000 PC FAX rendszert szállít a megrendelőnek 90 napon belül, fix áron. Minden ilyen FAX rendszer kulcskomponense egy darab úgynevezett PAL-chip. A vállalat ez idáig a chipeket a DD Chips vállalattól vásárolta meg. A vállalatot azonban egy másik gyártó, az E-kütyü kereste fel, amely alacsonyabb áron kínálja a terméket. Ez az ajánlat csak 10 napig tart, és a vállalatnak el kell döntenie, hogy vásárol-e az E-kütyütől PAL-chipet. Tudni kell, hogy:

– minden olyan chipet, amelyet a vállalat nem vásárol az E-kütyütől, azt a DD-től vásárolja;
– a DD Chips-nél 3 $-ba kerül minden egyes PAL-chip;
– az E-kütyü csak 250 000 darabos csomagokban fogadja el a megrendeléseket. Egy csomag esetén minden egyes chipet 2 $-ért, két vagy több csomag esetén minden egyes chipet 1.5 $-ért árusít.

A helyzetet azonban bonyolítja a DD Chips által az E-kütyü ellen benyújtott kereseti dömpingdíj kivetése. Ha a kormány megítéli ezt a díjat, akkor az E-kütyü chipekre dömpingellenes vám vonatkozik. Ezt a helyzetet csak akkor lehet feloldani, amikor a vállalat meghozza a vásárlási döntést. Ha a vállalat megvásárolja az E-kütyü-chipeket, akkor ezeket addig nem szállítják, amíg a dömpingellenes adóval kapcsolatos döntést a kormány meg nem hozza. Ha a kormány úgy dönt, akkor az E-kütyü által kínált feltételek szerint a vállalatnak meg kell fizetnie a kivetett dömpingellenes adót. A vállalat úgy véli, hogy 60% esély van arra, hogy a dömpingellenes adót kiszabják. Ha ez kiszabásra kerül, akkor az adó egy csomag chip vásárlása esetén 50%, két csomag chip esetén 100%, három vagy több csomag chip esetén pedig 200% lesz.

A vállalat felkérhet egy tanácsadó céget 50 000 $-ért, amely megvizsgálja a dömpingdíj kivetésének valószínűségét. Ez idáig a tanácsadó cég 80%-ban meg is jósolta, ha múltban ilyen esetekben kivetették a dömpingellenes vámot, és 85%-ban pedig eltalálta, ha nem vetették ki a vámot.

Döntési kritériumként a várható értéket használva, határozza meg a vállalat által preferált rendelési alternatívát a PAL-chipek számára. Határozzuk meg a MIVÉ-t és a TIVÉ-t is.

34. Az MDG olyan vállalat, amely geológiai kutatásokat végez annak érdekében, hogy megbizonyosodjanak arról, hogy van-e jelentős fémlerakódás vagy nincs. A jelenlegi MDG-nek lehetősége van, hogy megvásároljon egy telket 3 millió euróért. Ha az MDG megvásárolja ezt a földterületet, akkor geológiai feltárást végez a telken. A múltbeli tapasztalatok azt mutatják, hogy a vizsgált földterület típusa szerint a geológiai feltárások körülbelül 1 millió euróba kerülnek, és az alábbi fémlerakódásokat jelzik: mangán 1% esély; arany 0,05% esély; ezüst 0,2% esély.

    A három fém közül csak egy található meg a telken, vagyis nincs esély arra, hogy kettőt találjanak, és nincs esély más fém megtalálására sem. Ha mangánt találunk, akkor a földterület 30 millió euróért

adható el, ha aranyat találunk, akkor a földterület 250 millió euróért adható el, ha pedig ezüst, akkor 150 millió euróért értékesíthető.
Az MDG-nek lehetősége van arra, hogy 750 000 eurót fizessen egy háromnapos tesztvizsgálatért, mielőtt döntenek arról, hogy megvásárolják-e a földterületet vagy sem. Az ilyen háromnapos tesztvizsgálatok csak előzetes tájékoztatást adnak arról, hogy jelentős fémlerakódások vannak-e vagy sem. A tapasztalatok azt mutatják, hogy a háromnapos vizsgálati eredmények 250 000 euróba kerülnek, és ha találnak, akkor a találati valószínűségek: mangán, arany és ezüst esetén 80%, 70%, illetve 75%. Ha a háromnapos tesztfeltárás nem jelzi a jelentős fémbetéteket, akkor a találati valószínűségek: mangán, arany és ezüst esetén 90%, 75%, illetve 80%.
Döntési kritériumként a várható értéket használva határozza meg az MDG által preferált stratégiát. Határozzuk meg a MIVÉ-t és a TIVÉ-t is.

35. Az MDA Rt. Dacia személygépkocsik forgalmazását és szervizelését latolgatja a 40 000 lakosú Csíkszeredában. Jelenleg a város lakosai a szomszédos Sepsiszentgyörgyön levő szerviz szolgáltatásait veszik igénybe. Az Rt. vezetése a sepsiszentgyörgyi kiszolgálás színvonalát elemezve megállapította, hogy sem Sepsiszentgyörgy, sem Csíkszereda lakosainak nem tud a jelenlegi módon kielégítő szintű szolgáltatást nyújtani, mert a szerviz zsúfolt, hosszú a várakozási idő, és Csíkszeredától eléggé messze van.
A fejlesztési döntés előtt azonban az Rt. szeretne meggyőződni arról, hogy a beruházásával nemcsak a kiszolgálás színvonalát tudja növelni, hanem a befektetés megtérülése után a tevékenység nyereségessé is válik. A beruházási és üzemeltetési költségeket, valamint a várható árbevételt alapul véve a tiszta nyereség az autóvásárlási kedv, valamint a szervizszolgáltatás igénybevételének függvényében az alábbi három csoportba foglalható:

A Kapacitás kihasználása	**Minősítés**	**Tiszta nyereség**
75%–100%	jó	120 000 euró
45%–75%	közepes	60 000 euró
45% alatt	rossz	-20 000 euró

Az Rt. előzetes felmérés nélkül Csíkszereda szervizszolgáltatási igényét 0.4 valószínűséggel jónak, 0.4 valószínűséggel közepesnek, 0.2 valószínűséggel rossznak gondolja.

Mivel az Rt. számításokkal megalapozottan kívánja meghozni döntését, ezért a döntéshozatal előtt felmérést végeztetne az igények feltérképezésére. Természetesen ez a felmérés költséggel jár, és a vizsgálat eredménye nem pontos. Egy kéthetes felmérés az Rt.-nek 5000 eurójába kerül. Az igények felmérése alapján az előrejelzés eredménye tükrözi az egyes kihasználási arányok bekövetkezési valószínűségeit:

A felmérés eredménye	**A kapacitás kihasználása**		
	jó	közepes	rossz
jó	0.95	0.8	0.3
rossz	0.05	0.2	0.7

Vizsgáljuk meg a fejlesztés következményeit, és tegyünk javaslatot az Rt. vezetésének arra vonatkozóan, hogy végezzen-e felmérést, és végrehajtsa-e a fejlesztést. Számítsuk ki a MIVÉ és a TIVÉ értékeit is.

36. Egy illatszereket forgalmazó magánkereskedés tulajdonosa egy újfajta, Székelyföldön még nem forgalmazott illatszer folyamatos beszerzésére elég kedvező ajánlatot kap. A terméket jó lenne mielőbb forgalomba hozni. A bolt elég kicsi, és a tulajdonos áruba fektetendő tőkéje sem túl sok, ezért az újfajta illatszer beszerzését és árusítását csak akkor tudja megoldani, ha valamelyik termékét nem árulja tovább.
Számításai szerint a forgalomból kivont termék eddig hónaponként 1000 euró tiszta hasznot hozott. Előzetes becslések alapján azonban az új termék forgalmazása jó keresleti viszonyok esetén 1800 euró, rossz keresleti viszonyok esetén pedig várhatóan 500 eurót hasznot eredményez. A tulajdonos úgy ítéli meg, hogy az új termék iránti magas kereslet valószínűsége 70%. A forgalmazó vállalat gyors döntést szeretne hozni. Bár a piackutatást két cég is vállalta, a kereskedő mégis tanácstalan, hiszen az ajánlott feltételek nagyon különbözőek.
Az I. cég gyors felmérés eredményét előreláthatóan két minősítéssel fogja ellátni, és kedvező, illetve kedvezőtlen kategóriába sorolja. Számításainak, becslésének megbízhatósága (találati valószínűsége) 90%-os, a piackutatásért kedvezőtlen eredmény esetén 100 eurót, kedvező esetben pedig 50 eurót kért.

A II. cég a keresleti viszonyok előrejelzését három részre bontja: jó, közepes vagy gyenge. Megbízhatóságukat az alábbi táblázat tartalmazza:

Kereslet	**Előrejelzés**		
	jó	közepes	gyenge
jó	0.8	0.2	0
gyenge	0.05	0.15	0.8

A cég jó kereseti viszonyok esetén 150 eurót, közepes becslés esetén 50 eurót, gyenge minősítés esetén pedig 20 eurót kér a munkájáért. Adjunk javaslatot a kereskedőnek, hogy igénybe vegye-e valamelyik piackutató cég szolgáltatását, ha igen, akkor melyiket, és bevezesse-e az új terméket vagy ne? Számítsuk ki a MIVÉ-t és a TIVÉ-t is.

37. A közigazgatási szervek számos módon tudják támogatni a vállalati innovációt. Mindegyik ilyen módozatnak eltérő költségei vannak, és az innovációk gyakorlatba ültetésének hatékonysága is eltérő. Az első lehetőség, hogy a közigazgatási szervek adókedvezménnyel könnyítik a fejlesztési osztályok munkáját. Ennek költsége 5 millió lej, a szervek pedig 20%-os innovációnövekedésre számítanak 70%-os valószínűséggel. A második lehetőség az, hogy a közigazgatási szervek direkt módon támogatják a vállalatok innovációit és a fejlesztési osztályokat hitelek és adományok formájában. Ennek költsége 10 millió lej, és 25%-os növekedésre lehet számítani 80%-os valószínűséggel. A harmadik lehetőség, hogy a vállalatok indirekt módon szerzik meg ezeket a támogatásokat, külső befektetőktől. Ebben az esetben a közigazgatási szervezetek beszállhatnak a finanszírozásba, melynek költsége 7.5 millió lej, és 30%-os növekedést eredményez 75%-os valószínűséggel.
Ha az innovációs változások mértéke és ezek valószínűsége észszerűen felbecsülhető, a közigazgatási szervek által véghezvitt befektetések anyagi következményei nehezen felmérhetők. A szervek által végzett becslések azt mutatják, hogy az első esetben 20%-os innovációs növekedés 10-15 millió lejes bevételt jelenthet. A második esetben a 25%-os innovációs növekedés 10-20 millió közti bevételt generál. A harmadik eset csábító, bár eléggé kockázatos is: itt létrejöhet egy 5-25 millió közötti bevétel.
   a) Rajzolja meg a döntési helyeztet modellező döntési fát.
   b) Ha a közigazgatás pesszimista magatartást követ, melyik lehetőséget választja?

c) Ha a közigazgatás optimista magatartást követ, melyik lehetőséget választja?
d) Alkalmazva a Hurwitz-kritériumot, határozzuk meg az optimizmus fokának kritikus értékét.

A felsorolt feladatoknál feltételeztük, hogy a döntéshozó a racionális döntési elvek alapján dönt, azaz a várható érték, illetve a várható haszon elvét alkalmazza. Elemezzük az előző feladatokat egy olyan döntéshozó szemszögéből is, aki a kumulatív kilátáselmélet elvei alapján dönt. Ebben az esetben figyeljük meg, a döntéshozó hasznosságérzékelése miként változik a referenciaértékek függvényében. Próbáljuk meghatározni azokat a referenciaértékeket, amelyeknél a döntés megváltozik. Referenciaértéknek használhatjuk a döntéshozó aktuális vagyoni helyzetét (W), vagy a döntéshozó aktuális vagyoni helyzetéből levonva a szakértőnek kifizetett összeget ($W - s$). Ez utóbbi lehetőséget úgy is értelmezhetjük, hogy a szakértői megbízás már el van döntve, a döntéshozó csak a szakértői díj mértékét képes megváltoztatni.

3. FEJEZET

TÖBBCÉLÚ DÖNTÉSHOZATAL

A lineáris programozási feladatok esetében a döntéshozó a lehetséges tevékenységeknek egyetlen tényezőre kifejtett hatását vizsgálta, és célját meg tudta fogalmazni egyetlen célfüggvény segítségével. Akkor a cél az volt, hogy a $z = \mathbf{cx}$ kifejezés értékét maximalizálja vagy minimalizálja az $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$ feltételek mellett, ahol az $x_1, ...x_n$ döntési változókat az $\mathbf{x}$ vektor, az erőforrásokból rendelkezésre álló mennyiségeket a $\mathbf{b}$ vektor, az egységnyi mennyiségek profitját vagy előállítási költségét a $\mathbf{c}$ vektor és az erőforrásokból felhasznált a_{ij} mennyiségeket az A mátrix tartalmazza.

A valós helyzetek többségében azonban a döntést nem csak egy tényező alapján hozzák meg, hanem több tényező figyelembevételével. Felmérések alapján a vállalatvezetők döntésük meghozatalakor több célra is összpontosítanak, mint például: a profit, a piaci részesedés, az árak stabilitása stb. Ekkor számukra lehet több cél (tényező) is fontos, maximalizálni szeretnék például a $z_1 = \mathbf{cx}$ profitot és minimalizálni a $z_2 = \mathbf{px}$ kiadást az $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$ feltételek mellett. A célprogramozás lehetővé teszi, hogy egyidejűleg több cél elérésére törekedjünk.

Az alapötlet az, hogy minden egyes célt számszerűsítünk, mindegyik célhoz felírjuk a célfüggvényt, majd egy olyan megoldást keresünk, amelyben e célfüggvényeknek a megfelelő céloktól való eltéréseinek a súlyozott összege minimális. Két esetet vizsgálunk meg.

- ***nemhierarchikus célprogramozás***: amikor a döntéshozó pontosan meg tudja határozni a célok relatív fontossági viszonyait;
- ***hierarchikus célprogramozás***: amikor a döntéshozó csak a célok fontossági sorrendjét ismeri.

Mind a két esetben nagyon fontos megvizsgálni a tényezők preferenciafüggetlenségét, mert a kölcsönös preferenciafüggetlenség a feltétele annak, hogy a döntéshozó értékelő függvénye additív, sajátos esetben pedig hogy lineáris legyen. A továbbiakban mindig feltételezzük a célok preferenciafüggetlenségét.

3.1. mintapélda (Telephely). Egy vállalat új telephelyet szeretne létesíteni Csíkszeredában. A humánerőforrás osztálya azt szeretné, hogy az alkalmazottak száma 600 és 700 között legyen. A munkaerő toborzása során egy nyelvi kompetencia tesztet és egy informatikai ismereteket mérő vizsgát szerveztek.

1. cél: Az alkalmazottak száma legyen legalább 600.

2. cél: Az alkalmazottak száma ne haladja meg a 700-at.

3. cél: Az alkalmazottak legalább 60%-a érjen el minimum 70 pontot a nyelvi kompetencia teszten.

4. cél: Legalább 100 alkalmazott jó informatikai képességgel rendelkezzen.

Az alábbi táblázat a vizsga eredményeit tartalmazza:

Pontszámok	**Nyelvi teszt**	**Jó informatikai ismeretek**
70–100 pont	401 fő	közülük 78 fő
50–69 pont	452 fő	közülük 65 fő

a) Írjuk fel a feladat hierarchikus célprogramozási modelljét.

b) Legfeljebb 700 személyt tudnak alkalmazni, akik egyenként 1200 euró hasznot hoznak a vállalatnak. Minden egyes 700-as létszám feletti alkalmazott 300 euró veszteséget eredményez a vállalatnak. Ha az alkalmazottak minimálisan elfogadható létszámának (600 személy) 60%-a nem éri el a 70 pontot a nyelvi kompetenciákat felmérő teszten, akkor minden egyes százalék hiányra a vállalat elveszít 800 euró hasznot. A vállalat minden jó informatikai ismeretekkel rendelkező alkalmazottuk után 500 euró pluszjövedelemre tehet szert. Ezen információk alapján határozzuk meg a célok fontossági sorrendjét, írjuk fel a feladat nemhierarchikus célprogramozási modelljét, és határozzuk meg az így kapott lineáris programozási feladat megoldását.

Megoldás.

a) A döntési változók:

- x_1 a jó informatikai ismeretekkel rendelkező, legalább 70 pontot elért alkalmazottak száma;
- x_2 a gyengébb informatikai ismeretekkel rendelkező, legalább 70 pontot elért alkalmazottak száma;
- x_3 a jó informatikai ismeretekkel rendelkező, 70 pont alatt teljesítő alkalmazottak száma;
- x_4 a gyengébb informatikai ismeretekkel rendelkező, 70 pont alatt teljesítő alkalmazottak száma.

A célok matematikai megfogalmazása:

1. cél: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 600$,

2. cél: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 700$,

3. cél: $x_1 + x_2 \geq 0.6\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$,

4. cél: $x_1 + x_3 \geq 100$.

Most már fel tudunk írni egy többcélú programozási feladatot, amelynek lényege, hogy a céloktól való eltérést minimalizáljuk. Mindössze be kell vezessük az úgynevezett eltérésváltozókat. Mivel nem tudjuk, hogy a célokat alul- vagy felülteljesítjük, ezért az eltérésváltozók az alábbiak:

s_i^+ – az i-dik cél felülteljesítésének számszerű értéke (***többletváltozó***);

s_i^- – az i-dik cél alulteljesítésének számszerű értéke (***hiányváltozó***).

Az eltérésváltozókat felhasználva a célok így írhatók fel:
1. cél: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + s_1^- - s_1^+ = 600$,
2. cél: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + s_2^- - s_2^+ = 700$,
3. cél: $x_1 + x_2 + s_3^- - s_3^+ = 0.6\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, azaz
$$0.4x_1 + 0.4x_2 - 0.6x_3 - 0.6x_4 + s_3^- - s_3^+ = 0,$$
4. cél: $x_1 + x_3 + s_4^- - s_4^+ = 100$.

Az ***eltérésváltozók*** megadják, hogy mennyivel teljesítsük felül, illetve alul a célok korlátjait. Egyikük mindig nulla lesz. Például az első célnál, ha $x_1 = 300$, $x_2 = 70$, $x_3 = 300$, $x_4 = 10$, akkor $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 680$. Mivel felülteljesítés van, az $s_1^+ = 680 - 600 = 80$ és $s_1^- = 0$. Ha pedig $x_1 = 200$, $x_2 = 70$, $x_3 = 300$, $x_4 = 10$, akkor $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 580$. Ez alulteljesítés, és ezért $s_1^+ = 0$, $s_1^- = 600 - 580 = 20$.

A döntéshozó célja, hogy a felsorolt négy célt a lehető legnagyobb mértékben teljesítse, vagyis a "$\geq$" feltételek esetén minimalizálni kell a cél hiányváltozóját ($s_i^- \to \min$), a "$\leq$" tartalmazó célok esetén pedig minimalizálni kell a cél többletváltozóját ($s_i^+ \to \min$). Egyenlőségi feltételek esetén a célhoz tartozó hiány és többletváltozó összegét kell minimalizálni ($s_i^- + s_i^+ \to \min$).

Tehát a feladat hierarchikus célprogramozási modellje:

$$\begin{cases} z_1 = s_1^- \to \min, \\ z_2 = s_2^+ \to \min, \\ z_3 = s_3^- \to \min, \\ z_4 = s_4^- \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + s_1^- - s_1^+ = 600, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + s_2^- - s_2^+ = 700, \\ 0.4x_1 + 0.4x_2 - 0.6x_3 - 0.6x_4 + s_3^- - s_3^+ = 0, \\ x_1 + x_3 + s_4^- - s_4^+ = 100, \\ x_1 \leq 78, \\ x_2 \leq 323, \\ x_3 \leq 65, \\ x_4 \leq 387, \\ x_i, s_i^-, s_i^+ \in \mathbb{N},\ i = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Ebben az esetben a döntéshozónak rangsorolnia kell a célokat az általa legfontosabbnak tartott céltól (ez általában az első cél) a legkevésbé fontos célig (ez általában az utolsó cél). Tehát az 1. cél súlya nagyobb lesz a második cél súlyánál, a második cél súlya nagyobb a harmadik cél súlyánál, és így tovább az utolsó célig. Ezután a döntéshozó az 1. célt kielégítő pontok halmazán megpróbál olyan közel kerülni a második cél teljesítéséhez, amennyire az csak lehetséges. Az így kapott pontok halmazán meg olyan közel kerülni a harmadik célhoz, amennyire csak lehet, és így tovább. Így a modell optimális megoldásai meghatározhatók lineáris programozási feladatok segítségével.

Mivel a lineáris programozási feladatnál csak egy cél adható meg, először a legfontosabb céllal kezdünk, esetünkben az 1. céllal. Azaz meghatározzuk a

$$\begin{cases} z_1 = s_1^- \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + s_1^- - s_1^+ = 600, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + s_2^- - s_2^+ = 700, \\ 0.4x_1 + 0.4x_2 - 0.6x_3 - 0.6x_4 + s_3^- - s_3^+ = 0, \\ x_1 + x_3 + s_4^- - s_4^+ = 100, \\ x_1 \leq 78, \quad x_2 \leq 323, \\ x_3 \leq 65, \quad x_4 \leq 387, \\ x_i, s_i^-, s_i^+ \in \mathbb{N},\ i = 1,2,3,4. \end{cases}$$

lineáris programozási feladat optimális értékét. A feladat megoldásai: $x_1 = 78$, $x_2 = 323$, $x_3 = 65$, $x_4 = 234$ és $z_1 = s_1^- = 0$. Mivel $z_1 = 0$, következik, hogy teljesíthető az első cél.

A második lineáris programozási feladatban arra törekszünk, hogy az első cél teljesülése mellett milyen mértékben tudjuk a második célt is teljesíteni. Ennek érdekében elhagyjuk az s_1^- és s_1^+ eltérésváltozókat, és az első célnak megfelelő korlátozási feltételt visszaírjuk az eredeti formába:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 600.$$

Ha a célfüggvény értéke nem lett volna 0, akkor is elhagyjuk az s_1^- és s_1^+ eltérésváltozókat a következő LP feladatban, és az első célnak megfelelő feltételt a következő egyenlőséggel adjuk meg:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 600 - z_1.$$

A második LP feladatban a célfüggvény most már a z_2, és az LP feladat a következő:

$$\begin{cases} z_2 = s_2^+ \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 600, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + s_2^- - s_2^+ = 700, \\ 0.4x_1 + 0.4x_2 - 0.6x_3 - 0.6x_4 + s_3^- - s_3^+ = 0, \\ x_1 + x_3 + s_4^- - s_4^+ = 100, \\ x_1 \leq 78, \quad x_2 \leq 323, \\ x_3 \leq 65, \quad x_4 \leq 387, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}, \; s_i^-, s_i^+ \in \mathbb{N}, \; i = 2, 3, 4. \end{cases}$$

A feladat megoldásai: $x_1 = 37$, $x_2 = 323$, $x_3 = 65$, $x_4 = 175$ és $z_2 = s_2^+ = 0$. Tehát teljesíthető a második cél is.

A harmadik lineáris programozási feladatban most már arra törekszünk, hogy az első két cél teljesülése mellett milyen mértékben tudjuk a harmadik célt is teljesíteni. Ennek érdekében újabb két eltérésváltozót hagyunk el, az s_2^- és s_2^+-t. A második célnak megfelelő korlátozási feltételt is visszaírjuk az eredeti formába:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 700.$$

Ha a célfüggvény értéke nem lett volna 0, akkor a második célnak megfelelő feltételt a következő egyenlőség formájában adtuk volna meg:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 700 + z_2.$$

Tehát ha a célfüggvényben hiányváltozót minimalizálunk, akkor az eredeti célnak megfelelő egyenlőtlenség bal oldalából kivonjuk az LP feladat optimális értékét. Többletváltozó minimalizálása esetén pedig hozzáadjuk. Majd továbblépünk a következő cél teljesítésére. Ezen feltételek garantálják, hogy a fontosabb célok a lehető legnagyobb mértékben továbbra is teljesüljenek.

A harmadik LP feladatban a célfüggvény most már a z_3, míg az első két cél korlátozási feltételként jelenik meg:

$$\begin{cases} z_3 = s_3^- \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 600, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 700, \\ 0.4x_1 + 0.4x_2 - 0.6x_3 - 0.6x_4 + s_3^- - s_3^+ = 0, \\ x_1 + x_3 + s_4^- - s_4^+ = 100, \\ x_1 \leq 78, \quad x_2 \leq 323, \\ x_3 \leq 65, \quad x_4 \leq 387, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}, \;\; s_i^-, s_i^+ \in \mathbb{N}, \;\; i = 3, 4. \end{cases}$$

A feladat megoldásai: $x_1 = 37$, $x_2 = 323$, $x_3 = 65$, $x_4 = 175$ és $z_3 = s_3^- = 0$. A célfüggvény értéke szintén 0, tehát a harmadik célt is lehet teljesíteni az első két cél teljesülése mellett.

Az utolsó cél maradt hátra, az s_3^- és s_3^+ eltérésváltozókat is elhagyjuk, és a harmadik célt is visszaírjuk az eredeti alakba. A negyedik LP modellben a célfüggvényt a z_4 célra cseréljük:

$$\begin{cases} z_4 = s_4^- \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 600, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 700, \\ 0.4x_1 + 0.4x_2 - 0.6x_3 - 0.6x_4 \geq 0, \\ x_1 + x_3 + s_4^- - s_4^+ = 100, \\ x_1 \leq 78, \quad x_2 \leq 323, \\ x_3 \leq 65, \quad x_4 \leq 387, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, s_4^-, s_4^+ \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Az LP feladat és egyben a hierarchikus célprogramozási modell egyik megoldása: $x_1 = 78$, $x_2 = 323$, $x_3 = 22$, $x_4 = 177$ és $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$. A vállalat az összes célt 100%-ban teljesíteni tudja. Összesen 600 alkalmazottat kell felvegyen, 66.8% érte el a minimum 70 pontot a nyelvi teszten, és pontosan 100 alkalmazott jó informatikai ismeretekkel rendelkezik. A feladatnak több olyan megoldása is létezik, amely mellett az összes cél teljesül, például: $x_1 = 78$, $x_2 = 323$, $x_3 = 62$, $x_4 = 202$.

b) Az első célnál azt kell meghatározzuk, hogy mekkora veszteséget generál a cél alulteljesítése. A 600-as létszám alatt minden egyes alkalmazott 1200 euró jövedelemkiesést jelent. Mivel s_1^- számú alkalmazottal van kevesebb, ezért ennek a feltételnek a nem teljesítése $1200s_1^-$ veszteséget okoz. A

700-as alkalmazotti létszám feletti pedig 300 euró többletköltséget, vagyis s_2^+ számú alkalmazott esetén $300s_2^+$ hiányt eredményez. A harmadik cél alulteljesítése 1%-kal $\frac{600}{100} = 6$ alkalmazottat jelent. Tehát a harmadik cél nem teljesítése s_3^- alkalmazott esetén $\frac{800}{6}s_3^-$ jövedelemkiesést okoz. A negyedik cél s_4^- értékkel való alulteljesítése $500s_4^-$ összegű veszteséget okoz.

A vállalatnak az az érdeke, hogy $z = 1200s_1^- + 300s_2^+ + \frac{800}{6}s_3^- + 500s_4^-$ összveszteségét minimalizálja. Látható, hogy a veszteség generálásában azok a tényezők mérvadóak, amelyeknek legnagyobb az együtthatójuk. Az első célhoz rendelt súly 1200, a másodikhoz 300, a harmadikhoz $\frac{800}{6}$, a negyedikhez pedig 500. Ez azt jelenti, hogy az első cél $\frac{1200}{300} = 4$-szer fontosabb, mint a második, $\frac{1200}{800/6} = 9$-szer fontosabb, mint a harmadik és $\frac{1200}{500} = 2.4$-szer fontosabb, mint a negyedik. Ezért a célok fontossági sorrendje: 1. cél> 4. cél> 2. cél > 3. cél.

A feladat nemhierarchikus célprogramozási modellje:

$$\left\{\begin{array}{c} z = 1200s_1^- + 300s_2^+ + \frac{800}{6}s_3^- + 500s_4^- \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + s_1^- - s_1^+ = 600, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + s_2^- - s_2^+ = 700, \\ 0.4x_1 + 0.4x_2 - 0.6x_3 - 0.6x_4 + s_3^- - s_3^+ = 0, \\ x_1 + x_3 + s_4^- - s_4^+ = 100, \\ x_1 \leq 78, \\ x_2 \leq 323, \\ x_3 \leq 65, \\ x_4 \leq 387, \\ x_i, s_i^-, s_i^+ \in \mathbb{N},\ i = 1, 2, 3, 4. \end{array}\right. \tag{3.1}$$

WinQSB lineáris programozási eszköztárát használva az alábbi megoldásokhoz jutunk: $x_1 = 78$, $x_2 = 321$, $x_3 = 23$, $x_4 = 243$, $s_1^- = 0$, $s_1^+ = 65$, $s_2^- = 35$, $s_2^+ = 0$, $s_3^- = 0$, $s_3^+ = 0$, $s_4^- = 0$, $s_4^+ = 1$. A minimális veszteség $z_{\min} = 0$. A vállalat az összes célt 100%-ban teljesíteni tudja. Összesen 665 alkalmazottat kell felvegyen, akik közül pontosan 60% érte el a minimum 70 pontot a nyelvi teszten, és 101 alkalmazott jó informatikai ismeretekkel rendelkezik.

3.1. Célprogramozás WinQSB használatával

A felvételi mintapéldában a kitűzött célok fontosságát a lineáris programozási modell célfüggvényében az együtthatók sorrendje dönti el. Ebben az esetben a döntéshozó pontosan meg tudta határozni a célok relatív fontosságát. Gyakran előfordul azonban, hogy a döntéshozó nem képes a célok relatív fontosságának precíz meghatározására. Ha ez a helyzet, akkor a célprogramozás hierarchikus modellje hasznos eszköznek bizonyulhat.

3.2. mintapélda (Asztalos). Egy asztalos kétfajta terméket gyárt: székeket és asztalokat. Összesen 30 munkaórát fordít gyártásukra. A piackutatók szerint az asztalokból legalább 10-et, a székekből pedig legalább 15 darabot kell készítsen. A gyártás jellemzőit tartalmazza az alábbi táblázat:

	Asztalok	**Székek**
Munkaidő-szükséglet (óra/darab)	5	3
Nyereség (euró/darab)	12	8

Az asztalos céljai fontossági sorrendben (a legfontosabbal kezdve):

1. cél: A 100 euró profit elérése.

2. cél: Az asztalok keresletének kielégítése.

3. cél: A székek keresletének kielégítése.

4. cél: Ne legyen túlóra.

a) Írjuk fel és oldjuk meg a feladat hierarchikus célprogramozási modelljét.

b) Tudjuk, hogy a túlórázás büntetőköltsége 0.2 euró óránként, valamint ha valamelyik termék gyártása a megkívánt kereslet alá esik, akkor a büntetőköltsége 0.4 euró. Minden egyes eurónyi alulteljesítésnek 1 euró a büntetőköltsége. Írjuk fel és oldjuk meg a feladat lineáris programozási modelljét.

Megoldás.

a) A döntési változók:

– x_1 a legyártott asztalok darabszáma;

– x_2 a legyártott székek darabszáma.

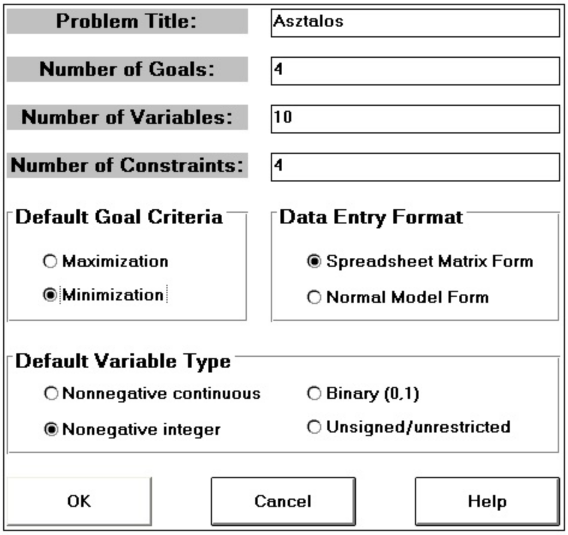
A célok matematikai megfogalmazása:

1. cél: A profit összesen: $12x_1 + 8x_2 \geq 100$.

2. cél: Az asztalok mennyisége: $x_1 \geq 10$.

3. cél: A székek mennyisége: $x_2 \geq 15$.

4. cél: A munkaórák száma: $5x_1 + 3x_2 \leq 30$.

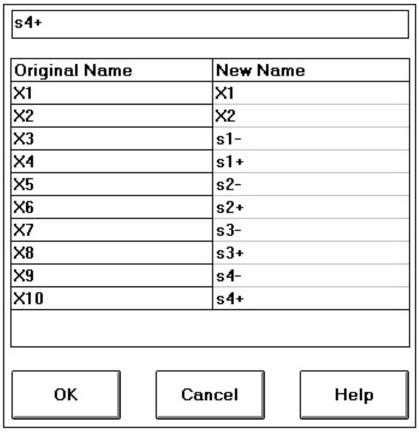


3.1. ábra. A célprogramozási eszköztár kezdő beviteli ablaka

Az eltérésváltozókat felhasználva, a célok az alábbi korlátozó feltételeket kell teljesítsék:

$$
\begin{aligned}
12x_1 + 8x_2 + s_1^- - s_1^+ &= 100;\\
x_1 + s_2^- - s_2^+ &= 10;\\
x_2 + s_3^- - s_3^+ &= 15;\\
5x_1 + 3x_2 + s_4^- - s_4^+ &= 30.
\end{aligned}
$$

A döntéshozó célja, hogy a felsorolt négy célt a lehető legnagyobb mértékben teljesítse, vagyis a $\geq$ célok esetén minimalizálni kell a feltétel hiányváltozóját ($s_i^- \to \min$), és a $\leq$ célok esetén pedig minimalizálni kell a feltétel többletváltozóját ($s_i^+ \to \min$).



3.2. ábra. A döntési változók elnevezéseit ebben az ablakban lehet megváltoztatni

Tehát a feladat hierarchikus célprogramozási modellje:

$$\begin{cases} z_1 = s_1^- \to \min, \\ z_2 = s_2^- \to \min, \\ z_3 = s_3^- \to \min, \\ z_4 = s_4^+ \to \min, \\ 12x_1 + 8x_2 + s_1^- - s_1^+ = 100, \\ x_1 + s_2^- - s_2^+ = 10, \\ x_2 + s_3^- - s_3^+ = 15, \\ 5x_1 + 3x_2 + s_4^- - s_4^+ = 30, \\ x_1, x_2, s_i^-, s_i^+ \in \mathbb{N},\ i = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \tag{3.2}$$

Jelöljük az egyes célok súlyait rendre P_1-gyel, P_2-vel, P_3-mal és P_4-gyel. A megadott fontossági sorrend alapján

$$P_1 \geq P_2 \geq P_3 \geq P_4.$$

Variable -->	X1	X2	s1-	s1+	s2-	s2+	s3-	s3+	s4-	s4+	Direction	R. H. S.
Min:G1			1									
Min:G2					1							
Min:G3							1					
Min:G4										1		
C1	12	8	1	-1							=	100
C2	1				1	-1					=	10
C3		1					1	-1			=	15
C4	5	3							1	-1	=	30
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType	eger	teger	eger	eger	eger	eger	eger	eger	eger	eger		

3.3. ábra. A 3.2. mintapélda adattáblája

A feladat hierarchikus célprogramozási modelljét a (3.2)-ből az új $z = P_1 s_1^- + P_2 s_2^- + P_3 s_3^- + P_4 s_4^+$ célfüggvény beiktatásával kapjuk:

$$\begin{cases} z = P_1 s_1^- + P_2 s_2^- + P_3 s_3^- + P_4 s_4^+ \to \min, \\ 12x_1 + 8x_2 + s_1^- - s_1^+ = 100, \\ x_1 + s_2^- - s_2^+ = 10, \\ x_2 + s_3^- - s_3^+ = 15, \\ 5x_1 + 3x_2 + s_4^- - s_4^+ = 30, \\ x_1, x_2, s_i^-, s_i^+ \in \mathbb{N},\ i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

A feladatot a célprogramozási szimplex módszer segítségével lehet megoldani. Ez az algoritmus van beépítve a WinQSB célprogramozási (Linear and Integer Gool programming) eszköztárába. A továbbiakban ezt használjuk a hierarchikus célprogramozási feladatok megoldására.

Először is az eszköztár (3.1. ábra) kezdő beviteli ablakában megadjuk a célok számát (Number of Goals), majd az ismeretlenek számát (Number of Variables) és a feltételek számát (Number of Constraints). Ebben a feladatban ezek rendre 4, 10 és 4. Vigyázni kell, hogy a célfüggvényeket minimalizálásra állítsuk (Default Goal Criteria-Minimization). Mivel a döntési változók pozitív egész számok, a változók (Default Variable Type) mezőből a nemnegatív egészet (Nonegative Integer) kell kiválasztani.

Az OK gombra kattintva betöltődik a célprogramozás 3.3. ábrán található adattábla, amelyet a (3.2) modell alapján kell kitölteni. Itt először is az Edit menüpont változók elnevezései (Variable Names) ablakában megadjuk a döntési változók elnevezéseit: X3-at átnevezzük $s1-$-ra, X4-et $s1+$-ra, és így tovább a többi eltérésváltozót is beírjuk (3.2. ábra).

Ezek után már csak az adattáblát kell kitölteni úgy, hogy a táblázat mezőibe a megnevezések alapján a megfelelő együttható kerüljön (3.3. ábra).

A síző emberke ikonra kattintva betöltődik az eredménytábla. Innen a Solution Value oszlopból kiolvashatók a döntési változók értékei: $x_1 = 10$, $x_2 = 15$, $s_1^- = 0$, $s_1^+ = 140$, $s_2^- = 0$, $s_2^+ = 0$, $s_3^- = 0$, $s_3^+ = 0$, $s_4^- = 0$, $s_4^+ = 65$. A célfüggvények (Goal Value) minimális értékei: $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$, $z_4 = 65$. Látható, hogy az utolsó célt nem lehet teljesíteni, ennek következtében az asztalosnak 65 túlórát kell bevállalnia.

Megjegyezzük, ha megváltoztatjuk a fontossági sorrendet, akkor a 3.2. adattáblában is a Min:G1 -Min:G4 sorokat a megfelelő módon kell változtatni.

b) A túlórázás büntetőköltsége 0.2 euró óránként, ezért s_4^+ túlóra költsége $0.2s_4^+$. Az asztalok száma s_2^-, a székek száma pedig s_3^- egységgel esik a kereslet alá, ezért a büntetőköltség $0.4s_2^-$ illetve $0.4s_3^-$. Az s_1^- eurónyi alulteljesítésből eredő veszteség $1s_1^-$. Tehát az összveszteség $z = s_1^- + 0.4s_2^- + 0.4s_3^- + 0.2s_4^+$. A súlyok alapján a fontossági sorrend azonos az a) pontban megadottal.

A feladat lineáris programozási modellje:

$$\begin{cases} z = s_1^- + 0.4s_2^- + 0.4s_3^- + 0.2s_4^+ \to \min, \\ 12x_1 + 8x_2 + s_1^- - s_1^+ = 100, \\ x_1 + s_2^- - s_2^+ = 10, \\ x_2 + s_3^- - s_3^+ = 15, \\ 5x_1 + 3x_2 + s_4^- - s_4^+ = 30, \\ x_1, x_2, s_i^-, s_i^+ \in \mathbb{N},\ i = 1,2,3,4. \end{cases}$$

A WinQSB lineáris programozási eszköztára segítségével a következő megoldásokat kapjuk: $x_1 = 0$, $x_2 = 13$, $s_1^- = 0$, $s_1^+ = 4$, $s_2^- = 10$, $s_2^+ = 0$, $s_3^- = 2$, $s_3^+ = 0$, $s_4^- = 0$, $s_4^+ = 9$ és $z_{\min} = 6.6$ euró.

3.2. Kitűzött feladatok

1. Egy vállalat kutatási és fejlesztési osztálya három új terméket fejlesztett ki. Az egyes termékek az alábbi táblázatban megadott szinten

teljesítik a felsorolt tényezőket:

Tényező	**Termék**			
	1	**2**	**3**	**egység**
Hosszú távú profit	20	15	25	millió euró
Munkaerőszint	10	8	10	száz alkalmazott
Jövő évi nyereség	7	6	8	millió euró

A vezetés három célt tűz ki a következő prioritási sorrendben:
1. cél: a hosszú távú profit legyen legalább 50 millió euró;
2. cél: a munkaerőszint legyen legfennebb 2500 alkalmazott;
3. cél: a vállalat jövő évi nyeresége legalább 20 millió euró legyen.
Alkalmazzuk a hierarchikus célprogramozás módszerét, és adjuk meg, hogy a három terméket milyen arányban kell gyártani.

2. Egy üzlet meg akarja határozni a színes tévék és videók raktárkészletének nagyságát. Az üzletnek 300 euróba kerül egy színes tévé és 200 euróba egy videó beszerzése. A színes tévének 3 egységnyi, a videónak egy egységnyi raktározási tér szükséges. Egy tévé eladásán az üzlet 150 eurót, egy videó eladásán 100 eurót keres. Az üzlet céljai fontossági sorrendben a következők:
   1. cél: Maximum 20 000 euró költhető el színes tévére és videokészülékre.
   2. cél: Az üzlet legalább 11 000 euró profitot akar realizálni tévék és videók eladásából.
   3. cél: A színes tévék és videók nem foglalhatnak el többet a raktárban 200 egységnél.
   Fogalmazzuk meg azt a hierarchikus célprogramozási modellt, amelynek segítségével az üzlet meg tudja határozni a színes tévé- és videórendelések számát! Hogyan változik meg a modell, ha az üzlet pontosan 11 000 euró profitot szeretne elérni?
3. Egy játékgyár három típusú robotjátékot gyárt. Az első típusú játék gyártása 10 perc, a másodiké 12 perc, a harmadiké pedig 15 perc. Az első típusú játékhoz 2 kg, a másodikhoz 3 kg, a harmadikhoz pedig 4 kg műanyag szükséges. A játékok utáni nettó jövedelmek rendre 2, 5, illetve 7 euró. Hogy a rendeléseket teljesítse, a gyár mindegyik termékből legalább 10 darabot kell gyártson. A gyár céljai, sorrendben:
   1. cél: legalább napi 200 euró nettó jövedelmet érjen el;
   2. cél: maximum napi 8 órát dolgozhatnak a játékok előállításánál;
   3. cél: legfennebb 200 kg műanyagot fordítson a játékok gyártására.

Fogalmazzunk meg egy hierarchikus célprogramozási feladatot és adjuk meg az optimális döntéseket. Mi történik, ha a gyár vezetősége fordított prioritási sorrendet választ?

4. A Csíki sörfőzde világos és barna sört gyárt árpából, komlóból és malátából. Jelenleg 4 tonna árpa és 3 tonna komló áll a rendelkezésre. Egy hordó világos sört 45 euróért lehet eladni, előállításához 1 kg árpa, 1 kg komló és 1.8 kg maláta szükséges. Egy hordó barna sört 50 euróért lehet eladni, előállításához 2 kg árpára, 1 kg komlóra és 1.5 kg malátára van szükség. A sörfőzde el tudja adni az általa gyártott világos és barna sört. A sörfőzde céljai prioritási sorrendben:

   1. cél: az összbevétel legalább 120 000 euró legyen;

   2. cél: maximum 4 tonna malátát használjon fel a gyártásnál.

   a) Fogalmazzunk meg egy hierarchikus célprogramozási feladatot, és adjuk meg az optimális döntéseket.

   b) Milyen termelési tervet válasszanak, ha tudják, hogy a sörfőzde vesztesége minden egységnyi bevételkiesés miatt 1 euró, és minden plusz tonna felhasznált maláta a sörfőzdének 30 euró veszteséget generál?

5. Csíkszereda önkormányzatának jövőre a város területén újrafelhasználható hulladékgyűjtő lerakatokat kell elhelyeznie. Egy lerakat éves költsége 5000 euró. Mindegyik lerakatot hozzá kell rendelni a város keleti vagy nyugati részéhez. Legyen x_1 a keleti részben és x_2 a nyugati részben kialakított lerakatok száma. A munkásoknak a keleti részben naponta átlagosan $40 - 3x_1$ óra szükséges a hulladék begyűjtéséhez, nyugati részben pedig $50 - 4x_2$ óra. A város önkormányzatának három célja van:

   1. cél: A keleti részben a begyűjtési idő legfeljebb 5 óra legyen.

   2. cél: A nyugati részben is a begyűjtési idő legfeljebb 5 óra legyen.

   3. cél: A lerakatok éves költségvetése 100 000 euró.

   A város önkormányzata úgy gondolja, hogy (bármely rész esetén) az 5 órás célkitűzés egy órával történő túllépésének kára 10 000 euró költséggel egyenlő, és minden eurónyi költségkeret-túllépés költsége 1 euró.

   a) Írjuk fel és oldjuk meg az LP-modellt, amely azt határozza meg, hogy hány lerakatot kell az egyes részekben telepíteni!

   b) A következő prioritási rangsorok közül mindegyik esetében alkalmazzuk a célprogramozási szimplex módszert a lerakatoknak a városrészekhez rendelésére: 1. cél $>$ 2. cél$>$3. cél; 2. cél$>$1. cél $>$3. cél; 3. cél$>$1. cél$>$2. cél.

6. Egy számítástechnikai vállalat meg szeretné tenni éves chiprendelését. A vállalat a chipeket (100-as egységekben) három szállítótól vásárolhatja meg. Mindegyik chip kiváló, jó vagy közepes minősítésű. A jövő évben a vállalatnak 5000 kiváló, 3000 jó és 1000 közepes minősítésű chipre lesz szüksége. Az egyes szállítóktól érkező chipek tulajdonságait a következő táblázat mutatja.

	Chiprendelés			**Ára**
	Kiváló	**Jó**	**Közepes**	
1. szállító	60	20	20	400
2. szállító	50	35	15	300
3. szállító	40	20	40	250

A vállalat minden évben 28 000 eurót költ ezekre a számítástechnikai alkatrészekre. Ha a vállalat az adott minőségű chipből nem rendelkezik elegendő mennyiséggel, pótrendelést adhat le, amelyeknek többletköltsége a kiváló minőségű chipeknél 10 euró, a jóknál 6 euró, a közepeseknél pedig 4 euró. A vállalat 1 euró büntetőköltséget rendel minden egyes euróhoz, amely az 1–3. szállítóknak kifizetendő költségkeretet meghaladja. Fogalmazzuk és oldjuk meg a vállalat számára azt az LP-modellt, amellyel az éves chipszükséglet kielégítése minimális büntetőköltséggel történik! Alkalmazzuk a hierarchikus célprogramozási modellt a beszerzési stratégia meghatározására! Legyen a költségkeret a legmagasabb prioritású cél, amelyet a kiváló, a jó és a közepes chiprendelések kielégítésének céljai követnek.

7. Egy vállalat négyféle terméket gyárt: a T1 és T2 típusokat házi használatra és a T3 és T4 típusokat ipari célokra. A termékek elkészítéséhez három különböző integrált áramkörre és munkaerőre van szüksége. Az A és B áramköröket importálják, a C áramkört a vállalat maga állítja elő. Az alábbi táblázat az egyes gépeknél felhasznált áramkörök számát, a munkaerő-szükségletet (órában) és a nyereséget (ezer euróban) tartalmazza:

	T1	**T2**	**T3**	**T4**
A	5	3	2	0
B	0	0	3	8
C	1	4	6	2
Munkaerő	2	3	4	6
Nyereség	10	30	50	100

A termeléshez 240 A és 320 B áramkör áll rendelkezésre. A munkaerő felső korlátja 180 óra. A vállalat céljai fontossági sorrendben:
1. cél: a nyeresége legalább 2 millió euró legyen;
2. cél: a házi használatra készült termékek száma legyen legalább 60;
3. cél: a saját előállítású felhasznált C áramkörök száma legyen legalább 270.
Írjuk fel azt a hierarchikus célprogramozási modellt, amely alapján meghatározható egy hatékony termelési terv.

8. Egy vállalat egy új ötvözetet kíván gyártani. Az új ötvözetet a táblázatban látható összetételű ötvözetek összeolvasztásával szeretnék előállítani:

	Ötvözet		
Tulajdonság	**1**	**2**	**3**
Óntartalom (%)	60	25	45
Cinktartalom (%)	10	15	45
Ólomtartalom (%)	30	60	10
Ár (euró/kg)	19	17	23

A vállalat céljai fontossági sorrendben:
1. cél: az ötvözet 40% ónt, 35% cinket és 25% ólmot tartalmazzon;
2. cél: 1 kg ötvözet előállítási költsége ne legyen több, mint 20 euró.
Milyen arányban kell az egyes ötvözeteket összeolvasztani? Mennyi lesz a minimális előállítási költség?
Az ötvözetben valamelyik összetevőnek 1%-os eltérése a megadott aránytól 2 eurós többletköltséget jelent a vállalatnak, minden egységnyi bevételkiesés miatt pedig 1 euró veszteség éri a vállalatot. Írjuk fel azt a nemhierarchikus lineáris programozási modellt, amellyel a vállalat meghatározhatja, hogy milyen arányban kell az egyes ötvözeteket összeolvasztania, hogy vesztesége minimális legyen.

9. Egy gazda búzát és zabot termeszt saját 50 holdas földjén. Legfeljebb 25 000 kg zabot tud eladni. Egy beültetett holdon vagy 2300 kg búza, vagy pedig 1800 kg zab terem. A búza eladási ára 0.5 euró/kg, a zabé pedig 0.8 euró/kg. Egy hold búza aratásához 2.5 munkaóra, egy hold zab aratásához 3 munkaóra szükséges. A gazda céljai prioritási sorrendben:
1. cél: nyeresége legalább 35 000 euró legyen;
2. cél: legtöbb 70 munkaórát vehet igénybe, 60 euró/óra költséggel.

Fogalmazzunk meg egy hierarchikus célprogramozási feladatot, és adjuk meg az optimális döntéseket.

10. Jancsi mobilboltja jelenleg 4 főállású alkalmazottal és 2 részmunkaidős alkalmazottal rendelkezik. A teljes munkaidős alkalmazott munkaideje napi 8 óra, azaz heti 40 óra, a részmunkaidősöké pedig napi 4, azaz heti 20 óra. A teljes munkaidős alkalmazottak órabére 5 euró és átlagban 3 mobilt tudnak eladni, a részmunkaidősök órabére 3 euró és átlagban 1 mobil tudnak eladni óránként. Ha a teljes munkaidős alkalmazottak túlóráznak, akkor óránként 10 eurót kell fizetni nekik. Jancsi a mobilokat átlag 15 euróért veszi, és 20 euróért adja el őket. A havi fix költsége 1200 euró. Jancsi a következő célokat tűzte ki magának (a fontosság sorrendjében):
1. cél: legalább heti 1800 euró profitot érjen el;
2. cél: legalább heti 700 mobiltelefont adjon el;
3. cél: a teljes munkaidős alkalmazottak legfeljebb heti 50 túlórát vállalhatnak.
Írjuk fel azt a hierarchikus célprogramozási modellt, amely alapján meghatározhatjuk a főállású alkalmazottak túlóráinak számát!

11. A Gúnya Kft. alkalmi ruhákat forgalmaz. Az alábbi táblázat mutatja a ruhák heti eladásainak adatait:

Hét	**Mennyiség**
1	45
2	123
3	86
4	103

A Gúnya Kft. heti 90 női és férfiruhát tud rendelni, és raktáron 20 ruhát tud tárolni. Minden további plusz ruharaktározási költsége heti 2 euró többletköltséggel jár. Minden keresletbeli hiány átlagosan 10 euró veszteséget jelent. Határozzuk meg, hogy a Gúnya Kft. hetente hány ruhát kell rendeljen ahhoz, hogy az összes rendelést teljesítse a lehető legkevesebb többletköltség mellett.

12. Egy cipőgyár előrejelzése szerint a kereslet a következő negyedévre így alakul:

Hónap	**Cipő**
1.	150 pár
2.	190 pár
3.	210 pár

Egy pár cipő elkészítése 5 euróba kerül rendes munkaidőben, túlórában pedig 7 euróba. Minden hónapban legtöbb 180 cipőt képesek előállítani rendes munkaidőben, túlórával pedig még 80-at. Ha egy pár cipő a raktárban marad, 1 euróba kerül a tárolása.
A cipőgyár vezetősége a következő célokat tűzte ki magának (a fontosság sorrendjében):
1. cél: teljes termelési költség legfeljebb 2800 euró legyen;
2. cél: a havi raktárban maradt készlet ne haladja meg az 5 darabot.
Írjuk fel azt a hierarchikus célprogramozási modellt, amely alapján meghatározhatjuk a negyedévi termelési tervet!

13. Egy asztali számítógépeket forgalmazó vállalkozáson belül a következő részlegek vannak: beszerzés, összeszerelés és értékesítés. A részlegek profitorientáltan működnek. Legyen a, b, c az egyes részlegek árrése százalékban. A vállalkozás alacsony, közepes és felső árkategóriás gépeket forgalmaz, amelyek az alkatrészek minőségében különböznek. Ha minden részleg 10%-os árrést határoz meg, akkor a jelenlegi forgalom mellett, összvállalati szinten, a következő nyereségek valósulnak meg (géptípusra lebontva, ezer euróban):

	Beszerzés (**a**)	Összeszerelés (**b**)	Értékesítés (**c**)
AK	90	300	90
KK	120	400	100
FK	100	250	95

A vállalat megfelelő működése érdekében a következő feltételeknek kell teljesülniük:
- a közepes árkategóriás gépeken megvalósított nyereség legalább 600 ezer euró kell legyen;
- a felső árkategóriájú gépeken megvalósított nyereség legalább 400 ezer euró kell legyen;
- a vállalat össznyeresége nagyobb kell legyen, mint 1.5 millió euró;
- az értékesítés árrése legalább 5%, maximum 10% kell legyen.

A vállalat stratégiája a következő célokat határozza meg:
1. cél: Az alacsony árkategóriájú gépeken megvalósított nyereség legalább 400 ezer euró kell legyen;
2. cél: Az összeszerelés nyeresége adózási megfontolásokból nem lehet nagyobb, mint 800 ezer euró;
3. cél: Az értékesítés nyeresége legalább 300 ezer euró kell legyen.

Mekkora árrés alkalmazását javasolja a felső vezetés az egyes részlegeknek, ha a célok prioritása: 1. cél $\geq$ 2. cél $\geq$ 3. cél, illetve ha 2. cél $\geq$ 1. cél $\geq$ 3. cél.

14. Csíkszereda polgármesterének ki kell dolgoznia a város adózási politikáját. Ötféle adót kell kivetni:
    - tulajdoni adó; legyen p a tulajdoni adó százalékos mértéke;
    - fogyasztási adó, amelyet minden termékre kivetnek, kivéve az élelmiszereket, a gyógyszereket és a tartós fogyasztási cikkeket; legyen s a kereskedelmi adó százalékos mértéke;
    - a tartós fogyasztási cikkek adója; jelölje d a tartós fogyasztási cikkek százalékos adókulcsát;
    - a benzinfogyasztási adója; legyen g a benzinfogyasztási adójának százalékos mértéke;
    - az élelmiszerek és gyógyszerek fogyasztási adója; jelölje f ezen termékek fogyasztási adókulcsát.

    A városban alacsony jövedelmű (AJ), közepes jövedelmű (KJ) és magas jövedelmű (MJ) emberek élnek. Az egyes jövedelmi csoportoktól az egyes adófajták 1%-os mértékű kivetése révén beszedett összegek (millió euróban) a következők:

	p	**s**	**d**	**g**	**f**
AJ	90	30	12	3	9
KJ	120	40	10	2	6
MJ	100	25	6	1	4

    Ha tehát a tartós fogyasztási cikkekre 3%-os adót vetnek ki, akkor az alacsony jövedelmű csoporttól 36 millió euró folyik be. Az adózási politikának a következő feltételeket kell kielégítenie:
    - a közepes jövedelmű csoporttól beszedett összeg nem haladhatja meg a 280 millió eurót;
    - a magas jövedelműek adóterhe nem haladhatja meg a 240 millió eurót;
    - az összes adóbevételnek meg kell haladnia a 650 millió eurós összeget;
    - az s értékének 1% és 3% között kell lennie.

    Mindezeket figyelembe véve a polgármester három célt jelöl meg:

    1. cél: A tulajdoni adó kulcsa legyen 3% alatt.

    2. cél: Az alacsony jövedelműek adóterhét tartsuk 200 millió euró alatt.

3. cél: Ha az adóteher túlságosan nagy, akkor az alacsony jövedelműek 20%-a, a közepes jövedelműek 20%-a és a magas jövedelműek 40%-a fontolóra veszi, hogy a külső kerületekbe költözzön. Ennek a hatásnak az ellensúlyozására a külső kerületek célja az, hogy a jelzett arányú népesség összes adóterhét 150 millió euró alatt tartsa.

Alkalmazzuk a célprogramozás módszerét az optimális adópolitika kialakítására, miközben a polgármester céljainak prioritási kapcsolatai a következők:

a) 2. cél $\geq$ 1. cél $\geq$ 3. cél.

b) 1. cél $\geq$ 2. cél $\geq$ 3. cél.

c) 3. cél $\geq$ 2. cél $\geq$ 1. cél.

Van-e valami közös a három prioritási sorrend esetén kapott megoldásokban?

15. Egy vállalat az elkövetkező 3 hónapban raktártér bérlésére kényszerül. Csak azt ismerik, mekkora raktárterületre lesz szükség az egyes hónapokban. Mivel azonban ezek az igények igencsak eltérőek, talán az lenne a legkifizetődőbb, ha minden hónapra kibérelnék a megfelelő nagyságú területet. Másrészről viszont egy terület bérletének egy további hónapra történő meghosszabbítása az első hónapi díjnál sokkal kisebb többletköltséggel jár, vagyis talán olcsóbb lenne a maximális területet kibérelni a teljes 3 hónapra. Egy közbülső megoldás lehetne, ha időközben legalább egyszer megváltoztatnák a bérelt terület nagyságát (további területet bérelnének). Az egyes időszakokra szükséges raktárterület nagysága (m^2) és a bérleti díjak a következők:

Hónap	**Szükséges terület**
1	300
2	200
3	400

Bérlési időszak (hónap)	**Bérleti díj (euró/m^2)**
1	65
2	100
3	135

A vállalat céljai fontossági sorrendben:

1. cél: bérleti díj ne legyen több, mint 45 000 euró;

2. cél: a raktári szükségletek biztosítása.

Írjuk fel azt a hierarchikus célprogramozási modellt, amely alapján meghatározható egy hatékony bérlési terv. Tudva azt, hogy minden 45 000 euró feletti bérleti díj 1 euró hiányt és minden négyzetméter bérleti terület hiánya 2 euró veszteséget jelent a vállalatnak, írjuk fel azt a nemhierarchikus lineáris programozási modellt. Mekkora lesz a vállalat minimális vesztesége?

4. FEJEZET

HIERARCHIKUS ELEMZŐ MÓDSZER

Az előző fejezetben olyan problémákat tárgyaltunk, amikor a döntéshozó a lehetséges megoldások közül úgy választ, hogy azok mennyire elégítenek ki különböző célokat. Ha a döntéshozónak egyszerre több cél is fontos, akkor a választás nem könnyű feladat. A Thomas L. Saaty (1926 – 2017) által kifejlesztett *hierarchikus elemző módszer* (Analytic Hierarchy Process – AHP) egy jó lehetőség a többcélú döntési feladatokat megoldani kívánó döntéshozó számára.

4.1. mintapélda (Házvásárlás). Egy átlagos jövedelmű család házat szeretne vásárolni. Döntése meghozatala előtt négy tényezőt mérlegel:

1. tényező: a ház mérete (négyzetméterben megadva);

2. tényező: általános feltételek (szükséges javítások, falak, tisztaság, tető, víz és elektromos vezetékek);

3. tényező: a kert tágassága (első, hátsó és a szomszédoktól való távolság);

4. tényező: finanszírozás (felvállalandó teher, banki finanszírozás).

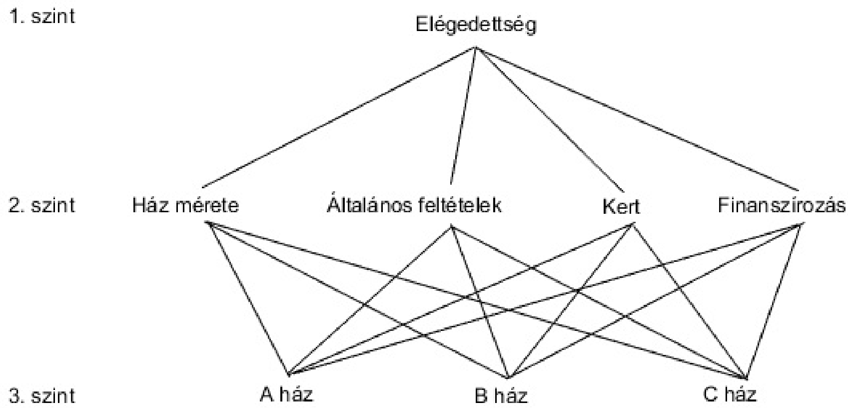
Három ház közül választhat.

Az **A** ház a három közül a legnagyobb. Habár az általános feltételek nem épp a legjobbak, kitakarításra és festésre szorul. A **B** és **C** ház kertjéhez viszonyítva aránylag nagyobb kertje van. A finanszírozása sem épp a legmegfelelőbb, mivel banki kölcsön szükséges hozzá elég magas kamatláb mellett.

A **B** ház egy kicsit kisebb, mint az **A** ház. A kert elég kicsi, és a ház nem rendelkezik modern berendezéssel. Másfelől az általános feltételek elég jók. Elfogadható jelzálog szerezhető, tehát elég jónak mondható a pénzügyi része.

A **C** ház nagyon kicsi és kevés a modern felszerelése. Jó állapotban van és biztonságosnak tűnik. A kertje nagyobb, mint a **B** házé, de nem lehet összemérni az **A**-val. Finanszírozási szempontból jobb, mint **A**, de rosszabb, mint a **B**.

Alkalmazva az AHP-t segítsünk a döntés meghozatalában.



4.1. ábra. A 4.1. mintapélda (Házvásárlás) döntési struktúrája

Megoldás. Egy hierarchikus döntési struktúra legalább három szintből áll. A jelen feladat esetében ezeket a 4.1. ábra szemlélteti.

1. lépés. Meghatározzuk a tényezők fontossági sorrendjét. Ehhez elkészítjük az úgynevezett ***páros összehasonlítási mátrixot***, amelynek $a_{i,j}$ elemei azt mutatják meg, hogy az i-edik cél mennyivel fontosabb a j-edik célnál. A fontosságot az egész számokból álló 1–9-ig terjedő skálán mérjük, ahol az egyes számértékek jelentését az alábbi táblázat mutatja:

a_{ij} értéke	Értelmezés
1	Az i-edik cél és a j-edik cél egyformán fontos
3	Az i-edik cél enyhén fontosabb a j-edik célnál
5	Az i-edik cél fontosabb a j-edik célnál
7	Az i-edik cél jóval fontosabb a j-edik célnál
9	Az i-edik cél határozottan jóval fontosabb a j-edik célnál
2, 4, 6, 8	Közbeeső értékek: például a 4 azt jelenti, hogy az i-edik cél valahol félúton enyhén fontosabb – fontosabb, mint a j-edik cél

Megjegyezzük, hogy a páronkénti összehasonlítások döntéshozókkal történő elvégeztetésének fontos módszertani szempontja, hogy nem mindegy, milyen sorrendben tesszük fel a kérdéseket. A szabályos elrendezés szinte mindig torzít, a véletlenszerű már kevésbé. A Robert T. Ross által 1934-ben kidolgozott elrendezés pedig a véletlennél is kisebb torzítással működik.

Tegyük fel, hogy a család összehasonlítja a tényezőket, és az alábbi páros összehasonlítási mátrixot kapja:

	1.	**2.**	**3.**	**4.**
1.	1	2	1/2	1/3
2.	1/2	1	1/3	1/4
3.	2	3	1	1
4.	3	4	1	1

A mátrix átlóján levő elemekre $a_{ii} = 1$. Ha mondjuk a negyedik tényező enyhén fontosabb mint, az első tényező, azaz $a_{41} = 3$, akkor a ***következetesség (konzisztencia)*** biztosítása érdekében $a_{14} = \frac{1}{3}$. Általában is érvényes az $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$ tulajdonság.

Egy tökéletesen következetes döntéshozó páros összehasonlítási mátrixa az

	1.	**2.**	**...**	**n.**
1.	$\frac{w_1}{w_1}$	$\frac{w_1}{w_2}$	$\cdots$	$\frac{w_1}{w_n}$
2.	$\frac{w_2}{w_1}$	$\frac{w_2}{w_2}$	$\cdots$	$\frac{w_2}{w_n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n.	$\frac{w_n}{w_1}$	$\frac{w_n}{w_2}$	$\cdots$	$\frac{w_n}{w_n}$

alakba írható.

Igazolható, hogy az

$$\begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

egyenletrendszernek egyetlen nem nullától különböző $\mathbf{x}$ megoldása a $\lambda = n$ és $\mathbf{x} = (w_1, w_2, ..., w_n)$.

Legyen A egy nem tökéletesen következetes döntéshozó páros összehasonlítási mátrixa. Jelöljük $\lambda_{\max}$-szal azt a legnagyobb számot, amelyre az

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

egyenletrendszernek van $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ megoldása.

Ha a döntéshozó összehasonlításai nem térnek el nagyon a tökéletes következetesség esetétől, akkor azt várnánk, hogy a $\lambda_{\max}$ közel legyen az n-hez és $(x_1, x_2, ..., x_n)$ a $(w_1, w_2, ..., w_n)$-hez. Saaty igazolta, hogy valóban ez a meglátás helyes. Ezért a döntéshozó következetességének mértékéül az n és $\lambda_{\max}$ távolságát tekintjük.

A következőkben bemutatjuk a $\lambda_{\max}$, az $(x_1, x_2, ..., x_n)$, valamint a következetesség kiszámítására alkalmazható eljárást.

1.1. lépés. ***Normalizált páros összehasonlítási mátrix*** meghatározása. Kiszámoljuk minden oszlop összegét:

1.	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
2.	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
3.	2	3	1	1
4.	3	4	1	1
Összeg	13/2	10	17/6	31/12

és minden oszlop elemeit elosztjuk az oszlop összegével:

$$\mathbf{A}_{norm} = \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{1}{5} & \frac{3}{17} & \frac{4}{31} \\ \frac{1}{13} & \frac{1}{10} & \frac{2}{17} & \frac{3}{31} \\ \frac{4}{13} & \frac{3}{10} & \frac{6}{17} & \frac{12}{31} \\ \frac{6}{13} & \frac{2}{5} & \frac{6}{17} & \frac{12}{31} \end{pmatrix}.$$

1.2. lépés. A $\lambda_{\max}$ -hoz tartozó $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ megoldások becslése. Az x_i értékek jól megközelíthetők az $\mathbf{A}_{norm}$ mátrix sor-elemeinek a számtani középarányosával:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\frac{2}{13} + \frac{1}{5} + \frac{3}{17} + \frac{4}{31}}{4} = 0.16483, \\ x_2 &= \frac{\frac{1}{13} + \frac{1}{10} + \frac{2}{17} + \frac{3}{31}}{4} = 0.09785, \\ x_3 &= \frac{\frac{4}{13} + \frac{3}{10} + \frac{6}{17} + \frac{12}{31}}{4} = 0.33693, \\ x_4 &= \frac{\frac{6}{13} + \frac{2}{5} + \frac{6}{17} + \frac{12}{31}}{4} = 0.40039. \end{aligned}$$

1.3. lépés. A következetesség ellenőrzése.

Számoljuk ki az $A\mathbf{x}^T$ szorzatot. A mintapéldában ez

$$A\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.16483 \\ 0.09785 \\ 0.33693 \\ 0.40039 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.66246 \\ 0.39267 \\ 1.3605 \\ 1.6232 \end{pmatrix}.$$

A λ kiszámításának képlete:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\text{az } A\mathbf{x}^T i\text{-edik eleme}}{\text{az } \mathbf{x}^T\ i\text{-edik eleme}} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{0.66246}{0.16483} + \frac{0.39267}{0.09785} + \frac{1.3605}{0.33693} + \frac{1.6232}{0.40039}\right) \\ &= 4.031. \end{aligned}$$

A ***következetességi mutató (KM)***:

$$\begin{aligned} KM &= \frac{\lambda - n}{n-1} \\ &= \frac{4.031 - 4}{3} = 0.0103. \end{aligned}$$

A következetességi mutató összehasonlítása a véletlenszerű következetességi mutatóval. Tekintünk egy olyan döntéshozót, aki teljesen véletlenszerűen tölti ki a páros összehasonlító táblázatot, de úgy, hogy az átlón lévő elemek értékei 1 és $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$. Kiszámoljuk erre a KM-et. Sokszor elvégezve ezt a számítást és átlagolva a KM értékeket kapjuk a ***véletlenszerű következetességi mutatót, a VKM-et***. Az alábbi táblázat az n különböző értékeire megadja a VKM értékeit.

n	**VKM**
2	0
3	0.58
4	0.9
5	1.12
6	1.24
7	1.32
8	1.41
9	1.45
10	1.51

(4.1)

Gyakorlatban a következetesség akkor tekinthető elfogadhatónak, ha

$$\frac{KM}{VKM} \leq 0.1.$$

Ellenkező esetben komoly következetlenségek léphetnek fel. Ekkor az AHP végeredménye megkérdőjelezhető. A mintapéldában $\frac{KM}{VKM} = \frac{0.0103}{0.9} = 0.011 \leq 0.1$, vagyis a család célokat összehasonlító mátrixa nem tartalmaz komoly következetlenségeket.

Tehát a tényezők súlyainak elfogadhatók az $\mathbf{x}$ elemei. Ezért

$$T_1 = 0.16483,\ T_2 = 0.09785,\ T_3 = 0.33693,\ T_4 = 0.40039.$$

Megállapítható, hogy a családnak a legfontosabb tényező a finanszírozás, majd a kert tágassága, a ház mérete és legvégül az általános feltételek.

2. lépés. Most minden tényező szempontjából összehasonlítjuk a választási lehetőségeket. Alkalmazzuk az 1. lépésben bemutatott módszert, összehasonlítva a házakat a tényezők alapján.

1. tényező: a ház nagysága. A leírtak alapján készíthető a B_1 páros összehasonlítási mátrix:

	A	**B**	**C**
A	1	3	5
B	$\frac{1}{3}$	1	3
C	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1

2. tényező: általános feltételek. A leírtak alapján a B_2 páros összehasonlítási mátrix:

	A	**B**	**C**
A	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
B	5	1	$\frac{1}{2}$
C	6	2	1

3. tényező: a kert nagysága. A B_3 páros összehasonlítási mátrix:

	A	**B**	**C**
A	1	7	5
B	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{5}$	3	1

4. tényező: finanszírozás. A B_4 páros összehasonlítási mátrix:

	A	**B**	**C**
A	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$
B	7	1	3
C	3	$\frac{1}{3}$	1

Hasonlóan, mint az A mátrixra, a B_1, B_2, B_3 és B_4 mátrixokra itt is kiszámoljuk a következetességi mutatókat. A számításokat az Excel táblázatkezelő segítségével végezzük.

Első lépésként feltöltjük az Excel első mezőit a B_1 értékeivel:

	A	B	C
1	**1**	**3**	**5**
2	**0.3333**	**1**	**3**
3	**0.2**	**0.3333**	**1**

majd összegezünk az oszlopok mentén, A4 cella értéke „=SUM(A1:A3)":

	A	B	C
1	1	3	5
2	0.3333	1	3
3	0.2	0.3333	1
4	**1.5333**	**4.3333**	**9**

Ezután a 4. sor elemeivel elosztjuk a megfelelő oszlop elemeit, az eredmény az A6:C8 cellatartományban található, azaz az A6 cellába beírjuk az „=A1/A$4" képletet, és automatikus kitöltést használva a képletet átmásoljuk az A6:C8 cellatartományba:

	A	B	C
1	1	3	5
2	0.3333	1	3
3	0.2	0.3333	1
4	1.5333	4.3333	9
5			
6	**0.6522**	**0.6923**	**0.5555**
7	**0.2174**	**0.2308**	**0.3333**
8	**0.1304**	**0.0769**	**0.1111**

A 6., 7. és 8. sor elemeit átlagoljuk (AVERAGE), és az eredményt az E6 cellától kezdődően írjuk a munkalapra. Így kapjuk:

	A	B	C	D	E
1	1	3	5		
2	0.3333	1	3		
3	0.2	0.3333	1		
4	1.5333	4.3333	9		
5					
6	0.6522	0.6923	0.5555	$x_1 =$	**0.6334**
7	0.2174	0.2308	0.3333	$x_2 =$	**0.2605**
8	0.1304	0.0769	0.1111	$x_3 =$	**0.1061**

Az x_1, x_2 és x_3 értékeit az E6, E7, illetve E8 cellák tartalmazzák:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.6334, \\ x_2 &= 0.2605, \\ x_3 &= 0.1061. \end{aligned}$$

A következetességi mutató kiszámításához szoroznunk kell az eredeti A1:C3 cellatartományt az E6:E8 oszlopvektorral. Ennek érdekében válasszuk ki az E1 cellát, és az MMULT függvény meghívása után, az első beviteli mezőben jelöljük ki az A1:C3, a másikban pedig az E6:E8 cellatartományt. Majd kijelöljük az E1:E3 cellatartományt, az F2 funkcióbillentyű lenyomása után a CTRL+SHIFT+ENTER billentyűkombináció segítségével a szorzás eredményét megjelenítjük a kijelölt cellákban:

	A	B	C	D	E
1	1	3	5		**1.9456**
2	0.3333	1	3		**0.7901**
3	0.2	0.3333	1		**0.3196**
4	1.5333	4.3333	9		
5					
6	0.6522	0.6923	0.5555	$x_1 =$	0.6334
7	0.2174	0.2308	0.3333	$x_2 =$	0.2605
8	0.1304	0.0769	0.1111	$x_3 =$	0.1061

Ezek után elvégezzük az E1/E6, E2/E7 és E3/E8 osztásokat. Az eredményeket a G1:G3 cellatartományban jelenítjük meg:

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	3	5		1.9456		**3.072**
2	0.3333	1	3		0.7901		**3.033**
3	0.2	0.3333	1		0.3196		**3.011**
4	1.5333	4.3333	9				
5							
6	0.6522	0.6923	0.5555	$x_1 =$	0.6334		
7	0.2174	0.2308	0.3333	$x_2 =$	0.2605		
8	0.1304	0.0769	0.1111	$x_3 =$	0.1061		

A λ értékét megkapjuk, ha a G1:G3 oszlop elemeit összeadjuk és elosztjuk 3-mal. Ezt a G4 cellába írjuk:

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	3	5		1.9456		3.072
2	0.3333	1	3		0.7901		3.033
3	0.2	0.3333	1		0.3196		3.011
4	1.5333	4.3333	9			$\lambda =$	**3.0387**
5							
6	0.6522	0.6923	0.5555	$x_1 =$	0.6334		
7	0.2174	0.2308	0.3333	$x_2 =$	0.2605		
8	0.1304	0.0769	0.1111	$x_3 =$	0.1061		

A következetességi mutatót a G5 cellában számoljuk a „=(G4-3)/2” képlettel:

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	3	5		1.9456		3.072
2	0.3333	1	3		0.7901		3.033
3	0.2	0.3333	1		0.3196		3.011
4	1.5333	4.3333	9			$\lambda =$	3.0387
5						KM=	**0.0193**
6	0.6522	0.6923	0.5555	$x_1 =$	0.6334		
7	0.2174	0.2308	0.3333	$x_2 =$	0.2605		
8	0.1304	0.0769	0.1111	$x_3 =$	0.1061		

A 3×3-as mátrixok véletlenszerű következetességi mutatóját, $VKM = 0.58$ beírjuk a G6 cellába, és kiszámoljuk a KM/VKM arányt a G7 cellában:

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	3	5		1.9456		3.072
2	0.3333	1	3		0.7901		3.033
3	0.2	0.3333	1		0.3196		3.011
4	1.5333	4.3333	9			$\lambda =$	3.0387
5						KM=	0.0193
6	0.6522	0.6923	0.5555	$x_1 =$	0.6334	VKM=	**0.58**
7	0.2174	0.2308	0.3333	$x_2 =$	0.2605	KM/VKM=	**0.0334**
8	0.1304	0.0769	0.1111	$x_3 =$	0.1061		

Mivel $KM/VKM < 0.1$, a család következtetése elfogadható.

Az elkészített Excel tábla segítségével a B_2, B_3 és B_4 mátrixokra a súlyokat és a következetességi mutatót könnyen kiszámíthatjuk, csak az A1:C3 cellatartomány értékeit kell kicserélni szerre a B_2, B_3 és B_4-gyel. A súlyokat az E6:E8 cellatartomány adja, a KM értékét és az összehasonlítást a G5 és G7 cellák tartalmazzák.

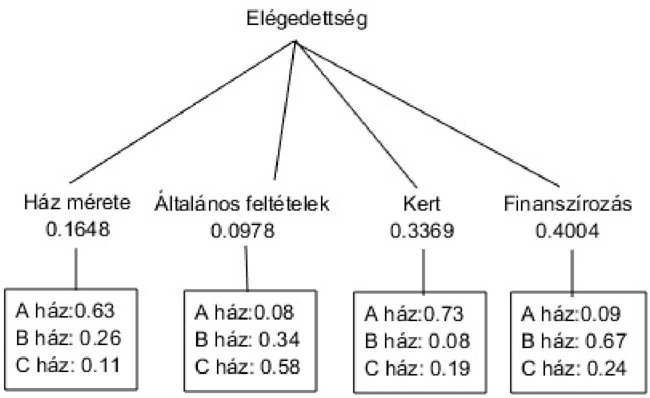
A tényezők szerint a házak összehasonlításának súlyait, következetességi mutatóit és a KM/VKM arányt az alábbi táblazat tartalmazza:

		Tényezők			
		1.	2.	3.	4.
A ház	$x_1 =$	0.63336	0.08195	0.72351	0.08821
B ház	$x_2 =$	0.26049	0.34305	0.08331	0.66869
C ház	$x_3 =$	0.10615	0.575	0.19318	0.24310
	$KM =$	0.0193	0.014579	0.03290	0.00351
	$\frac{KM}{VKM} =$	0.03337	0.02513	0.05674	0.00606
Tényezők súlyai:		0.16483	0.09785	0.33693	0.40039

Az eredményeket a 4.2. ábra fastruktúrája foglalja keretbe.

3. lépés. Válasszuk ezek után a legmagasabb összértékű ajánlatot. Az egyes ajánlatok összértéke a tényezők súlyaival számított átlag:

$$\begin{aligned}
\text{Az } \mathbf{A} \text{ ház összértéke} &= 0.63336 \cdot\ 0.16483 + 0.08195 \cdot 0.09785 + \\
&\ 0.72351 \cdot 0.33693 + 0.08821 \cdot 0.40039 \\
&= 0.39151,
\end{aligned}$$



4.2. ábra. A 4.1. mintapélda (Házvásárlás) eredményeinek fastruktúrája

$$\begin{aligned}\text{A } \mathbf{B} \text{ ház összértéke} &= 0.26049 \cdot\ 0.16483 + 0.34305 \cdot 0.09785 + \\ &\ 0.08331 \cdot 0.33693 + 0.66869 \cdot 0.40039 \\ &= 0.37231,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{A } \mathbf{C} \text{ ház összértéke} &= 0.10615 \cdot\ 0.16483 + 0.575 \cdot 0.09785 + \\ &\ 0.19318 \cdot 0.33693 + 0.24310 \cdot 0.40039 \\ &= 0.23618.\end{aligned}$$

Az AHP alapján a családnak az **A** házat kell választania.

4.1. Prioritási vektor becslése lineáris programozási modell segítségével

Bala Chandrana, Bruce Goldenb és Edward Wasil 2005-ben egy kétlépcsős lineáris programozási modellt dolgozott ki a prioritási vektor meghatározására. Az első szakaszban egy olyan lineáris programozási modellt fogalmaztak meg, amely biztosítja a páros összehasonlítási mátrix konzisztenciáját, meghatározva a lehetséges legkisebb összhibát. A második szakaszban a lineáris programozási modellbe beépítették az első szakaszban kapott következetességi szintet. Ezen modell megoldása adja meg a prioritásvektort, megkeresve azt a megoldást, ahol a legnagyobb hiba a legkisebb.

Első szakasz: a következetességi szint meghatározása

A Saaty által meghatározott sajátvektor-modellnél is megadott összefüggésből indulunk ki:

$$w_i/w_j = a_{ij}\varepsilon_{ij},\ i,j=\overline{1,n},$$

ahol ε_{ij}-vel jelöltük az a_{ij} relatív preferencia becslésének hibáját. Ha a döntéshozó következetes, akkor $\varepsilon_{ij} = 1$. Ha az előző egyenletet logaritmáljuk, kapjuk a következő összefüggést:

$$\ln w_i - \ln w_j = \ln a_{ij} + \ln \varepsilon_{ij},\ i,j=\overline{1,n}. \tag{4.2}$$

A lineáris programozási modellek felírásakor először a döntési változókat kell meghatározzuk. Jelen esetben ezek: $x_i = \ln w_i$, $y_{ij} = \ln \varepsilon_{ij}$ és $z_{ij} = |y_{ij}|$.

A célfüggvény meghatározása következik. A célunk, hogy a páronkénti összehasonlítási mátrix elemeinek becslése konzisztens (következetes) legyen, ez akkor következik be, ha $y_{ij} = 0$. Saaty modellje eleve megenged egy kismértékű következetlenséget, a célunk, hogy ez minél kisebb legyen. Tudva, hogy a_{ij} preferenciákhoz hasonlóan a hibákra is érvényes a $\varepsilon_{ij} = 1/\varepsilon_{ji}$ összefüggés, azaz $y_{ij} = -y_{ji}$, felírhatjuk a célfüggvényt:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} z_{ij} \to \min .$$

A következő lépésben a korlátozási feltételeket kell megadjuk. A hibaváltozók definiciójából származó feltételeket a (4.2) egyenletből kapjuk:

$$x_i - x_j - y_{ij} = \ln a_{ij},\ i,j=\overline{1,n},\ \text{ahol } i \neq j.$$

Ha a páronkénti összehasonlítási mátrixban a_{ij} elemet túlbecsültük, akkor az a_{ji} elemet alábecsültük. Tudva, hogy $y_{ij} = -y_{ji}$, a z_{ij} elemek értelmezését a következő egyenlőtlenségek által írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} z_{ij} &\geq y_{ij},\ i,j=\overline{1,n},\ \text{ahol } i<j,\\ z_{ij} &\geq y_{ji},\ i,j=\overline{1,n},\ \text{ahol } i<j. \end{aligned}$$

A prioritási vektor elemeinek meghatározásakor elvárt lenne, ha a páronkénti összehasonlítási mátrixra teljesülne a sor, illetve elemdominancia elve. A lineáris programozási modellbe beépítették ezen feltételeket is.

Elemdominanciáról akkor beszélünk, ha az $a_{ij} > 1$ feltétel teljesül, ami kimondja, hogy a döntéshozó az i tényezőt vagy választási lehetőséget jobban preferálja, mint a j tényezőt. Az i tényező súlya nagyobb kell legyen, mint a j tényezőé. Ez képletben kifejezve a következő:

$$x_i - x_j \geq 0,\ i,j = \overline{1,n},\ \text{ahol } a_{ij} > 1.$$

A ***sordominanciát*** csak akkor kell leellenőrizzük, ha $a_{ij} = 1$. Ebben az esetben összehasonlítjuk az i és j tényezőhöz tartozó sorok megfelelő elemeit, és ha az i tényező elemei mindig nagyobbak, és legalább egy esetben szigorúan nagyobb, akkor azt állíthatjuk, hogy az i sorhoz tartozó tényező dominálja a j tényezőt. Tehát

$$\begin{aligned} x_i - x_j \geq 0,\ i,j = \overline{1,n},\ &\text{ahol minden } k \text{ esetén } a_{ik} \geq a_{jk},\\ &\text{de } \exists\ q \text{ index, amelyre } a_{iq} > a_{jq}. \end{aligned}$$

Mivel az eddig megadott korlátozási feltételek mellett a megoldások végtelenül nagy számok is lehetnek, az általánosság leszűkítése nélkül rögzíthetjük az első prioritási súlyt $w_1 = 1$, azaz $x_1 = 0$ értékkel. A végleges súlyokat majd úgyis normalizálni kell.

Az első lineáris programozási modell összegezve:

$$\begin{cases} z = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{j=i+1}^{n} z_{ij} \to \min \\ x_i - x_j - y_{ij} = \ln a_{ij},\ i,j = \overline{1,n},\ \text{ahol } i \neq j, \\ z_{ij} \geq y_{ij},\ i,j = \overline{1,n},\ \text{ahol } i < j, \\ z_{ij} \geq y_{ji},\ i,j = \overline{1,n},\ \text{ahol } i < j, \\ x_1 = 0, \\ x_i - x_j \geq 0,\ i,j = \overline{1,n},\ \text{ahol } a_{ij} > 1, \\ x_i - x_j \geq 0,\ i,j = \overline{1,n},\ \text{ahol minden } k \text{ esetén } a_{ik} \geq a_{jk}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{de } \exists\ q \text{ index, amelyre } a_{iq} > a_{jq}, \\ z_{ij} \geq 0,\ i,j = \overline{1,n}, \\ x_i, y_{ij} \in \mathbb{R},\ i,j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Második szakasz: a prioritási vektor meghatározása

Célunk, hogy az első lineáris programozási modell által kapott megoldásokból kiválasszuk azt, amelyre a legnagyobb becslési hiba a legkisebb. Ennek érdekében bevezetjük a $z_{\max}$ változót. Az értelmezéséből fakadóan fennáll a következő összefüggés:

$$z_{\max} \geq z_{ij},\ i,j = \overline{1,n},\ \text{ahol } i < j.$$

Célfüggvényünk tehát

$$z_{\max} \to \min .$$

A második lineáris programozási modell korlátozási feltételei megegyeznek az elsőével, kibővítve az első lineáris programozási feladat megoldását felhasználó következő feltétellel:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} z_{ij} = z^*,$$

ahol z^* az előző modell megoldása során kapott célfüggvény értéke.

Összegezve kapjuk, hogy a második lineáris programozási feladat matematikai modellje a következő:

$$\begin{cases} z = z_{\max} \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{j=i+1}^{n} z_{ij} = z^*, \\ x_i - x_j - y_{ij} = \ln a_{ij}, \ i,j = \overline{1,n}, \text{ ahol } i \neq j, \\ z_{ij} \geq y_{ij}, \ i,j = \overline{1,n}, \text{ ahol } i < j, \\ z_{ij} \geq y_{ji}, \ i,j = \overline{1,n}, \text{ ahol } i < j, \\ z_{\max} \geq z_{ij}, \ i,j = \overline{1,n}, \text{ ahol } i < j, \\ x_1 = 0, \\ x_i - x_j \geq 0, \ i,j = \overline{1,n}, \text{ ahol } a_{ij} > 1, \\ x_i - x_j \geq 0, \ i,j = \overline{1,n}, \text{ ahol minden } k \text{ esetén } a_{ik} \geq a_{jk}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{de } \exists\ q \text{ index, amelyre } a_{iq} > a_{jq}, \\ z_{\max} \geq 0, z_{ij} \geq 0, \ i,j = \overline{1,n}, \\ x_i, y_{ij} \in \mathbb{R}, \ i,j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

A preferenciavektor elemeit úgy kapjuk meg, hogy a második lineáris programozási modell megoldása x_i, $i = \overline{1,n}$ értékeinek exponenciálisát normalizáljuk:

$$\begin{aligned} w_i^{'} &= e^{x_i}, \ i = \overline{1,n}, \\ w_i &= \frac{w_i^{'}}{\sum_{i=1}^{n} w_i^{'}}, \ i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

A kapott preferenciavektor következetességi szintjének az ellenőrzése történhet a Saaty-módszer által vagy a Chandran, Golden és Wasil által javasolt összefüggéssel, amely az átlagos becslési hibát adja meg:

$$KM = \frac{2z^*}{n\,(n-1)},$$

ahol z^* az első lineáris programozási modell optimális értéke.

A házvásárlásos mintafeladatban a tényezők súlyának a meghatározásához a következő lineáris programozási feladatot kell megoldani:

$$\begin{cases} z = z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{23} + z_{24} + z_{34} \to \min \\ x_1 - x_2 - y_{12} = \ln 2; \quad x_1 - x_2 + y_{21} = \ln 2; \\ x_1 - x_3 - y_{13} = -\ln 2; \quad x_1 - x_3 + y_{31} = -\ln 2; \\ x_1 - x_4 - y_{14} = -\ln 3; \quad x_1 - x_4 + y_{41} = -\ln 3; \\ x_2 - x_3 - y_{23} = -\ln 3; \quad x_2 - x_3 + y_{32} = -\ln 3; \\ x_2 - x_4 - y_{24} = -\ln 4; \quad x_2 - x_4 + y_{42} = -\ln 4; \\ x_3 - x_4 - y_{34} = 0; \quad x_3 - x_4 + y_{43} = 0; \\ z_{12} \geq y_{12}; \quad z_{12} \geq y_{21}; \quad z_{13} \geq y_{13}; \quad z_{13} \geq y_{31}; \\ z_{14} \geq y_{14}; \quad z_{14} \geq y_{41}; \quad z_{23} \geq y_{23}; \quad z_{23} \geq y_{32}; \\ z_{24} \geq y_{24}; \quad z_{24} \geq y_{42}; \quad z_{34} \geq y_{34}; \quad z_{34} \geq y_{43}; \\ x_1 = 0; \\ x_1 - x_2 \geq 0; \quad x_3 - x_1 \geq 0; \quad x_3 - x_2 \geq 0; \\ x_4 - x_1 \geq 0; \quad x_4 - x_2 \geq 0; \\ x_4 - x_3 \geq 0; \\ z_{ij} \geq 0, \ i, j = \overline{1,4}, i < j; \\ x_i, y_{ij} \in \mathbb{R}, \ i, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Az első lineáris programozási modell optimális értéke: $z^* = 0.693147$.

Most felírhatjuk a második lineáris programozási modellt:

$$\begin{cases} z = z_{\max} \to \min \\ z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{23} + z_{24} + z_{34} = 0.693147; \\ z_{\max} - z_{12} \geq 0, \ z_{\max} - z_{13} \geq 0, \ z_{\max} - z_{14} \geq 0; \\ z_{\max} - z_{23} \geq 0, \ z_{\max} - z_{24} \geq 0, \ z_{\max} - z_{34} \geq 0; \\ \text{az első LP modell összes feltétele;} \\ z_{ij} \geq 0, \ i, j = \overline{1,4}, i < j, z_{\max} \geq 0 \\ x_i, y_{ij} \in \mathbb{R}, \ i, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Az optimális megoldás x_i, $i = \overline{1,4}$ értékeit $(0, -0.490414, 0.693147, 0.895879)$ felhasználva a (4.3) képlet segítségével kapjuk a $(0.1650, 0.1010, 0.3299, 0.4041)$ preferenciavektort, ahol a Saaty-féle következetességi mutató 0.010912.

Ezután sorra minden tényező szempontjából összehasonlítjuk a választási lehetőségeket. Az első tényező alapján a preferenciavektort a következő lineáris programozási feladatok által kapjuk meg:

$$\begin{cases} z = z_{12} + z_{13} + z_{23} \to \min \\ x_1 - x_2 - y_{12} = \ln 3; \quad x_1 - x_2 + y_{21} = \ln 3; \\ x_1 - x_3 - y_{13} = \ln 5; \quad x_1 - x_3 + y_{31} = \ln 5; \\ x_2 - x_3 - y_{23} = \ln 3; \quad x_2 - x_3 + y_{32} = \ln 3; \\ z_{12} \geq y_{12}; \quad z_{12} \geq y_{21}; \quad z_{13} \geq y_{13}; \\ z_{13} \geq y_{31}; \quad z_{23} \geq y_{23}; \quad z_{23} \geq y_{32}; \\ x_1 = 0; \\ x_1 - x_2 \geq 0; \quad x_1 - x_3 \geq 0; \quad x_2 - x_3 \geq 0; \\ z_{ij} \geq 0, \ i, j = \overline{1,3}, i < j; \\ x_i, y_{ij} \in \mathbb{R}, \ i, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = z_{\max} \to \min \\ z_{12} + z_{13} + z_{23} = 0.58778; \\ z_{\max} - z_{12} \geq 0, \ z_{\max} - z_{13} \geq 0, \ z_{\max} - z_{23} \geq 0; \\ \text{az első LP modell összes feltétele;} \\ z_{ij} \geq 0, \ i, j = \overline{1,3}, i < j, z_{\max} \geq 0 \\ x_i, y_{ij} \in \mathbb{R}, \ i, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

A kapott preferenciavektor $(0.6370, 0.2583, 0.1047)$, míg a következetességi mutató 0.01925.

A második tényező preferenciavektorának meghatározásához a következő lineáris programozási feladatokat kell megoldani:

$$\begin{cases} z = z_{12} + z_{13} + z_{23} \to \min \\ x_1 - x_2 - y_{12} = -\ln 5; \quad x_1 - x_2 + y_{21} = -\ln 5; \\ x_1 - x_3 - y_{13} = -\ln 6; \quad x_1 - x_3 + y_{31} = -\ln 6; \\ x_2 - x_3 - y_{23} = -\ln 2; \quad x_2 - x_3 + y_{32} = -\ln 2; \\ z_{12} \geq y_{12}; \quad z_{12} \geq y_{21}; \quad z_{13} \geq y_{13}; \\ z_{13} \geq y_{31}; \quad z_{23} \geq y_{23}; \quad z_{23} \geq y_{32}; \\ x_1 = 0; \\ x_2 - x_1 \geq 0; \quad x_3 - x_1 \geq 0; \quad x_3 - x_2 \geq 0; \\ z_{ij} \geq 0, \ i, j = \overline{1,3}, i < j; \\ x_i, y_{ij} \in \mathbb{R}, \ i, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = z_{\max} \to \min \\ z_{12} + z_{13} + z_{23} = 0.5108; \\ z_{\max} - z_{12} \geq 0, \ z_{\max} - z_{13} \geq 0, \ z_{\max} - z_{23} \geq 0; \\ \text{az első LP modell összes feltétele;} \\ z_{ij} \geq 0, \ i, j = \overline{1,3}, i < j, z_{\max} \geq 0 \\ x_i, y_{ij} \in \mathbb{R}, \ i, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

A kapott preferenciavektor $(0.0811, 0.3420, 0.5769)$, míg a következetességi mutató 0.01453.

A kert nagysága tényező preferenciavektorának kiszámolásához előbb a

$$\begin{cases} z = z_{12} + z_{13} + z_{23} \to \min \\ x_1 - x_2 - y_{12} = \ln 7; \quad x_1 - x_2 + y_{21} = \ln 7; \\ x_1 - x_3 - y_{13} = \ln 5; \quad x_1 - x_3 + y_{31} = \ln 5; \\ x_2 - x_3 - y_{23} = -\ln 3; \quad x_2 - x_3 + y_{32} = -\ln 3; \\ z_{12} \geq y_{12}; \quad z_{12} \geq y_{21}; \quad z_{13} \geq y_{13}; \\ z_{13} \geq y_{31}; \quad z_{23} \geq y_{23}; \quad z_{23} \geq y_{32}; \\ x_1 = 0; \\ x_1 - x_2 \geq 0; \quad x_1 - x_3 \geq 0; \quad x_3 - x_2 \geq 0; \\ z_{ij} \geq 0,\ i, j = \overline{1,3}, i < j; \\ x_i, y_{ij} \in \mathbb{R},\ i, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

lineáris programozási feladatot kell megoldjuk, majd a

$$\begin{cases} z = z_{\max} \to \min \\ z_{12} + z_{13} + z_{23} = 0.7621; \\ z_{\max} - z_{12} \geq 0,\ z_{\max} - z_{13} \geq 0,\ z_{\max} - z_{23} \geq 0; \\ \text{az első LP modell összes feltétele}; \\ z_{ij} \geq 0,\ i, j = \overline{1,3}, i < j, z_{\max} \geq 0 \\ x_i, y_{ij} \in \mathbb{R},\ i, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

lineáris programozási feladatot. Ebben az esetben a preferenciavektor $(0.7306, 0.0810, 0.1884)$, míg a következetességi mutató 0.03244.

Már csak a negyedik tényező, a finanszírozás preferenciavektorának kiszámítása maradt hátra, amelyet megkapunk, ha megoldjuk a

$$\begin{cases} z = z_{12} + z_{13} + z_{23} \to \min \\ x_1 - x_2 - y_{12} = -\ln 7; \quad x_1 - x_2 + y_{21} = -\ln 7; \\ x_1 - x_3 - y_{13} = -\ln 3; \quad x_1 - x_3 + y_{31} = -\ln 3; \\ x_2 - x_3 - y_{23} = \ln 3; \quad x_2 - x_3 + y_{32} = \ln 3; \\ z_{12} \geq y_{12}; \quad z_{12} \geq y_{21}; \quad z_{13} \geq y_{13}; \\ z_{13} \geq y_{31}; \quad z_{23} \geq y_{23}; \quad z_{23} \geq y_{32}; \\ x_1 = 0; \\ x_2 - x_1 \geq 0; \quad x_3 - x_1 \geq 0; \quad x_2 - x_3 \geq 0; \\ z_{ij} \geq 0,\ i, j = \overline{1,3}, i < j; \\ x_i, y_{ij} \in \mathbb{R},\ i, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = z_{\max} \to \min \\ z_{12} + z_{13} + z_{23} = 0.2513; \\ z_{\max} - z_{12} \geq 0,\ z_{\max} - z_{13} \geq 0,\ z_{\max} - z_{23} \geq 0; \\ \text{az első LP modell összes feltétele}; \\ z_{ij} \geq 0,\ i,j = \overline{1,3}, i < j, z_{\max} \geq 0 \\ x_i, y_{ij} \in \mathbb{R},\ i,j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

lineáris programozási feladatokat. A kapott preferenciavektor $(0.0879, 0.6694, 0.2426)$, míg a következetességi mutató 0.00351.

A házvásárlásos mintafeladat preferenciáinak összesítő táblázata:

LP módszer	Tényezők				Összérték
	1.	2.	3.	4.	
A ház	0.6370	0.0811	0.7306	0.0879	0.3899
B ház	0.2583	0.3420	0.0810	0.6694	0.3744
C ház	0.1047	0.5769	0.1884	0.2426	0.2358
KM	0.0193	0.0145	0.0324	0.0035	
Tény. súlyai	0.1650	0.1010	0.3299	0.4041	

A Saaty által megadott elemi módszer sokkal egyszerűbb, mint a lineáris programozást használó Chandran, Golden és Wasil által javasolt eljárás. Ezért ebben az esetben a számítások automatizálását javasoljuk, azaz a módszer implementálását például Excelben makrók használatával, ahol a Solver bővítményt fel tudjuk használni a kódolás során. Ha viszont a programozást nem tudjuk kikerülni, akkor a Xu és Da által megadott algoritmus a preferenciák súlyainak meghatározására egyszerűbb és könnyebben átlátható.

4.2. Prioritási vektor becslése a legkisebb eltérés módszerével

A prioritási vektor meghatározására a legkisebb eltérési módszert Zeshui Xu és Qingli Da dolgozta ki 2005-ben. A továbbiakban Xu és Da algoritmusát ismertetjük, ahol a_{ij} a páros összehasonlítási mátrix elemei:

1. lépés. Kezdeti értéket adunk a preferenciavektornak. Ha nincs egy meghatározott elképzelésünk, akkor kiindulhatunk a $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$-ből, ahol $v_i = 1/n$ bármely $i = \overline{1,n}$ esetből. Megadjuk az ε $(0 \leq \varepsilon < 1)$ hibakorlátot, amely az algoritmus kilépési feltételéhez szükséges.

2. lépés. Kiszámoljuk a

$$n_i = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} \frac{v_j}{v_i} - a_{ji} \frac{v_i}{v_j} \right), \; i = \overline{1,n}$$

értéket. Ha $|n_i| \leq \varepsilon$ bármely $i = \overline{1,n}$ esetén, akkor a 4. lépéssel folytatjuk az algoritmust, különben a 3. lépés következik.

3. lépés. Meghatározzuk azon m indexet, amelyre $|n_m| = \max_i \{n_i\}$, majd kiértékeljük a következő műveleteket:

$$T = \left[\sum_{j \neq m} \left(a_{mj} \frac{v_j}{v_m} \right) / \sum_{j \neq m} \left(a_{jm} \frac{v_m}{v_j} \right) \right]^{1/2},$$

$$x_i = \begin{cases} Tv_m & i = m, \\ v_i & i \neq m, \end{cases}$$

$$v_i = x_i / \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_j, \; i = \overline{1,n}.$$

Ezzel előállítottunk egy újabb preferenciavektort, az algoritmust a továbbiakban a 2. lépéssel folytatjuk.

4. lépés. Megkapjuk a v változóban a preferenciavektort.

Ezt az algoritmust használva a házvásárlásos mintafeladatban, a tényezők preferenciavektorának a $(0.1638, 0.0974, 0.3375, 0.4013)$ számszerű adatokat kapjuk, amikor az $\varepsilon = 10^{-6}$. A következetességi mutató pedig 0.010325. A házvásárlásos mintafeladat eredményei összesítve a következők:

Xu-Da módszere	Tényezők				Összérték
	1.	2.	3.	4.	
A ház	0.6370	0.0811	0.7306	0.0879	0.3941
B ház	0.2583	0.3420	0.0810	0.6694	0.3716
C ház	0.1047	0.5769	0.1884	0.2426	0.2343
KM	0.0193	0.0145	0.0324	0.0035	
Tény. súlyai	0.1638	0.0974	0.3375	0.4013	

Tehát mindhárom módszer az **A** ház vásárlását javasolja.

4.3. Áttekintő feladat

4.2. mintapélda (Tabletvásárlás). Egy diák tabletet szeretne vásárolni. Mielőtt nekikezdene a megfelelő eszköz beszerzéséhez, felméri anyagi helyzetét és szükségleteit. Elhatározza, hogy legfeljebb 800 lejt hajlandó érte kiadni, az átmérője legalább 8 inch legyen, és tudjon wi-fi-re csatlakozni. Bemegy egy szaküzletbe, és ott az eladó a következő négy tabletet javasolja: egy fehér és egy szürke Huawei tabletet, mindegyiket 670 lej értékben, egy barna Samsung tabletet 780 lejért és egy fekete, ugyancsak Samsung tabletet 730 lej értékben.

A diák közelebbről megfigyeli a tabletek közti különbségeket, hogy számára a legmegfelelőbb terméket válassza ki. Kisebb különbségeket vett észre a belső és külső memóriát illetőleg:

	fehér Huawei	szürke Huawei	barna Samsung	fekete Samsung
Belső memória	1 Gb	2 Gb	1.5 Gb	1.5 Gb
Külső memória	16 Gb	16 Gb	8 Gb	8 Gb

A diák a döntését a következő tényezők alapján hozza meg: tablet ára, színe, belső (BM) és külső memória (KM) nagysága. Először párosával összehasonlítja a döntési tényezőit: $\left(\acute{A}r : Sz\acute{\imath}n\right) = (1 : 7)$, $\left(\acute{A}r : BM\right) = (1 : 2)$, $\left(\acute{A}r : KM\right) = (1 : 5)$, $(Sz\acute{\imath}n : BM) = (3 : 1)$, $(Sz\acute{\imath}n : KM) = (2 : 1)$, $(BM : KM) = (1 : 2)$.

A tablet színét tekintve a diák páros összehasonlítási mátrixa:

	fehér	szürke	barna	fekete
fehér	1	5	7	2
szürke	1/5	1	3	1/2
barna	1/7	1/3	1	1/5
fekete	1/2	2	5	1

.

A többi döntési tényezőnél számszerűsített adatok vannak. Ezek páros összehasonlítási mátrixainak megadására több technikát is felhasznál. Először rendezi a tableteket árak szerint csökkenő sorrendben, majd értékeket rendel hozzájuk, a legdrágábbnak 1-es értéket ad, a fekete Samsung ára enyhén jobb, mint a barnáé, ezért 3-as értéket kap, a Huawei tabletek ára olcsóbb a barna Samsungénál, így hozzájuk 5-öst rendel.

	Ár	Érték
barna Samsung	780	1
fekete Samsung	730	3
szürke Huawei	670	5
fehér Huawei	670	5

Ezek után könnyen fel tudja írni a páros összehasonlítási mátrixot, csak képezi a két összehasonlítandó tablethez hozzárendelt értékek hányadosát, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 5/3 \\ 1 & 1 & 5 & 5/3 \\ 1/5 & 1/5 & 1 & 1/3 \\ 3/5 & 3/5 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az így kapott mátrix következetességi mutatója 0 lesz. Mi több, nem szükséges egyetlenegy bemutatott módszert sem használnunk a preferenciavektort meghatározására. A súlyokat egyszerűen meg tudjuk határozni úgy, hogy az egyes tabletekhez hozzárendelt értékeket elosztjuk a kiosztott értékek összegével, esetünkben: $(5/14, 5/14, 1/14, 3/14)$.

A belső és a külső memóriát illetően a hozzárendelt számszerű adatokkal arányosan szeretné megszerkeszteni a preferenciavektort.

	BM	Súlyok	KM	Súlyok
fehér Huawei	1	1/6	16	16/48
szürke Huawei	2	2/6	16	16/48
barna Samsung	1.5	1.5/6	8	8/48
fekete Samsung	1.5	1.5/6	8	8/48

Tehát minden tablethez hozzárendelt értéket elosztott a négy tabletet jellemző értékek összegével.

Melyik tabletet fogja megvásárolni a diák?

Megoldás. Az első lépésben a döntési tényezők preferenciavektorát határozzuk meg. A páros összehasonlítási mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/7 & 1/2 & 1/5 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1/3 & 1 & 1/2 \\ 5 & 1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mindhárom bemutatott algoritmussal kiszámolva a kapott súlyok:

	Ár	Szín	BM	KM	Köv. mutató
Saaty módszere	0.0675	0.4937	0.1477	0.2911	0.0059
LP-módszer	0.0701	0.4904	0.1465	0.2931	0.0065
Xu Da algoritmusa	0.0672	0.4947	0.1476	0.2905	0.0059

Egyedül a szín tényezők esetében kell meghatározzuk a négy különböző színű tablet preferenciasúlyait.

Szín	Fehér	Szürke	Barna	Fekete	Köv. mutató
Saaty módszere	0.5302	0.1378	0.0585	0.2735	0.0167
LP-módszer	0.5405	0.1351	0.0541	0.2703	0.0177
Xu Da algoritmusa	0.5316	0.1360	0.0575	0.2749	0.0166

A többi tényező esetében, mivel számszerű adatok állnak rendelkezésre, a preferenciavektor teljesen következetes lesz. A tabletek rangsorolása a megadott összehasonlítási mátrixok esetén a következőképpen alakul:

	fehér Huawei	szürke Huawei	barna Samsung	fekete Samsung
Saaty módszere	0.4075	0.2384	0.1192	0.2349
LP-módszer	0.4122	0.2378	0.1170	0.2330
Xu Da algoritmusa	0.4084	0.2373	0.1185	0.2357

Tehát a diák a fehér Huawei tabletet fogja megvásárolni.

4.4. Kitűzött feladatok

1. Egy vizsgáztató tanárt a diákok tesztelni akarnak, hogy eléggé következetes-e az értékelésében, ezért négy névtelen dolgozatot adnak a tanárnak, hogy hasonlítsa össze őket. A tanár páros összehasonlítási mátrixa:

	1.	**2.**	**3.**	**4.**
1.	1	2	3	4
2.	$\frac{1}{2}$	1	3	2
3.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	3
4.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

   Határozzuk meg a tanár következetességi mutatóját, és hasonlítsuk össze ezt a véletlenszerű következetességi mutatóval.

2. Tömeg alapján hasonlíts össze öt tárgyat. Az egyik tömege 1 kg legyen. Készítsd el a saját páros összehasonlítási mátrixodat. Számold ki a következetességi mutatóját. Majd mérd le a tárgyakat. Mekkora az eltérés a becsült és a mért tömegek között?

3. Egy XII.-es diák el szeretné dönteni, hogy tanulmányait hol folytassa tovább. A Sapientia EMTE csíkszeredai (Cs) és marosvásárhelyi (Mv) karai közül szeretné kiválasztani a neki legjobban megfelelőt. Négy szempontot választ ki a döntése meghozatalához: szakok (Sz), költségek (K), távolság (T), a kar légköre (L). Az AHP-módszer alapján a négy tényezőt összehasonlította, és az alábbi páros összehasonlítási mátrixot kapja:

	Sz	**K**	**T**	**L**
Sz	1	5	7	8
K	$\frac{1}{5}$	1	4	6
T	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$	1	2
L	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1

Ezután minden tényező alapján a karokat is összehasonlította, és preferenciáit a következő táblázatban foglalta össze:

Szakok	**Cs**	**Mv**
Cs	1	$\frac{1}{2}$
Mv	2	1

Költség	**Cs**	**Mv**
Cs	1	4
Mv	$\frac{1}{4}$	1

Távolság	**Cs**	**Mv**
Cs	1	5
Mv	$\frac{1}{5}$	1

Légkör	**Cs**	**Mv**
Cs	1	2
Mv	$\frac{1}{2}$	1

Határozzuk meg a páros összehasonlítási mátrixok következetességi mutatóit, és ha elfogadhatóak, akkor tegyünk javaslatot a diák döntésére vonatkozóan!

4. Egy felsőfokú oktatási intézményben az oktatók fizetésemelését három területen elért teljesítmény alapján határozzák meg: oktatás (O), kutatás (K), adminisztratív teendők (A). Az intézmény vezetése megállapította, hogy ezek a tényezők mekkora fontossággal bírnak az egyetem akkreditációja szempontjából. Értékelésüket az alábbi páros összehasonlítási mátrixban foglalták össze:

	O	**K**	**A**
O	1	$\frac{1}{2}$	7
K	2	1	7
A	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

A vezetés az előző évre vonatkozó önértékelési lapokban foglaltak alapján elkészítette két azonos oktatói fokozattal rendelkező tanárjának a felsorolt tényezők szerinti összehasonlítását. Az I. tanárt az eredményesebb kutatói tevékenység, a II. oktatót pedig a hatékonyabb oktatói és adminisztratív tevékenység jellemzi. Az értékeléseket az alábbi táblázatok tartalmazzák:

O	**I**	**II**
I	1	$\frac{1}{3}$
II	3	1

K	**I**	**II**
I	1	5
II	$\frac{1}{5}$	1

A	**I**	**II**
I	1	$\frac{1}{3}$
II	3	1

Ellenőrizzük a páros összehasonlítási mátrixok következetességét! Az AHP alapján melyik oktató kell nagyobb fizetésemelésben részesüljön?

5. A Hallgatók névtelenül értékelik tanáraikat a következő szempontok alapján: következetesség (K), érthetőség (É), pontosság (P), igazságosság (Ig.). Az alábbi táblázat a felsorolt tényezők páros összehasonlításait tartalmazza.

	K	**É**	**P**	**Ig.**
K	1	2	3	$\frac{1}{2}$
É	$\frac{1}{2}$	1	5	$\frac{1}{4}$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{7}$
Ig.	2	4	7	1

Az alábbi táblázatok a Gazdasági informatika tanszék négy oktatójának a négy tényező szerinti páros összehasonlításait mutatják.

K	**I**	**II**	**III**	**IV**
I	1	4	3	2
II	$\frac{1}{4}$	1	3	2
III	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1
IV	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1

É	**I**	**II**	**III**	**IV**
I	1	$\frac{1}{4}$	2	1
II	5	1	3	5
III	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1	2
IV	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1

P	**I**	**II**	**III**	**IV**
I	1	$\frac{1}{2}$	1	1
II	2	1	1	1
III	1	1	1	1
IV	1	1	1	1

Ig.	**I**	**II**	**III**	**IV**
I	1	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
II	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
III	4	2	1	$\frac{1}{5}$
IV	8	6	5	1

Ellenőrizzük az összehasonlítások következetességét, és határozzuk meg az oktatók sorrendjét.

6. Egy üzletbe két személy jelentkezik az elárusítói állásra. A két jelentkező közül csak az egyiket alkalmazzák. Az üzletvezető döntéseit befolyásoló szempontok fontossági sorrendben: megbízhatóság (B), külső megjelenés (M), kommunikációs készség (K). Az alábbi páros összehasonlítási táblázatok mutatják az állásinterjú eredményeit:

B	**I**	**II**
I	1	5
II	$\frac{1}{5}$	1

M	**I**	**II**
I	1	$\frac{1}{7}$
II	7	1

K	**I**	**II**
I	1	4
II	$\frac{1}{4}$	1

Az üzletvezető melyik jelentkezőt fogja választani, ha a tényezőkre vonatkozó páros összehasonlítási mátrixa:

	B	**M**	**K**
B	1	2	3
M	$\frac{1}{2}$	1	5
K	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	1

Vizsgáljuk meg az üzletvezető következetességét is.

7. A gólyabálon a zsűri négy pár teljesítményét értékeli. A döntését befolyásoló szempontok fontossági sorrendben: leleményesség (L), ügyesség (Ü) és megjelenés (M). Minden zsűritag e három szempont alapján összehasonlítja a négy pár teljesítményét. Az egyik zsűritag pontozólapján az alábbi páros összehasonlítási mátrixok találhatók:

L	**I**	**II**	**III**	**IV**
I	1	2	3	3
II	$\frac{1}{2}$	1	3	4
III	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	2
IV	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Ü	**I**	**II**	**III**	**IV**
I	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
II	2	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
III	3	4	1	1
IV	5	5	1	1

M	**I**	**II**	**III**	**IV**
I	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$
II	1	1	1	$\frac{1}{4}$
III	2	1	1	1
IV	7	4	1	1

Következetes volt-e a zsűritag?

Az alábbi táblázat a zsűri értékelését tartalmazza a tényezőkre vonatkozóan:

	L	**Ü**	**M**
L	1	2	5
Ü	$\frac{1}{2}$	1	2
M	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1

Határozzuk meg a tényezők páros összehasonlítási mátrixának következetességét, és adjuk meg az előző pontban bemutatott zsűritag által javasolt sorrendet.

8. A befektetési döntéseknél két tényező: a várható megtérülés és a kockázat mértéke egyformán fontosnak számít. Egy cég két beruházás közül az egyiket szeretné megvalósítani, ezért elkészíti az alábbi páros összehasonlítási mátrixokat:

Megtérülés	**I**	**II**
I	1	$\frac{1}{2}$
II	2	1

Kockázat	**I**	**II**
I	1	3
II	$\frac{1}{3}$	1

a) Hogyan rangsorolhatjuk a beruházásokat?

b) Időközben egy újabb beruházási lehetőség is számításba jön. A három beruházásra vonatkozó páros összehasonlítási táblázatok a következők:

Megtérülés	**I**	**II**	**III**
I	1	$\frac{1}{2}$	4
II	2	1	8
III	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

Kockázat	**I**	**II**	**III**
I	1	3	$\frac{1}{2}$
II	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{6}$
III	2	6	1

Figyeljük meg, hogy az első két beruházás egymás közötti páros összehasonlításai nem változtak. Mi lesz most a beruházások rangsora? Hasonlítsuk össze az eredményt az a) pontban kapottal.

9. Egy vállalat új számítógépek beszerzésén gondolkodik. A beszerzendő számítógép három tulajdonságát tartják fontosnak: felhasználóbarát működés (1), szoftverek elérhetősége (2) és költségek (3). Ezekre a tényezőkre vonatkozóan a következő páros összehasonlítási mátrixot dolgozták ki:

	1.	**2.**	**3.**
1.	1	$\frac{1}{2}$	4
2.	2	1	5
3.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	1

A vásárlásnál három számítógéptípus jöhet szóba. Az egyes típusoknak az egyes tényezőkre vonatkozó páros összehasonlítási mátrixok:

1.	**I**	**II**	**III**
I	1	3	5
II	$\frac{1}{3}$	1	2
III	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1

2.	**I**	**II**	**III**
I	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
II	3	1	5
III	2	$\frac{1}{5}$	1

3.	**I**	**II**	**III**
I	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$
II	2	1	$\frac{1}{5}$
III	7	5	1

Ellenőrizzük a páros összehasonlítási mátrixok következetességét. Melyik számítógéptípust kell megvásárolni?

10. Egy család nyári szabadságára készülve ki szeretné választani a számára legkedvezőbb célországot. A szempontjai: távolság (T), látnivalók (L) és költségek (K). A lehetséges célországok: India (I), Olaszország (O) és Egyiptom (E). A szempontok fontosságára vonatkozó információk:
    – a látnivalók 5-ször fontosabbak a távolságnál;
    – a költségek 7-szer fontosabbak a távolságnál;
    – a költségek 2-szer fontosabbak a látnivalóknál.

    Néhány utazási iroda ajánlatának tanulmányozása után megállapították, hogy az egyes alternatívák páros összehasonlításai a következők:

T.	**I**	**O**	**E**
I	1	6	4
O	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{2}$
E	$\frac{1}{4}$	2	1

L.	**I**	**O**	**E**
I	1	$\frac{1}{2}$	2
O	2	1	5
E	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	1

K.	**I**	**O**	**E**
I	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$
O	7	1	2
E	3	$\frac{1}{2}$	1

Melyik országba utazzon a család? Írjuk fel az alternatívák rangsorát meghatározó súlyokat, és határozzuk meg az összehasonlítások következetességét.

11. Egy ifjú közgazdász három lehetőség közül választhat: belép egy nagy cégbe partnerként (L_1), saját céget alapít (L_2), vagy elfogadja az egyetem ajánlatát (L_3). A végcél azon lehetőség kiválasztása, amely mellett az elégedettsége a lehető legnagyobb. Négy tényező alapján dönt: kereseti lehetőség (T_1), biztonság (T_2), előremeneteli lehetőség (T_3) és munkakörülmények (T_4). A közgazdász meghatározta, hogy számára mely tényezők milyen fontossággal bírnak. Párosával összehasonlította a tényezőket: $(T_1 : T_2) = (5 : 1)$, $(T_1 : T_3) = (1 : 1)$, $(T_1 : T_4) = (7 : 1)$, $(T_2 : T_3) = (1 : 3)$, $(T_2 : T_4) = (2 : 1)$, $(T_3 : T_4) = (5 : 1)$.
Majd minden tényező esetén összehasonlította a lehetőségeit is. Páros összehasonlítási mátrixai a következők:

$$\text{Kereset:} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1/2 & 1/7 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{Biztonság:} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1/5 \\ 1/3 & 1 & 1/7 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{Előremenetel:} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1/3 & 1/7 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{Munkakörülmények:} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Melyik lehetőséget választja a közgazdász?
12. Oldd meg a 4.2. mintafeladatot, a tabletvásárlást, abban az esetben, hogyha te lennél a szóban forgó diák. Add meg a saját páros összehasonlítási mátrixaidat a döntéshozatali tényezőket, az árat, illetve a tabletek színét illetően. Te melyik tabletet választottad volna?
13. Három barát, Anna, Péter, Róza, le akar festeni egy szobát, amelyet mindhárman használnak. De nem tudnak megegyezni, hogy milyen színt válasszanak. Az egyikük zöld (Z) színt javasol, van, akinek a narancssárga (N) tetszik, míg van, aki rózsaszínben (R) szeretné látni a termet. Mivel nem tudnak megegyezni, eldöntik, hogy mindegyikük elkészíti a saját összehasonlítási mátrixát és kiszámolja a saját preferenciavektorának súlyait, majd a legtöbb értéket elért színben

festik le a szobát. Anna páros összehasonlítási mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/9 & 1/3 \\ 9 & 1 & 5 \\ 3 & 1/5 & 1 \end{bmatrix},$$

ahol a színek sorrendje zöld, narancssárga, illetve rózsaszín. Péter minden színt osztályoz, azaz a zöld értéke 9, narancssárgához a 3-as értéket rendeli, a rózsaszínnek az 1-es értéket adja. Róza páros összehasonlításai: $(Z : N) = (1 : 3)$, $(Z : R) = (1 : 9)$, $(N : R) = (1 : 5)$. Milyen színűre fogják a szobát lefesteni, ha mindhármuk véleményének azonos súlya van? Változik-e a szín, ha Péter véleményének súlyát megduplázzuk?

14. Egy állam katonai repülőgépet szeretne vásárolni. Döntéshozatalakor négy jellemzőt vesz figyelembe: maximális elérhető sebesség (S), rakfelület (F), beszerzési költség (K), megbízhatóság (B). Négy lehetséges alternatívát vizsgálnak meg:

	Max sebesség	**Raktér**	**Költség**	**Megbízhatóság**
$\mathbf{A}_1$	1.2 km/s	500 m^2	550 000	átlagos
$\mathbf{A}_2$	2 km/s	1700 m^2	650 000	alacsony
$\mathbf{A}_3$	1 km/s	1000 m^2	450 000	jó
$\mathbf{A}_4$	1.5 km/s	800 m^2	500 000	átlagos

A verbális skálát numerikussá a következő megfeleltetést használva írják át: nagyon alacsony 1 pont, alacsony 3 pont, átlagos 5 pont, jó 7 pont, nagyon jó 9 pont. A jellemzők súlyainak eldöntésére páros összehasonlítást alkalmaznak: $(S : F) = (1 : 5)$, $(S : K) = (1 : 3)$, $(S : B) = (1 : 7)$, $(F : K) = (2 : 1)$, $(F : B) = (1 : 2)$, $(K : B) = (1 : 1)$.

Melyik repülőgépet vásárolják meg?

15. Bea egy okostelefont szeretne vásárolni egy webáruházban. A következő kritériumok alapján dönt: szín, memória, szállítás. A következő modellek közül választ:

M1 – rózsaszín (R), 32 MB, azonnali szállítás,
M2 – kék (K), 16 MB, azonnali szállítás,
M3 – fekete (F), 32 MB, 1 hét a szállítási idő,
M4 – piros (P), 64 MB, 4 hét a szállítási idő.

Elkészíti a kritériumainak páros összehasonlítási mátrixát

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

ahol a kritériumok sorrendje: szín, memória, szállítás. A színek páros összehasonlításakor a következő arányokat adja: $(R : K) = (7 : 1)$, $(R : F) = (9 : 1)$, $(R : P) = (3 : 1)$, $(K : F) = (2 : 1)$, $(K : P) = (1 : 5)$, $(F : P) = (1 : 7)$. A szállítási időhöz a következő numerikus skálát rendeli: azonnali 9 pont, 1 hét 3 pont, 4 hét 1 pont.
Melyik okostelefont vásárolja meg?

5. FEJEZET

MARKOV-LÁNC

Gyakran találkozunk olyan problémákkal, hogy egy valószínűségi változóval jellemzett mennyiség miként alakul az idő múlásával. Például megvizsgálhatjuk, hogy egy cég piaci részesedése vagy egy részvény árfolyama hogyan alakul az elkövetkező időperiódusban. Az időben véletlenszerűen változó folyamatokat sztochasztikus folyamatoknak nevezzük. Ebben a fejezetben a sztochasztikus folyamatok egy speciális részterületét, az úgynevezett Markov-láncokkal kapcsolatos feladatokat tárgyaljuk. A Markov-lánc egy olyan diszkrét sztochasztikus folyamatot jelent, amely Markov-tulajdonságú. Nevét egy orosz matematikusról, Andrey Andreyevich Markovtól (1856–1922) kapta, aki hírnevét a tudomány ezen ágában végzett kutatásaival szerezte. Markov-tulajdonságúnak lenni röviden annyit jelent, hogy egy folyamat korábbi állapotai a későbbi állapotokra csak a jelen állapoton keresztül gyakorolhatnak befolyást.

Adott jelen mellett a jövő feltételesen független a múlttól. Semmi, ami a múltban történt, nem hat, nem ad előrejelzést a jövőre nézve, a jövőben minden lehetséges. Alapvető példa erre az érmedobás – ha fejet dobunk elsőre, másodikra ugyanúgy 50-50%-kal dobhatunk írást vagy fejet egyaránt. Ha pedig 100-szor dobunk fejet egymás után, akkor is ugyanannyi a valószínűsége, hogy fejet kapunk 101-dikre, mint annak, hogy írást, az előzőekhez hasonlóan a múlt tehát nem jelzi előre a jövőbeli eredményt. A jelen állapot az, hogy van egy érménk fejjel és írással a két oldalán. Szabályos kereteket feltételezve semmi más nem befolyásolhatja a jövőbeni dobás alakulását.

A Markov-láncokat nagyon sok tudományágban használják. A markovi rendszerek a statisztikus mechanikának és a dinamikus makroökonómiának is nélkülözhetetlen eszközei. A statisztika egyes folyamatainak modellezésére is Markov-láncokat alkalmaznak. Úgyszintén hatékonyak lehetnek az állapotértékelésben és a mintafelismerésben is. A világ mobiltelefon- rendszereinek hibaelhárítása a Viberth-algoritmustól függ, míg rejtett Markov-modellek állnak a beszédfelismerés és a bioinformatika (például a gének előrejelzésében), illetve a tanulás egyes folyamatainak hátterében is. A Markov-láncok újabb felhasználási területe a biológiai modellezés, kiváltképp a népesedési folyamatoké. Egy honlap PageRank mutatója is, amelyet a Google is használ, Markov-lánc által van értelmezve. Markov-láncokat használunk egyes szerencsejátékok és társasjátékok modellezésére is. Markov-láncokat alkalmaznak az úgynevezett algoritmikus zenei összeállítások készítésére. A Markov-folyamatokat arra is használhatjuk, hogy egy mintadokumentum alapján látszólag értelmesnek tűnő szövegeket generáljunk.

Tételezzük fel, hogy tetszőleges időpontban a sztochasztikus folyamat véges számú állapotok egyikében lehet. A lehetséges állapotokat jelöljük $1, 2, ..., N$-nel. Ekkor egy X_1, X_2, $X_3, \ldots$ valószínűségi változó sorozatot ***Markov-láncnak*** nevezünk, ha

$$P\left(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, ..., X_1 = i_1\right) = P\left(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t\right).$$

Az összefüggés azt állíja, hogy a $t+1$ időponthoz tartozó állapot valószínűségi eloszlása csak a t időponthoz tartozó valószínűségi eloszlástól függ, és nem függ azoktól az állapotoktól, amelyeken keresztül a folyamat eljutott a t időpontbeli állapotba.

A Markov-láncok típusai:

– ***stacionárius átmenet-valószínűségű (homogén) Markov-láncról*** beszélünk, ha az átmenet-valószínűségek nem függnek az időtől, azaz:

$$P\left(X_{t+1} = j | X_t = i\right) = p_{ij},$$

ahol p_{ij} olyan 0 és 1 közötti állandók, amelyre $p_{i1} + p_{i2} ... + p_{iN} = 1$;

– m***-edrendű Markov-láncok*** az olyan Markov-láncok, melyekre (véges m esetén):

$$P\left(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, ..., X_1 = i_1\right)$$
$$= P\left(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, ..., X_{t-m-1} = i_{t-m-1}\right)$$

minden t-re. Az $m = 1$ esetén a sztochasztikus folyamatot egyszerű Markov-láncnak nevezzük.

Mi a továbbiakban csak a stacionárius átmenet-valószínűségű (homogén) Markov-láncok tárgyalásával foglalkozunk. Itt a p_{ij} annak valószínűsége, hogy a folyamat egy időperiódus alatt az i állapotból a j állapotba lép át, ezért ezeket ***átmenet-valószínűségeknek*** nevezzük.

Egy homogén Markov-lánc időbeli viselkedését csak akkor tudjuk megadni, ha ismerjük a folyamat kezdeti eloszlását, az X_1-et, és a p_{ij} értékeket összefoglaló

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}$$

átmenet-valószínűség mátrixot.

A P átmenet-valószínűségi mátrix által leírt mozgási folyamat által képviselt mobilitás mértékét az alábbi, ún. ***mobilitási mutatóval*** számszerűsíthetjük:

$$\mu(P) = \frac{N - \sum\limits_{i=1}^{N} p_{ii}}{N-1}, \tag{5.1a}$$

azaz a mobilitási mutató az átmenet-valószínűségi mátrix főátlóján szereplő értékeket használja a mobilitás mérésére. Mi ennek az oka? A főátlón szereplő értékek a változatlanságot, az adott állapotban maradás valószínűségét mérik. Ezért ezen elemek összege a mobilitás ellentételeként az immobilitás egy mérőszámát adja. A mobilitási mutató legkisebb értéke 0, és ezt akkor kapjuk, amikor nincs változás, azaz amikor

$$P = I_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

legnagyobb értéke pedig $N/(N-1)$, és ezt akkor kapjuk, amikor a P főátlóinak értéke 0. A gyakorlati alkalmazásokban a mobilitási mutató értéke 0 és 1 közé szokott esni, így százalékos formában is megadhatjuk az értékét.

5.1. mintapélda (piaci részesedés). Egy terméket egy adott helyszínen három márkanév alatt forgalmazzák. Jelöljük ezeket A-val, B-vel és C-vel. A terméket összesen 1500-an vásárolják, és ezek megoszlását a januári hónapra az alábbi táblázat tartalmazza:

	A vásárlók megoszlása januárban	
Cég	Abszolút	Relatív
A	720	48%
B	350	24%
C	430	28%
Összesen	1500	100%

Egy piackutatás során felmért márkahűséget az alábbi táblázat tartalmazza:

Cég	A	B	C
A	60%	30%	10%
B	15%	80%	5%
C	10%	40%	50%

A táblázatban feltüntetett százalékos arányokat úgy kell érteni, hogy az A márkához az eddigi A márkát vásárlók továbbra is hűek maradnak, de a következő hónapban 30%-a átpártol a B márkához és 10%-a a C márkához. Ugyanígy értelmezhető a táblázat B, illetve C sora is, amelyek szerint a következő időszakban a vásárlók 80%-a hű marad a B-hez, 15%-a az A-hoz és 5%-a a C-hez pártol. A C márka vásárlói 50%-a hű marad a C-hez, 10%-a az A-hoz és 40%-a pedig a B-hez pártol.

a) Adjuk meg a feladat átmenet-valószínűség mátrixát, határozzuk meg a mobilitási mutatót, és rajzoljuk meg az átmenet-valószínűség gráfját.

b) Határozzuk meg február hónap elején a piaci részesedéseket.

c) Hogyan alakul a piaci részesedés az elkövetkező egy évben?

d) Határozzuk meg a piaci részesedés egyensúlyi eloszlását.

e) Várhatóan mennyi idő elteltével pártol át az egyik márka vevőinek 1%-a egy másik márkára?

f) Tegyük fel, hogy egy vásárló annak a cégnek, amelynél vásárol, 2 euró profitot hoz. Egy hirdetési cég az A cégnek garantálja, hogy 50 euró/hónap díj fejében 5-5%-kal csökkenteni fogja az A-tól B-hez, illetve C-hez átpártoló vásárlók számát. Érdemes-e az A cégnek felfogadni a hirdetési céget?

Megoldás.

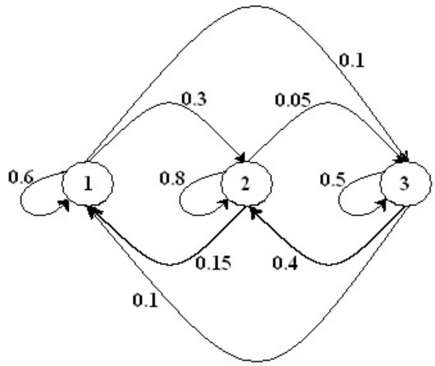
a) A példa márkahűséget megadó táblázata egyben a folyamat átmenet-valószínűségi mátrixa is, mivel megmutatja, hogy egyik hónapról a másikra milyen valószínűséggel marad hű egy vásárló a márkához, vagy pártol át egy másikhoz, tehát ebben az esetben az átmenet-valószínűségi mátrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

A mobilitási mutató

$$\mu\left(P\right) = \frac{3 - 0.6 - 0.8 - 0.5}{3 - 1} = 0.55.$$

Az átmenet-valószínűségi mátrix felépítése olyan gráffal szemléltethető, amelyben minden csúcs egy-egy állapotnak feleltethető meg, s az (i, j)



5.1. ábra. Az 5.1. mintapélda átmenet-valószínűségi hálója

él a p_{ij} átmeneti valószínűséget szemlélteti. Az 5.1. mintapélda átmenet-valószínűségi gráfját tartalmazza 5.1. ábra.

b) Mivel a januári piaci eloszlás

Cég	A	B	C
$Q(0)$	0.48	0.24	0.28

,

ezért február elején az eloszlás így alakul:

$$\begin{aligned} Q(1) &= Q(0) \cdot P \\ &= \begin{pmatrix} 0.48 & 0.24 & 0.28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.352 & 0.448 & 0.2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát február elején a piaci részesedés:

Cég	A	B	C
$Q(1)$	0.352	0.448	0.2

c) Az előbbiekben bevezetett P átmenet-valószínűségi mátrix jól használható, ha annak a valószínűségét akarjuk kiszámítani, hogy a folyamat az i állapotból n lépésben a j állapotba jusson. A ***Chapman–Kolmogorov-egyenletek*** szerint számíthatjuk az n lépéses valószínűségeket:

$$p_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}(t)\, p_{kj}(n-t), \text{ minden } i, j, n \text{ és } 1 \le t \le n \text{ esetén.} \quad (5.2)$$

Ezek az egyenletek azt mutatják, hogy az i állapotból n lépésben a j állapotba való jutás közben a folyamat pontosan t lépés után valamely k állapotban lesz. Sajátos esetben, ha $n = 1$, akkor $p_{ij}(1) = p_{ij}$. A $p_{ij}(2)$ kiszámítására alkalmazzuk az (5.2) Chapman–Kolmogorov-egyenletet:

$$p_{ij}(2) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}p_{kj}, \tag{5.3}$$

azaz összeszorozzuk a P mátrix i-edik sorát a P mátrix j-edik oszlopával, tehát a $p_{ij}(2)$ a P^2 mátrix i-edik sorának j-edik eleme. A gondolatmenetet folytatva kapjuk, hogy

$$p_{ij}(n) = \text{a } P^n \text{ mátrix } i\text{-edik sorának } j\text{-edik eleme.} \tag{5.4}$$

Ha az 5.1. mintapélda átmenet-valószínűség mátrixára alkalmazzuk a fenti összefüggést, akkor

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.415 & 0.46 & 0.125 \\ 0.215 & 0.705 & 0.08 \\ 0.17 & 0.55 & 0.28 \end{pmatrix}.$$

Tehát, két hónapra előrevetítve (március elején), a márkahűséget mutató táblázat:

Cég	A	B	C
A	41.5%	46%	12.5%
B	21.5%	70.5%	8%
C	17%	55%	28%

A gondolatmenetet folytatva, három hónapra előrevetítve a márkahűség alakulását az alábbi P^3 mátrix adja meg:

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.415 & 0.46 & 0.125 \\ 0.215 & 0.705 & 0.08 \\ 0.17 & 0.55 & 0.28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.330\,5 & 0.542\,5 & 0.127 \\ 0.242\,75 & 0.660\,5 & 0.096\,75 \\ 0.212\,5 & 0.603 & 0.184\,5 \end{pmatrix}.$$

Több hónapra előrevetítve az alábbi márkahűség (átmenet-valószínűségi) mátrixokat kapjuk:

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.330 & 0.542 & 0.127 \\ 0.242 & 0.660 & 0.096 \\ 0.212 & 0.603 & 0.184 \end{pmatrix}; \; P^4 = \begin{pmatrix} 0.292 & 0.583 & 0.123 \\ 0.254 & 0.639 & 0.105 \\ 0.236 & 0.619 & 0.143 \end{pmatrix}$$

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0.275 & 0.604 & 0.120 \\ 0.259 & 0.630 & 0.110 \\ 0.249 & 0.624 & 0.126 \end{pmatrix}; \; P^6 = \begin{pmatrix} 0.267 & 0.614 & 0.117 \\ 0.261 & 0.626 & 0.112 \\ 0.255 & 0.624 & 0.119 \end{pmatrix}$$

$$P^7 = \begin{pmatrix} 0.264 & 0.618 & 0.116 \\ 0.261 & 0.624 & 0.113 \\ 0.259 & 0.624 & 0.116 \end{pmatrix}; \; P^8 = \begin{pmatrix} 0.263 & 0.621 & 0.115 \\ 0.262 & 0.623 & 0.114 \\ 0.260 & 0.623 & 0.115 \end{pmatrix}$$

$$P^9 = \begin{pmatrix} 0.262 & 0.622 & 0.115 \\ 0.262 & 0.623 & 0.114 \\ 0.261 & 0.623 & 0.114 \end{pmatrix}; \; P^{10} = \begin{pmatrix} 0.262 & 0.622 & 0.114 \\ 0.262 & 0.623 & 0.114 \\ 0.261 & 0.623 & 0.114 \end{pmatrix}$$

$$P^{11} = \begin{pmatrix} 0.262 & 0.622 & 0.114 \\ 0.262 & 0.622 & 0.114 \\ 0.262 & 0.623 & 0.114 \end{pmatrix}; \; P^{12} = \begin{pmatrix} 0.262 & 0.622 & 0.114 \\ 0.262 & 0.622 & 0.114 \\ 0.262 & 0.623 & 0.114 \end{pmatrix}$$

Észrevehető, hogy nagy n értékekre a mátrixok már nem sokat változnak, és a sorokban lassan ugyanazon számokat kapjuk. Például ha az első sor első elemét háromtizedes pontossággal tekintjük, akkor az alábbi sorozatot kapjuk:

n	1	2	3	4	5	6
$p_{11}(n)$	0.6	0.415	0.330	0.292	0.275	0.267

n	7	8	9	10	11	12
$p_{11}(n)$	0.264	0.263	0.262	0.262	0.262	0.262

Ez azt jelenti, hogy a kezdeti eloszlástól függetlenül 0.262 az esélye annak, hogy az A céghez hű személyek hosszabb távon is hűek maradjanak az A márkához.

c) Most vizsgáljuk meg a mintapélda c) alpontjában felvetett kérdést: ismerve a januári piaci eloszlást, határozzuk meg, hogyan alakul a piaci részesedés az elkövetkező egy évben?

A b) pontban, a piaci részesedésre megadott képlet általában is igaz, azaz ha ismerjük a kezdeti időszakban a $Q(0)$ eloszlást és a P valószínűség-átmenet mátrixot, akkor az n-edik lépésben az eloszlás

$$Q(n) = Q(0) \cdot P^n. \tag{5.5}$$

Felhasználva az (5.5) képletet (háromtizedes pontossággal) a piaci részesedésre az alábbi táblázatot kapjuk:

n	A	B	C
0	0.48	0.24	0.28
1	0.352	0.448	0.2
2	0.298	0.544	0.158
3	0.276	0.588	0.136
4	0.268	0.607	0.125
5	0.264	0.616	0.120
6	0.263	0.620	0.117
7	0.262	0.622	0.116
8	0.262	0.623	0.115
9	0.262	0.623	0.115
10	0.262	0.623	0.115
11	0.262	0.623	0.115

A táblázatból kiolvasható, hogy a piaci eloszlás a nyolcadik hónap elejétől kezdődően lényegesen nem változik. Azt lehet mondani, hogy ha a márkahűség állandó, akkor hosszabb távon a piaci részesedés A: 26.2%, B: 62.3%, C: 11.5% eloszlásnál stabilizálódik.

d) Az előző alpontban megállapítottuk, hogy hosszabb távon az átmenet-valószínűségek alig változnak. Felvetődik az a kérdés, hogy ez mindig így van-e? A kérdés elemzéséhez szükség van néhány fogalom bevezetésére.

Az i-ből j-be vezető ***úton*** olyan átmenetek sorozatát értjük, amelyek i-ből indulnak és j-be érkeznek, és a köztes átmenetek során minden valószínűség pozitív. Például a mintapéldában 1-ből a 3-ba vezető utak (lásd az 5.1. ábrát): $1 \overset{0.1}{\to} 3$, vagy $1 \overset{0.3}{\to} 2 \overset{0.05}{\to} 3$, vagy $1 \overset{0.3}{\to} 2 \overset{0.8}{\to} 2 \overset{0.05}{\to} 3$, stb. A nyilak feletti szám az átmenet-valószínűségeket mutatja.

A j állapotot az i állapotból ***elérhetőnek*** mondjuk, ha megadható olyan út, amely az i-ből indul és a j-be érkezik. Az i és j állapotok ***kommunikálnak egymással***,ha i-ből elérhető a j, és j-ből is elérhető az i. Az 5.1. gráfon megfigyelhető, hogy minden állapot minden állapottal kommunikál, mivel az állapotok bármelyikéből bármelyikbe vezet út.

A Markov-lánc állapotainak S halmaza ***zárt halmaz***, ha az S halmazon kívüli egyetlen állapot sem érhető el az S-ből. Ha belépünk egy zárt halmazba, akkor azt már nem tudjuk elhagyni. Az i ***elnyelő állapot***, ha

$p_{ii} = 1$. Ha elnyelő állapotba jutunk, akkor örökké ott maradunk. Minden elnyelő állapot egyben zárt halmaz is. A mintapéldában csak az összes állapotot tartalmazó $S = \{1, 2, 3\}$ halmaz zárt.

Az i állapot ***tranziens***, ha létezik olyan j állapot, amely elérhető az i-ből, de az i állapot nem érhető el a j-ből. Más szavakkal az i tranziens, ha ki lehet oly módon lépni az i-ből, hogy soha oda vissza nem térhetünk. Ha az állapot nem tranziens, akkor ***visszatérő*** állapotnak nevezzük. A mintapéldában minden állapot visszatérő.

Az i állapot ***periodikus*** $k > 1$ periódussal, ha k az a legkisebb szám, hogy az i-ből kilépő lánc visszatérési idejének hossza a k egész számú többszöröse. Más szavakkal i állapot periodikus $k > 1$ periódussal, ha a k az a legkisebb szám, amelyre a P^k mátrix i-edik sorában minden elem nulla, kivéve a p_{ii}-t, amelynek értéke 1.

A nem periodikus visszatérő állapotot ***aperiodikusnak*** nevezzük. Másképpen fogalmazva, egy i állapot aperiodikus, ha létezik egy olyan n szám, amelyre a P^n mátrix i-dik sorának egyetlen eleme sem nulla. Ha az összes állapot visszatérő aperiodikus, és az állapotok kommunikálnak egymással, akkor a láncot ***ergodikusnak*** mondjuk.

A mintapélda (5.1) gráfját elemezve láthatjuk, hogy minden állapot minden állapottal kommunikál, minden állapot visszatérő (azaz bármely állapotból ha kilépünk, vissza is tudunk jutni oda) és aperiodikus, mivel P mátrix egyetlen eleme sem nulla. Következésképpen a P átmenet-valószínűség mátrix ergodikus.

5.1. Tétel. *(Chapman–Kolmogorov)Ha P egy N állapotból álló ergodikus Markov-lánc átmenet-valószínűség mátrixa, akkor létezik egy olyan $x = [x_1, x_2, ..., x_N]$ vektor, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{pmatrix}.$$

A tétel azt mondja ki, hogy a P^n mátrix határértéke egy olyan mátrix, amelynek sorai azonosak. Ez a tulajdonság megfigyelhető a mintapélda esetében is. Ez másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy hosszú idő elteltével a Markov-lánc viselkedése kiegyenlítődik, és annak valószínűsége, hogy a rendszer valamely j állapotban lesz x_j, ahol x_j értéke nem függ az i kezdeti állapottól. A $x = [x_1, x_2, ..., x_N]$ vektort a Markov-lánc ***stacioner eloszlásának*** vagy ***egyensúlyi eloszlásnak*** nevezzük.

Ha a (5.2) Chapman–Kolmogorov-egyenletekben a t paramétert $n-1$-nek választjuk, akkor

$$p_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}(n-1)\, p_{kj}.$$

Feltételezve, hogy a P ergodikus és a fenti összefüggésben határértékre térve kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{N} p_{kj} \lim_{n\to\infty} p_{ik}(n-1),$$

ahonnan következik, hogy

$$x_j = \sum_{k=1}^{N} p_{kj} x_k. \tag{5.6}$$

Mátrix-jelölést használva a (5.6) a következő alakot ölti:

$$x = xP. \tag{5.7}$$

Mivel $x_1 + x_2 + \ldots + x_N = 1$ és a $x_j \geq 0$ (minden $j = 1, 2, \ldots, N$ esetén), ezért az ergodikus Markov-láncok esetén az egyensúlyi eloszlások az

$$\begin{cases} x_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} p_{kj} x_k, \text{ ahol } j = 1, 2, \ldots, N \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_N = 1, \\ x_j \geq 0 \text{ minden } j = 1, 2, \ldots, N \text{ esetén} \end{cases} \tag{5.8}$$

egyenletrendszer megoldásai.

Amint már megállapítottuk, a P átmenet-valószínűség mátrix ergodikus. Így alkalmazható a tétel kijelentése, azaz a folyamatnak van egyensúlyi eloszlása, ami egyben az (5.8) egyenletrendszer egyetlen megoldása. Tehát

$$\begin{cases} x_1 = 0.6x_1 + 0.15x_2 + 0.1x_3 \\ x_2 = 0.3x_1 + 0.8x_2 + 0.4x_3 \\ x_3 = 0.1x_1 + 0.05x_2 + 0.5x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x_1 = 0.262$, $x_2 = 0.623$, $x_3 = 0.115$. Megfigyelhető, hogy ez megegyezik az előbb kiszámított hosszú távú piaci részesedéssel (A: 26.2%, B: 62.3%, C: 11.5%). Ezek alapján azt mondhatjuk, ha a folyamatot jellemző átmenet-valószínűség mátrix ergodikus, akkor a folyamat nagy számú lépés után az egyensúlyi eloszláshoz tart, függetlenül a kezdeti valószínűség-eloszlástól. Például a mintapéldában, ha nem a kezdeti (48%, 24%, 28%) eloszlásból indultunk volna ki, akkor is több lépés után az (A: 26.2%, B: 62.3%, C: 11.5%) egyensúlyi piaci részesedéshez jutottunk volna.

e) Az előzőekben az egyensúlyi valószínűségek meghatározásával foglalkoztunk, azonban igen gyakran szükséges, hogy valószínűségi kijelentést tegyünk arra vonatkozóan, hogy a folyamat az i állapotból indulva hány lépésben éri el először a j állapotot. Ezt a lépésszámot (időtartamot) a j állapot i állapotból való ***elérési idejének*** nevezzük. Ha $i = j$, akkor az i állapotba való ***visszatérési időről*** beszélünk. Általában az elérési idők valószínűségi változók, így valószínűségi eloszlások tartoznak hozzájuk. A továbbiakban $f_{ij}(n)$-nel jelöljük annak valószínűségét, hogy az i állapotból a j állapot elérési ideje n. Kimutatható, hogy ezen valószínűségek eleget tesznek a következő rekurzív összefüggéseknek:

$$\begin{aligned} f_{ij}(1) &= p_{ij}(1) = p_{ij}, \\ f_{ij}(2) &= p_{ij}(2) - f_{ij}(1)\, p_{ij}(1), \\ f_{ij}(3) &= p_{ij}(3) - f_{ij}(1)\, p_{ij}(2) - f_{ij}(2)\, p_{ij}(1), \\ &\;\vdots \\ f_{ij}(n) &= p_{ij}(n) - f_{ij}(1)\, p_{ij}(n-1) - f_{ij}(2)\, p_{ij}(n-2) - \cdots \\ &\quad - f_{ij}(n-1)\, p_{ij}(1). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Illusztrációként számítsuk ki a mintapéldában az 1-es állapotból a 3-as állapotba való elérési időket az $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ értékekre. Alkalmazzuk az (5.9) rekurzív képleteket és a feladat P^n valószínűség-átmenet mátrixait:

$$\begin{aligned} f_{13}(1) &= p_{13}(1) = p_{13} = 0.1, \\ f_{13}(2) &= p_{13}(2) - f_{13}(1)\, p_{13} = 0.125 - 0.1 \cdot 0.1 = 0.115, \\ f_{13}(3) &= p_{13}(3) - f_{13}(1)\, p_{13}(2) - f_{13}(2)\, p_{13} \\ &= 0.127 - 0.1 \cdot 0.125 - 0.115 \cdot 0.1 = 0.103, \\ f_{13}(4) &= p_{13}(4) - f_{13}(1)\, p_{13}(3) - f_{13}(2)\, p_{13}(2) - f_{13}(3)\, p_{13} \\ &= 0.123\,68 - 0.1 \cdot 0.127 - 0.115 \cdot 0.125 - 0.103 \cdot 0.1 \\ &= 0.0863, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{13}(5) &= p_{13}(5) - f_{13}(1)\,p_{13}(4) - f_{13}(2)\,p_{13}(3) - f_{13}(3)\,p_{13}(2) \\
&\quad - f_{13}(4)\,p_{13} = 0.120\,27 - 0.1 \cdot 0.123\,68 - 0.115 \cdot 0.127 \\
&\quad - 0.103 \cdot 0.125 - 0.123\,68 \cdot 0.1 = 0.068, \\
f_{13}(6) &= p_{13}(6) - f_{13}(1)\,p_{13}(5) - f_{13}(2)\,p_{13}(4) - f_{13}(3)\,p_{13}(3) \\
&\quad - f_{13}(4)\,p_{13}(2) - f_{13}(5)\,p_{13} \\
&\quad = 0.117\,89 - 0.1 \cdot 0.120\,27 - 0.115 \cdot 0.123\,68 - 0.103 \cdot 0.127 \\
&\quad - 0.0863 \cdot 0.125 - 0.068 \cdot 0.1 = 0.06097.
\end{aligned}$$

Észrevehető, hogy ezek a számok mind pozitívak, és az is igazolható, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n) \le 1.$$

Ha ez az összeg szigorúan kisebb mint 1, akkor azt jelenti, hogy az i állapotból nem érhető el a j állapot, ha pedig az összeg értéke pontosan 1, akkor az $f_{ij}(n)$ $(n = 1, 2, ...)$ úgy tekinthető, mint egy valószínűségi változó eloszlása. Ez a valószínűségi változó az elérési idő. Látható, hogy nehézségbe ütközik az $f_{ij}(n)$ nagyon sok értékének a kiszámítása, ezért az elemzésekben inkább az ***elérési idő*** m_{ij} ***várható értékét*** szokták meghatározni, amelyet a

$$m_{ij} = \begin{cases} \infty, & \text{ha} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n) < 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}(n), & \text{ha} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n) = 1 \end{cases}$$

kifejezés értelmez. Tegyük fel, jelenleg az i-dik állapotban vagyunk, és p_{ij} a valószínűsége, hogy átlépjünk a j állapotba. Ennek várható értéke m_{ij}. Ha $k \ne j$, akkor p_{ik} valószínűséggel átlépünk a k állapotba, majd innen a j állapotba. Ez utóbbi várható értéke m_{kj}. Ilyenkor átlagban $1 + m_{kj}$ lépés szükséges ahhoz, hogy az i állapotból a j állapotba érjünk. A várható értékek közti összefüggés alapján

$$m_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \ne j} p_{ik}\left(1 + m_{kj}\right).$$

Mivel

$$p_{ij} + \sum_{k \ne j} p_{ik} = 1,$$

ezért az m_{ij} várható elérési idők megoldásai az

$$m_{ij} = 1 + \sum_{k \ne j} p_{ik} m_{kj} \text{ minden } i, j = 1, 2, ...N \text{ esetén} \tag{5.10}$$

egyenletrendszernek.

Illusztrációként kiszámítjuk a mintapéldában a várható elérési időket. Felírjuk az (5.10) egyenletrendszert a P valószínűségi-átmeneti mátrixra:

$$\begin{cases} m_{11} = 1 + p_{12} \cdot m_{21} + p_{13} \cdot m_{31} \\ m_{12} = 1 + p_{11} \cdot m_{12} + p_{13} \cdot m_{32} \\ m_{13} = 1 + p_{11} \cdot m_{13} + p_{12} \cdot m_{23} \\ m_{21} = 1 + p_{22} \cdot m_{21} + p_{23} \cdot m_{31} \\ m_{22} = 1 + p_{21} \cdot m_{12} + p_{23} \cdot m_{32} \\ m_{23} = 1 + p_{21} \cdot m_{13} + p_{22} \cdot m_{23} \\ m_{31} = 1 + p_{32} \cdot m_{21} + p_{33} \cdot m_{31} \\ m_{32} = 1 + p_{31} \cdot m_{12} + p_{33} \cdot m_{32} \\ m_{33} = 1 + p_{31} \cdot m_{13} + p_{32} \cdot m_{23} \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} m_{11} = 1 + 0.3 \cdot m_{21} + 0.1 \cdot m_{31} \\ m_{12} = 1 + 0.6 \cdot m_{12} + 0.1 \cdot m_{32} \\ m_{13} = 1 + 0.6 \cdot m_{13} + 0.3 \cdot m_{23} \\ m_{21} = 1 + 0.8 \cdot m_{21} + 0.05 \cdot m_{31} \\ m_{22} = 1 + 0.15 \cdot m_{12} + 0.05 \cdot m_{32} \\ m_{23} = 1 + 0.15 \cdot m_{13} + 0.8 \cdot m_{23} \\ m_{31} = 1 + 0.4 \cdot m_{21} + 0.5 \cdot m_{31} \\ m_{32} = 1 + 0.1 \cdot m_{12} + 0.5 \cdot m_{32} \\ m_{33} = 1 + 0.1 \cdot m_{13} + 0.4 \cdot m_{23} \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $m_{11} = 3.8168$, $m_{12} = 3.1579$, $m_{13} = 14.286$, $m_{21} = 6.875$, $m_{22} = 1.6051$, $m_{23} = 15.714$, $m_{31} = 7.5$, $m_{32} = 2.631$, $m_{33} = 8.6957$. Megfigyelhető, hogy az m_{11}, m_{22}, m_{33} várható visszatérési idők reciprokai az x_1, x_2, x_3 egyensúlyi eloszlásoknak, azaz

$$m_{11} = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{0.262} = 3.8168,$$
$$m_{22} = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{0.623} = 1.6051,$$
$$m_{33} = \frac{1}{x_3} = \frac{1}{0.115} = 8.6957.$$

5.2. Tétel. *Ha P egy ergodikus valószínűség-átmeneti mátrix, akkor a Markov-lánc átlagos visszatérési idői és az egyensúlyi eloszlások között fennáll az alábbi összefüggés:*

$$m_{ii} = \frac{1}{x_i}.$$

Mit is mutatnak meg ezek a számok? Például az m_{11} azt, hogy egy olyan vásárló, aki az A cég termékéből vásárolt, majd áttért a B vagy C cég termékére, legközelebb várhatóan 3.8168 hónap múlva fog újra az A cégtől vásárolni. Az $m_{12} = 3.1579$ pedig azt mutatja, hogy ha egy vásárló az A cég termékét vásárolta, akkor várhatóan 3.1579 hónap múlva fog a B cég termékéből vásárolni.

f) Hosszabb távon a hirdetési cég felfogadása nélkül az egyensúlyi helyzet A: 26.2%, B: 62.3%, C: 11.5% eloszlásnál stabilizálódik. Ez az A cégnek várhatóan $1500 * 0.262 = 393$ vásárlót, B cégnek $1500 * 0.623 = 935.5$ vásárlót, a C cégnek pedig $1500 * 0.115 = 172.5$ vásárlót jelent. Profitban kifejezve az A cég várható profitja $393 * 2 = 786$, a B cég várható profitja $935.5 * 2 = 1871$ és a C cég várható profitja pedig $172.5 * 2 = 345$.

Ha felfogadja a hirdetési céget, akkor a márkahűségek így alakulnak:

Cég	A	B	C
A	70%	25%	5%
B	15%	80%	5%
C	10%	40%	50%

A

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.25 & 0.05 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

átmenet-valószínűség mátrix ergodikus. Így alkalmazható a tétel kijelentése, azaz a folyamatnak van egyensúlyi eloszlása, ami egyben az

$$\begin{cases} x_1 = 0.7x_1 + 0.15x_2 + 0.1x_3 \\ x_2 = 0.25x_1 + 0.8x_2 + 0.4x_3 \\ x_3 = 0.05x_1 + 0.05x_2 + 0.5x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer egyetlen $x_1 = 0.32323$, $x_2 = 0.58586$, $x_3 = 0.090909$ megoldása. Tehát ebben az esetben az egyensúlyi helyzet A: 32.323%, B: 58.586%, C: 9.0909% eloszlásnál stabilizálódik. Ez az A cégnek várhatóan $1500 * 0.32323 = 484.85$ vásárlót, B cégnek $1500 * 0.58586 = 878.79$ vásárlót, a C cégnek pedig $1500 * 0.090909 = 136.36$ vásárlót jelent. Ez a vásárlói megoszlás várható profitban kifejezve, A cég: $484.85 * 2 = 969.7$, a B cég: $878.79 * 2 = 1757.6$ és a C cég: $136.36 * 2 = 272.72$.

Az A cég várható profitjait összehasonlítva látható, hogy a különbség $969.7 - 786 = 183.7$ nagyobb, mint a hirdetési cégnek kifizetendő 50 eurós összeg. Következésképpen érdemes a hirdetőcéget alkalmaznia.

5.1. Markov-láncok tanulmányozása WinQSB segítségével

Az előbbi paragrafusban bemutatott számításokat a WinQSB Markov-folyamat eszköztára (Markov Process) automatikusan elvégzi. Alkalmazásképpen tanulmányozzuk az alábbi feladatot a WinQSB segítségével.

5.2. mintapélda (Részvényárfolyam). Részvényárfolyam elemzésekor nagyon sokszor csak az érdekel, hogy az illető részvény árfolyama nő vagy csökken. Egy általunk vizsgált részvény árfolyama az elmúlt 30 napon a következő változást mutatta: N C C N N C C N C C N C C C N C N C C N C N N C N C C N C C, ahol az N azt mutatja, hogy az előző naphoz képest növekedett, a C pedig, hogy csökkent az árfolyam.

a) Adjuk meg a feladat átmenet-valószínűség mátrixát, és rajzoljuk meg az átmenet-valószínűségi gráfját, feltéve, hogy csak a legutolsó változás befolyásolja a következő napi árfolyamot. Ergodikus-e az átmenet-valószínűségi mátrix? Tegyünk becslést az árfolyam következő napi és hosszú távú változásával kapcsolatosan. Határozzuk meg a várható elérési időket, és magyarázzuk meg az eredményt.

b) Ugyanaz a feladat, mint az a) pontban, csak most azt feltételezzük, hogy az utolsó két napi változás befolyásolja a következő napi árfolyamot.

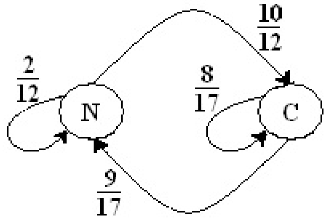
Megoldás.

a) Megfigyelhetjük, hogy az utolsó állapotot leszámítva összesen 12 darab N és 17 darab C állapotunk van, amiből $N \to N$ átmenet, azaz NN szekvencia 2 darab, $N \to C$, azaz NC szekvencia 10 darab, $C \to C$ átmenet, azaz CC szekvencia 8 darab és $C \to N$, azaz CN szekvencia 9 darab található. Ezért az átmenet-valószínűségeket (átmenet-gyakoriságokat) megadó táblázat:

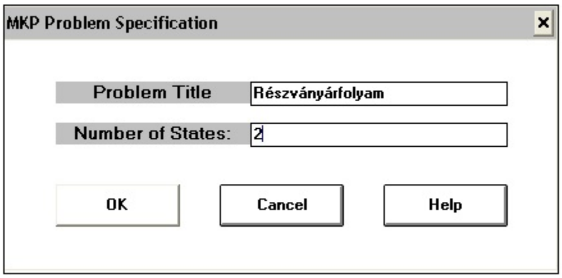
	N	C
N	$\frac{2}{12}$	$\frac{10}{12}$
C	$\frac{9}{17}$	$\frac{8}{17}$

Az átmenet-valószínűségi mátrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{12} & \frac{10}{12} \\ \frac{9}{17} & \frac{8}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.166\,67 & 0.833\,33 \\ 0.529\,41 & 0.470\,59 \end{pmatrix}.$$



5.2. ábra. Az 5.2. mintapélda átmenet-valószínűségi hálója



5.3. ábra. A részvényárfolyam mintapélda a) alpontjának kezdőablaka

Tudjuk, hogy a mai napon az árfolyam csökkenő ugrást mutatott (mivel a sorozatban az utolsó betű C). Tehát a kezdeti eloszlás

$$Q\left(0\right) = \left(0, 1\right).$$

A mátrix alapján elkészített átmenet-valószínűségi gráfot tartalmazza az 5.2. ábra.

Az 5.2. átmenet-valószínűségi hálót elemezve láthatjuk, hogy minden állapot minden állapottal kommunikál, minden állapot visszatérő (azaz bármely állapotból ha kilépünk, vissza is tudunk jutni oda) és aperiodikus, mivel P mátrix egyetlen eleme sem nulla. Következésképpen a P átmenet-valószínűség mátrix ergodikus.

A WinQSB Markov-folyamat (Markov Process) eszköztárát használva az Új alkalmazás (New Problem) menüpont kiválasztásával betöltjük az eszköztár 5.3. kezdőablakát. Itt megadjuk a feladat megnevezését (Problem Title) és az állapotok számát (Number of States). Az OK gombra kattintva megjelenik a feladathoz rendelt üres beviteli ablak. Itt beírjuk a P átmenet-valószínűségi mátrixot, a $Q\left(0\right)$ kezdeti eloszlást (Initial Prob.) és az egyes

From \ To	State1	State2
State1	0.16667	0.83333
State2	0.52941	0.47059
Initial Prob.	0	1
State Cost		

5.4. ábra. A részvényárfolyam mintapélda a) alpontjának adattáblája

állapotokhoz rendelt költséget (State Cost) (5.4. adattábla). Mivel ebben a feladatban az állapotok költségei nem érdekelnek, ezt a sort üresen hagyjuk.

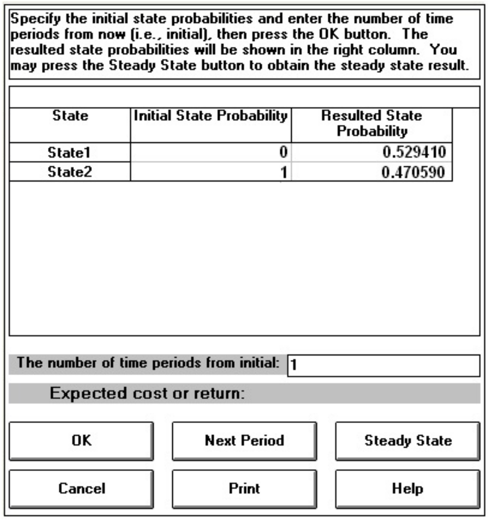
Az első feladatunk meghatározni, hogy a következő napon milyen valószínűséggel fog nőni, illetve csökkenni az árfolyam. A lépcső ikonra kattintva megjelenik az eszköztárelemző 5.5. ablaka. Itt beírjuk a t periódus értékét a (The number of time periods from initial) mezőbe. Mivel minket a következő nap érdekel, ezért ide 1-et írunk. Az OK-ra kattintva megkapjuk a következő napi becslést. Ez a becsült állapot valószínűségek (Resulted State Probability) oszlopból olvasható ki. Ennél a lépésnél a WinQSB tulajdonképpen a $Q(1) = Q(0) \cdot P = (0.529410, 0.470590)$ mátrix szorzást végzi el. A kapott eredmények alapján a következő nap az árfolyam 52.941% valószínűséggel nőni, és 47.059% valószínűséggel pedig csökkenni fog. Ha előre két napi becslést akarunk tenni, akkor a következő lépés (Next Period) gombra kattintunk, ha pedig az egyensúlyi eloszlást szeretnénk meghatározni, akkor az egyensúlyi állapot (Steady State) gombra kell kattintani.

Hosszabb periódusra is becslést tudunk tenni, és egy előrejelző grafikont is el tudunk készíteni, ha a trapézt mutató ikonra kattintunk. Ekkor megjelenik az 5.6. ablak, ahonnan kiválasztjuk, hogy melyik állapot érdekel minket. Mondjuk, ha a növekvő állapot (N-State 1), akkor az 1-es állapot valószínűségi eloszlását (Probability of State State1) választjuk ki.

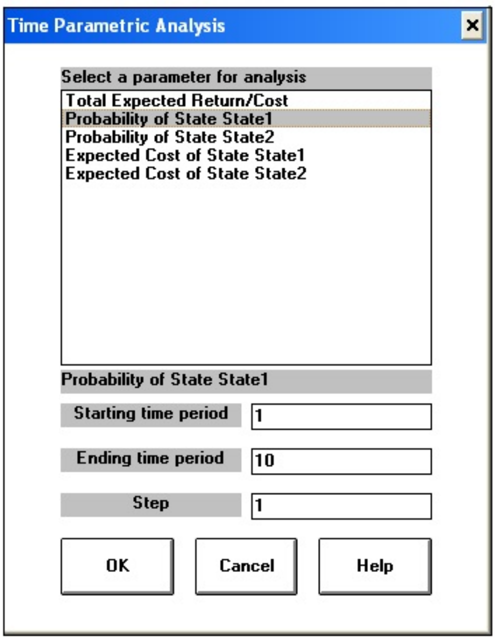
Az OK-ra kattintva betöltődik az 5.7. eredménytábla. A táblázatból kiolvasható, hogy a következő 10 napban milyen valószínűséggel fog nőni az árfolyam.

Ennek a táblázatnak az elkészítéséhez az 5.1. mintapélda c) alpontjában bemutatott számításokat végzi el a WinQSB, azaz kiszámítja a $Q(n) = Q(0) \cdot P^n$ mátrix-szorzat első elemét, amikor $n = 1, 2, 3, ...10$. A táblázat harmadik oszlopa (Probability of State State1) az árfolyam-növekedés valószínűségeit tartalmazza az elkövetkező 10 napra.

Ha a változás grafikonját is meg akarjuk jeleníteni, akkor az Eredmények (Results) menüpontból kiválasztjuk a jelenítsd meg az idő szerinti



5.5. ábra. A részvényárfolyam mintapélda a) alpontjának lépésenkénti elemzőablaka



5.6. ábra. A részvényárfolyam mintapélda a) alpontja állapotainak valószínűségi változását elemző ablaka

	Time Period	Probability of State State1
1	1	0.5294
2	2	0.3374
3	3	0.4070
4	4	0.3818
5	5	0.3909
6	6	0.3876
7	7	0.3888
8	8	0.3884
9	9	0.3885
10	10	0.3885

5.7. ábra. A részvényárfolyam mintapélda a) alpontja „növekvő” állapotainak valószínűségeit tartalmazó eredménytábla

elemzés grafikonját (Show Time Parametric Analysis-Graph). A WinQSB által készített grafikont tartalmazza az 5.8. ábra.

Az 5.8. grafikonról leolvasható, hogy az árfolyam-növekedés valószínűsége az elkövetkező 5 napban nagyobb ingadozásokat mutat. Hosszabb távon látható, hogy ez a valószínűség a 0.3885 állandó értéket veszi fel. Ez természetes is, mivel az átmenet-valószínűség mátrix ergodikus tulajdonságú.

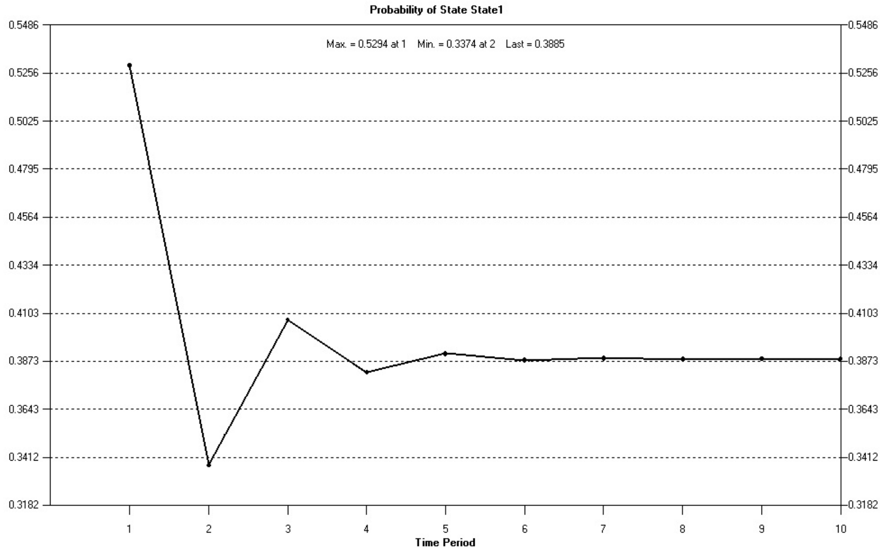
Ugyanez a vizsgálat elvégezhető a csökkenés valószínűségeinek a megállapítására is. Ebben az esetben az 5.6. ablakból a 2-es állapot valószínűségi eloszlását (Probability of State State2) választjuk ki. Az eredménytáblát az 5.10. ábra tartalmazza.

A csökkenő állapot valószínűségeinek 5.9. grafikonját hasonlóan jelenítjük meg, ahogyan az előbbiekben a növekvő állapotoknál eljártunk.

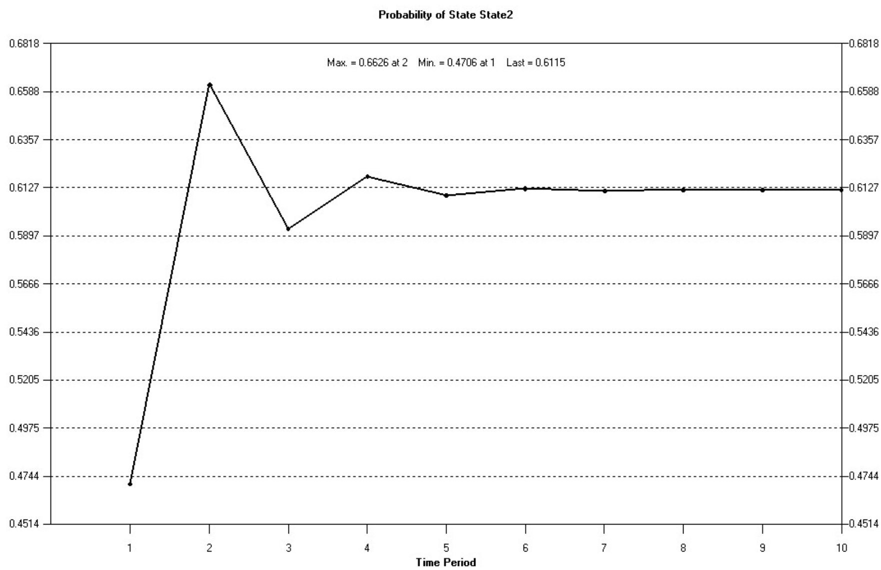
Az 5.9. grafikonról leolvasható, hogy az árfolyamcsökkenés valószínűsége az elkövetkező 5 napban nagyobb ingadozásokat mutat. Hosszabb távon látható, hogy ez a valószínűség a 0.6115 állandó értéket veszi fel.

Mivel az átmenet-mátrix ergodikus, van a folyamatnak egyensúlyi eloszlása. Amint már az 5.1. mintapélda d) alpontjában láttuk, ennek meghatározására meg kell oldani az (5.8) egyenletrendszert. A WinQSB meghatározza az egyenletrendszer megoldásait, és az eredményt az 5.11. táblában jeleníti meg, ha a síző emberke ikonra kattintunk.

Az egyensúlyi eloszlások a táblázat harmadik oszlopából (State Probability) olvashatók ki: $x = (0.3885, 0.6115)$. Ezek a számok megmutatják, hogy ha az átmenet-valószínűségi mátrix a következő időperiódusban is állandó marad, akkor hosszabb távon (7-8 nap után) annak valószínűsége,



5.8. ábra. Becslés a részvényárfolyam mintapélda a) alpontja „növekvő” állapot valószínűségeinek változására az elkövetkező 10 napban



5.9. ábra. Becslés a részvényárfolyam mintapélda a) alpontja „csökkenő” állapot valószínűségeinek változására az elkövetkező 10 napban

	Time Period	Probability of State State2
1	1	0.4706
2	2	0.6626
3	3	0.5930
4	4	0.6182
5	5	0.6091
6	6	0.6124
7	7	0.6112
8	8	0.6116
9	9	0.6115
10	10	0.6115

5.10. ábra. A részvényárfolyam mintapélda a) alpontja „csökkenő” állapotainak valószínűségeit tartalmazó eredménytábla

hogy a részvény ára nőjön, 38.85%, és annak valószínűsége, hogy csökkenjen, 61.15%. Ha megfigyeljük, ugyanezt az erdeményt mutatják az 5.8., 5.9. grafikonok, illetve a 5.7., 5.10. eredménytáblák is. Az 5.11. tábla utolsó oszlopa az $m_{11} = 2.5741$, $m_{22} = 1.6353$ várható visszatérési időket tartalmazza. Amint már az 5.1. mintapélda e) alpontjában bemutattuk, az egyensúlyi eloszlások és a várható visszatérési idők között az $m_{ii} = 1/x_i$ $(i = 1, 2)$ összefüggés áll fenn. Ezek a számok azt mutatják meg, hogy ha a mai napon az árfolyam növekedett, akkor várhatóan legközelebb 2.5741 nap múlva fog újra nőni, ha pedig az árfolyam a mai napon csökkent, akkor várhatóan legközelebb 1.6353 nap múlva fog újra csökkenni. A többi várható elérési időket, az m_{12} -t és m_{21}-t megkapjuk, ha megoldjuk az 5.1. mintapélda e) pontjában megadott (5.10) egyenletrendszert. A WinQSB meghatározza ennek az egyenletrendszernek a megoldásait is, és az eredményt az 5.12. táblában jeleníti meg, ha az Eredmények (Results) menüpont „add meg az első elérési időket” (Show First Passage Times) almenüpontjára kattintunk.

Az 5.12. táblából kiolvasható, hogy az $m_{11} = 2.5741$, $m_{12} = 1.2$, $m_{21} = 1.6353$, $m_{22} = 1.6353$. Az m_{11} és m_{22} jelentését már az előbb bemutattuk. Az m_{12} jelentése, hogy ha a mai napon az árfolyam nő, akkor várhatóan legközelebb 1.2 nap múlva fog csökkenni. Az m_{21} jelentése pedig, hogy ha a mai napon az árfolyam csökken, akkor várhatóan legközelebb 1.6353 nap múlva fog nőni.

b) A pontosabb előrejelzés érdekében tételezzük fel, hogy az utolsó két változás eredménye befolyásolja a kimenetelt. Ekkor négy állapotot vizsgálunk: NN (2 darab), NC (10 darab), CN (9 darab), CC (7 darab). A 28

	State Name	State Probability	Recurrence Time
1	State1	0.3885	2.5741
2	State2	0.6115	1.6353
	Expected	Cost/Return =	0

5.11. ábra. A részvényárfolyam mintapélda a) alpontja egyensúlyi eloszlásai és várható visszatérési idői

	From State	To State	First Passage Time
1	State1	State1	2.5741
2	State1	State2	1.2000
3	State2	State1	1.8889
4	State2	State2	1.6353

5.12. ábra. A részvényárfolyam mintapélda a) alpontja várható elérési időit tartalmazó eredménytábla

vizsgált átmenetben 2-szer fordult elő az NNC szekvencia, ami azt jelenti, hogy az $NN \to NC$ átmenet relatív gyakorisága $\frac{2}{2}$. Úgyszintén például a CNC szekvencia a sorozatban 7-szer fordul elő, ezért a $CN \to NC$ átmenet relatív gyakorisága $\frac{7}{9}$. Az átmenet-valószínűségi mátrix a következő:

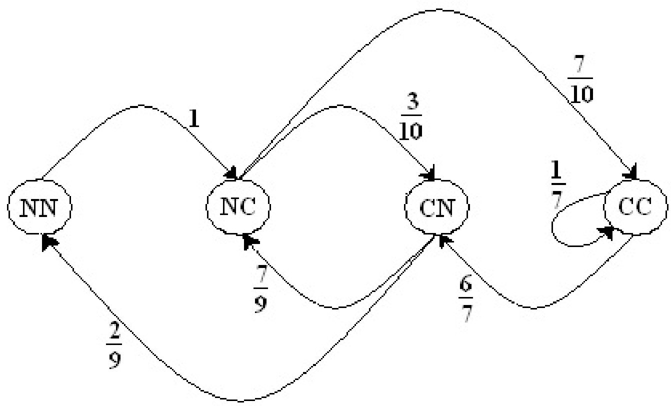
$$\begin{array}{c|cccc} & \text{NN} & \text{NC} & \text{CN} & \text{CC} \\ \hline \text{NN} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{NC} & 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ \text{CN} & \frac{2}{9} & \frac{7}{9} & 0 & 0 \\ \text{CC} & 0 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} \end{array}$$

A mátrix alapján elkészíthető átmenet-valószínűségi hálót tartalmazza az 5.13. ábra.

Tudjuk, a mai és a tegnapi napon az árfolyam csökkenő ugrást mutatott (mivel a sorozatban az utolsó két betű C). Tehát a kezdeti eloszlás

$$Q\,(0) = (0, 0, 0, 1)\,.$$

Legelőször is meg kell vizsgáljuk, hogy az átmenet-valószínűségi mátrix ergodikus-e. Az (5.13) átmenet-valószínűségi hálót elemezve láthatjuk, hogy minden állapot minden állapottal kommunikál, minden állapot visszatérő (azaz bármely állapotból ha kilépünk, vissza is tudunk jutni oda). Az ergodikusság érdekében még azt kell megnézni, hogy a P aperiodikus-e. Itt már



5.13. ábra. Az 5.2. mintapélda b) alpontjának átmenet-valószínűségi hálója

nem azonnal látszik ennek a tulajdonságnak a teljesülése, mert a mátrix soraiban vannak nulla elemek. Az elemzés érdekében számítsuk ki a P^2, P^3 mátrixokat. Azt kapjuk, hogy

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{1}{15} & \frac{7}{30} & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{7}{30} & \frac{49}{90} \\ \frac{4}{21} & \frac{2}{3} & \frac{6}{49} & \frac{1}{49} \end{pmatrix}; \; P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{7}{30} & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{15} & \frac{8}{15} & \frac{109}{700} & \frac{373}{2100} \\ \frac{7}{135} & \frac{49}{270} & \frac{8}{15} & \frac{7}{30} \\ \frac{4}{147} & \frac{2}{7} & \frac{373}{1715} & \frac{2416}{5145} \end{pmatrix}.$$

Az aperiodikusság értelmezése szerint, ha találunk egy olyan n hatványkitevőt, amelyre P^n mátrix egyetlen eleme sem nulla, akkor a P aperiodikus. A mi esetünkben P^3 egyetlen eleme sem nulla, következésképpen a P valószínűség-átmenet mátrixa aperiodikus lesz. Összegzésként kijelenthetjük, hogy a P ergodikus tulajdonságú.

A továbbiakban hasonlóan járunk el, mint az a) alpontban. A WinQSB Markov-folyamat (Markov Process) eszköztárát használva az új alkalmazás (New Problem) menüpont kiválasztásával betöltjük az eszköztár 5.3. kezdőablakát. Itt megadjuk a feladat megnevezését (Problem Title: Részvényárfolyam b) és az állapotok számát (Number of States). Ebben az esetben ez 4. Az OK gombra való kattintva megjelenik a feladathoz rendelt üres adattábla. Itt megadjuk a P átmenet-valószínűségi mátrixot, a $Q\,(0)$ kezdeti eloszlást (Initial Prob.) és az egyes állapotokhoz rendelt költséget (State Cost). A feladat kitöltött adattáblája az 5.14. ábrán látható.

From \ To	NN	NC	CN	CC
NN	0	1	0	0
NC	0	0	0.3	0.7
CN	0.22222	0.77778	0	0
CC			0.85714	0.14286
Initial Prob.	0	0	0	1
State Cost				

5.14. ábra. A részvényárfolyam mintapélda b) alpontjának adattáblája

Az állapotok megnevezéseit (State1, State2, State3, State4) könnyebben felismerjük, ha a szerkesztés (Edit) menüpont állapotok megnevezése (State Names) ablakban ezeket lecseréljük az általunk megadott (NN, NC, CN, CC) azonosítókra.

Első feladatunk meghatározni, hogy a következő napon milyen valószínűséggel fog növekedni, illetve csökkenni az árfolyam. Hasonlóan, mint az a) alpontban, a lépcső ikonra kattintva megjelenik az eszköztár elemző 5.5. ablaka. Itt beírjuk a t periódus értékét (The number of time periods from initial) mezőbe. Mivel minket a következő nap érdekel, ezért ide 1-et írunk. Az OK-ra kattintva megkapjuk a következő napi becslést. A becsült állapot valószínűségek (Resulted State Probability) oszlopának tartalma $Q(1) = (0, 0, 0.857140, 0.142860)$. Mivel jelenlegi állapotunk C, ezért minket csak a holnapi napi eloszlás, a $Q(1)$ harmadik és negyedik eleme érdekel. Tehát a CN állapot bekövetkezésének valószínűsége 0.857140, a CC állapoté 0.142860. Következésképpen a holnapi becslésünk: 85.71%-os valószínűséggel az árfolyam nőni és 14.28%-os valószínűséggel pedig csökkenni fog. Emlékezzünk, az előző alpontban, amikor csak a mai napi árfolyam alapján becsültük a holnapi árfolyamot, azt találtuk, hogy a holnapi árfolyam 52.941% valószínűséggel nőni, és 47.059% valószínűséggel pedig csökkenni fog. Látható, hogy az utolsó két napi változás eredményére alapozott becslés jóval nagyobb esélyt ad az árfolyam növekedésének.

Ha több napra előre szeretnénk becsülni, és egy előre jelző grafikont is szeretnénk készíteni, a trapézt mutató ikonra kell kattintanunk. Ekkor megjelenik az 5.6. ábrán bemutatott ablak, csak itt már négy állapot lesz felsorakoztatva. Innen sorra kiválasztjuk az állapotokat és az utolsó időpontot (Ending time period). Legyen ez a mi esetünkben 15 nap. A következő napokra kapott valószínűségi eloszlásokat az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

Nap	NN	NC	CN	CC
0	0	0	0	1
1	0	0	0.8571	0.1429
2	0.1905	0.6667	0.1225	0.0204
3	0.0272	0.2857	0.2175	0.4696
4	0.0483	0.1964	0.4882	0.2671
5	0.1085	0.4281	0.2878	0.1756
6	0.0640	0.3324	0.2789	0.3247
7	0.0620	0.2809	0.3780	0.2790
8	0.0840	0.3560	0.3235	0.2365
9	0.0719	0.3356	0.3095	0.2830
10	0.0688	0.3126	0.3433	0.2753
11	0.0763	0.3358	0.3298	0.2582
12	0.0733	0.3328	0.3220	0.2719
13	0.0716	0.3237	0.3329	0.2718
14	0.0734	0.3305	0.3301	0.2655
15	0.0734	0.3307	0.3267	0.2693

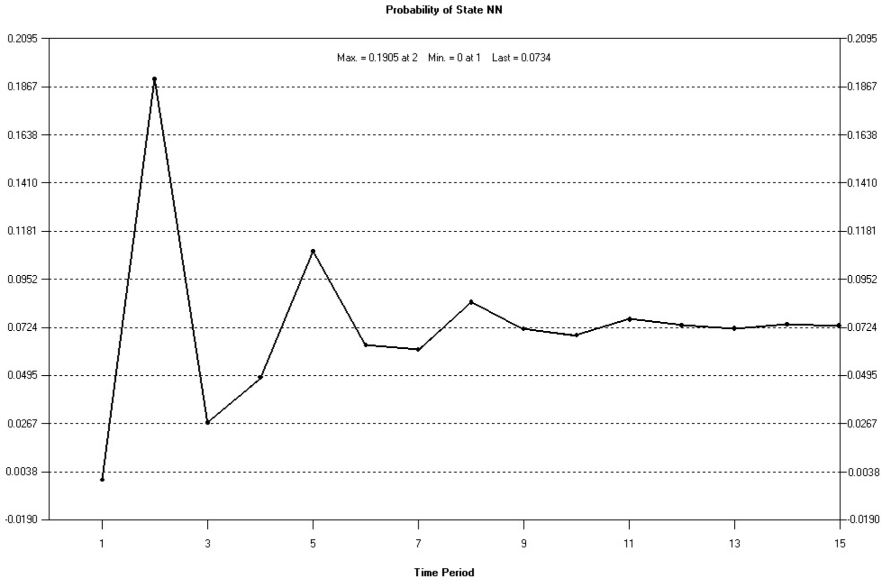
A táblázat által megadott adatok alapján a WinQSB által készített grafikonokat adják meg az 5.15., 5.16., 5.17., 5.18. ábrák.

A grafikonokról leolvasható, hogy az árfolyam állapotainak valószínűségei az elkövetkező 15 napban nagyobb ingadozásokat mutatnak, de ezután már kiegyensúlyozódnak és egy bizonyos értékhez konvergálnak. Ez természetes is, mivel a P átmenet-valószínűség mátrix ergodikus tulajdonságú.

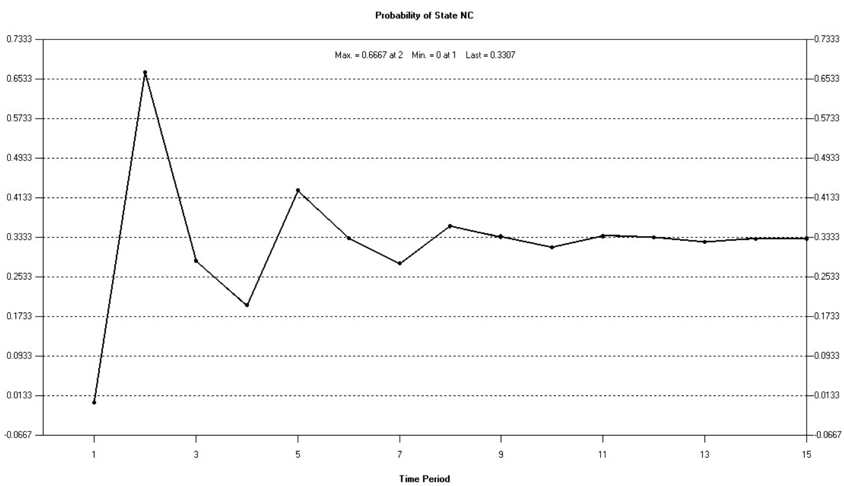
Mivel az átmenet-mátrix ergodikus, a folyamatnak van egyensúlyi eloszlása. Amint már az 5.1. mintapélda d) alpontjában láttuk, ennek meghatározására meg kell oldani az (5.8) egyenletrendszert. Ha a síző emberke ikonra kattintunk, a WinQSB kiszámítja az egyenletrendszer megoldásait, és az eredményt az 5.19. táblában jeleníti meg.

Az egyensúlyi eloszlások a táblázat harmadik oszlopából (State Probability) olvashatók ki: $x = (0.0731, 0.3291, 0.3291, 0.2678)$. Ezek a számok megmutatják, hogy ha az átmenet-valószínűségi mátrix a következő időperiódusban is állandó marad, akkor hosszabb távon annak valószínűsége, hogy a részvény árfolyama egymás után kétszer nőjön, 7.31%, hogy irányt váltson, 32.91%, és hogy egymás után két nap csökkenjen, 26.78%. Megfigyelhetjük, hogy ugyanezt az erdeményt mutatják a 5.15., 5.16., 5.17., 5.6. grafikonok illetve az összefoglaló táblázat is.

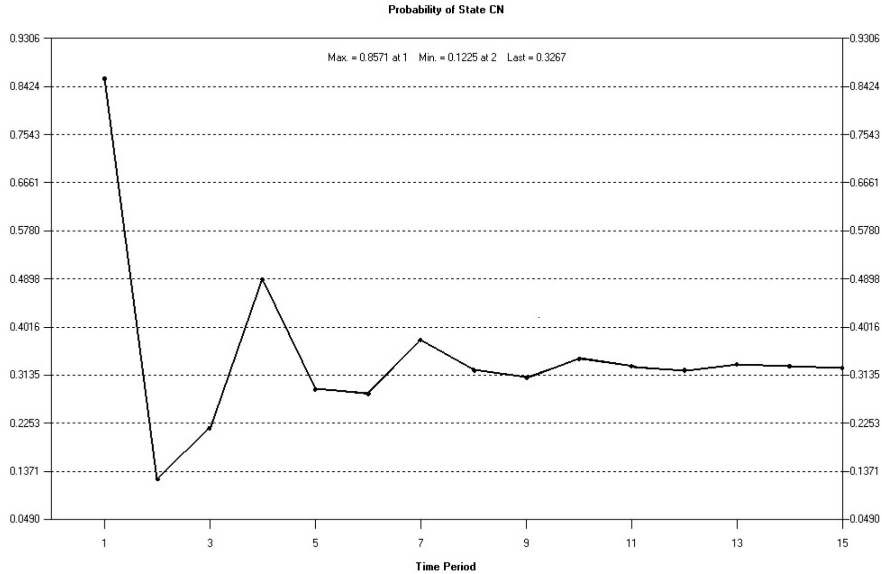
Az 5.7. tábla utolsó oszlopa (Rekurence Time) az $m_{11} = 13.6751$, $m_{22} = 3.0389$, $m_{33} = 3.0389$, $m_{44} = 3.7211$ várható visszatérési időket



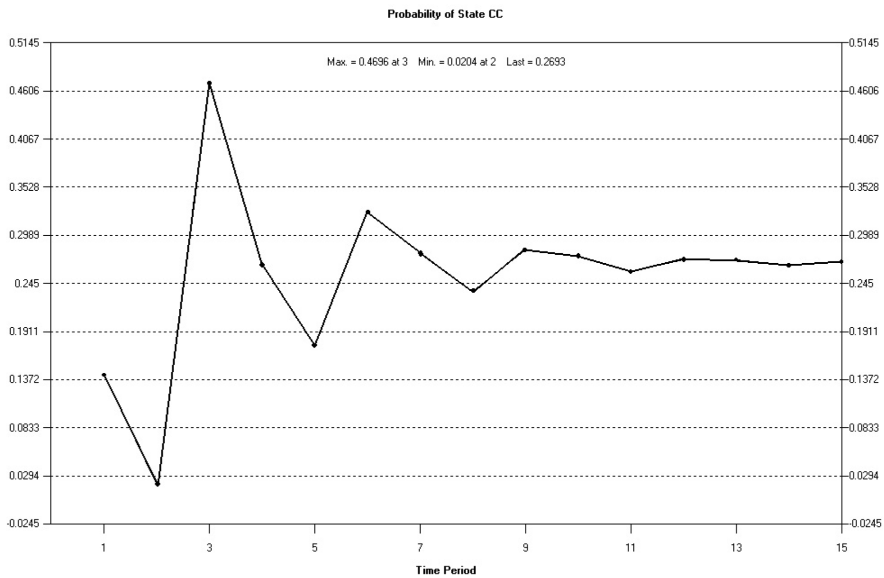
5.15. ábra. Valószínűségi becslés a részvényárfolyam NN állapotának (egymás után két nap növekszik az árfolyam) változására a következő 15 napra



5.16. ábra. Valószínűségi becslés a részvényárfolyam NC állapotának (egyik nap nő és a rákövetkező nap csökken az árfolyam) változására a következő 15 napra



5.17. ábra. Valószínűségi becslés a részvényárfolyam CN állapotának (egyik nap csökken és a rákövetkező nap nő az árfolyam) változására a következő 15 napra



5.18. ábra. Valószínűségi becslés a részvényárfolyam NN állapotának (egymás után két nap csökken az árfolyam) változására a következő 15 napra

	State Name	State Probability	Recurrence Time
1	NN	0.0731	13.6751
2	NC	0.3291	3.0389
3	CN	0.3291	3.0389
4	CC	0.2687	3.7211
	Expected	Cost/Return =	0

5.19. ábra. A részvényárfolyam mintapélda egyensúlyi eloszlásai és várható visszatérési idejei

tartalmazza. Amint már az 5.1. mintapélda e) alpontjában bemutattuk, az egyensúlyi eloszlások és a várható visszatérési idők között az $m_{ii} = 1/x_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ összefüggés áll fenn. Ezek a számok azt mutatják meg, hogy ha a tegnapi és a mai napon az árfolyam növekedett, akkor várhatóan legközelebb 13.6751 nap után fog újra egymás után kétszer növekedni. Ha az árfolyam a tegnapi napon növekedett, a mai napon pedig csökkent, akkor várhatóan legközelebb 3.0389 nap után fog újra ez az állapotváltozás lejátszódni. Ha pedig a tegnapi és a mai napon az árfolyam csökkent, akkor várhatóan legközelebb 3.7211 nap után fog újra egymás után kétszer csökkenni.

A többi várható elérési időket, az m_{12} -t, m_{13} -t, m_{14} -t, m_{21} -t, m_{23} -t, m_{24} -t, m_{31} -t, m_{32} -t, m_{34} -t, m_{41} -t, m_{42} -t és m_{43} -t megkapjuk, ha megoldjuk az 5.1. mintapélda e) pontjában megadott (5.10) egyenletrendszert. Ha az eredmények (Results) menüpont add meg az első elérési időket (Show First Passage Times) almenüpontot választjuk, akkor a WinQSB meghatározza ennek az egyenletrendszernek a megoldásait, és az eredményt az 5.20. táblában jeleníti meg.

Az m_{ii} jelentését már az előbb bemutattuk. Az m_{12} jelentése, hogy ha a tegnapi és a mai napon az árfolyam növekedett, akkor várhatóan legközelebb 1 nap múlva fog újra az árfolyam növekedni. Az m_{41} jelentése pedig, hogyha a tegnap és a mai napon az árfolyam csökkent, akkor várhatóan legközelebb 12.0251 nap múlva fog egymás után két nap növekedni.

	From State	To State	First Passage Time
1	NN	NN	13.6751
2	NN	NC	1
3	NN	CN	2.8167
4	NN	CC	2.9524
5	NC	NN	12.6751
6	NC	NC	3.0389
7	NC	CN	1.8167
8	NC	CC	1.9524
9	CN	NN	10.8585
10	CN	NC	1.2222
11	CN	CN	3.0389
12	CN	CC	3.1746
13	CC	NN	12.0251
14	CC	NC	2.3889
15	CC	CN	1.1667
16	CC	CC	3.7211

5.20. ábra. A részvényárfolyam mintapélda várható elérési időit tartalmazó eredménytábla

5.2. Elnyelő Markov-láncok

Nagyon sok érdekes alkalmazásban előfordul, hogy a Markov-lánc bizonyos állapotai elnyelőek, mások meg tranziensek. Tudjuk, hogy egy i ***elnyelő állapot***, ha $p_{ii} = 1$. Az ilyen láncot *elnyelőnek* nevezzük. Ebben az esetben, ha a rendszer tranziens állapotából indulunk ki, akkor előbb vagy utóbb elhagyja a tranziens állapotot és elnyelő állapotba jut.

5.3. mintapélda (Banki céltartalék). Egy bank jelzáloghiteleivel kapcsolatos adatokat tartalmazza az alábbi táblázat. A havi hitelszerződések állománya 5 400 000 és 6 700 000 között ingadozott a vizsgált időszak alatt. A hitelt felvevőket a következő hét kategóriába sorolták: szerződés szerint törleszti a részleteket (aktív), 30, 60 és 90 napot meghaladó késése van; a zálogjog érvényesítését kérelmezi a bank; az ingatlant a bank elárverezte. Jelzáloghitelekről lévén szó, valamennyi hitelszerződés két módon érhet véget: a teljes hitel visszafizetésével, vagy a zálogul szolgáló ingatlan elárverezésével.

	Akt.	30 n. késés	60 n. késés	90 n. késés	Zálj. érv.	Ingat. árv.	Hit. törl.
Aktív	0.97	0.01	0	0	0	0	0.02
30 nap késés	0.45	0.39	0.14	0	0	0	0.02
60 nap késés	0.21	0.22	0.28	0.27	0	0	0.02
90 nap késés	0.09	0.05	0.06	0.64	0.13	0	0.03
Zálogjog érv.	0.02	0	0	0.01	0.91	0.03	0.03
Ingatlant árv.	0	0	0	0	0	1	0
Hitel törl.	0	0	0	0	0	0	1

Felvetődő kérdések:

a) Ha egy ügyfél aktív, várhatóan hány hónap múlva kerül valamelyik végső állapotba?

b) Ha egy ügyfélnek 90 napos késése van, várhatóan hány hónap múlva kerül valamelyik végső állapotba?

c) Ha egy ügyfélnek 30 nap késése van, mi a valószínűsége, hogy az ingatlanját elárverezik?

d) A bank várható veszteségei vagy kétes követelései után a forrásoldalon ***céltartalékot*** képez eredménye terhére, amit a „veszély" elmúlásával felszabadíthat. A fenti táblázatban megadott átmeneti valószínűségekből és a jelenlegi hitelszerződéseinek a besorolásából egy bank könnyedén előre jelezheti, hogy mekkora céltartalékot kell képeznie az elkövetkező időszakokban.

A céltartalék szabályozási mechanizmusa szempontjából az alábbi tényeket kell figyelembe vegyük. Azok a követelések, melyek esetében a törlesztés késedelme nem haladja meg a 30 napot, illetve az ügylet fedezetét képező vagyontárgy nem sérült, a problémamentes kategóriába tartoznak. Míg azok a követelések, amelyek esetében 30 napot meghaladó fizetési késedelem fordul elő vagy a fedezet sérült, illetve megsemmisült, a minősített kategóriák egyikébe sorolandók. A bankok minősített kihelyezés állománya, a fent említett szempontok alapján négy kategóriába sorolhatók:

– figyelendő, magába foglalja a 30 napos késést;
– átlag alatti, magába foglalja a 60 napos késést;
– kétes, magába foglalja a 90 napos késést;
– rossz, magába foglalja a zálogjog-érvényesítést és az ingatlanárverezést.

A vonatkozó jogszabályok az egyes kategóriákra az értékvesztés, illetve a céltartalék nagyságára vonatkozóan minimum és maximum értékeket határoznak meg. A szabályozás alapján

– figyelendő minősítésű állomány után az állomány legalább 10%-ának;
– az átlag alatti állomány esetében legalább az állomány 30%-ának;
– a kétes minősítésű állomány után legalább az állomány 50%-ának;
– a rossz minősítésű állomány után legalább az állomány 70%-ának

megfelelő céltartalékot kell képezzen a bank.

Ha a bank jelenlegi 1 milliárd dollár nagyságú hitelszerződéseinek eloszlása: aktív 80%, 30 nap késés 10%, 60 nap késés 5%, 90 nap késés 3%, zálogjog-érvényesítés 2%, határozzuk meg az elkövetkező egyéves időszakra a bank minimális céltartalékát.

Megoldás. Látható, hogy az átmenet mátrixnak $M = 2$ elnyelő (ingatlan árv., illetve hitel törl.) állapota és $N - M = 5$ tranziens állapota (aktív, 30 napos késés, 60 napos késés, 90 napos késés, zálogjog érv.) van.

Általában egy olyan láncot, amelynek M darab elnyelő állapota van úgy rendezünk, hogy az első $N - M$ sorban, illetve oszlopban a tranziens állapotokat tüntetjük fel, az utolsó M sorban, illetve oszlopban pedig az elnyelő állapotokat. Így az elnyelő lánc átmenet-valószínűségi mátrixa a következőképpen osztható fel:

$P =$

	$N - M$ oszlop	M oszlop
$N - M$ sor	Q	R
M sor	0	I_M

Példánkban az átmenet-valószínűségi mátrix komponensei:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.97 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0.45 & 0.39 & 0.14 & 0 & 0 \\ 0.21 & 0.22 & 0.28 & 0.27 & 0 \\ 0.09 & 0.05 & 0.06 & 0.64 & 0.13 \\ 0.02 & 0 & 0 & 0.01 & 0.91 \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 \\ 0 & 0.03 \\ 0.03 & 0.03 \end{bmatrix},$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az elnyelő Markov-láncokra az alábbi kérdéseket tehetjük fel:

1. kérdés. Egy adott tranziens állapotból indulva a lánc mennyi időt tölt egy másik tranziens állapotban, mielőtt elnyelődne?

Válasz. Jelölje W_{ij} azt, hogy i tranziens állapotból indulva a Markov-lánc várhatóan mennyi időt tölt a j tranziens állapotban, mielőtt elnyelődne, és jelölje $W_{ij}(n)$-el azt, hogy i tranziens állapotból indulva a Markov-lánc várhatóan mennyi időt tölt a j tranziens állapotban n lépés alatt. Az elérési időre vonatkozó (5.8) egyenletrendszer mátrixos formája alapján

$$W(n) = I_{N-M} + Q \cdot W(n-1),$$

ahol I_{N-M} az $N-M$-ed rendű egységmátrix. Felhasználva, hogy az átmeneti állapotok mind tranziensek, és azt, hogy

$$\lim_{n\to\infty} W(n) = W$$

kapjuk, hogy

$$W = I_{N-M} + Q \cdot W.$$

Ahonnan

$$W = (I_{N-M} - Q)^{-1}.$$

Tehát válaszunk a kérdésre: ha kezdetben az i-edik tranziens állapotban vagyunk, akkor az elnyelést megelőzően a j-edik tranziens állapotban a rendszer

$$(I_{N-M} - Q)^{-1}$$

mátrix i-edik sorának j-edik oszlopában levő szám által megadott ideig fog tartózkodni. Ezt felhasználva kapjuk, hogy a lánc várhatóan a

$$q(0) \cdot (I_{N-M} - Q)^{-1}$$

sormátrix j-edik eleme által megadott értékben látogatja meg a j-edik állapotot, mielőtt elnyelődne, ahol $q(0)$ a lánc kezdeti $Q(0)$ eloszlásának első $N-M$ elemét tartalmazó sormátrix.

A $W = (I_{N-M} - Q)^{-1}$ mátrixot a Markov-lánc ***fundamentális mátrixának*** nevezik. Általában az $I_{N-M} - Q$ nem invertálható, de bizonyítható, hogy ha Q minden sorösszege szigorúan kisebb mint 1, akkor az $I_{N-M} - Q$ invertálható lesz.

2. kérdés. Ha a lánc egy adott tranziens állapotban van, mi a valószínűsége, hogy a k-adik elnyelő állapotba kerüljön? Ezek az ***elnyelődési valószínűségek (hitting probabilities)***.

Válasz. Jelöljük U_{ik}-val annak valószínűségét, hogy i tranziens állapotból indulva a Markov-lánc a k-adik elnyelő állapotba érkezik, azaz

$$U_{ik} = P(X_n = k \mid X_0 = i),$$

ahol $i = \overline{1, N-M}$, $k = \overline{1, M}$. Az elérési időre vonatkozó (5.8) egyenletetrendszer mátrixos formája alapján

$$U = R + Q \cdot U.$$

Ahonnan

$$U = (I_{N-M} - Q)^{-1} * R.$$

Tehát válaszunk a kérdésre: ha kezdetben az i-edik tranziens állapotban vagyunk, akkor annak valószínűsége, hogy a k-adik elnyelő állapotba kerüljön a rendszer, az

$$U = (I_{N-M} - Q)^{-1} R$$

mátrix i-edik sorának k-adik oszlopában levő szám értéke adja meg.

A mi esetünkben $N = 7$, $M = 2$ és

$$I_{N-M} - Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.97 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0.45 & 0.39 & 0.14 & 0 & 0 \\ 0.21 & 0.22 & 0.28 & 0.27 & 0 \\ 0.09 & 0.05 & 0.06 & 0.64 & 0.13 \\ 0.02 & 0 & 0 & 0.01 & 0.91 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.03 & -0.01 & 0 & 0 & 0 \\ -0.45 & 0.61 & -0.14 & 0 & 0 \\ -0.21 & -0.22 & 0.72 & -0.27 & 0 \\ -0.09 & -0.05 & -0.06 & 0.36 & -0.13 \\ -0.02 & 0 & 0 & -0.01 & 0.09 \end{bmatrix}$$

A $W = (I_{N-M} - Q)^{-1}$ fundamentális mátrixot az Excel táblázatkezelővel számítjuk ki:

$$W = (I_{N-M} - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 48.134 & 0.866 & 0.180 & 0.141 & 0.203 \\ 44.402 & 2.597 & 0.540 & 0.422 & 0.61 \\ 38.749 & 1.389 & 1.775 & 1.387 & 2.003 \\ 29.713 & 0.915 & 0.448 & 3.244 & 4.686 \\ 13.998 & 0.294 & 0.09 & 0.392 & 11.677 \end{bmatrix}.$$

Tehát az a) pontban megfogalmazott kérdésre a válasz kiolvasható a W mátrix első sorából:

- $W_{11} = 48.134$: egy aktív ügyfél várhatóan 48.134 hónapot aktív ügyfél is marad;
- $W_{12} = 0.866$: egy aktív ügyfél várhatóan 0.866 hónapot a 30 napos késési állapotba kerül;
- $W_{13} = 0.18$: egy aktív ügyfél várhatóan 0.18 hónapot a 60 napos késési állapotba kerül;
- $W_{14} = 0.141$: egy aktív ügyfél várhatóan 0.141 hónapot a 90 napos késési állapotba kerül;
- $W_{15} = 0.203$: egy aktív ügyfél várhatóan 0.203 hónapot a zálogjog-érvényesítés állapotba kerül

mielőtt visszafizetné hitelét, vagy ingatlanját elárvereznék. Tehát várhatóan egy aktív ügyfél

$$48.134 + 0.866 + 0.180 + 0.141 + 0.203 = 49.524$$

hónap múlva kerül valamelyik végső állapotba.

A **b)** pontban megfogalmazott kérdésre a válasz hasonlóan adható meg, mint az aktív ügyfél esetében, csak ebben az esetben a W mátrix negyedik sorának elemeit kell összeadjuk. Tehát egy 90 napos késéssel rendelkező ügyfél várhatóan

$$29.713 + 0.915 + 0.448 + 3.244 + 4.686 = 39.006$$

hónap múlva kerül valamelyik végső állapotba.

A **c)** pontban megfogalmazott kérdésre a választ megadhatjuk, ha tekintjük az

$$
\begin{aligned}
&(I_{N-M} - Q)^{-1} \cdot R = \\
&= \begin{bmatrix} 48.134 & 0.866 & 0.180 & 0.141 & 0.203 \\ 44.402 & 2.597 & 0.540 & 0.422 & 0.61 \\ 38.749 & 1.389 & 1.775 & 1.387 & 2.003 \\ 29.713 & 0.915 & 0.448 & 3.244 & 4.686 \\ 13.998 & 0.294 & 0.09 & 0.392 & 11.677 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 \\ 0 & 0.03 \\ 0.03 & 0.03 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.006 & 0.994 \\ 0.018 & 0.982 \\ 0.06 & 0.94 \\ 0.141 & 0.859 \\ 0.35 & 0.65 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

mátrix második sorát. A második sor első eleme megmutatja, hogy mi a valószínűsége, hogy egy 30 napos késéssel rendelkező ügyfél ingatlanját elárverezik (1.8%), a második eleme pedig, hogy az ügyfél a hitelét törleszti (98.2%).

A **d)** pontban kitűzött feladat megoldása érdekében először megadjuk a kezdeti eloszlást, és megvizsgáljuk, hogy az elkövetkező 5 évben hogyan alakul a hitelszerződések aránya. A kezdeti eloszlás

$$Q(0) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.05 & 0.03 & 0.02 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A számítást WinQSB Markov Process eszköztárának segítségével végezzük. Új alkalmazás (New Problem) menüpont kiválasztásával betöltjük az eszköztár 5.3. ablakát. Itt megadjuk a feladat megnevezését (Problem Title) és az állapotok számát (Number of States). Ez a jelen esetben 7. Az OK gombra kattintva megjelenik az 5.4. adatbeviteli ablak. Itt megadjuk a P átmenet-valószínűségi mátrixot, a $Q(0)$ kezdeti eloszlást (Initial Prob.), valamint az állapotköltségeket (State Cost).

A céltartalékot az első hónapra a mintapélda d) pontjában megadott szabályozás alapján számítjuk ki. Jelenleg az 1 milliárd dollár így oszlik meg:

- aktív hitel: $0.8 * 1$ milliárd dollár $= 800$ millió dollár;
- 30 napos késés: $0.1 * 1$ milliárd dollár $= 100$ millió dollár;
- 60 napos késés: $0.05 * 1$ milliárd dollár $= 50$ millió dollár;
- 90 napos késés: $0.03 * 1$ milliárd dollár $= 30$ millió dollár;
- zálogjog-érvényesítés: $0.02 * 1$ milliárd dollár $= 20$ millió dollár.

Ezek alapján a céltartalék megoszlása:

- aktív hitel: 0;
- 30 napos késés: $0.1 * 100$ millió dollár $= 10$ millió dollár;
- 60 napos késés: $0.3 * 50$ millió dollár $= 15$ millió dollár;
- 90 napos késés: $0.5 * 30$ millió dollár $= 15$ millió dollár;
- zálogjog-érvényesítés: $0.7 * 20$ millió dollár $= 14$ millió dollár.

Tehát a következő hónapra $R(0) = 10 + 15 + 15 + 14 = 54$ millió dollárt kell céltartalékként képezni.

Ha több hónapra előre szeretnénk becsülni, akkor kitöltjük az állapotköltségek (State Cost) mezőket a megadott céltartalék-arányszámokkal. Az így kapott adattáblát az 5.21. ábra mutatja.

A trapéz ikonra kattintva megjelenik az 5.6. ábrán bemutatott ablak, csak itt már hét állapot lesz felsorakoztatva. Innen sorra kiválasztjuk az állapotokat, a költségeket és az utolsó időpontot (Ending time period). Ez

From \ To	Aktiv	30 nap	60 nap	90 nap	zalogjog	ingatlan arv.	hitel torl
Aktiv	0.97		0	0	0	0	0.02
30 nap	0.45	0.39	0.14	0	0	0	0.02
60 nap	0.21	0.22	0.28	0.27	0	0	0.02
90 nap	0.09	0.05	0.06	0.64	0.13	0	0.03
zalogjog	0.02	0	0	0.01	0.91	0.03	0.03
ingatlan arv.	0	0	0	0	0	1	0
hitel torl	0	0	0	0	0	0	1
Initial Prob.	0.8	0.1	0.05	0.03	0.02	0	0
State Cost	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.7	0

5.21. ábra. A banki céltartalék mintapélda adattáblája

State	Initial State Probability	Resulted State Probability
Aktiv	0	
30 nap	0	
60 nap	0	
90 nap	1	
zalogjog	0	
ingatlan arv.	0	
hitel torl	0	

The number of time periods from initial: 0

Expected cost or return:

OK | Next Period | Steady State

Cancel | Print | Help

5.22. ábra. A banki céltartalék mintapélda elemző ablaka a mi esetünkben 12 hónap. A kapott előrejelzéseket kéttizedes pontossággal az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

Hó.	Az 1 milliárdos hitelkeret százalékos eloszlása							Céltart. (millió dollár)
	Akt.	30 n. késés	60 n. késés	90 n. késés	Zálj. érv.	Ingat. árv.	Hit. törl.	
0	80.0	10	5	3	2	0	0	54
1	83.46	5.95	2.98	3.29	2.21	0.06	2.05	47.2
2	84.60	3.98	1.86	2.93	2.44	0.13	4.06	42.2
3	84.55	2.95	1.25	2.40	2.60	0.20	6.03	38.3
4	83.88	2.39	0.91	1.90	2.68	0.28	7.96	35.3
5	82.86	2.07	0.70	1.49	2.69	0.36	9.84	32.9
6	81.64	1.86	0.58	1.17	2.64	0.44	11.68	31.0
7	80.30	1.73	0.49	0.93	2.55	0.52	13.47	29.4
8	78.91	1.63	0.44	0.75	2.44	0.59	15.23	28
9	77.49	1.56	0.40	0.62	2.32	0.67	16.94	26.8
10	76.05	1.50	0.37	0.53	2.19	0.74	18.62	25.8
11	74.61	1.45	0.34	0.46	2.07	0.80	20.26	24.9
12	73.18	1.41	0.33	0.41	1.94	0.86	21.86	24.1

Megjegyezzük, hogy a c) pontban kért valószínűségeket a WinQSB segítségével is meghatározhatjuk. Példának okáért számítsuk ki annak valószínűségét, hogy egy 90 napos késéssel rendelkező ügyfél 12 hónapon belül mekkora valószínűséggel kerül az egyik vagy a másik végső állapotba. Ennek érdekében az előző pontban megadott 5.21. adattáblának a kezdeti valószínűségi eloszlás (Initial Prob.) sorát az alábbi kezdő sorvektorral töltjük fel:

$$Q(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A lépcső ikonra kattintva megjelenik az eszköztárelemző 5.22. ablaka. Itt beírjuk a kezdő hónap számát a „The number of time periods from initial" mezőbe. Legyen a kiindulási érték 0. A „Következő időszak" (Next Period) gombra kattintva lépdelhetünk tovább. Így az „ingatlan árv.", illetve „hitel törl." mezőkben megkapjuk, hogy mi a valószínűsége annak, hogy a „The number of time periods from initial" mezőben megjelenő hónapig a rendszer a két állapot valamelyikébe érjen.

Ezen valószínűségeket foglaljuk össze az alábbi táblázatban:

Hó.	Az állapotok valószínűségei háromtizedes pontossággal						
	Akt.	30 n. késés	60 n. késés	90 n. késés	Zálj. érv.	Ingat. árv.	Hit. törl.
0	0	0	0	1	0	0	0
1	0.090	0.050	0.06	0.64	0.13	0	0.03
2	0.183	0.066	0.062	0.427	0.202	0.04	0.57
5	0.370	0.043	0.031	0.144	0.259	0.0250	0.128
10	0.456	0.016	0.008	0.031	0.204	0.061	0.223
12	0.459	0.013	0.005	0.019	0.176	**0.073**	**0.256**
1000	0	0	0	0	0	**0.141**	**0.859**

A táblázat 12. hónapra vonatkozó sorából kiolvasható: annak valószínűsége, hogy egy 90 napos késéssel rendelkező ügyfél ingatlanját 12 hónapon belül elárverezzék, 7.3%, és a hitelét törlessze 25.6%.

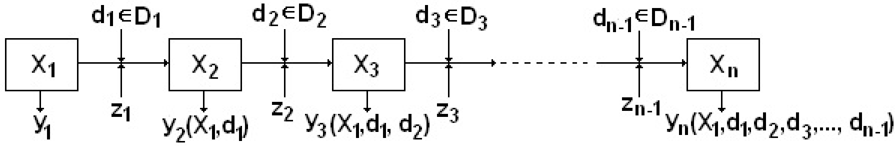
Ha hosszabb periódust választunk, mondjuk 1000 hónapot, akkor visszakapjuk a feladat c) pontjában kapott $(I_{N-M} - Q)^{-1} \cdot R$ mátrix negyedik sorát. Tehát annak valószínűsége, hogy egy 90 napos késéssel rendelkező ügyfél ingatlanját elárverezzék, 14.1%, és a hitelét törlessze, 85.9%.

5.3. Markov döntési folyamatok

A $H = \{1, 2, ..., N\}$ ***állapottérrel rendelkező*** Markov-folyamatot gazdasági természetűvé tesszük, ha az egyes állapotokhoz vagy átmenetekhez bizonyos összeget (nyereséget) rendelünk. A jutalmat az állapotok esetén y_i-vel ($i = \overline{1, N}$), az átmenet esetén z_{ij}-vel jelöljük ($i, j = \overline{1, N}$). Az $Y = (y_1, y_2, ..., y_N)$ vektor elemei, illetve a $Z = (z_{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$ mátrix elemei az állapotokhoz, illetve átmenetekhez tartozó profitokat (vagy veszteségeket) adják meg.

A Markov-folyamat profitok sorozatát generálja, miközben állapotról állapotra változik. Tehát a profit maga is valószínűségi változó, amelynek eloszlása a kezdeti állapottól, illetve az átmenet-valószínűségi mátrix elemeitől függ. Az olyan Markov-láncot, amelyhez nyereséget rendeltünk, a gazdasági és műszaki élet számos területén jól használható modellnek tekinthetjük. Ilyen modellt mutat be az 5.1. mintapélda f) alpontja és az 5.3. mintapélda d) alpontja.

Ebben a részben azt vizsgáljuk, hogy ha az állapotok közötti átmenet egy döntéstől is függ, akkor a döntéshozó milyen döntéseket kell meghozzon,



5.23. ábra. A Markov döntési folyamat diagramja

hogy várható profitját maximalizálja, illetve várható veszteségét minimalizálja.

A profitot vagy a veszteséget (költséget) diszkontálhatjuk (jelenértékesíthetjük), ha feltételezzük, hogy a következő időszakban megszerzett 1 euró értéke megegyezik λ (általában $0 < \lambda < 1$) jelenlegi időszakban megszerzett euró értékével. A λ–t ***diszkontálási*** (***értékvesztési***) ***tényezőnek*** nevezik.

Egy ilyen döntési folyamat az 5.23. ábrán megadott diagrammal szemléltethető. A diagramon az

– X_t : a t-edik időszakban a rendszer állapotát megadó valószínűségi változó. Az X_t egy olyan N-elemű vektor, amelynek minden eleme 0 és 1 közötti szám, és az elemek összege 1, és azt mutatja meg, hogy a t-edik időszakban a rendszer milyen valószínűséggel van az egyes állapotokban;
– X_1 : kezdeti állapot;
– D_t : a t-edik időszak végén meghozható döntések véges halmaza;
– d_t : a t-edik időszak végén meghozott döntés;
– $y_t(X_1, d_1, ..., d_{t-1})$: a t-edik időszakban megszerezhető ***várható diszkontált jutalom*** (profit vagy veszteség), ha kezdeti állapot X_1 és a t-edik időszak előtti döntések sorozata $d_1, d_2, ..., d_{t-1}$;
– z_t : a t-edik döntés meghozatalának jutalma (költsége vagy jövedelme).

A $d_1, d_2, ..., d_n$ döntési sorozatot ***stratégiának*** vagy ***politikának*** nevezzük. Ha a Markov-láncot n hosszúságú időszakban vizsgáljuk, és minden állapotban m számú lehetséges döntés közül választhatunk (a $D_1, D_2, ..., D_{n-1}$ döntési halmaz valamelyik elemét), akkor m^{n-1} lehetséges politika létezik. Az a ***stratégia optimális***, amely maximalizálja a várható összes diszkontált nyereséget, vagy minimalizálja a várható összes diszkontált veszteséget.

Legtöbbször a döntéshozó hosszabb időhorizontra tervez (n több mint tíz periódus hosszú), vagy bonyolult számára, hogy pontosan megállapítsa az időhorizont megfelelő hosszát. Ilyenkor általában azt feltételezik, hogy az időhorizont végtelen. Ebben az esetben, ha y az a maximális jutalom, ami egyetlen időszakban megszerezhető, akkor a ***maximális várható diszkontált jutalom*** :

$$y + y\lambda + y\lambda^2 + ... + y\lambda^n + ... = \frac{y}{1-\lambda}.$$

Elvben a t időpontbeli döntés felhasználhatná az összes addigi információt, vagyis a rendszer egész addigi történelmét, amely az X_1, d_1, ..., X_t, d_t állapotokból és döntésekből áll. Azonban a gyakorlatban előforduló legtöbb esetben elegendő azon stratégiákat tekinteni, amelyben t pillanatbeli döntés csak az X_t állapottól függ. Ekkor a stratégia nem más, mint egy szabály, amely előírja a döntést, amikor a rendszer az i állapotban van. Ez a leírás feltételezi, hogy ha a rendszer az i állapotban van, akkor a döntés ugyanaz bármely t időpillanatban. Az ilyen stratégiát ***stacionáriusnak*** nevezzük. Ebben az esetben, ha a rendszer t időpontban az i állapotban van, és a $d_t \in D_t$ döntést választottuk, akkor a rendszer a j állapotba a

$$p_{ij}(d_t) = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i, d_t)$$

valószínűséggel megy át. Ez az összefüggés azt mutatja meg, hogy az átmenet-valószínűségek csak a jelenlegi X_t állapottól és a d_t döntéstől függnek, és nem függnek az ezt megelőző döntésektől, illetve állapotoktól.

Egy β-val jelölt ***determinisztikus stacionárius stratégia*** egy szabály, amely előírja a $d_i(\beta)$ döntést, ha a rendszer az i állapotban van. Tehát a β-át a

$$(d_1(\beta), d_2(\beta), ..., d_m(\beta))$$

vektor jellemzi. Mátrixos alakban a β-át így adhatjuk meg:

Állapot	Döntések			
	1	2	$\cdots$	m
1	$d_{11}(\beta)$	$d_{12}(\beta)$	$\cdots$	$d_{1m}(\beta)$
2	$d_{21}(\beta)$	$d_{22}(\beta)$	$\cdots$	$d_{2m}(\beta)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
N	$d_{N1}(\beta)$	$d_{N2}(\beta)$	$\cdots$	$d_{Nm}(\beta)$

ahol $d_{ij}(\beta) \in \{0, 1\}$, ha a $d_{ij}(\beta) = 1$, akkor az i állapothoz j döntés tartozik, és minden sornak az összege 1. Ha a feladatot lineáris programozási modell segítségével oldjuk meg, akkor előfordulhat, hogy a megoldások nem kimondottan 0 vagy 1, hanem 0 és 1 közötti számok. A stratégia fogalmának kiterjesztésével megszüntethetjük ezt a kényelmetlenséget.

A stratégia egy másik megfogalmazása szerint az i állapotban a döntés valószínűségi változóként is megadható. Ekkor a $d_{ij}(\beta) \in [0,1]$ azt mutatja meg, hogy mi a valószínűsége annak, hogy az i állapotban a j döntést hozzuk. Egy ilyen stratégiát ***sztochasztikusnak*** nevezünk. Az i állapotban hozható döntés valószínűségi eloszlása

$$d_i(\beta) = \begin{pmatrix} d_{i1}(\beta) & d_{i2}(\beta) & \cdots & d_{im}(\beta) \end{pmatrix}.$$

Az optimális stratégia meghatározására a gyakorlatban leggyakrabban a stratégiaiteráció, lineáris programozás, illetve az értékiteráció módszerét szokták alkalmazni. Mi a továbbiakban a lineáris programozás módszerét alkalmazzuk.

5.4. mintapélda (Kertészet). Tételezzük fel, hogy egy nagyobb kertészeti termőterület az 1. állapotban (nedves) van, ha a terület az előző héten kapott esőt kellő mennyiségben, a 2. állapotban (gyengén nedves) van, ha nem kapott kellő mennyiségű vizet az előző héten, és 3. állapotban (száraz), ha egyáltalán nem kapott vizet az előző héten.

Ha a kertészet állapota csak a csapadéktól függ, akkor legyen az egyes állapotváltozások átmenet-valószínűségi mátrixa:

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Itt most $p_{11} = 0.3$ annak a valószínűsége, hogy a kertészeti terület egyik hétről a másikra nedves állapotban marad, a $p_{12} = 0.5$ annak valószínűsége, hogy a terület nedves állapotból gyengén nedves állapotba megy át egyik hétről a másikra, stb. Az egyes állapotokban a kertészet által megtermelt heti bevétel: 1. állapot 100 euró, 2. állapot 80 euró, 3. állapot 10 euró. Miután a hét elején megfigyeltük a termőterület állapotát, lehetőségünk van egy kisebb méretű és egy nagyobb méretű öntözés elvégzésére 50 euró, illetve 80 euró költség fejében. A nagyobb öntözés után a terület nedves állapotba, kisebb öntözés után pedig a szárazból gyengén nedves, illetve a gyengén nedvesből nedves állapotba kerül.

a) Mekkora a várható diszkontált jutalom a β_1

Állapot	Döntések		
	Nincs öntözés	Kisebb öntözés	Nagyobb öntözés
1	1	0	0
2	0	0	1
3	0	0	1

determinisztikus stacionárius stratégiának, ha a diszkontálási tényező (értékvesztési tényező) $\lambda = 0.99$?

b) Mekkora a várható diszkontált jutalom a β_2

Állapot	Döntések		
	Nincs öntözés	Kisebb öntözés	Nagyobb öntözés
1	1	0	0
2	0.5	0.3	0.2
3	0.3	0.4	0.3

sztochasztikus stratégiának, ha a diszkontálási tényező (értékvesztési tényező) $\lambda = 0.99$?

c) Határozzuk meg a maximális várható diszkontált jutalmat és azt a döntési stratégiát, amellyel ez meg is valósítható, ha a diszkontálási tényező (értékvesztési tényező) $\lambda = 0.99$.

Megoldás. A lehetséges állapotok: $H = \{$ 1 – nedves, 2 – gyengén nedves, 3 – száraz$\}$.

A lehetséges döntések halmazai:

$$D_1 = D_2 = D_3 = \{\text{nincs öntözés, kisebb öntözés, nagyobb öntözés}\}.$$

A feladat C jutalom-mátrixa:

Állapot	Nincs öntözés	Kisebb öntözés	Nagyobb öntözés
1	100	$100 - 50 = 50$	$100 - 80 = 20$
2	80	$80 - 50 = 30$	$80 - 80 = 0$
3	10	$10 - 50 = -40$	$10 - 80 = -70$

a) A β_1 döntés megváltoztatja az átmenet-valószínűségi mátrixot. Nagyobb öntözés után a termőterület mindig az 1-es állapotba kerül. Az átmenet-valószínűségi mátrix:

$$P_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek az átmeneti mátrixnak az egyensúlyi eloszlása $x_1 = (0.588, 0.294, 0.118)$. Feltételezve, hogy az átmeneti valószínűségek hosszabb távon fennmaradnak, azt tapasztaljuk, hogy ezt a politikát használva, az idő 58.8%-ában a termőterület nedves, 29.4%-ában gyengén nedves és 11.8%-ában száraz lesz. Hosszú távra tervezve az n-edik lépésben a ***diszkontált jutalmat*** az

$$y_i^n(\beta) = C_{ik} + \lambda \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(\beta)\, y_j^{n-1}(\beta)$$

rekurzív összefüggéssel számíthatjuk ki, ahol, $y_\beta^n(i)$ az i-edik állapotból induló rendszer várható összes diszkontált jutalma n periódus alatt, C_{ik} pedig az i-edik állapotban meghozott j döntés jutalma a β politikában. Ha n tart a végtelen felé, akkor határértékre térve, az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$y_i(\beta) = C_{ik} + \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(\beta)\, y_j(\beta),$$

ahol $y_i(\beta)$ úgy fogható fel, mint a ***hosszú távú várható összes diszkontált jutalom.***

A feladat tulajdonképpen az, hogy meg kell határozni az egyes állapotok $y_i(\beta_1)$ várható diszkontált jutalmait minden $i = 1, 2, 3$ állapotra. A P_{β_1} mátrix alapján látható, hogy a termőterület az 1-es állapotba háromféle módon kerülhet: vagy a heti esőzésnek köszönhetően, ennek a valószínűsége 0.3, vagy az öntözésnek köszönhetően. Két esetben öntözünk, ha a terület gyengén nedves (valószínűsége 0.5), vagy pedig száraz (valószínűsége 0.2). Ekkor az 1-es állapot jutalma:

$$y_1(\beta_1) = 100 + 0.99\,[0.3y_1(\beta_1) + 0.5y_2(\beta_1) + 0.2y_3(\beta_1)].$$

Az egyenlet megértéséhez tegyük fel, hogy az 1-es állapotban és az 1. hét végén vagyunk. Ekkor az 1-es állapotban megszerezhető várható diszkontált jutalom a jelenlegi állapot jutalmából (ez a mi esetünkben 100 euró) és a második időszaktól kezdődően megszerezhető várható diszkontált jutalmakból tevődik össze (ez a mi esetünkben $y_1(\beta_1)$ – nedves állapot vagy $y_2(\beta_1)$ – gyengén nedves állapot vagy $y_3(\beta_1)$ – száraz állapot várható diszkontált jutalmai). Mivel ez várható érték, a jutalmakat szorozzuk a bekövetkezések valószínűségével és az egyik időszakról a másikra való áttérés értékvesztési tényezőjével.

Teljesen hasonlóan járunk el az $y_{\beta_1}(2)$-re és az $y_{\beta_1}(3)$-ra vonatkozó egyenletek esetén is:

$$
\begin{aligned}
y_2(\beta_1) &= 80 - 80 + 0.99 y_1(\beta_1), \\
y_3(\beta_1) &= 10 - 80 + 0.99 y_1(\beta_1).
\end{aligned}
$$

Az egyszerűség kedvéért bevezetjük az $y_1 = y_1(\beta_1)$, $y_2 = y_2(\beta_1)$, $y_3 = y_3(\beta_1)$ jelöléseket. Tehát az egyes állapotok várható diszkontált jutalmainak a meghatározása visszavezetődik az

$$
\begin{cases}
y_1 = 100 + 0.99\,[0.3y_1 + 0.5y_2 + 0.2y_3] \\
y_2 = 80 - 80 + 0.99 y_1 \\
y_3 = 10 - 80 + 0.99 y_1
\end{cases}
$$

egyenletrendszer megoldására. Az egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ -70 \end{bmatrix} + 0.99 \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \tag{5.11}
$$

és megoldása $y_1(\beta_1) = 5088$, $y_2(\beta_1) = 5037.1$, $y_3(\beta_1) = 4967.1$. Tehát hosszú távon a β_1 stratégia alkalmazása esetén a várható diszkontált nyereség

$$
z(\beta_1) = y_1(\beta_1) + y_2(\beta_1) + y_3(\beta_1) = 15092.2 \text{ euró}
$$

Az (5.11)-et a β_1 politikához rendelt ***értékmeghatározó egyenletrendszernek*** nevezzük. Ez általános esetben, a β politika esetén így írható:

$$
\begin{bmatrix} y_1(\beta) \\ y_2(\beta) \\ \vdots \\ y_N(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} + \lambda P_\beta \begin{bmatrix} y_1(\beta) \\ y_2(\beta) \\ \vdots \\ y_N(\beta) \end{bmatrix}, \tag{5.12}
$$

ahol $y_i(\beta)$ az i-edik állapot hosszú távú várható diszkontált jutalma, r_i az i-edik állapot nyeresége, z_i az i-edik állapotban meghozott $d_i(\beta)$ döntés költsége

$$
z_i = \sum_{j=1}^{m} d_{ij}(\beta)\, z_{ij},
$$

ahol z_{ij} az i-edik állapotban meghozott $d_{ij}(\beta)$ döntés költsége, λ a diszkontálási tényező és P_β a β stacionárius stratégiához tartozó átmenet-valószínűségi mátrix. A hosszú távú (végtelen horizontú) összjutalom:

$$z(\beta) = y_1(\beta) + y_2(\beta) + ... + y_N(\beta).$$

b) Hasonlóan járunk el, mint az előbb, de itt a döntések sztochasztikusak. Itt is a β_2 döntés megváltoztatja az átmenet-valószínűségi mátrixot. Ekkor

$$P_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.54 & 0.36 & 0.1 \\ 0.56 & 0.29 & 0.15 \end{bmatrix}.$$

Az átmeneti mátrixnak az egyensúlyi eloszlása $x_2 = (0.438, 0.410, 0.152)$. Látható, hogy az előző pontban megadott β_1 politikához képest a β_2 politikában kevesebb az öntözés, és ezért a nedves állapotban kevesebb ideig van a termőföld, de gyengén nedves állapotban többet. Most a hosszú távú várható összes diszkontált jutalmat az alábbi egyenletrendszer megoldásai adják meg:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 - 0.3*50 - 0.2*80 \\ 10 - 0.4*50 - 0.3*80 \end{bmatrix} + 0.99 \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.54 & 0.36 & 0.1 \\ 0.56 & 0.29 & 0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Azaz $y_1(\beta_2) = 5909.5$, $y_2(\beta_2) = 5875.2$, $y_3(\beta_2) = 5788.6$. Tehát hosszú távon a β_2 politika alkalmazása esetén a várható diszkontált össznyereség $z(\beta_2) = 17572.3$.

c) Azonnal felvetődik a kérdés, hogy létezik-e olyan stratégia, amely maximalizálja a hosszú távú várható diszkontált össznyereséget?

Egy adott β politika mellett jelöljük $x_{ij} = x_{ij}(\beta)$-vel annak a (diszkont értelemben) súlyozott várható értékét, hogy a rendszer i állapotban van és a j döntés születik. Ha a kezdeti állapotban $x_i^0 = P(X_0 = i)$ és

$$u_{ij}^n = P(\text{ az } n\text{-edik időpontban az állapot } i \text{ és a döntés } j),$$

akkor

$$x_{ij} = u_{ij}^0 + \lambda u_{ij}^1 + ... + \lambda^n u_{ij}^n + ...$$

Ekkor az $x_i = x_i(\beta)$ annak a súlyozott várható értéke, hogy a rendszer az i állapotban tartózkodik:

$$x_i = x_i(\beta) = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \text{ és } x_{ij} = x_i d_{ij}(\beta).$$

Legyen $p_{ji}(k)$ annak valószínűsége, hogy a rendszer a k döntés következtében a j állapotból átmegy az i állapotba. Tehát a $d_{ij}(\beta)$ döntés meghatározható a

$$d_{ij}(\beta) = \frac{x_{ij}(\beta)}{\sum_{j=1}^{m} x_{ij}(\beta)}$$

összefüggésből.

Igazolható (Ross 1983), hogy az alábbi lineáris programozási feladat segítségével a maximális diszkontált jutalmat megadó politika meghatározható.

Célunk meghatározni azt a politikát, amely maximalizálja a

$$z(\beta) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} x_{ij}$$

célfüggvényt az alábbi feltételek mellett:

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ik} - \lambda \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} p_{ji}(k)\, x_{jk} = x_i^0; \quad i = \overline{1, N} \tag{5.13}$$

$$x_{ik} \geq 0; \; i = \overline{1, N}, k = \overline{1, m} \tag{5.14}$$

A célfüggvény és a feltételek felírásához először is nézzük meg, hogy az egyes állapotokban milyen döntések lehetségesek. Ennek érdekében az összes lehetséges döntés átmenet-valószínűségeit és jutalékait az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

	Döntések (k)			$p_{ji}(k)$			
Áll (j)	Ncs	Kbb	Nbb	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$r_i - z_i$
1	1	0	0	0.3	0.5	0.2	$100-0=100$
1	0	1	0	0.8	0.2	0	$100-50=50$
1	0	0	1	1	0	0	$100-80=20$
2	1	0	0	0.2	0.6	0.2	$80-0=80$
2	0	1	0	0.8	0.2	0	$80-50=30$
2	0	0	1	1	0	0	$80-80=0$
3	1	0	0	0.2	0.3	0.5	$10-0=10$
3	0	1	0	0.5	0.5	0	$10-50=-40$
3	0	0	1	1	0	0	$10-80=-70$

A mi feladatunkban a célfüggvény:

$$z(\beta) = 100x_{11} + 50x_{12} + 20x_{13} + 80x_{21} + 30x_{22} + 0x_{23} + 10x_{31} - 40x_{32} - 70x_{33}$$

Mátrixos formában az (5.13) feltételben szereplő egyenletrendszer így írható:

$$MX = x^0,$$

ahol

$$M = A - \lambda B,$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 & 1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}^T$$

$x^0 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^T$ a kezdő állapot.

Következésképpen a *feladat lineáris programozási modellje*:

$$\begin{cases} z(\beta) = 100x_{11} + 50x_{12} + 20x_{13} + 80x_{21} + 30x_{22} + 0x_{23} \\ \quad +10x_{31} - 40x_{32} - 70x_{33} \to \max \\ \\ 0.703\,x_{11} + 0.208\,x_{12} + 0.01x_{13} - 0.198\,x_{21} - 0.792\,x_{22} - 0.99x_{23} \\ \quad -0.198\,x_{31} - 0.495\,x_{32} - 0.99x_{33} = 1/3, \\ \\ -0.495\,x_{11} - 0.198\,x_{12} + 0.406\,x_{21} + 0.802\,x_{22} + x_{23} \\ \quad -0.297\,x_{31} - 0.495\,x_{32} = 1/3, \\ \\ -0.198\,x_{11} - 0.198\,x_{21} + 0.505\,x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1/3, \\ x_{ik} \geq 0,\ i,k = \overline{1,3}. \end{cases}$$

A WinQSB lineáris programozási eszköztára segítségével meghatározzuk az optimális megoldásokat:

$$x_{11} = 28.533,\ x_{12} = 0,\ x_{13} = 0,$$
$$x_{21} = 55.309,\ x_{22} = 0,\ x_{23} = 0,$$
$$x_{31} = 0,\ x_{32} = 16.806,\ x_{33} = 0.$$

Annak a súlyozott várható értéke, hogy a rendszer az i állapotban tartózkodik:

$$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} = x_{11} = 28.533,$$
$$x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} = x_{21} = 55.309,$$
$$x_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} = x_{32} = 16.806.$$

Legyen a teljes súlyozott várható idő: $28.533 + 55.309 + 16.806 = 100.65$. Ezzel az értékkel elosztva az x_i értékeket megkapjuk, hogy a rendszer a teljes idejének hányadrészét tartja a megfelelő állapotban:

$$x_1^{rel} = 28.533/100.65 = 0.283,$$
$$x_2^{rel} = 55.309/100.65 = 0.550,$$
$$x_3^{rel} = 16.806/100.65 = 0.167.$$

A $d_{ik}(\beta)$ optimális döntések meghatározhatók a

$$d_{ik}(\beta) = \frac{x_{ik}}{\sum_{k=1}^{m} x_{ik}}$$

képlettel. Tehát a feladat β optimális döntései:

Állapot	Döntések		
	Nincs öntözés	Kisebb öntözés	Nagyobb öntözés
1	1	0	0
2	1	0	0
3	0	1	0

Az optimális döntéshez tartozó átmeneti-mátrix

$$P_\beta = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az átmeneti mátrixnak az egyensúlyi eloszlása $x = (0.278\,, 0.555, 0.167\,)$. Mivel kevés az öntözés, ezért a termőföld legtöbb időt a gyengén nedves állapotban tartózkodik.

Megfigyelhető, hogy az egyensúlyi eloszlás majdnem megegyezik a súlyozott várható relatív értékekkel, az x_i^{rel}. Ha a diszkontálási tényező $\lambda = 1$, akkor teljesen azonos értékeket kapnánk.

Kimutatható, hogy az optimális politika determinisztikus, azaz minden $i = \overline{1, N}$ esetét, az x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{im} optimális értékek közül csak egy különbözik nullától. Ezért a $d_{ik}(\beta) \in \{0, 1\}$.

Az értékmeghatározó egyenletrendszer az optimális politikára:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ -40 \end{bmatrix} + 0.99 \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $y_1(\beta) = 6587.4, y_2(\beta) = 6565.2, y_3(\beta) = 6470.5$. Tehát hosszú távon a β optimális stratégia alkalmazása esetén a maximális várható diszkontált nyereség $z(\beta) = 19623.1$ euró.

5.4. Kitűzött feladatok

1. Egy tejtermékeket termelő és forgalmazó cég részesedése a helyi piacból 25%. A cég marketingosztálya egy felmérés alapján megállapította, hogy az elmúlt évhez viszonyítva a vásárlók 88%-a hűséges maradt a céghez ebben az évben is, 12%-a pedig elpártolt más, hasonló termékeket forgalmazó cégekhez. Úgyszintén azt is megállapították, hogy a konkurens cégekhez is a vásárlók 88%-a hűséges maradt, és csak 15% pártolt át hozzájuk. Ha ez a tendencia fennmarad, akkor egy év múlva, két év múlva és hosszú távon milyen piaci részesedéssel számolhat a cég?
2. A székelyföldi lakosság három csoportba sorolható aszerint, hogy városban, falun vagy a városok vonzáskörzetében élnek. Egy adott évben a városlakó családok 10%-a átköltözik a város vonzáskörzetébe, és 5%-a falura költözik. Ugyanakkor a városok vonzáskörzetében élők 3%-a városokba és 4%-a falura költözik. Végezetül a falusi lakosok 2%-a városokba és 4%-a a városok vonzáskörzetébe költözik. Ha valaki városban lakik, mi annak a valószínűsége, hogy két év múlva szintén városban fog lakni? Ha ez a tendencia megmarad, 10 év múlva a székelyföldi lakosság hány százaléka fog városban élni, tudva azt, hogy jelenleg a lakosság 30%-a városokban, 55%-a falun és 15%-a a városok vonzáskörében él?
3. Egy társadalomban a családok szociális helyzetét három osztályba soroljuk: alsó osztály (1), középosztály (2) és felső osztály (3). Annak

átmeneti-valószínűségeit, hogy a családok szociális helyzete megváltozik, a következő táblázat tartalmazza:

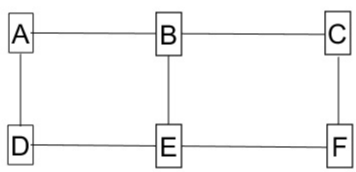
	1	2	3
1	0.8	0.1	0.1
2	0.2	0.5	0.3
3	0.1	0.2	0.7

Ha ez a tendencia megmarad, 10 év múlva az egyes osztályokhoz tartozó emberek aránya stabilizálódik-e? Határozzuk meg annak a várható idejét, hogy egy család egyik osztályból átkerül a másik osztályba.

4. Egy gépben három olyan alkatrész van, amelyek tönkremehetnek, de a gép működik, amíg legalább az egyik ezen alkatrészek közül működőképes. Amint elromlik legalább kettő ezen alkatrészek közül, azokat rögtön kicserélik, és a gép másnap reggeltől újra működik. Feltéve, hogy semelyik két alkatrész nem hibásodik meg ugyanazon a napon, továbbá annak valószínűsége, hogy az 1-es, a 2-es és a 3-as alkatrész meghibásodik rendre: 0.02, 0.03 és 0.04. Ha Markovláncokkal szeretnénk ezt a folyamatot modellezni, célszerű az állapottérnek a $\{0, 1, 2, 3, 12, 13, 23\}$ halmazt választani, aszerint, hogy éppen melyik alkatrészek hibásak.
   a) Határozzuk meg az átmenet-valószínűségi mátrixot.
   b) Ábrázoljuk, hogyan alakul az egyes alkatrészek száma a következő 100 napban.
   c) 1800 nap alatt kb. hány alkatrészt használunk el az 1-es, 2-es és a 3-as típusok közül?
5. Három személy közül szeretnénk egyet igazságosan kiválasztani. E célból mindhárman feldobnak egy szabályos kockát. Ha a legnagyobb számot közülük csak egy dobja, akkor őt választjuk ki. Ha mindhárman egyforma számot dobnak, akkor megismételjük a dobásokat. Ha a legnagyobb számot ketten dobják, akkor a harmadik személy kiesik a választásból; a másik kettő addig folytatja, amíg különbözőt nem dobnak, és ekkor az nyer, aki a nagyobbat dobta. Igazságos-e ez a sorsolás? Várhatóan hány dobássorozatra kerül sor?
6. Egy országban a választásokon mindig csak két párt közül az egyik győzhet: vagy az A, vagy a B. Az utolsó 30 választás eredményei a következők: A A B A A B B A B B A B B B A B A B B A B A A B A B B A B B.

a) Tegyünk becslést a választások kimenetelével kapcsolatosan, feltéve, hogy csak a legutolsó választás eredménye befolyásolja a következő választás kimenetét.
b) Tegyünk becslést a választások kimenetelével kapcsolatosan, feltéve, hogy az utolsó két választási eredmény befolyásolja a kimenetelt.

7. Francis Galton vizsgálta, hogy: mi a valószínűsége annak, hogy kihal egy család férfiágon, vagyis „kihal a név”? Reverend Henry és William Watson megválaszolta a kérdést, ezért a megfelelő Markov-láncot Galton–Watson-folyamatnak hívjuk. Tehát itt csak a fiú gyerekek különböző generációkba tartozó számát követjük, mert ők viszik tovább a nevet.
Tekintsünk egy populációt, amelyben az első generáció egy személyből áll, és az n-edik generációban mindenki egymástól függetlenül p_k valószínűséggel ad életet k fiú gyereknek, akik az $n+1$-edik generációhoz tartoznak. Ha tudjuk, hogy $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ és $p_k = (1/2)^{k+1}$, határozzuk meg az átmenet-valószínűségi mátrixot és annak valószínűségét, hogy n-edik generáció után kihal a név.
8. Egy patkány kezdetben az ábra szerinti A ketrecben van. A patkányt beidomították: ha csengőszót hall, egy járaton keresztül átmegy valamelyik szomszédos ketrecbe. Amikor tehát a csengő megszólal, a patkány véletlenszerűen, egyforma valószínűséggel kiválaszt egy járatot; a döntését nem befolyásolja az sem, hogy előzőleg merre ment. Mekkora a valószínűsége annak, hogy 23 csengőszó után a patkány a B ketrecben lesz?



5.24. ábra. Ketrecek és járatok a 8. feladatban

9. Egy Csumpi nevű csimpánz leül a számítógép elé, és elkezdi lelkesen püfölni a billentyűzetet. A billentyűzet az angol ábécé 26 nagybetűjét tartalmazza. Csumpi pedig teljesen rendszertelenül (véletlenszerűen) üti le egymás után a betűket.

a) Igazoljuk, hogy ha Csumpi elég kitartó, akkor előbb-utóbb leírja a nevét!
b) Ehhez átlagosan hány leütésre van szüksége? (Először becsüljük meg, hogy ha egy leütés átlagosan 1 másodpercig tart, akkor várhatóan mennyi idő alatt írja le Csumpi a nevét!)
c) Csumpi stratégiát változtat. Most is véletlenszerű a betűválasztása, de arra ügyel, hogy az éppen leütött karaktert nem ismétli (bár két lépés múlva persze már megint leütheti). Ezzel a módosítással átlagosan hány leütésre van szüksége, amíg a nevét véletlenszerűen kiírja? (Több vagy kevesebb leütés kell, mint a b) esetben?)

10. Két játékos 2-2 lejjel beszáll egy játékba. Megegyeznek, hogy a játékot 1 lejes tétellel kezdik, és addig játszanak, amíg egyikük pénze el nem fogy. Ha p annak valószínűsége, hogy az első játékos nyer egy játszmában, akkor mi a valószínűsége, hogy m játék után elveszti a pénzét?
11. Egy bolha egy óra számlapján lépeget a 12, 3 ,6 , 9 számokon. A bolha a 12-ről indul, és p valószínűséggel az óramutató járásával megegyező irányba, és $1-p$ valószínűséggel az óramutató járásával ellentétes irányba ugrik. Jelölje X_n a bolha helyzetét az n-edik ugrás után. Ekkor X_n egy Markov-lánc. Határozzuk meg az átmenetvalószínűségi mátrixot. Határozzuk meg az egyensúlyi állapotot és az elérési időket.
12. Tanulmányozzuk, hogyan függ a maximális várható diszkontált nyereség az 5.4. (Kertészet) mintapéldában, az öntözési költségtől és a diszkontálási tényezőtől.
13. Egy víztározót a folyó vízszintjének szabályozására és elektromos áram termelésére használnak. A gát kapacitása 4 egység. A havi vízhozam lehetséges értékei 0, 1, 2, 3. Elektromos áram termelésére 1 egységnyi vízmennyiség szükséges. Minden hónap elején vizet engednek ki a tározóból. Az első egységet elektromos áram termelésére, majd öntözésre használják. Ez 100 ezer euró jövedelmet eredményez. Ha további egységeket is kiengednek, azokat felhasználhatják öntözésre. Minden egység 100 ezer euró jövedelmet eredményez. Ha a tározó 1 egységnél kevesebb vizet tartalmaz a hónap elején, akkor 300 ezer euróért máshonnan kell elektromos áramot beszerezni. Ha

bármikor a tározóban 3 egységnél nagyobb a vízmennyiség, azt költség nélkül átengedik a zsilipeken. Legyen a rendszernek az átmenetvalószínűségi mátrixa

Állapot	0	1	2	3
0	0.2	0.3	0.3	0.2
1	0	0.2	0.3	0.5
2	0	0	0.2	0.8
3	0	0	0	1

Három döntés lehetséges minden hónap elején:

Döntés	Tevékenység
1	0 egység leeresztése
2	1 egység leeresztése
3	2 egység leeresztése
4	3 egység leeresztése

a) Mekkora a várható diszkontált jutalma a β_1:

	Döntések			
Állapot	1	2	3	4
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	1	0	0

determinisztikus stacionárius stratégiának, ha a diszkontálási tényező (értékvesztési tényező) $\lambda = 0.98$?

b) Mekkora a várható diszkontált jutalma a β_2:

	Döntések			
Állapot	1	2	3	4
0	1	0	0	0
1	0.5	0.5	0	0
2	0.25	0.25	0.5	0
3	0.25	0.25	0.25	0.25

sztochasztikus stratégiának, ha a diszkontálási tényező (értékvesztési tényező) $\lambda = 0.98$?

c) Határozzuk meg a maximális várható diszkontált jutalmat és azt a döntési stratégiát, amellyel ez meg is valósítható, ha a diszkontálási tényező (értékvesztési tényező) $\lambda = 0.98$.

14. Péter nagyon félti az autóját, nem szeretné, hogy megsérüljön. Amikor munkába megy, választhat: az utcán egy helyet, illetve két helyet elfoglalva parkol, vagy parkolóba viszi az autóját. Ha az utcán parkol egy helyet elfoglalva, akkor 0.01 valószínűséggel sérül meg az autója, ha az utcán két helyet foglal el, akkor 0.002 valószínűséggel sérül meg az autója, viszont egy 50 lejes bírságot is kaphat 0.2 valószínűséggel. Parkolóban 10 lej a jegy, de ott az autó biztosan nem sérül meg. Ha az autó megsérül, javítani viszi, ami miatt egy napig nem használhatja, a javítási és utazási költsége 100 lej. Sérült autóval is járhat, de úgy érzi, a büszkeségén esett csorba 10 lej napi veszteségként fejezhető ki. Határozzuk meg a minimális várható diszkontált veszteséget és azt a döntési stratégiát, amellyel ez meg is valósítható, ha a diszkontálási tényező $\lambda = 0.98$.
15. Egy mezőgazdász búzát termel. A termőföld megművelési költsége 6000 lej. Minden évben, amikor jó a termés, 12 000 lej a bevétele, ha pedig rossz a termés, akkor csak 8000 lej. Minden évben két vetőmag közül választhat: az A fajta 2000 lej, és 60% eséllyel garantálja a jó termést, a B fajta 3000 lejbe kerül, és 80% eséllyel garantálja a jó termést. Határozzuk meg $\lambda = 0.98$ diszkontálási tényező mellett, mikor választja a mezőgazdász az A, illetve B vetőmagot.
16. Egy boltban egy adott áruból több mint k darab van, akkor másnap reggelre nem hozatnak ebből az áruból egyet sem. Azonban ha a nap végén ezen áruból k darab vagy ennél kevesebb van, akkor annyit hozatnak, hogy másnap reggelre K darab legyen ebből az áruból. Tudva azt, hogy a holnapi nap annak valószínűsége, hogy nincs kereslet az árura, 0.2, hogy egyet lehet eladni, 0.3, hogy kettőt lehet eladni, 0.3, hogy hármat lehet eladni pedig, 0.2. A raktárkészlet alakulását a következő napra az alábbi függvénnyel adhatjuk meg:

$$X\,(\text{holnap}) = \begin{cases} \max\left\{X\,(\text{mai nap}) - \text{holnapi kereslet}, 0\right\}, \\ \qquad \text{ha } X\,(\text{mai nap}) > k, \\ \\ \max\left\{K - \text{holnapi kereslet}, 0\right\}, \\ \qquad \text{ha } X\,(\text{mai nap}) \le k. \end{cases}$$

a) Határozzuk meg az átmenet-valószínűségi mátrixot, ha $k = 1$ és $K = 3$.
b) Ábrázoljuk, hogyan alakul a raktárkészlet az elkövetkező 10 napban, ha $k = 1$ és $K = 3$.
c) Határozzuk meg az egyensúlyi eloszlásokat, ha $k = 1$ és $K = 3$.

d) Feltéve, hogy minden eladott árun 10 lejt nyerünk és 2 lej a raktározási költsége, határozzuk meg a várható diszkontált nyereséget, ha $k = 1$ és $K = 3$. A diszkontálási tényező legyen 0.9. Hogyan kell megválasztani a k és a K értékeket, hogy a diszkontált nyereség maximális legyen?

SZAKIRODALOM

[1] Allais M.: Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école Américaine, *Econometrica*, Vol. 21, 1953, 503–546.

[2] Andrei N.: *Programare matematică avansată*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1999.

[3] Andrei N.: *Modele, probleme de test şi aplicaţii de programare matematică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 2003.

[4] Bakos V., Bánhalmi Á., Fejes F., Fenyves F., Pákolicz O.: *Kvantitatív módszerek II. Fejezetek az operációkutatásból*, Perfekt Kiadó, Budapest, 2011.

[5] Barczy M., Pap Gy.: *Sztochasztikus folyamatok. Példatár és elméleti kiegészítések (Diszkrét idejű Markov-láncok) II. rész*, mobiDiak Könyvtár, Debrecen, 2006.

[6] Chandran B., Golden B., Wasil E.: Linear programming models for estimating weights in the analytic hierarchy process, *Computers & Operations Research*, Vol. 32, 2005, 2235–2254.

[7] Csernyák L., Tóth I.: *Operációkutatás* I–II., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

[8] Csontos L.: *A racionális döntések elmélete*, Osiris kiadó, Budapest, 1998.

[9] Dantzing G. B.: The programming of interdependent activities, *Econometrica*, Vol. 17, 1949, 209–220.

[10] Ellsberg D.: Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms, *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 75, 1961, 643–669.

[11] Ferenczi Z., Jámbor A., Nagy Z., Raffai M.: *Döntéselőkészítés, Esettanulmányok, Példatár*, Novadat Kiadó, 2002.

[12] Friedmann M., Savage L. J.: The utility analysis of choices involving risk, *Journal of Political Economy*, Vol. 56, 1948, 279–304.

[13] Hillier F. S., Lieberman G. J.: *Bevezetés az operációkutatásba*, LSI Oktatóközpont, Budapest, 1994.

[14] Iri M., Imai H.: A multiplicative barrier function method for linear programming, *Algorithmica*, Vol. 1, no. 4, 1986, 455–482.

[15] Kahneman D.: *Gyors és lassú gondolkodás*, HVG Kiadó, Budapest, 2011.

[16] Kahneman D., Tversky A.: Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, *Econometrica*, Vol. 47**,** 1979, 263–291.

[17] Knight F. H.: Risk, *Uncertainty, and profit*, Houghton Mifflin, New York, 1921.

[18] Lixăndroiu D.: *Modele economice rezolvate în QM*, Ed. Univ. Transilvania, Braşov, 2017.

[19] Lixăndroiu D.: *Modelarea deciziei economice*, Ed. Economică, Bucureşti, 2014.

[20] Markov A. A.: Rasprostranenie zakona bol'shih chisel na velichiny, zavisyaschie drug ot druga, *Izvestiya Fiziko-matematicheskogo obschestva pri Kazanskom universitete, 2-ya seriya*,Vol. 15, 1906, 135–156.

[21] Nash J.: Non-Cooperative Games, The Annals of Mathematics, Vol. 54, 1951, 286–295.

[22] Neumann J., Morgenstern O.: *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1947.

[23] Orosz Gy.: *Markov-láncok*, Matematika Oktatási Portál, Budapest, 2013.

[24] Paprika Z.: *Döntéselmélet*, Alinea kiadó, Budapest, 2002.

[25] Prelec D.: The Probability Weighting Function, *Econometrica*, Vol. 66**,** 1998, 497–527.

[26] Reidmacher H. P.: *Excel Közgazdászoknak*, AULA Kiadó, Budapest, 2000.

[27] Saaty T.: *The analytic hierarchy process*, McGraw-Hill, New York, 1980.

[28] Shalev J.: Loss aversion equilibrium, *International Journal of Game Theory,* Vol. 29, 2000, 269–287.

[29] Temesi J.: *A döntéselmélet alapjai*, Aula Kiadó, Budapest, 2002.

[30] Thaler R. H., Sustein S.: *Nudge,* HVG Kiadó, Budapest, 2011.

[31] Thaler R. H.: *Rendbontók*, HVG Kiadó, Budapest, 2016.

[32] Tversky A., Kahneman D.: Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty, *Journal of Risk and Uncertainty,* Vol. 297, 1992, 297–323.

[33] Winston W. L.: *Operációkutatás. Módszerek és alkalmazások* I–II., Aula Kiadó, Budapest, 2003.

[34] Xu Z., Da Q.: A least deviation method to obtain a priority vector of a fuzzy preference relation, *European Journal of Operational Research*, Vol. 164, 2005, 206–216.

TÁRGYMUTATÓ

ABSTRACT

Mathematical models of economy are decision models which help leaders to prepare their decision making in the macro- and microlevels of economics. The leaders' aim is to choose the most convenient strategies in the course of decision making. The operational research and decision theory deal with the selection of these strategies.

Based on many years' educational experience, the economist students' greatest difficulty in understanding the discipline of operational research is the transcription of the text-mode formulated economic problem to a solvable mathematical model.

In order to develop the mathematical model construction to skill level, one has to solve a large number of problems. Accordingly, the main objective of this book is to practise the inscription of the mathematical model of the economic problems and to help the understanding of the economic meanings of the parameters. The WinQSB (QSB – Quantitative Systems for business) software package and the Excel table calculation program are used to calculate the mathematical model's numerical solution.

This lecture note can also be seen as a continuation of our book *Operational Research Exercise Book for Economists* published in 2011. Similarly, even in this book, the basic concepts of decision theory and the methods of analysis are presented through examples by using the WinQSB software package and the Excel table calculation program to provide numerical answers to the formulated questions.

The lecture note provides an overview of some of the major chapters in decision theory and follows the structure of Decision Support Systems and Decision Theory courses of economic specializations at Sapientia University.

The first chapter begins with an overview of the basic concepts of decision making in uncertain circumstances and simple decision-making criteria. In the second section, we present the Neumann–Morgenstern utility theory. Using illustrative examples, we show how theory can be applied to the study of individual risk behaviour. Kahneman and Twersky studied the human factors that distort the principles of utility theory. In the third section, we analyse the effects that are most important for normative decision making, and the fourth section presents, as an application, how the Nash

equilibrium is developed in two-person games with two strategies if the distortion effects are also taken into account. We also examine the effect of the reference value on the outcome of the game.

The second chapter deals with the construction, evaluation, and Bayesian analysis of the decision trees. Using examples, we also show how to use the *Decision Tree Analysis* toolbar of WinQSB.

Chapter 3 presents the model of multi-purpose decision making. We also discuss hierarchical and non-hierarchical models and the practical application of WinQSB's *Linear and Integer Goal Programming* toolbar.

Chapter four includes various applications of the analytical hierarchy process (AHP) developed by Saaty. The estimation of the priority vector using linear programming model and the least deviation method are also presented.

Chapter five discusses Markov's decision-making processes. The first section deals with the determination of equilibrium distributions and return times. In the second part, we study Markov chains using WinQSB. The third section presents the analysis of absorbing Markov chains. Section four discusses the decisions the decision maker has to make to maximize his or her expected profits or minimize his or her expected losses if the transition between states also depends on a decision.

Each chapter begins with a short summary of the necessary theoretical knowledge followed by tutorial examples which illustrate the method of the resolution. We present the related useful WinQSB software package or we give the solution by using Excel table calculation program in every chapter. The exercises can be found at the end of the chapters.

First of all, this lecture note is recommended for students in Economic Informatics, Economics, Management and Leadership MA as well as Applied Economics and Finance MA. Several tutorials and solved problems provide basic ideas and methods of analysis for the students to elaborate their thesis.

REZUMAT

Complexitatea deciziilor ce trebuie luate în lumea contemporană şi în domeniul economic cere, pe lângă experienţa practică, o înaltă pregătire ştiinţifică a factorilor de decizie. Acolo unde practica nu poate să intervină în mod direct trebuie să pătrundă gândirea prin modelarea fenomenului studiat. Modelele matematice aplicate în economie în mare parte sunt modele decizionale, care la nivelul macro- şi microeconomic sunt instrumente eficiente pentru factorii de decizie. În procesul luării deciziilor forul decizional încearcă să aleagă strategii optime în consonanţă cu scopul formulat. Domenii ştiinţifice ca cercetare operaţională şi teoria deciziilor se ocupă cu determinarea acestor strategii optime.

Experienţa acumulată în predarea acestor discipline ne-a arătat că pentru studenţii economişti cel mai dificil de înţeles este construirea modelului matematic pentru o problemă economică textual formulată. Bazându-ne pe acest fapt, accentul este pus pe elaborarea modelului matematic şi pe interpretarea economică a parametrilor ce apar în aceste modele, iar pentru rezolvarea numerică este utilizat programul WinQSB (QSB – Quantitative Systems for Business) şi programul tabelar EXCEL.

Acest manual este continuarea volumului „Culegere de probleme din cercetări operaţionale pentru economişti" din 2011. Şi în această carte, conceptele de bază din teoria deciziilor şi metodele de analiză sunt introduse prin exemple, folosind pachetul software WinQSB şi programul tabelar EXCEL pentru a oferi răspunsuri numerice la întrebările formulate.

Manualul oferă o imagine de ansamblu din unele capitole majore din teoria deciziilor şi urmăreşte tematica disciplinelor „Sisteme informatice pentru asistarea deciziilor" şi „Teoria deciziilor" predate la specializările economice din cadrul Universităţii Sapientia.

Primul capitol începe cu o prezentare a conceptelor de bază din teoria deciziilor în circumstanţe incerte şi a criteriilor simple de decizie. În secţiunea a doua prezentăm teoria utilităţii von Neumann-Morgenstern. Prin intermediul câtorva exemple, arătăm cum poate fi aplicată teoria la studierea comportamentului individual de risc. Kahneman şi Tversky au studiat factorii umani care distorsionează principiile teoriei utilităţii. În secţiunea treia analizăm efectele care sunt cele mai importante pentru luarea deciziilor normative, iar în cea de-a patra prezentăm, ca o aplicaţie, modul în care echilibrul Nash se modifică în jocuri în care jucătorii au două strategii, dacă

sunt luate în considerare efectele de distorsiune. De asemenea, examinăm efectul valorii de referinţă asupra rezultatului jocului.

Al doilea capitol tratează construcţia, evaluarea şi analiza bayesiană a arborilor de decizie. Folosind exemple, este prezentată utilizarea instrumentului „Analiza arborelui de decizie (Decision Tree Analysis)" al pachetului de software WinQSB.

În capitolul trei se discută modelele ierarhice şi non-ierarhice de adoptare a deciziilor cu mai multe scopuri. Este prezentat instrumentul „Programare liniară şi întreagă cu mai multe obiective (Linear and Integer Goal programming)" al pachetului de software WinQSB.

Capitolul patru cuprinde diferitele aplicaţii ale procesului de ierarhizare analitică (AHP) elaborat de Saaty. Sunt, de asemenea, prezentate estimarea vectorului prioritar, folosind programare liniară şi metoda cu cea mai mică abatere.

Capitolul cinci tratează procesele de decizie de tip Markov. În prima secţiune este prezentată determinarea distribuţiei de echilibru şi a timpului de returnare. În partea a doua studiem lanţurile de tip Markov folosind programul WinQSB. În a treia secţiune se analizează absorbţia lanţurilor de tip Markov. În secţiunea a patra se discută problema de adoptare a strategiilor decizionale pentru a maximiza profiturile sau pentru a minimiza pierderile.

Fiecare capitol începe cu câteva probleme exemplificative cu ajutorul cărora sunt introduse noţiunile şi rezultatele fundamentale, necesare pentru înţelegerea capitolului respectiv. Apoi sunt elaborate mai multe probleme ilustrative, care, la rândul lor, sunt rezolvate cu ajutorul programului WinQSB sau programul tabelar EXCEL. La sfârşitul capitolelor sunt propuse spre rezolvare o serie de probleme.

Manualul de faţă se adresează studenţilor economişti, masteranzilor în leadership şi management şi masteranzilor în economie aplicată şi finanţe. Modelele prezentate şi rezolvate, cu date reale pot fi folosite chiar şi în elaborarea lucrărilor de licenţă.

A SZERZŐKRŐL

Salamon Júlia 1980. április 27-én született Csíkszeredában. A középiskolát a csíkszeredai Márton Áron Gimnáziumban végezte. A kolozsvári Babeş–Bolyai Tudományegyetem matematika–informatika szakán szerzett egyetemi oklevelet 2002-ben, valós és komplex analízis magiszteri diplomát 2003-ban, majd ugyanitt folytatta doktorátusi tanulmányait. Doktorátusi tézisét a paraméteres vektor egyensúlyi feladatok témaköréből írta, amelyet 2009-ben mutatott be. 2002-től a Sapientia EMTE Csíkszeredai Karának főállású oktatója.

Jelenleg (2010-től) a Sapientia EMTE Csíkszeredai Karának egyetemi docense, ahol az informatika (Matlab), programozás és adatstruktúrák, illetve operációkutatás tantárgyakat oktatja.

Kutatási területei: vektoregyensúlyi feladatok, játékelmélet.

Makó Zoltán 1968. június 20-án született Sepsiszentgyörgyön. Elemi tanulmányait a Kovászna megyei Csernáton községben, a középiskolát a sepsiszentgyörgyi Székely Mikó Kollégiumban végezte, majd a kolozsvári Babeş–Bolyai Tudományegyetem matematika szakán szerzett egyetemi oklevelet. Doktorátusi tézisét a fuzzy optimalizálás témaköréből írta, amelyet 2002-ben mutatott be.

Az egyetem elvégzése után, 1992-ben a kézdivásárhelyi Gábor Áron Szakközépiskolába kapott tanári kinevezést. 1997-ben a Babeş–Bolyai Tudományegyetem Mechanika és Csillagászati Tanszékének tanársegéde, majd adjunktusa lesz, ahol a csillagászat, elméleti és égi mechanika tantárgyakat oktatta. 2006-tól a Sapientia EMTE Csíkszeredai Karának főállású oktatója.

Jelenleg (2016-tól) a Sapientia EMTE Csíkszeredai Karának egyetemi tanára, ahol a matematikai analízis, a gazdasági döntések matematikai modellezése és a döntéselmélet tantárgyakat oktatja.

Kutatási területei: fuzzy optimalizálás, játékelmélet, mesterséges intelligencia és égi mechanika.

Scientia Kiadó
400112 Kolozsvár (Cluj-Napoca)
Mátyás Király u. (str. Matei Corvin) 4.
Tel./fax: 0040-364-401454
www.scientiakiado.ro
E-mail: scientia@kpi.sapientia.ro

Korrektúra:
Szenkovics Enikő

Műszaki szerkesztés:
Salamon Júlia és Makó Zoltán

Borítóterv:
Tipotéka Kft.

Tipográfia:
Könczey Elemér

Nyomdai munkálatok:
F&F INTERNATIONAL Kft.
Felelős vezető: Ambrus Enikő igazgató

Jelen oktatási segédlet a döntéselmélet néhány fontosabb fejezetébe nyújt betekintést, és a Sapientia EMTE közgazdasági szakjain oktatott döntéstámogató rendszerek, illetve a döntéselmélet tantárgyak felépítéseit követi. Többéves oktatási tapasztalatunk, hogy a hallgatóknak bizonyos fokú nehézséget okoz a szöveges problémák modellezése és megoldása. Ezért a könyv egészén végigvonul az elmélet gyakorlatba történő átültetésének igénye, és a hangsúly a gazdasági probléma matematikai modelljének felírására és a modellekben szereplő paraméterek közgazdasági jelentésének megértésére összpontosul.

Minden fejezetben mintapéldák segítségével tárgyaljuk az alapvető döntéselméleti módszereket, és azt is bemutatjuk, hogyan lehet az adott részben tárgyalt problémákat a rendelkezésre álló szoftverekkel – esetünkben WinQSB-vel vagy Microsoft Excellel – lemodellezni, majd megoldani.

A megoldott és kitűzött feladatok egy része – valós adatokkal – alapötletet és elemzési módszert nyújthat egyebek mellett a gazdasági döntésekhez kapcsolódó szakdolgozatok megírásához is.

ISBN 978-606-975-011-7

9 786069 750117