

BRAINBOX – FÜGGVÉNYEK

BRAINBOX – FUNCTIONS

Lengyelne Dr. Szilágyi Szilvia¹, Dr. Körei Attila¹, Dr. Árvai-Homolya Szilvia¹

¹ Matematikai Intézet, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Miskolci Egyetem, Magyarország

Kulcsszavak:

Brainbox,
egyváltozós valós függvények,
játék,
kooperatív tanulás,
differenciálás.

Keywords:

BrainBox,
real valued functions of a real
variable,
game,
cooperative learning,
differentiation.

Cikktörténet:

Beérkezett 2019. június 24.
Átdolgozva 2019. október 31.
Elfogadva 2019. november 5.

Összefoglalás

Az egyik legismertebb és legkedveltebb megfigyelést fejlesztő családi társasjátékok egyike a BrainBox, amely rendkívül egyszerűen játszható, így a mai kor igényeinek kiválóan megfelelő gyors játzmákkal biztosít kikapcsolódást úgy, hogy közben oktat is. Egyénileg és csoportosan is játszható, továbbá lehetőséget ad az önellenőrzésre. Az alapjátékot alkalmasnak találtuk arra, hogy az együttműködést előtérbe helyező kooperatív tanulás segédeszköze lehessen. Tapasztalataink szerint a függvénytranszformációs lépések végrehajtása sokszor még a felsőoktatásba bekerült tanulók számára is gondot okoz, kisebb-nagyobb hiányosságok mutatkoznak az alapfüggvényekkel kapcsolatos ismeretekben. A BrainBox – Függvények matematikai játék a megfigyelési készség fejlesztésén túlmenően a legfontosabb függvényosztályok valamennyi alaptulajdonságának helyes bevésődését segíti elő, mindemellett jól szemlélteti a függvények transzformációjának hatását az egyes függvénytulajdonságokra. A játék pozitívuma, hogy alkalmas a differenciálásra, továbbá a párhuzamos interakciók révén a játékosokra jutó aktív idő a sokszorosára nőhet, amely jelentősen támogatja a konstruktív tanulási elméletre épülő ismeretátadást.

Abstract

One of the most popular and well-known family board games is Brainbox, which improves children's observation skills and broadens their knowledge of different topics. Having very simple rules the games can be played fast according to today's needs. It can be played individually or in groups and makes self-checking possible. We have found the basic game suitable for being a tool of cooperative learning. Our experiences has shown that performing function transformation steps is a difficult task even for the students in higher education, as a result of their incomplete knowledge in the field of elementary functions. Besides developing observation skills the mathematical game Brainbox - Functions helps in engraving all the basic characteristics of the most important function classes and demonstrates well the transformations' impact on certain properties of functions. The game is very competent in differentiation and thanks to the parallel interactions the active time of the gamers can be extended supporting the constructive learning based knowledge transfer.

1. Bevezetés

A műszaki és informatikai alapképzési szakok tantervének kötelező eleme – a természettudományos alapismereteken belül – a matematika. A 18/2016-os EMMI rendeletben szabályozott képzési és kimeneti követelményeknek megfelelően különböző kreditértékben szükséges megjelennie a matematika tématerülethez tartozó tárgyaknak. Egyes képzések esetén (pl. mérnökinformatikus BSc) a rendeletben meg is nevezik a matematika oktatandó ágait (pl. analízis, algebra, diszkrét matematika, stb.), máshol gyűjtőfogalomként jelenik meg a matematika (pl. gépészmérnöki BSc). Összességében elmondható, hogy az alapozó tárgyak közé általában két féléven keresztül tartozik analízis témakörű kurzus. A legtöbb hallgató számára ezek a kurzusok nehezen teljesíthetők, hiszen jelentős mennyiségű új ismeret elsajátításáról kell számot adniuk. Nyilvánvaló, hogy az analízis tárgyak sikeres teljesítéséhez elengedhetetlenül szükségesek a középiskolában szerzett jó matematikai alapok. A hézagos matematikai tudásanyaggal érkező hallgatóknak a kurzusok sikeres teljesítéséhez nemcsak az új anyagot kell elsajátítaniuk, hanem pótolniuk kell a középiskolai anyag megfelelő fejezeteit is. Az I. félévben teljesítendő analízis tárgy egyik legfontosabb fejezete az egyváltozós valós függvények elméletéhez kapcsolódik. A sikeres vizsga szempontjából alapvető fontosságú az első és másodfokú függvények, az abszolútérték függvény, a négyzetgyök függvény, a trigonometrikus függvények, az exponenciális és logaritmus függvények egzakt ismerete [1].

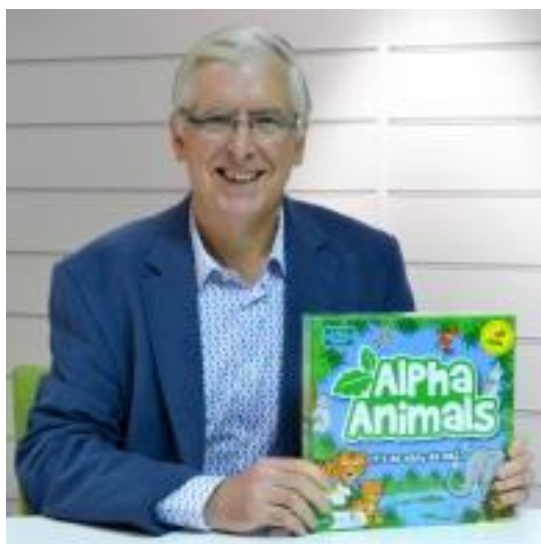
A 2012-es Nemzeti alaptanterv [7] is leszögezi, hogy az elemi függvények koordináta-rendszerben történő helyes ábrázolása, a legfontosabb függvénytulajdonságok meghatározása nemcsak a matematika, hanem más természettudományos tárgyak megértése, valamint különböző gyakorlati helyzetek, például természeti jelenségek, folyamatok időbeli lefolyásának leírása miatt is szükséges. Az utóbbi évek középszintű matematika érettségi vizsgasorainak elemzésekor az derült ki, hogy a függvényes feladatok előfordulása, a szereshető pontok értékét alapul véve, megfelelő arányúnak tűnik, azonban az elemi úton megoldható feladatok mind mennyiségileg, mind összetételüket tekintve kifogásolhatók. Az algebrai és transzcendens függvények a középiskolai matematika oktatásban magas óraszámban kerülnek tárgyalásra, az írásbeli érettségien történő számonkérésük mégis szegényes [1].

A fentiek értelmében alapvető fontosságú tehát, hogy már az általános, illetve középiskolai matematika tanulás során biztos alapokra kerüljön a függvényfogalom kialakítása, nagyobb figyelmet kapjon az elemi függvények, valamint a legfontosabb alaptulajdonságok ismerete, továbbá a függvénytranszformációs lépések készségszintű alkalmazása. Tapasztalataink alapján a műszaki, illetve informatikai felsőoktatásba felvételt nyert hallgatók egy része sajnos nem rendelkezik az előzőekben megfogalmazott ismeretekkel. A [6]-os cikk alapján az alapvető probléma a függvény fogalmának bevezetésénél, hogy miközben más fogalmak (pl. számfogalom, geometriai alakzatok) esetén a diákok támaszkodhatnak előzetes, spontán fejlődő ismereteikre, addig a függvények esetén nincs olyan informális bázis, melyre az új matematikai témakör felépíthető. Ez erősített meg bennünket abban, hogy a hagyományos, frontális formában történő oktatás, felzárkóztatás mellett a függvénytani hiányosságok pótolására, az ismeretek felfrissítésére játékos eszközt is igénybe vegyünk. A [4] -es cikkben foglaltak alapján a Z-generáció diákjai ugyan szeretnek és tudnak is tanulni, de sok esetben ezt más formában teszik, mint a megelőző korosztályok. Hatékony oktatásukban kulcsszerepet játszik a szórakoztatva tanítás és a játékosítás (idegen szóval gamifikáció), továbbá fontosak számukra a vizuális ingerek, valamint az aktivizálás, illetve a kooperatív módszerek. A téma kutatói szerint szakmailag indokolt a „Z-sek” óráin többször is munkaformát váltani. A lehetséges oktatási módszerek közül a kisebb csoportban történő tanulást tartjuk a leghatékosabbnak, ezért olyan játék megalkotására, újragondolására törekedtünk, amellyel 2 - 8 hallgató együtt, kooperatívan tud tanulni.

Cikkünkben a népszerű BrainBox társasjáték elvén fejlesztett 60 lapos függvény kártyacsomagot mutatjuk be, amely a Z-generációs diákok oktatása során „elvárt”, előbb említett kívánalmaknak maradéktalanul megfelel. A játék során az első- és másodfokú, az abszolútérték, egyszerűbb racionális tört-, az irracionális, a trigonometrikus, az exponenciális és a logaritmus függvények ábrái, valamint ezek kombinációi alapján a függvények jellemző tulajdonságaira, a transzformációs lépésekre vonatkozó kérdéseket kell megválaszolni.

2. A BrainBox sikertörténete

Tanulni számos esetben játék közben lehet a legjobban. A játékos alapokra helyezett tanulás, valamint tudásátadás hatékonysága napjainkra már megkérdőjelezhetetlen, hiszen számos kutatás támasztja alá a gamifikációs eszközök alkalmazásának sikerességét [2-3]. A BrainBox játékok készítője, Gary Wyatt 1990-ben gondolt arra, hogy olyan játékot kell kitalálnia, amellyel több korosztály tud együtt játszani és tanulni. A legelső, *Alpha Animals* elnevezésű játéka 1991-ben jelent meg és szinte azonnal nagy sikert aratott. Érdekessége, hogy ez a 4 éves kortól ajánlott játék még napjainkban is megvásárolható. A játék két különböző szintje teszi érdekessé a játékot a nagyobb gyerekek, illetve az egész család számára.



1. ábra. Gary Wyatt és az *Alpha Animals*

Már az első kiadott játék is újrahasznosított papírra készült, ugyanis a környezetvédelem a játék készítője számára rendkívül fontos. Az 1991-ben megalapított játékgyártó cégének is a Green Board Game Company, azaz Zöld Társasjáték Cég nevet adta, ahol az elnevezésben szereplő zöld jelző utal a környezetvédelemre. A cég számos játékot dobott piacra megalapítása óta, de az igazi siker váratott magára. 16 évnek kellett eltelnie ahhoz, hogy 2007-ben megkezdődjön az első BrainBox játék megalkotásának folyamata. A BrainBox World nagyon hamar a Green Board Game Company legnépszerűbb játéka lett, és még ma is sokat adnak el belőle.



2. ábra. Játék a *BrainBox World*-el

A játékalettáról hiányzott a megfigyelésen, gondolkodáson alapuló játék, ezt a piaci rést vette észre és használta ki eredményesen Gary Wyatt, hiszen az általa megalkotott BrainBox játék milliók kedvence lett világszerte. Már a játék létrehozásának első pillanatától kezdve lényeges vezérlő elv volt a fejlesztésében, hogy egy családi társasjátéknak gyorsnak, egyszerűen játszhatónak kell lennie, lehetőséget adva több korosztály együtt játszására, miközben a játék egyszerre szórakoztat és oktat.

Az alapjáték koncepciójának sikerén felbuzdulva mára már számos különböző témában elérhető a klasszikussá vált kocka alakú dobozban forgalomba kerülő játék: állatvilág, közlekedés, történelem, népszerű mesék, a világ városai, abc, foglalkozások, mítoszok, találmányok, matematika, stb. Jelenleg 40 különböző tematikával érhető el angol nyelven, magyarul pedig 23 féle BrainBox változat létezik [5].



3. ábra. Magyar nyelvű BrainBox játékok

A játékok dobozán jól látható helyen megjelölésre kerül, hogy mely korosztálynak szánták a játékot a készítők. Az életkor szerinti differenciálás megkönnyíti a szülőknek a megfelelő játék kiválasztását. Az óvodások számára ajánlott 3+, 4+ és 5+ megjelölésű játékok mellett az iskolás korosztály számára is készültek BrainBox játékok, itt a 6+, 7+ és 8+ szimbólumot láthatjuk a dobozon.

A BrainBox játékok nagy előnye, hogy szinte bárhol könnyedén, egyszerűen játszhatók, nem igényelnek előkészületeket, a doboz kinyitását követően azonnal kezdődhet a játék. Minden BrainBox dobozban találunk egy homokórát, egy dobókockát, valamint általában 55 - 70 darab játékkártyát. A négyzet alakú kártyák egyik oldalán egy képet látunk, a másik oldalon pedig ehhez kapcsolódóan 6, illetve 8 darab kérdést. A játék kezdetén elindítjuk a homokórát, amely 10 másodpercig pereg. Eddig van ideje a játékosnak tanulmányozni a képet, minél több részletet megfigyelni és memorizálni. Ha lepergett az összes homok, akkor a játékos dob a kockával és a dobás eredménye szerinti sorszámnak megfelelő kérdésre kell válaszolnia. Ekkor derül ki, hogy mit jegyzett meg a látottakból. Helyes válasz esetén a kártya a játékosnál marad, rossz válasz adása esetén pedig visszakerül a dobozba. A játékot az a játékos nyeri, akinek a legtöbb helyes válasza van. A BrainBox játékok további előnye, hogy nincs kötött játékidő, valamint a játékosok száma sem fix, akár önálló játéokra, tanulásra is alkalmasak. Az alapjátékok elsősorban a memória fejlesztését célozzák a vizualizációs gyakorlatokkal, azonban a szókincs bővítése, valamint az adott témakörhöz tartozó ismeretek rendszerezése is azok közé a kompetenciák közé tartozik, amelyek a játék során megerősödnek.

3. Függvénytani alapismeretek

Az egyváltozós valós függvények témaköréhez kapcsolódó ismeretek, továbbá a vonatkozó kompetenciák megnevezése, a részletes érettségi vizsgakövetelmények [8] leírásában is megjelenik. Ennek megfelelően az érettségiző diákkal szemben támasztott elvárások közé tartozik, hogy képes legyen a körülötte levő világ egyszerűbb összefüggéseinek függvényszerű megjelenítésére, ezek elemzéséből tudjon következtetni valóságos jelenségek várható lefolyására; képes legyen a változó mennyiségek közötti kapcsolat felismerésére, a függés értelmezésére. Ismerje fel a hozzárendelés formáját, tudja elemezni a halmazok közötti kapcsolatokat.

A vizsgakövetelményekben kiemelik, hogy a függvénytani témakör különösen alkalmas egy probléma három lépéses matematikai megoldásának szemléltetésére, azaz a matematikai modell megalkotására, a matematikai feladat megoldására a modellen belül, végül az eredmény értelmezésére. A függvényábrázolásnak jelentős szerepe van az egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásában is. Középszinten elvárás, hogy a vizsgázó:

- Ismerje a függvény matematikai fogalmát és a függvénytani alapfogalmakat (értelmezési tartomány, hozzárendelés, képhalmaz, helyettesítési érték, értékkészlet).
- Tudjon szövegesen megfogalmazott függvényt képlettel megadni.
- Tudjon helyettesítési értéket számítani, illetve egyszerű függvények esetén meg tudja határozni az $f(x) = c$ egyenletből az x -et.
- Ismerje a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés fogalmát.
- Ismerje és alkalmazza a függvényeket gyakorlati problémák megoldásánál.
- Ismerje az inverzfüggvény fogalmának szemléletes értelmezését (pl. az exponenciális és a logaritmus függvény vagy a geometriai transzformációk esetében).
- Ismerje, tudja ábrázolni és jellemezni az első-, másod-, harmadfokú, négyzetgyök, abszolútérték, $\frac{a}{x}$, exponenciális, logaritmus függvényeket.
- Tudjon értéktáblázat és képlet alapján függvényt ábrázolni, illetve adatokat leolvasni a grafikonról.
- Tudjon néhány lépéses transzformációt igénylő függvényeket függvénytranszformációk segítségével ábrázolni: $f(x) + c$, $f(x + c)$, $cf(x)$.
- Tudjon egyszerű függvényeket jellemezni (pl. grafikon alapján): értékkészlet, zérushely, növekedés, fogyás, szélsőérték, periodicitás, paritás szempontjából.

Az emelt szinten érettségiző diák esetén az elvárt kompetenciák között szerepel, hogy ismerje az analízis néhány alapelemét, amelyekre más szaktudományokban is (pl. fizika) szüksége lehet. Ezek segítségével tudjon függvényvizsgálatokat végezni, szélsőértéket, görbe alatti területet számolni. Az emelt szintű vizsgára vonatkozó további követelmények:

- Ismerje a függvénytani alapfogalmak pontos definícióját, az összetett függvény fogalmát, képzésének módját.
- Ismerje és alkalmazza a függvények összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának, a függvények megszorításának (leszűkítésének) és kiterjesztésének, valamint az inverzfüggvény fogalmát.
- Tudja ábrázolni derékszögű koordináta-rendszerben az alapvető függvények transzformáltjainak grafikonját ($cf(ax + b) + d$).
- Tudjon egyszerű függvényeket jellemezni (pl. grafikon alapján) értékkészlet, zérushely, növekedés, fogyás, korlátosság, szélsőérték, periodicitás, paritás szempontjából.
- Tudja meghatározni a függvények tulajdonságait az alapfüggvények ismeretében, transzformációk segítségével.
- Használja a konvex és konkáv fogalmakat a függvények jellemzésére. Tudjon másodfokú függvényre vezető szélsőérték-feladatokat megoldani.

4. BrainBox – Függvények

A **BrainBox - Függvények** az egyváltozós valós értékű függvények témakörhöz tartozó oktatást támogató készségfejlesztő játék, melynek prototípusa 60 darab számozott kártyalapot tartalmaz. Az eredeti BrainBox négyzetes lapjaival ellentétben, az általunk elkészített játék téglalap alakú kártyákat tartalmaz, mert így tetszetősebb és könnyebben olvasható függvénygrafikonokat tudtunk megjeleníteni. Az egyes kártyalapok tartalmát illetően a klasszikus BrainBox játék koncepcióját követtük, mely szerint a kártyák egyik oldalán egy ábra látható, a hátlapján pedig erre az ábrára vonatkozó kérdéseket, valamint a kérdésekre adott helyes válaszokat írtuk. A válaszok megadásával eltértünk az alapjátéktól, viszont a matematikai készségfejlesztést úgy látjuk igazán megalapozottnak, ha nem bízunk a véletlenre a kérdésre adandó jó választ. Így önálló tanulásra a játékunk nem igazán alkalmas, viszont kiscsoportos játék esetén egyértelmű, hogy milyen választ kell adni a feltett kérdésre.

A kártyákon lévő ábrákon különböző egyváltozós függvények grafikonjait látjuk, derékszögű koordináta-rendszerben, különböző színekkel megrajzolva, a függvény nevének és hozzárendelési utasításának feltüntetésével. A grafikonok feletti sávban megadtuk az ábrán szereplő függvények értelmezési tartományát, amely nem minden esetben a szóba jöhető legbővebb halmaz. Ugyanitt kijelöltük képhalmazként a valós számok halmazát, vagy esetenként megadtuk a pontos értékészletet. Szembe tűnhet, hogy a kártyákon nem egységes a grafikon feletti felirat, ennek az a magyarázata, hogy többféle jelölésmód megismertetésére törekedtünk, hiszen a függvények megadásakor nemcsak egy lehetőségből választhatunk. Nyilvánvaló, hogy egy függvény akkor adott, ha ismert az értelmezési tartomány és a hozzárendelési szabály. Ezek az információk minden esetben megtalálhatóak a lapokon.

Kártyaszám: 19 ★★★★★

$D_{f,g} = \mathbb{R}, R_f \subset \mathbb{R}, R_g \subset \mathbb{R}$

Kérdések

1. Melyik függvény páros? (g)
2. Két zérushelye van mindkét függvénynek? (Igen.)
3. Hány valós megoldása van az

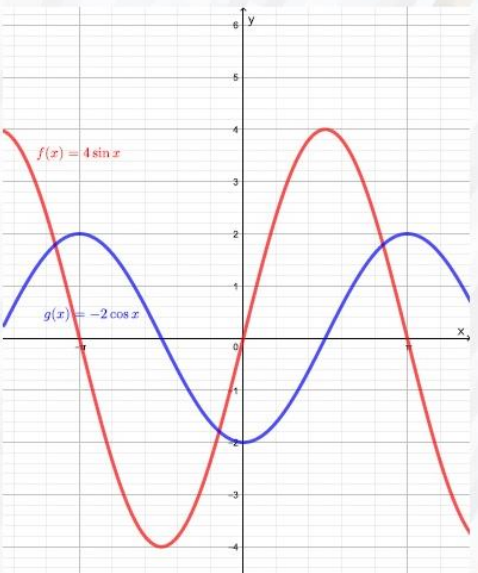
$$f(x) = g(x)$$
 egyenletnek? (2)
4. Van lokális minimuma az f függvénynek \mathbb{R} -en? (Nincs.)
5. Az f függvény grafikonja alulról nyitott parabola? (Igen.)
6. Invertálható-e az f függvény \mathbb{R}^+ -on? (Nem.)

4. ábra. A BrainBox - Függvények játék 19. kártyájának elő- és hátlapja

A kártya sorszáma mellett a jobb felső sarokban a kártyán szereplő függvények és a hozzájuk kapcsolódó kérdések nehézségi fokára utaló jelzést helyeztünk el, egytől öt csillagig terjedő skálán minősítve az adott feladatot. Több csillag jelöli a „fogósabb” feladványokat. A különböző nehézségi szintek megjelölésével az volt a célunk, hogy a játékot alkalmassá tegyük differenciált oktatási célokra, például egy gyengébb képességű csoportban célszerű lehet eleinte a négy és öt csillaggal jelölt lapokat félretenni.

Kártyaszám: 33 ★★★

$f : \mathbb{R} \rightarrow [-4; 4], g : \mathbb{R} \rightarrow [-2; 2]$



Kérdések

1. Az f függvény grafikonja átmegy az origón? (Igen.)
2. Korlátos a g függvény \mathbb{R} -en? (Igen.)
3. Szigorúan monoton-e az f függvény a $[0; \pi]$ intervallumon? (Nem.)
4. Hányszorosa az f függvény minimális értéke a g függvény minimális értékének? (Kétszerese.)
5. Melyik intervallum a g függvény értékkészlete? $[-2; 2]$
6. Hány zérushelye van a g függvénynek $-\pi$ és π között? (2)

5. ábra. A BrainBox - Függvények játék 33. kártyájának elő- és hátlapja

A kártyák másik oldalán az előlapon látható függvénnyel, vagy függvényekkel kapcsolatos kérdések olvashatóak. Minden esetben hat kérdést fogalmaztunk meg, törekedve arra, hogy egy kártyalapon belül ezek a kérdések minél változatosabbak legyenek és ragadják meg jól a túloldalon látható ábra jellegzetességeit, az ábrán szereplő függvények legfontosabb tulajdonságait. A kérdések számán nem változtattunk, így szabályos dobókockával játszható a játék. Szükség van még egy időmérésre alkalmas eszközre is, ami az eredeti játék esetén a homokóra. Amennyiben nincs homokóránk, akkor sem kell kétségbe esni, hiszen a mai kor fiataljai nagy valószínűséggel rendelkeznek időmérésre alkalmas eszközzel, gondolunk itt a karórákra, okostelefonokra, amelyek stopperként is funkcionálhatnak.

A 3. fejezetben leírt függvényjellemzők közül a középiskolai tananyagban is szereplő legfontosabb elemekre koncentrálna a kártyákon az alábbi tulajdonságokra kérdeztünk rá a leggyakrabban:

- adott halmazon való monotonitás;
- adott halmazon való invertálhatóság;
- adott halmazon való korlátosság;

- lokális vagy globális szélsőérték helye, nagysága;
- zérushelyek száma, elhelyezkedése;
- párosság, páratlanság;
- periodikusság;
- értelmezési tartománnyal, értékkészlettel kapcsolatos információk.

A kérdések megfogalmazásánál törekedtünk arra, hogy a feltett kérdés pontos legyen, világos, rövid és egyértelmű. Tekintettel arra, hogy konkrét információkra kérdezzünk rá a kérdések egy része eldöntendő kérdés, amelyekre igen vagy nem választ várunk. Például:

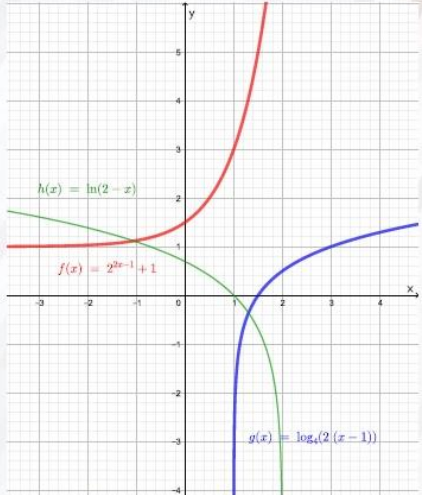
- Páros-e az f függvény?
- Korlátos-e a g függvény \mathbb{R} -en?
- Szigorúan monoton növekvő-e az f függvény \mathbb{R}^+ -on?
- Konvex-e az f függvény az értelmezési tartományán?

Máshol számszerű választ kell adni a feltett kérdésre. Néhány példa:

- Hány zérushelye van a g függvénynek?
- Hány megoldása van az $f(x) = 3$ egyenletnek?
- Mennyi a területe annak a síkidomnak, melyet a g függvény grafikonja a koordinátatengelyekkel bezár?
- Mennyi a periódusa a g függvénynek?

Kártyaszám: 60 ★★★★★

$f : \mathbb{R} \rightarrow (1, +\infty)$,
 $g : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $h : (-\infty, 2) \rightarrow \mathbb{R}$



Kérdések

1. Melyik függvény szigorúan monoton csökkenő az értelmezési tartományán? (A h függvény.)
2. Hány valós megoldása van az

$$f(x) = 0$$
 egyenletnek? (0)
3. Konvexitást tekintve milyen függvény a h függvény az értelmezési tartományán? (Konkáv.)
4. Mi a kapcsolat az f és a g függvény között? (Egymás inverzei.)
5. Melyik függvény alulról korlátos az értelmezési tartományán (Az f függvény.)
6. Melyik függvény nem értelmezett az $x = 1$ helyen? (A g függvény.)

6. ábra. A BrainBox - Függvények játék 60. kártyájának elő- és hátlapja

Olyan kérdéseket is megfogalmaztunk, amelyekre a valós számok halmazának egy részhalmaza a válasz, például:

- Mely intervallum a g függvény értékkészlete?
- Mi az f függvény értelmezési tartománya?
- Mely intervallum a két függvény értelmezési tartományának metszete?
- Melyik intervallum a metszete az R_f és R_g halmazoknak?

A kártyákon a legtöbb esetben két függvény grafikonja szerepel, de készítettünk egy, illetve három függvényt tartalmazó lapot is. A több függvény egyidejű szerepeltetésével lehetőség nyílt a függvények egymáshoz való viszonyával kapcsolatos kérdések feltevésére, például:

- Hány valós megoldása van az $f(x) = g(x)$ egyenletnek?
- Mely intervallumra igaz, hogy ott fennáll az $f(x) \leq g(x)$ egyenlőtlenség?
- Igaz-e, hogy az f függvény minimuma megegyezik a g függvény maximumával?
- Hányszorosa az f függvény minimális értéke a g függvény maximális értékének?
- Melyik függvény inverze az ábrán látható függvények közül az f ?
- Megegyeznek-e az f és a g függvények zérushelyei?

Rákérdezhettünk tehát olyan tulajdonságokra is, melyek nem érvényesek az ábra összes függvényére, vagy éppen ellenkezőleg, mindegyikre teljesülnek.

A **BrainBox – Függvények** az alapjáték valamennyi előnyös tulajdonságával bír, azaz kisebb csoporttal (2 - 8 fő) jól játszható, nem igényel hosszadalmas előkészületeket, gyors, lendületes játékkal tanít és szórakoztat. Az egyes partikra szánt időtartamot a játékosok képességeihez és igényeihez szabhatjuk. Egyrészt gondolunk itt arra, hogy gyengébb alaptudású játékosok esetén 10 másodperc helyett 20, vagy akár 30 másodperc is adható az ábra tanulmányozására és memorizálására, másrészt a játék teljes időkerete 10 perc és 30 perc között tetszőlegesen rögzíthető. Félóránál tovább nem célszerű játszani, több parti esetén érdemes szüneteket beiktatni. A játék során rengeteg új ismeretre tehetünk szert, a régiak pedig rögzülnek, elmélyülnek. Előnyben vannak azok a játékosok, akik már rendelkeznek függvénytani alapismeretekkel, hiszen a hozzárendelési szabály birtokában akkor is megválaszolhatók a kérdések, ha nem feltétlenül emlékszünk vissza az ábrára. Ez egyáltalán nem hátrány, hiszen a játék célja az, hogy valamennyi játékos eljusson arra a szintre, ahol már önmaga is képes fejben megalkotni a függvények grafikonjait, tehát a kérdésekre adandó válasz megadásához maga elé tudja képzelni a grafikonokat.

Prototípus játékról beszélünk, hiszen a LaTeX szövegszerkesztővel kialakított file-ok PDF formátumra hozását követően kerültek nyomtatásra a kártyák, majd lamináltuk őket a tartósság érdekében. Jelenleg 60 különböző kártyalapból áll a pakli, amelyet a trigonometrikus függvények inverzeivel, a hiperbolikus függvényekkel, valamint az area függvényekkel kapcsolatos kártyákkal szeretnénk bővíteni. Ezen felül további kártyalapokon a szignum függvényt és az összetettebb racionális törtfüggvényeket is szerepeltetni fogjuk.

Új, összetettebb függvényeket is tartalmazó kártyapakli készítésekor növelhetjük a kérdések számát is, 6 helyett 8, 10, 12, 16, vagy akár 20 kérdést is feltehetünk, hiszen a sokoldalú dobókockák erre lehetőséget adnak.

Terveink között szerepel egy olyan szoftver készítése, amely alkalmas lenne kártyalapok készítésére a **BrainBox – Függvények** játékhöz. Az alkalmazást beépített függvényábrázoló modullal szeretnénk ellátni, ahol legördülő listából lehetne kiválasztani az alapkérdéseket, valamint a válaszok megadásához is hasonló megoldáson gondolkozunk. Itt látjuk annak a lehetőségét is, hogy adott kártyacsomag elkészítésekor opcionálisan nyomtatható legyen olyan verzió is, amely az önálló tanulás kiegészítője lehet, azaz nem tartalmazza a helyes válaszokat. Kezdő játékosok esetén azonban szerencsésebbnek látjuk a játékot olyan lapkészlettel, ahol szerepelnek a jó megoldások. Az alkalmazás készítésében mindenképpen látunk fantáziát, hiszen az alapötlet felhasználásával a függvények témakörhöz kapcsolódóan általános, illetve középiskolában tanító kollégáknak is lehetőségük nyílna gamifikációs eszköztárunk bővítésére.

5. Konklúzió

Az innovatív tanulási és tanítási módszereknek az oktatás szövetébe történő integrálása a hallgatók motivációs szintjének növekedését és a tanulási folyamatban való sikeres részvételét célozza. A hallgatóközpontú gyakorlati órák során a passzív befogadó szerep háttérbe szorul, helyette az aktív, közreműködő jelleg erősödik. A hallgatók önálló tanulásának igénye összhangban van a konstruktivista pedagógia alap gondolatával. Ez a pedagógiai irányzat arra a megfontolásra épít, hogy a tudást mindenkinek önállóan, de nem egyedül kell megszereznie, a gondolkodási folyamatokban aktívan részt kell venni, vagyis másokkal együtt kell működni az elsajátítandó kompetencia érdekében. A frontális tanítás, illetve a leegyszerűsített, megszerkesztett online tananyagok ezt nem tudják biztosítani, csak a tapasztalatok és az életszerű helyzetek. Ebben a modellben a tanulási környezet is összetettebb, mert nemcsak az oktató és a klasszikus oktatástechnikai eszközök (pl. tankönyv, példatár, tábla) szerepelnek benne, hanem napjaink fiataljainak igényeihez igazodó okos eszközök, valamint egyéb oktatást támogató „kellékek”.

Saját fejlesztésű **BrainBox – Függvények** játékunkat azért hoztuk létre, hogy alkalmas eszközünk legyen a hallgatók függvénytani hiányosságainak pótlására. Sajnálatos tény, hogy a függvény fogalmával, valamint elemi tulajdonságaival a középszintű érettségi sikeresen teljesítők nagy része nincs teljesen tisztában. A hiányos alaptudás pedig később megbosszulja magát, hiszen az alapfüggvények ismeretét a felsőoktatásba belépőktől nyilvánvalóan elvárjuk. Aki nem rendelkezik a megfelelő szintű ismeretekkel, annak gondoljai lesznek a félév közti zárthelyi dolgozatokon, illetve a félév végi vizsgákon.

Nagy reményeket fűzünk a **BrainBox – Függvények** játék sikerességéhez. Reméljük, hogy ez a gyorsan játszható, érdekes játék megfelelő motivációt biztosít majd azoknak a hallgatóknak, akiknek szükségük van a függvényekkel kapcsolatos fontosabb ismeretek felelevenítésére, mélyítésére. Bízunk benne, hogy a játék segítségével észrevétlenül rögzülnek az alapvető függvénytani fogalmak, bővül a matematikai szókinccs és magabiztosabbá válik a kifejezések használata.

Irodalomjegyzék

- [1] Árvai-Homolya, Szilvia; Lengyel, Szilvia; Lengyel, Szilvia: *Matematika emelt szintű érettségi vizsgák elemzése az informatikai és műszaki alapképzési szakokon elvárt matematikai tudásanyag szempontjából*, In: Talata, István (szerk.) *Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók 41. Országos Konferenciája: MAFIOK 2017*, Budapest, Magyarország: Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar, pp. 79-87, 2017
- [2] Damsa Andrei, Fromann Richárd: *A gamifikáció (játékosítás) motivációs eszköztára az oktatásban*, Új pedagógiai szemle, 2016/3-4. [Online] Elérhető: <http://folyoiratok.ofi.hu/uj-pedagogiai-szemle/a-gamifikacio-jatekositas-motivacios-eszkoztara-az-oktatásban> [Megtekintés: 2019. 06. 16.]
- [3] Kovács Tamás, Várallyai László: *Gamifikáció, avagy a játékosítás szerepe napjainkban*, International Journal of Engineering and Management Sciences (IJEMS) Vol. 3. No. 3. pp. 171-180, 2018
- [4] Maczák Ibolya: *A Z-generáció az iskolapadban*, [Online], Elérhetőség: <http://tantrend.hu/hir/z-generacio-az-iskolapadban> [Megtekintés: 2019. június 17.]
- [5] Mihály Katalin: *BrainBox: Állatok, Matematika, Első képeim* [Online], Elérhetőség: <http://logikid.hu/brainbox-allatok-matematika-elso-kepeim/> [Megtekintés: 2019. június 17.]
- [6] Nachlieli Talli, Tabach Michal: *Growing mathematical objects in the classroom – The case of function*. International Journal of Educational Research 51–52 (2012), p. 10–27
- [7] *Nemzeti alaptanterv*. Magyar Közlöny 2012. évi 66. szám, Elérhetőség: <http://www.magyarokzlony.hu/pdf/13006> [Megtekintés: 2019. június 16.]
- [8] Oktatási Hivatal, “Matematika érettségi vizsgakövetelmény”, 2017., [Online], Elérhetőség: https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/erettsegi/vizsgakovetelmenyek2017/matematika_vk.pdf. [Megtekintés: 2019. május 17.]