Gradus Vol 5, No 2 (2018) 214-219
ISSN 2064-8014

„A MATEMATIKA SZÉP, EZ PEDIG EGY NEM TÚL SZÉP FELADAT”

“MATHEMATICS IS FUN; THIS PROBLEM, HOWEVER, IS NOT MUCH FUN…”

Debrenti Edith [1*]

[1] Gazdaságtudományi Tanszék, Gazdaság és Társadalomtudományi Kar, Partiumi Keresztény Egyetem, Románia

Kulcsszavak:
szövegesfeladat,
problémamegoldás,
Pólya-modell

Keywords:
word problem,
problem solving,
Polya's approach

Cikktörténet:
Beérkezett 2018. augusztus 01.
Átdolgozva 2018. szeptember 04.
Elfogadva 2018. október 01.

Összefoglalás

Egy negyedik osztályos munkafüzetből vett szöveges feladat egy szakmai csoportban komoly vitát váltott ki. Több pedagógus vitatkozott azon, hogy akkor ő „bosszantotta volna ilyen példával” a tanulóit vagy sem, hogy versenyfeladat vagy sem, ugorjuk át vagy sem a hasonló feladatokat. Van, aki szerint tehetséggondozás során lehet és kell ilyenekkel foglalkozni, mert bizony van olyan negyedikes, aki ezt képes megoldani és szereti a kihívást. Más szerint a matematikaversenyek sokszor “brutál” feladatokat tartalmaznak. “Az is lehet, hogy ez a feladat el van rontva.”

A legkevesebb szó arról esett, hogyan is kellett megoldani ezt a feladatot. Történt egy-két próbálkozás, valaki talált egy sajátos esetben megoldást, de senki meg nem oldotta. Volt, aki felismerte, hogy „egyenlet felírásával nem lehet megoldani, épp ez adja a nehézségét is.” Volt, aki arra a következtetésre jutott, hogy elrontva nincs a feladat, csak nem alsósnak való, “a gondolatmenet nem alsósokra van szabva”.

Tanítóképzős hallgatókkal boncolgattuk a feladatot, a cél az volt, hogy találjunk egy elindulást és próbáljuk folytatni. A feladatot először átalakítottuk, úgy, hogy tudjuk megoldani. Majd visszatértünk az eredeti feladathoz, majd ezt Pólya-módszerével, segédkérdések segítségével próbáltuk megoldani.

Abstract

A word problem from a 4th grade workbook created a serious debate among members of a professional group. A number of pedagogues raised several questions, including whether they “would annoy their pupils with such a problem”, whether it is a problem to be given at competitions, whether such problems should be skipped or not. Some argue that these should be solved during talent development, since there are 4th graders who like challenges and can solve this problem. Others consider that mathematics competitions often contain “brutal” problems. “It is possible that this problem is wrong.”

How to solve this problem was the least discussed about. One

* Kapcsolattartó szerző. Tel.: +40 771 421 725.
E-mail cím: edit.debrenti@gmail.com

or two attempts have been made, somebody found the solution in a special case, but nobody solved it. Some realized that "it cannot be solved by equation; this is what makes it difficult." Some concluded that the problem is not wrong, however it is not suitable for primary pupils "the line of reasoning is not shaped for primary pupils."

We have analyzed the problem with teacher training students with the aim of finding a starting point and way to continue. First we reformulated the problem to make it solvable. Then we returned to the original problem and tried to solve it with the help of question using Polya's approach.

1. Bevezetés

Már elemi osztályokban jelentős szerepe van a problémamegoldási stratégiák elsajátításának. A problémamegoldó képesség hatékony fejlesztéséhez hozzájárul minél több olyan szöveges feladat felvetése, amely ismeretlen a feladatmegoldó számára, és amelyhez neki kell megtalálnia a megoldási lépéseket, az algoritmust. A probléma-megoldási stratégiákat, gondolkodási műveleteket tudatosan kell tanítani a tanórákon. A legtöbb esetben a probléma-megoldási folyamat áll a középpontban, nem pedig a kapott eredmény. Ezen folyamat struktúráját többször is hangsúlyoznunk kell a tanulóknak. [1]

Tekintsünk egy matematikai problémát! A problémamegoldást az alábbi négy részre oszthatjuk [3]: 1. A probléma megfogalmazása. 2.Modellalkotás 3.Megoldás kiszámítása 4.Megoldás értelmezése

Érdemes azon elgondolkodni, hogy melyik résznek mekkora szerepet tulajdonítunk, illetve, hogy az oktatásunkban mekkora jelentőséggel bír. Előjön-e egyáltalán az első pont, és ha igen, akkor ki fogalmazza meg a problémát? Van-e amikor a diákra bízzuk? Létezik-e kapcsolódása az általunk felvetett feladatoknak a valós helyzetekhez, mindennapi gyakorlathoz? Megfigyelhető, hogy a matematika oktatásban legnagyobb részben a harmadik pontra fókuszálunk. ez a rész viszi el a matematika oktatás 80%-át, amennyiben számítógépet alkalmaznánk a számolás elvégzéséhez, a tanulók sokkal több időt tölthetnének a problémák megértésével, matematikai modellezéssel, diszkusszióval. A matematika ugyanis nem azonos a számolással, egyenlet megoldással. Sokkal több annál. Amennyiben mentesítenénk a diákokat a számolás terhe alól, sokkal több idő juthatna a valódi alkalmazásokra, a logikus gondolkodás fejlesztésére, algoritmizálásra, elemző képesség kialakítására.[5]

Egy negyedik osztályos munkafüzetből [2] vett szöveges feladat egy népszerű, a közösségi média révén széles körű, tanítói szakmai csoportban komoly vitát váltott ki. Több pedagógus szólt hozzá, vitatkozott a feladaton. A legkevesebb szó arról esett, hogyan is kellene megoldani ezt a feladatot. Történt egy-két próbálkozás, egy-egy sajátos esetben megoldás, de senki nem tudta megoldani. "Az is lehet, hogy ez a feladat el van rontva." –írta valaki, és volt, aki arra a következtetésre jutott, hogy elrontva nincs a feladat, csak nem alsósnak való, "a gondolatmenet nem alsósokra van szabva". Volt, aki felismerte, "a feladat pont olyan, amit egyenlet felírásával NEM lehet megoldani. Épp ez adja a nehézségét is". Különböző észrevételeket fogalmaztak meg, mint például: "Szerintem ugord át ezt a feladatot! Ez gyerekromboló példa." Vagy: "mivel a matematika SZÉP, ez pedig egy nem túl szép feladat..."

Felvetődik a kérdés: a talált megoldásokon, sajátos eseteken kívül még van-e más megoldás is? Milyen megoldási stratégiát tudnánk alkalmazni, ami egy negyedikes tanuló esetében is követhető lenne? Egyértelműnek tűnik, hogy egyenletek felírásával nem lehet negyedikes szinten megoldani a feladatot. (Az 5 egyenlet, 5 ismeretlen járhatatlan út egy elemista számára.)

Összegezve két sajátos megoldását kapták a feladatnak, Az egyik tanító valaki segítségével egy sajátos megoldást ad meg, nem írja le hogyan, csak az eredményt ismerteti: a három ládában (46, 63, 127) kg narancs volt eredetileg.

Az *1. táblázat* tartalmazza a pedagógusok (n=40) feladatmegoldásait, próbálkozásait:

1. Táblázat. A pedagógusok feladatmegoldásai, próbálkozásai (n=40)

Értékelés	*Fő*	
Rossz megoldás	9	Helytelen szövegértelmezések
Próbálkozások a megoldásra	5	Algebrai módon, egyenlettel (3). Nem születik jó megoldás. (”van egy egyenlet és három ismeretlen “) 1 fő legalább egy sajátos esetben megoldja a problémát. (5 egyenlet, 5 ismeretlen: A, B, C. D, x)
Sajátos eset	1	Talál valaki segítségével egy sajátos megoldást, nem írja le hogyan.
Próbálgatással	1	“Találjunk ki egy elindulást és próbáljuk folytatni!” Az ötlet jó, elindul, de nem vezeti végig.
Tanácsok	5	“ábrázolással”,”szakaszokkal”
Attitüdök	19	Többségében negatív

Az alábbi *1.ábra* tartalmazza egy másik sajátos esetben a megoldási utat, mely szerint a három ládában (64, 77, 95) kg narancs volt eredetileg:

A,B,C a ládák
D – eladott narancsok

A+B+C=236

$$\begin{aligned} A - X &= D \\ B - (3X + 3) &= D \\ C - (6X + 6) &= D \end{aligned}$$

$$X + 3X + 3 + 6X + 6 = 10X + 9 = D$$

$$\begin{aligned} A &= D + X &&= 11X + 9 \\ B &= D + 3X + 3 &&= 13X + 12 \\ C &= D + 6X + 6 &&= 16X + 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11X + 9 + 13X + 12 + 16X + 15 &= 236 \\ 40X + 36 &= 236 \\ X &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 11 * 5 + 9 = 64 \\ B &= 13 * 5 + 12 = 77 \\ C &= 16 * 5 + 15 = 95 \end{aligned}$$

1. ábra. A feladat egy sajátos megoldása (5 egyenlettel, 5 ismeretlennel)

2. A feladat megoldása

Három ládában 236 narancs van. Az első ládából eladnak valamennyit, a másodikból 3-mal többet, mint az első ládából eladott narancsok háromszorosa és a harmadik ládából kétszer annyit, mint a második ládából. Ekkor a ládában ugyanannyi narancs maradt, mint ahányat összesen kivettek eddig a három ládából. Számítsd ki, hány narancs volt eredetileg mindegyik ládában? [2]

1.lépés. Alapötlet: rendezzük az adatokat táblázatba. Jelöljük x-szel az első ládából eladott mennyiséget, ennek függvényében fel tudjuk írni, hogy a II. és a III. ládából mennyit adtak el, helyes szövegértelmezés alapján. Az bizonyos, hogy a ládákból el is adtak, meg maradt is bennük. (Mivel erre vonatkozólag nem volt a szövegben minden ládára információ, csak annyit tudunk, hogy “valamennyit”, a feladatmegoldók ezzel nem számoltak egyáltalán!) A hiányos információ helyére kérdőjelet írtam. A *2. táblázat* tartalmazza a feladat adatait:

2. Táblázat. A feladat adatai

Ládák	*Eladtak*	*Maradt*	*Volt összesen*
I. láda	x	?	?
II. láda	3x+3	?	?
III. láda	2(3x+3)=6x+6	10x+9	16x+15
Összesen	x+3x+3+6x+6=10x+9		236

2.lépés. “Találjunk ki egy elindulást és próbáljuk folytatni!” Feltételezzük, hogy az első ládából egy narancsot adtak el, így a másodikból 6, a harmadikból 12 narancsot adtak el, vagyis összesen 19 narancsot. A *3. táblázat* tartalmazza a feladat adatait x=1 sajátos esetben:

3. Táblázat. A feladat adatai x=1 sajátos esetben

Ládák	*Eladtak*	*Maradt*	*Volt összesen*
I. láda	1	?	?
II. láda	3+3=6	?	?
III. láda	2(3+3)=12	19	12+19=31
összesen	1+6+12=19		236

Így a III. ládában 12+19=31 narancs volt eredetileg, tehát az első két ládában lehetett a többi, összesen 236-31=205. Tehát az I. és a II. ládában 205 narancsnak kellett lennie összesen. Ennek a két ládában való eloszlása sokféleképpen lehetséges: 1+204=2+203=…=199+6
(mert az I. ládában legkevesebb 1, a II. ládában legkevesebb 6 narancsnak lennie kell).
Lehetséges, hogy az első ládában egy narancs volt és azt el is adták, míg a II. ládában 204, amiből 6 narancsot eladtak, a többi megmaradt. Hasonlóképp lehet, hogy az első ládában 2 narancs volt, abból egy narancsot eladtak, a másik megmaradt, míg a II. ládában 203, amiből 6 narancsot eladtak, a többi megmaradt. Tehát a 236 narancs eloszlása a ládákban: (1, 204, 31), (2, 203, 31), (3, 202, 31)… (199, 6, 31), összesen 199 féleképpen lehetséges.
A továbbiakban a *4. táblázatban* feltételezzük, hogy az első ládából két narancsot adtak el:

4. Táblázat. A feladat adatai x=2 sajátos esetben

Ládák	*Eladtak*	*Maradt*	*Volt összesen*
I. láda	2	?	?
II. láda	9	?	?
III. láda	18	29	18+29=47
összesen	29		236

A III. ládában 18+29=47 narancs volt eredetileg, 236-47=189, tehát az I. és a II. ládában 189 narancsnak kellett lennie összesen. Ennek a két ládában való eloszlása sokféleképpen lehetséges: 2+187=…=180+9 (mert az I. ládában legkevesebb 2, a II. ládában legkevesebb 9 narancsnak lennie kell). Tehát a 236 narancs eloszlása a ládákban: (2, 187, 47), (3, 186, 47), (4, 185, 47)…(180, 9, 47), összesen 179 féleképpen lehetséges.
Hasonló gondolatmenetet követve, analóg módon eljutunk az utolsó lehetséges esethez, ezt tartalmazza az *5. táblázat,* feltételezzük, hogy az első ládából tíz narancsot adtak el:

5. Táblázat. A feladat adatai x=10 sajátos esetben

Ládák	*Eladtak*	*Maradt*	*Volt összesen*
I. láda	10	?	?
II. láda	33	?	?
III. láda	66	109	66+109=175
összesen	109		236

A III. ládában 66+109=175 narancs volt eredetileg, 236-175=61, tehát az I. és a II. ládában 61 narancsnak kellett lennie összesen. Ennek a két ládában való eloszlása sokféleképpen lehetséges: 10+51=…=28+33 (mert az I. ládában legkevesebb 10, a II. ládában legkevesebb 33 narancsnak lennie kell). Tehát a 236 narancs eloszlása a ládákban: (10, 51, 175), 47)…(28, 33, 175) összesen 19 féleképpen lehetséges.
A lehetséges megoldások száma összesen: 199+179+ 159+...+29+19= 1090.
Miért nem lehetséges több eset? Miért állunk itt meg? Feltételezzük, hogy az első ládából 11 narancsot adtak volna el, ezt tartalmazza a *6. táblázat*:

6. Táblázat. A feladat adatai x=11 sajátos esetben

Ládák	*Eladtak*	*Maradt*	*Volt összesen*
I. láda	11	?	?
II. láda	36	?	?
III. láda	72	119	72+119=191
összesen	119		236

Így összesen 119 narancsot adtak volna el a három ládából összesen, ami több mint fele az össznarancsok számának, tehát nem tud a másik fele a III. ládában maradni.
Vagyis a III. ládában 72+119=191 narancs lett volna eredetileg, 236-191=45, tehát az I. és a II. ládában 45 narancs lenne összesen. De az I. ládában legkevesebb 11, a II.ládában legkevesebb 36 narancsnak kellene lennie, ez nem lehetséges.
3.lépés. Az általánosítást tartalmazza a *7. táblázat*:

7. Táblázat. A feladat adatai általános esetben

Ládák	*Eladtak*	*Maradt*	*Volt összesen*
I. láda	x	? a	?
II. láda	3x+3	? b	?
III. láda	2(3x+3)=6x+6	10x+9	16x+15
összesen	x+3x+3+6x+6=10x+9		236

236- (16x+15)= 221-16x ennyi maradt az. I. és a II. ládában összesen eladás után. Eloszlásuk:
(a, b, 10x+9), ahol a+b =221-16x és b $\geq$ 0.

3. A feladat kiegészítése Pólya-módszerével, segédkérdésekkel

Felvetődik a kérdés, hogyan juthatunk el a fenti megoldáshoz, milyen segítséget kaphatunk ehhez az induláskor? Tanítóképzős hallgatókkal boncolgattuk a feladatot, a cél az volt, hogy találjunk egy elindulást és próbáljuk folytatni. A feladatot először átalakítottuk, úgy, hogy tudjuk megoldani. Majd visszatértünk az eredeti feladathoz, majd ezt Pólya-módszerével, segédkérdések segítségével próbáltuk megoldani. Ezt azért tartottam nagyon fontosnak, mert Pólya szerint: „a kérdések közül néhányat a diák olyan jól elsajátíthat, hogy végül fel tudja tenni magának a megfelelő kérdést a megfelelő pillanatban, és így magától jut el a megfelelő gondolatsorra...a diák végül is megtanulja, hogyan kell helyesen alkalmazni ezeket a kérdéseket és útmutatásokat, és ezzel olyasmit sajátít el, ami sokkal fontosabb bármilyen matematikai részletkérdés ismereténél” [4]. A következő kérdéssoron keresztül eljuthatunk a fentebb ismertetett feladatmegoldáshoz:

1. A feladat megértése

Miből induljunk ki? Mit keresünk? Mi itt az ismeretlen(ek)? Mit akarunk elérni? Mi van megadva? Melyek az adatok? Válaszd ki és jegyezd le az adatokat és a feltételeket, vezess be alkalmas jelölést, ha szükséges! Rendszerezd ezeket táblázatba! Képzeld el, játsszd el a szituációt!
Van-e szükség további adatokra? Vannak fölösleges adatok? Fogalmazd át a feladatot, hogy jobban megértsd! *Milyen összefüggéseket látsz az eladott mennyiségek között? Függetlenek egymástól?* Nem tudnál az adatokból valami hasznosat levezetni? *Tudnád összesíteni az eladott mennyiségeket?* Mit kötünk ki? Milyen kikötés (feltétel) adott? *Mit tudsz a megmaradt*

mennyiségekről? Elegendő-e a kikötés az ismeretlenek meghatározására? Milyen összefüggést látsz az ismeretlenek és az adatok között? Hogyan kapcsolódik az ismeretlen az adatokhoz? Tudnád szemléltetni, ábrát rajzolni?

2. Tervkészítés

Találkoztál már hasonló feladattal? Mi a nehézséged ezzel a problémával, mi a probléma kritikus eleme? (Mitől nehéz neked ez a probléma?) Bontsd részekre a problémát, nem tudnád megoldani legalább a feladat egy részét? Megvizsgálható egy sajátos esetben az összefüggés az ismeretlenek és az adatok között?

3. A terv végrehajtása

Találj ki egy elindulást és próbáld folytatni! Írd le a megoldásod lépéseit és magyarázd őket.
Ellenőrizz lépésenként, hogy az esetleges hiba ne a végén derüljön ki.
Hány különböző megoldást találtál ebben a sajátos esetben? Meddig folytatható ez az eljárás?
Hány különböző megoldást találtál? Tudnád összesíteni? Tudnál általánosítani?
Ha a terved nem vezetett eredményre, akkor keress másik tervet.

4. A megoldás vizsgálata

Tudnád ellenőrizni az eredményt? Gondold át még egyszer a kész megoldást! Bizonyosodj meg arról, hogy a megoldás ésszerű, elfogadható. Felhasználtál minden adatot? Számításba vetted az egész kikötést? Keress másik megoldási módszert is. Alkoss új feladatot az adatok, a feltételek változtatásával.[4]

4. Összegzés

Az iskolai matematikatanítás egyik legfontosabb feladata, hogy a matematikai gondolkodás fejlesztése által segítse a gondolkodás általános kultúrájának kiteljesedését. Ennek érdekében alapvető célja elérni, hogy a tanulók mind inkább ki tudják választani, és alkalmazni tudják a mindennapi élet jelenségeihez illeszkedő matematikai modelleket, gondolkodásmódokat (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, konstruktív, kreatív stb.), módszereket (aritmetikai, algebrai, geometriai, függvénytani, statisztikai) és leírásokat [6].

A hatékony gondolkodásfejlesztés az elemi osztályokban csak akkor valósulhat meg, ha az alapfokú (elemi) oktatásban dolgozó pedagógusok matematikai gondolkodására is érvényesek a fent felsoroltak. Konvergens gondolkodáshoz vagyunk szokva, ezért egy divergens, több lehetséges kimenetellel rendelkező feladat könnyen feladja a leckét. Algebrai úton, egyenlettel nem minden feladat oldható meg, sőt az elemisek gondolkodásához közelebb áll a próbálgatás módszere, ezért nekünk ahhoz kell alkalmazkodni. A táblázatba rendezés, mint módszer, fontos lehet sok feladat esetén. A hozzáállásunk egy feladathoz kulcsfontosságú.

Boncolgatva egy nehezebb feladatot, a legfontosabb, hogy **találjunk egy elindulást** és próbáljuk folytatni. A feladatott alakítsuk át úgy, hogy tudjuk megoldani, majd visszatérünk az eredeti feladathoz Pólya-módszerével, segédkérdések segítségével próbáljuk megoldani a problématípusú feladatokat.

Irodalomjegyzék

[1] Ambrus András. (2002). A problémamegoldás tanításának elméleti alapjai. *Új Pedagógiai Szemle*, 2002 október, 157-169.

[2] Berechet, Daniela. (2017). Gyakorlófüzet- Differenciált munkamódszerek, IV.osztály, Editura Paralela45, Szupermatek fejezet.

[3] Kis Márta. (2017). Az oktatásunk inflexiós pontjában vagyunk!- Hova tovább matematika tanítás? In *Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók 41. Országos Konferenciája* (ed. Talata István), Digitalpress, Budapest.

[4] Pólya György. (2000). A gondolkodás iskolája. Akkord.

[5] Wolfram, Conrad. (2010). Teaching kids real math with computers. TEDGlobal. https://www.ted.com/talks/conrad_wolfram_teaching_kids_real_math_with_computers/tanscript?language=hu. [Megtekintés: 18-July-2018].

[6] Kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára (2012) http://kerettanterv.ofi.hu/01_melleklet_1-4/index_alt_isk_also.html [Megtekintés: 20-June-2018].