Gradus Vol 5, No 2 (2018) 249-257
ISSN 2064-8014

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI GYAKORLATOK ELŐADÁSON

PROBABILITY LECTURE FROM ANOTHER POINT OF VIEW

Dr Takács Anna Mária

Módszertani Intézeti Tanszéki Osztály, Pénzügy és Számviteli Kar, Budapesti Gazdasági Egyetem, Magyarország

Kulcsszavak:
valószínűségszámítás,
matematika didaktikai nézetek,
oktatási módszerek

Keywords:
probaility,
didactical views,
methodology

Cikktörténet:
Beérkezett 2018. július 15.
Átdolgozva 2018. szeptember 04.
Elfogadva 2018. október 01.

Összefoglalás

A Gazdasági matematika 2 tantárgy keretében tanulnak hallgatóink valószínűségszámítást. Diákjaink az előadásokat kis számban látogatják, ezért gondoltunk arra, hogy az elmélet mellett típus feladatok megoldási módszereit is bemutatjuk előadáson. Az előadások látogatásának növelése érdekében ún „pontgyűjtőt” is írhattak hallgatóink. Mennyire segítették ezek a tantárgy sikeres teljesítését? Ezt foglaljuk össze mind oktatói, mind hallgatói oldalról.

Abstract

Our students learn probability in the course Business Mathematics 2. Not many students frequent lectures, thus we concluded to solve typical exercises in lecture too, besides presenting the theory. To help the frequency of coming to lecture we have introduced "point saving" quizzes. To what extent have these helped to absolve the course? We summarise the answer from both the students, and our own point of view!

1. Bevezetés

A Gazdasági matematika 2 tantárgyat második szemeszterben ajánlott felvenni hallgatóinknak a Kalkulus sikeres teljesítése után.

Az oktatóink között nézeteltérések adódnak abból, hogy előadásokon milyen mélységben hangozzék el az elméleti tananyag, valamint a zárthelyi dolgozatokban, vizsgadolgozatokban legyen-e elméleti számonkérés, bizonyítás.

Az előadások látogatása a diákok körében nem népszerű, mivel nem kötelező és az elméleti anyagot is „unalmasnak" tartják. Mit tehetünk mégis, hogy növeljük a látogatottságot? Idén gyakorlatiasabbá tettük az elméleti órákat, írattunk pontgyűjtőt. Ennek eredményességét mutatjuk be az alábbiakban.

2. Elméleti kitekintés

A felsőoktatásban is egyre inkább használnunk kell az oktatásban a didaktikai eszközöket, mivel diákjaink felkészültsége a középszintű érettségi alapján nem elegendő a felsőoktatási tananyag elsajátításához. Egyik sarkalatos kérdés az elmélet, a bizonyítások számonkérése.

* Kapcsolattartó szerző. E-mail cím: Takacs.Anna@uni-bge.hu

A középszintű érettségi követelményrendszere szerint bizonyításokat nem kell végezniük a tanulóknak.

2.1. A bizonyítás tanításáról a didaktikában

A bizonyítások szigorúsága azt jelenti, hogy az indoklás „stimmel”, korrekt. A közoktatásban az alsóbb osztályokban argumentációk, indoklások fordulnak elő. Winter a következő kategóriákat különbözteti meg:
- megállapodásokhoz való alkalmazkodás (definíciók)
- általános állítások konkrét példákon való kipróbálása
- indoklás, következtetés, bizonyítás
- indoklások érvényességének vizsgálata
- álbizonyítások felfedése
- matematikai megfontolások jelentőségének értékelése

Pszichológiai oldalról közelítve a kérdést, beszélhetünk prematematikai bizonyításokról, úgymint konkrét, materiális objektumokkal való manipulálás, ill. a matematikai tényállások, kapcsolatok szemléltetése képek, vázlatok segítségével (tartalmi, szemléletes bizonyítások), amelyekben megjelennek a Bruner féle reprezentációk. Semadeni szerint először konkrét fizikai cselekvések kerülnek realizálásra, ezt követi az interiorizációs folyamat, a végső fázis az általánosítás. Megkülönböztethetünk szemléletes és formális bizonyítást. [3]

A bizonyítási koncepcióknak Stein szerint négy szintje van: a matematikai-logikai elmélet szintje, a matematikai elmélet szintje, a lokálisan rendezett elmélet szintje (axiómák, definíciók, következtetési szabályok, bizonyítás), a mindennapi okoskodások szintje (nyelv, axióma, definíciók, következtetési szabályok, bizonyítás). [3]

A bizonyítások tanítása során a következő fázisokat különböztetjük meg: tételek megsejtése, bizonyítási ötlet megtalálása, bizonyítási stratégiák, módszerek alkalmazása, bizonyítás rögzítése, leírása, reflexió. A sejtések megfogalmazásához a következő eljárásokat követjük: tételek megfordítása, általánosítás, indukció, számítási feladat megoldása, elemzése; szerkesztési feladat megoldása, elemzése; geometriai konfiguráció elemzése, algebrai tételek megsejtése és bizonyítása geometriai szemléltetés alapján. A következő fázis a bizonyítási ötlet megtalálása, bizonyítási stratégiák, módszerek alkalmazása. Az utolsó fázisban történik a bizonyítás rögzítése, leírása, a reflexió. [3]

Bizonyítási stratégiák: szintézis (célirányos okoskodás), analízis (fordított irányú okoskodás), nem teljes analízis. Bizonyítási módszerek: direkt bizonyítások,teljes indukciós bizonyítások és az indirekt bizonyítások. [3]

Pólya külön fejezetet szán a bizonyítás tanításának szükségességéről. Konkrétan felteszi a kérdést, kérdéseket: Minek bizonyítani?- ahogy a hallgatók is kérdezik. Miért tanuljunk vagy tanítsunk bizonyításokat? Mi helyesebb: semmit sem bizonyítani, mindent bizonyítani, vagy bizonyos dolgokat bizonyítani, bizonyos dolgokat nem? És ha csak egyes dolgokat bizonyítunk, melyek legyenek azok? Nála a következő öt kategóriával találkozunk: teljes bizonyítások, logikai rendszer, mnemotechnikai rendszer, a szakácskönyv-rendszer, nem teljes bizonyítások.[7]

2.2. Valószínűségszámítási fogalomtár a pontgyűjtő feladataihoz

Teljes valószínűség tétele: Ha egy H eseménytérben a $B_1, B_2, ..., B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor a H-hoz tartozó tetszőleges A eseményre:

$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A|B_i)$, azaz $P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+...+P(B_n)\cdot P(A|B_n)$ (1)

Bayes-tétel: Ha egy H eseménytérben a $B_1, B_2, ..., B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak és $P(B_k)>0$ $(k=1,2,...,n)$, akkor bármely a *H*-hoz tartozó, pozitív valószínűségű *A* eseményre igaz, hogy $P(A_i|B)=\dfrac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\cdot P(B|A_j)}$ $(k=1,2,...,n)$ (2)

Valószínűségi változó: Tekintsük valamely kísérlet elemi eseményeinek halmazát. Minden egyes elemi eseményhez rendeljünk egy és csakis egy valós számértéket. Ezen hozzárendeléssel értelmezett függvényt valószínűségi változónak nevezzük [3]

Diszkrét valószínűségi változó: A ξ valószínűségi változót diszkrétnek nevezzük, ha lehetséges értékei véges vagy megszámlálható számosságú halmazt alkotnak.

Folytonos valószínűségi változó: A ξ valószínűségi változót folytonosnak nevezzük, ha lehetséges értékeinek halmaza nem megszámlálható számosságú (pl. a számegyenes egy intervallumának valamennyi értéke).

Eloszlásfüggvény: Az $F(x) = P(\xi < x)$ $(-\infty < x < \infty)$ függvényt a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük.

Diszkrét valószínűségi változó eloszlása: Legyen A_k az eseménytér elemi eseményeinek az a részhalmaza, amelyhez a $\xi = x_k$ érték tartozik, akkor a $p_k = P(\xi = x_k)$ $(k = 1, 2 \ldots)$ valószínűségek összességét a ξ valószínűségi változó valószínűségeloszlásának, röviden eloszlásnak nevezzük.

Folytonos valószínűségi változó eloszlása: A ξ folytonos valószínűségi változót folytonos eloszlásúnak mondjuk, ha létezik olyan $f(x)$ függvény, amellyel eloszlásfüggvénye úgy adható meg, hogy $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Sűrűségfüggvény: Az $f(x)$ függvényt a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezzük. [1]

A valószínűség és az eloszlásfüggvény kapcsolata [2]: Ha a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, akkor $P(\xi < b) = F(b)$, $P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$

Poisson eloszlás:
$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \lambda > 0 \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$M(\xi) = \lambda \quad D(\xi) = \sqrt{\lambda}$$

$M(\xi)$ a várható értéket, $D(\xi)$ a szórást jelöli.

Exponenciális eloszlás:

sűrűségfüggvénye, eloszlásfüggvénye, várható értéke, szórása

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases} \quad M(\xi) = \frac{1}{\lambda} \qquad D(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

2.3. A Galois-gráfokról

A vizsgálati módszert Darmstadt műszaki egyetemén -hálóelméleti iskola -Rudolf Wille és Bernard Ganter a fogalomanalízis megalkotói dolgozták ki, nevezetesen a fogalomanalízis a fogalmak hierarchiájának matematizálását jelenti. Alkalmazási területei például: személygépkocsik meghajtás szerinti minőségi csoportosítása vagy a Forum Romanum nevezetes épületeinek különböző útikalauzokban való szerepeltetése.

A Galos-gráfoknak több típusát különböztetjük meg, attól függően, hogy a pedagógiai munka mely területén használjuk őket:

- objektumok és tulajdonságaik
- individuális gráfok: lehet szaktudományi, lehet tanulói gráf
- kollektív gráfok: tanulók-feladatok gráf
- szociometriai gráfok
- kutatási alkalmazásokat jellemző gráfok

Az elmúlt tanévekben végeztünk egy kutatást, amelyben szöveges matematikafeladatok megoldását vizsgáltuk nyelvészeti és matematikai szempontból.

Az általunk definiált univerzális kognitív kategóriák a következők voltak:

- *Tér* (tájékozódás, alatt, fölött)

- *Idő* (egymásutániság)
- *Tulajdonságok* (mennyiséget kifejező szavak)
- *Cselekvést kifejező* szavak
- *Tárgy, fogalom* (szakkifejezések ismerete, használata)
- *Cselekvés körülményei* (feladatmegoldás módja, helyessége)

A fenti kategóriák alkalmasnak bizonyultak arra, hogy mind nyelvészeti mind matematikai szempontból elemezzük a tanulók ismereteit.

A Galois-gráfok alkalmasnak bizonyultak értékelésre is az analízisben, a kapott szintek megfeleltek és összhangban voltak a hallgatók vizsgán elért számszerű eredményeivel, osztályzatukkal.

A fent megnevezett univerzális kognitív kategóriák viszonylatában végzünk elemzést a pontgyűjtőn adott feladatok és a megoldásokban megjelenő fogalmak, valamint a Bruner által meghatározott reprezentációs síkok között. [6]

3. Az oktatási folyamat előkészítése

A félév során a tantárgyból a kontakt órák száma 2+2 volt. A 14 oktatási hétből a számonkérési hetek, tavaszi szünet és nemzeti ünnep miatt mindössze 10 előadással lehetett tervezni. Mivel sietni kellett a tananyaggal, hogy minden beleférjen, cask 4 alkalommal került sor pontgyűjtő íratására. Előadás végén jeleztem a hallgatóknak, hogy a következő héten várható-e pontgyűjtő írása és azt is, melyik típusú feladatból. Ezen kívül az EFOP-3.4.3-16-2016-00020 azonosító számú „Innovatív megoldásokkal a BGE felsőfokú képzései minőségének és hozzáférhetőségének javításáért” című projekt keretében egyetemünkön létrejött a Diplomaszerzési esélynövelő program. Az Esély Központ keretében meghirdetett zárthelyi dolgozatra és a vizsgára felkészítő intenzív felzárkóztató kurzus tartására is volt lehetőség.

Az elméleti órákon definíciók, tételek kimondásra kerültek, bizonyítások csak a rövid tételek vagy a „feladatjellegű” levezetések esetében hangzottak el. A bizonyítási stratégiákból mindegyikre láttak példát előadáson, vizsgákon azonban nem kértük számon ilyen formában. Tapasztalataink azt mutatták, hogy sokszor a tanulók csak „betanulták” a bizonyításokat úgy, hogy tartalmukat nem is értették.

Az előadásokon a diákoknak volt lehetőségük pontgyűjtésre, amely előre ismert feladattípus megoldását jelentette. A 14 oktatási hétből két hét a beszámoló hét, egy a tavaszi szünet, és egy előadás ünnepnapra esett, így 10 előadás maradt a tananyag ismertetésére. 5-7 percet szántam egy feladat megoldására, így csak 4 alkalommal írhattak pontgyűjtőt. A Gazdasági matematika 2 tantárgy főbb témakörei: Mintavételi módszerek, eseményalgebra; A valószínűség fogalma, axiómái; A valószínűség alapvető tételei, a valószínűség meghatározása klasszikus valószínűségi mezőben; Geometriai valószínűség; Mintavételi valószínűségek; Feltételes valószínűség, szorzási szabály; Teljes valószínűség tétele és a Bayes-tétel; Diszkrét valószínűségi változók: valószínűségeloszlás, eloszlásfüggvény fogalma és tulajdonságai, várható érték, szórás; Folytonos valószínűségi változók: sűrűségfüggvény fogalma és tulajdonságai, kapcsolata az eloszlás függvénnyel; Várható érték, szórás; Markov és Csebisev egyenlőtlenség; Nevezetes diszkrét eloszlások: karakterisztikus, hipergeometriai (visszatevés nélküli mintavétel) és binomiális (visszatevéses mintavétel). Kapcsolat a hipergeometriai és binomiális eloszlás között. Geometriai eloszlás. Poisson eloszlás; a binomiális eloszlás közelítése Poisson eloszlással; Nevezetes folytonos eloszlások: egyenletes és exponenciális eloszlás. Kapcsolat a Poisson és exponenciális eloszlás között. Normális és standard normális eloszlás; Nagyszámok törvénye; Kétdimenziós valószínűségi változó: együttes eloszlás, peremeloszlások, együttes eloszlásfüggvény és tulajdonságai. Kovariancia, korrelációs együttható; Független valószínűségi változókra vonatkozó tulajdonságok. Feltételes valószínűségeloszlás, feltételes várható érték, regressziós függvény.

A tárgyat 490 hallgató vette fel, ebből 254 fő volt az, aki először tanulta a Gazdasági matematika 2-t, 236 a többszöri felvevők száma (136 fő másodszorra, 56 fő harmadszorra, 25 fő negyedszerre, 14 fő ötödszörre, 1 fő hatodszorra).

3.1. A pontgyűjtő feladatai az elvárt megoldásokkal

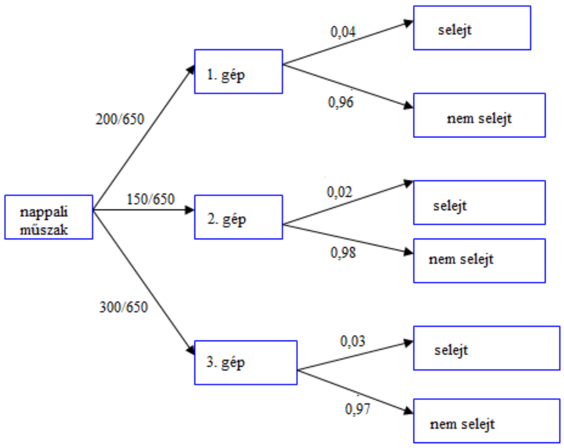
Az első pontgyűjtő a teljes valószínűség, Bayes-tétel témakörből volt:

Egy üzemben villanykörtéket gyártanak. Az első gép naponta 200-t, a második 150-t, a harmadik 300-t. A gépek rendre 4%, 2% és 3% selejtet gyártanak. Az égőket a nap végén raktárba viszik. Az éjszakai műszak ellenőrzi az izzókat oly módon, hogy egyet találomra kivesznek. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztott izzó

a) világít
b) nem működik és a második vagy a harmadik gép gyártotta?

Megoldás:

650 villanykörtét gyártanak a gépek a nappali műszakban. Elkészítjük a döntésfát:



Formalizmus: $P(G_1)=\dfrac{200}{650}\quad P(G_2)=\dfrac{150}{650}\quad P(G_3)=\dfrac{300}{650}$

$$P(S|G_1)=0,04\ \ P(\overline{S}|G_1)=0,96\ \ P(S|G_2)=0,02\ \ P(\overline{S}|G_2)=0,98\ \ P(S|G_3)=0,03\ \ P(\overline{S}|G_3)=0,97$$

$$P(világít)=\frac{200}{650}\cdot 0,96+\frac{150}{650}\cdot 0,98+\frac{300}{650}\cdot 0,97=0,2954+0,2262+0,4477=0,9693$$

$$P(2.vagy3.|selejt)=\frac{P(2.vagy3.\cap selejt)}{P(selejt)}=\frac{\frac{150}{650}\cdot 0,04+\frac{300}{650}\cdot 0,02}{\frac{200}{650}\cdot 0,04+\frac{150}{650}\cdot 0,02+\frac{300}{650}\cdot 0,03}=0,6000$$

Második alkalommal a diszkrét valószínűségi változóval kapcsolatos feladatot tűztem ki a pontgyűjtőben:

Egy irodában két fénymásoló van. Az elsőn a munkaidő 60%-ában másolnak, a másodikon 80%-ában, egymástól függetlenül. A ξ valószínűségi változó jelentse, hogy hány fénymásolón dolgoznak az adott pillanatban. Adja meg az eloszlást és az eloszlásfüggvényt!

Megoldás:

F_1: 1. fénymásolón dolgoznak F_2: 2. fénymásolón dolgoznak

$P(F_1)=0,6\ \ P(F_2)=0,8$ a függetlenség miatt $P(F_1\cdot F_2)=P(F_1)\cdot P(F_2)$ ξ értékei 0;1 és 2 lehet.

Eloszlás:

$$P(\xi=0)=P(\overline{F_1}\cdot\overline{F_2})=P(\overline{F_1})\cdot P(\overline{F_2})=0,4\cdot 0,2=0,08$$

$$P(\xi=1)=P(\overline{F_1}\cdot F_2+F_1\cdot\overline{F_2})=P(\overline{F_1}\cdot F_2)+P(F_1\cdot\overline{F_2})=0,4\cdot 0,8+0,6\cdot 0,2=0,44$$

$$P(\xi=2)=P(F_1\cdot F_2)=P(F_1)\cdot P(F_2)=0,6\cdot 0,8=0,48$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 0\\ 0,08, & \text{ha } 0<x\le 1\\ 0,52, & \text{ha } 1<x\le 2\\ 1, & \text{ha } 2<x\end{cases}$$

A harmadik pontgyűjtő feladata [5]:
Egy nyári éjszakán átlagosan 20 percenként észlelhetünk meteorithullást. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 1 óra alatt legalább 4 meteorithullást láthatunk?
Megoldás:
Ha 20 perc alatt 1 meteorithullást észlelünk, akkor 1 óra alatt 3-at $\Rightarrow \lambda = 3$ az eloszlás paramétere, Poisson eloszlást használunk.

$P(\xi \geq 4) = 1 - P(\xi < 4) = 1 - \left(\frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 \cdot e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} + \frac{3^3 \cdot e^{-3}}{3!} \right)$ ≈ 1- 0,6472 = 0,3528. (Itt a végeredményt nem kértem kiszámolni, mert nem volt mindenkinél számológép.)

A negyedik pontgyűjtő feladata [5]:
A zsebrádióba szerelt tranzisztorok élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó, a tönkremenetelig eltelt idő szórása 2500 üzemóra. Határozzuk meg a várható értéket, az eloszlás paraméterét! Írjuk fel az eloszlás függvényt! Határozzuk meg a valószínűségét annak, hogy a tranzisztor 5000 üzemórán belül még nem megy tönkre!
Megoldás:

Az eloszlás paramétere: $D(\xi) = 2500 \Rightarrow D(\xi) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 2500 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2500}$

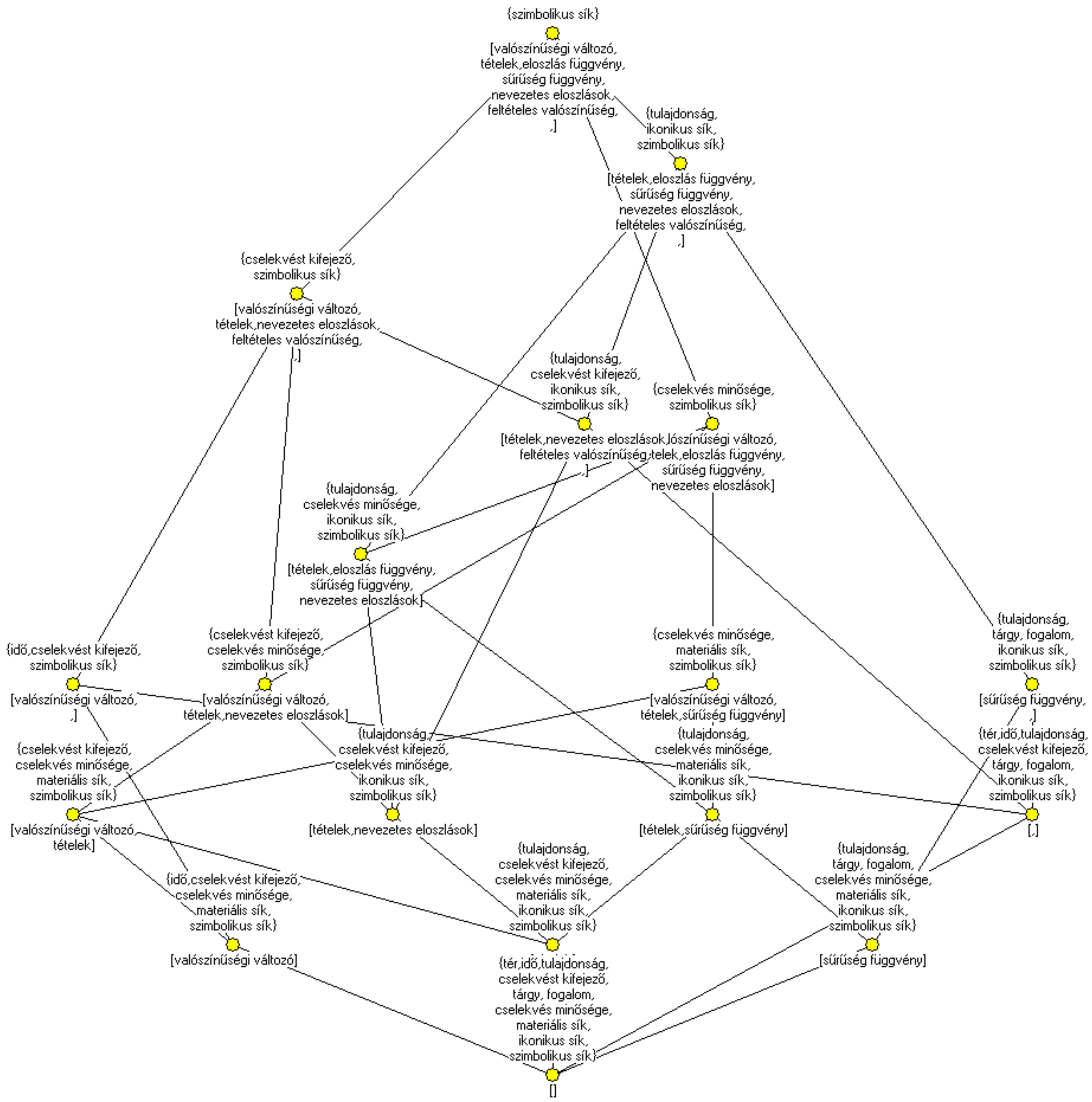
A várható érték: $M(\xi) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow M(\xi) = 2500$

A tranzisztor élettartamának eloszlásfüggvénye: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2500}x} & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$

A tranzisztor 5000 üzemórán belül nem megy tönkre, azt jelenti, hogy az élettartama több 5000 óránál vagy egyenlő 5000 üzemórával. Ez alapján a meghatározandó valószínűség: $P(\xi \geq 5000) = 1 - P(\xi < 5000) = 1 - F(5000) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{2500} \cdot 5000} \right) = e^{-2} = 0{,}1353$ (A végeredményt itt sem kértem tizedestörtben.)

3.2. A pontgyűjtő feladatainak Galois-gráfjai

A harmadik és negyedik pontgyűjtő feladatai hasonlók, gondolkodás szempontjából, így azokra egy gráfot készítettem. Az első feladatra készített Galois-gráfot mutatom be az alábbiakban, a többi feladat esetében elkészített Galois-gráfok a kategóriák tekintetében és szerkezetükben hasonlók.



1.ábra. Az első pontgyűjtő feladatának Galois gráfja

A gráfokon a hierarchia csúcsán a szimbolikus sík helyezkedik el, amely a nyelv, a szövegértés fontosságára utal. A cselekvést kifejező kategória is magasan helyezkedik el, jelezvén, hogy típusfeladatokról van szó, a feladatban megfogalmazott utasításokat kell végrehajtaniuk. A tulajdonság kategória megjelenése a második szinten, a mennyiségek helyes ismeretére hívja fel a figyelmet. Itt fontos megjegyeznünk, hogy hibaként sokszor előfordul, hogy valószínűségre 1-nél nagyobb számot adnak meg a diákok, vagy újabban a mértékváltás problémája, ha a valószínűségi változó fizikai mennyiséget fejez ki. A tárgy, fogalom kategória egyaránt a negyedik szinten fordul elő, mely a fogalmak, definíciók ismeretét feltételezi.

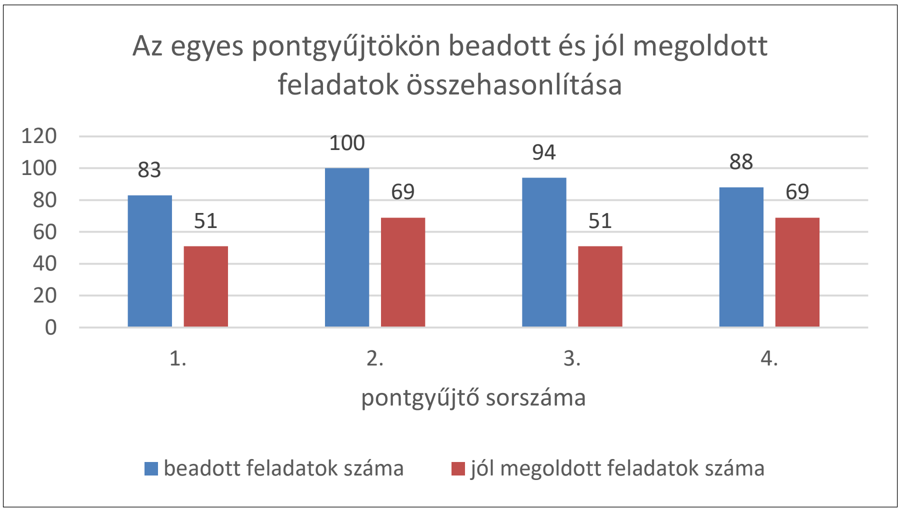
4. Eredmények

A tantárgyat 490 hallgató vette fel. Az előadásokat látogatók száma 150 fő körül mozgott. A diákok elmondása szerint probléma volt, hogy ugyanebben az idősávban más tantárgyakból is voltak előadások. 110 tanuló szerzett pontokat a pontgyűjtővel, melynek megoszlását a 2. ábrán látható grafikon mutatja. Egy feladat megoldását tűztem ki egy alkalommal, melynek teljes megoldásáért 1 pontot lehetett kapni. A 4 alkalommal összesen 4 jutalompontot szerezhettek a hallgatók.

4.ábra. A pontgyűjtővel szerzett eredmények

13 hallgató kapott jobb jegyet a tárgyból az itt gyűjtött jutalompontok alapján: 3 fő elégségesre, 7 fő közepesre, 3 fő jóra javította a vizsgajegyét.

Kirészletezve az eredményeket az egyes pontgyűjtők esetében az 5. ábrán láthatjuk.



5.ábra. A pontgyűjtők eredményei kirészletezve

Százalékos teljesítményben ez rendre 61,4%, 69%, 54,3% és 78,4%. Mindegyik típus előfordult a vizsgadolgozatokban is. A teljes valószínűség és Bayes tételes feladatokat a vizsgákon is hasonló sikerrel oldották meg a hallgatók. Előfordult, hogy fordított sorrendben kérdeztem a valószínűségeket, ekkor már csökkent a jó megoldások száma. Ez is mutatja mennyire fontos a szövegértés, és ne csak sablonosan (szakácskönyv) oldják meg a feladatot.Elmondásaik alapján a döntésfához, a szemléletes megjelenítéshez nagyon jól tudták kapcsolni. Csak úgy hívták az „ágazós” feladat.

A diszkrét eloszlásos feladatokat kevésbé sikeresen oldották meg a vizsga feladatsorokban, mivel az eloszlások meghatározásánál már megakadtak. Az eloszlásfüggvény felírásánál figyelniük kellett a valószínűségi változó értékeinek növekvő sorba rendezésére. Ha nem így adtam meg, nem volt jó az elkészítése. Ugyanitt jelentkezett hibának, hogy az egyenlőségjelet melyik oldalon engedjük meg, azaz mit jelent, hogy az eloszlásfüggvény minden pontjában balról folytonos.

A Poisson-eloszlást felismerték, a hiba a legalább szócska matematikai jelentésének értelmezésében volt. Ha komplementerrel számolnak kell-e az egyenlőség? Ezek okozták a leggyakoribb hibákat.

Az exponenciális eloszlás felismerése jó szintű, a szövegértéssel voltak problémák és a relációhasználattal. Ha visszafele kellett okoskodni, meghatározni a paramétert, várható értéket, szintén kevés jó megoldás született.

A zh felkészítő kurzusokra, 2-2 óra mindegyik dolgozat előtt, szintén szép számmal, 80 fő, jöttek a diákok. Hasznosnak mondták, mint egy összefoglaló óra, ahhoz hasonlították.

Az intenzív kurzusra 50 fő jelentkezett. Jó hangulatban teltek az órák. Elmondásaik alapján rendszerezettebb lett a tananyag, segítette a megértést. A mindennapi életből, a gyakorlatból vittem a feladatokat, ez is mélyítette az anyagot. Egyik alkalommal „kutyaterápiás" órát tartottunk: bejött egy corgi a tanterembe. Nagy élmény volt a kutyus látogatása az órán. Kérték, hogy legyen ilyen feladat a vizsgán, készült is egy „corgis" feladatsor a következő alkalomra.

5. Következtetések

A pontgyűjtő bevezetését hasznosnak tartom. A négy alkalmat 5 vagy 6 alkalomra növelném. Legalább egy típusú feladatot átnéznek a hallgatók a következő alkalomra. Az intenzív felkészítők is nagyon segítették a felkészülést. Akik részt vettek rajta, sikeresebben teljesítették a tárgyat. Amivel még javítani lehetne a hozzáálláson, ha digitálisan is élményszerűvé lehetne tenni az órákat. A corgi véletlenszerű megjelenése emlékezetessé tette az órát, majd a feladatsort is.

A Galois–gráfok alkalmasak voltak annak igazolására, amit a valószínűség oktatása során is megtapasztalunk. Nevezetesen a szaknyelv ismerete, a jó szintű szövegértés szükséges a feladatok értelmezéséhez. Szám és mennyiségfogalom reális legyen és nem utolsósorban a megoldási automatizmusok kialakulása, amelyek a ranglétrán előtérbe kerülnek.

Irodalomjegyzék

[1] Ábrahám, I., Valószínűségszámítás (Egyszerűen, érthetően),Mozaik Kiadó, Szeged, 2009, ISBN:9789636975487
[2] Ábrahám I., Valószínűségszámítás (Egyszerűen, érthetően), Feladatgyűjtemény, Mozaik Kiadó, Szeged, 2009, ISBN: 9789636975661
[3] Ambrus A., Bevezetés a matematika-didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004
[4] Csernyák L., Valószínűségszámítás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007, ISBN: 9789631959499
[5] Denkinger G., Valószínűségszámítás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest,1997
[6] Klingné Takács A. A matematikai analízis alapjainak és alkalmazásainak számítógéppel segített oktatása a Kaposvári Egyetemen, Doktori értekezés, Debreceni Egyetem, 2013
[7] Pólya Gy., A gondolkodás iskolája, Gondolat Kiadó, Budapest,1977