Gradus Vol 5, No 2 (2018) 368-373
ISSN 2064-8014

PARALLELOTÓPOK 3 DIMENZIÓS HIPER ALAKZATAI

3-DIMENSIONAL FAN OF PARALLELOTOPES

Végh Attila[1]*

[1] Természet- és Műszaki Alaptudományi Tanszék, GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Neumann János Egyetem, Magyarország

Kulcsszavak:
parallelotóp, szabad tér, lapok 3-dimenziós hiper alakzata

Keywords:
parallelotope, free space, 3-dimensional fan of the face F

Cikktörténet:
Beérkezett 2018. augusztus 01.
Átdolgozva 2018. szeptember 04.
Elfogadva 2018. október 01.

Összefoglalás
A $\mathcal{P}$ parallelotóp egy olyan konvex politóp, melynek eltolt példányai a tér egy kövezését adják és lapjai lap-lap mentén csatlakoznak. Legyen F az n-dimenziós $\mathcal{P}$ parallelotóp egy $(n-3)$-dimenziós lapja. Tekintsünk egy S 3-dimenziós teret, mely transzverzálisan metszi az F lapot. Az F lap egy kis környezetében a $\mathcal{P}$ parallelotóp kövezésének az S térrel vett metszete adja a kövezés 3-dimenziós poliéder alakzatát, melyet az F lap 3-dimenziós hiper alakzatának nevezünk. Ebben a cikkben az $(n-3)$-dimenziós lapok 3-dimenziós hiper alakzatának és az FS szabad tér dimenzójának a kapcsolatát vizsgáljuk.

Abstract
The parallelotope $\mathcal{P}$ is a convex polytope which translated copies tile the space in a face to face way. Let F be a $(n-3)$-dimensional face of the n-dimensional parallelotope $\mathcal{P}$. Consider a 3-dimensional space S that intersects the face F transversally. In a small neighbourhood of the face F the section of a tiling of the parallelotope $\mathcal{P}$ by the space S gives the 3-dimensional polyhedral fan which is called the 3-dimensional fan of the face F. In this paper the connection of the 3-dimensional fan of the face F and the dimension of the free space FS is investigated.

1. Bevezetés

1.1. Parallelotópok

A parallelotóp egy olyan konvex poliéder, mely hézagmentesen és egyrétűen kitölti a teret úgy, hogy eltolt példányai lap-lap mentén csatlakoznak. A parallelotóp tetszőleges pontja az eltolt példányokra nézve rácsot alkot, így a parallelotópok középpontjai is rácsot alkotnak. H. MINKOWSKI [11] bizonyította, hogy a parallelotópok középpontosan szimmetrikus poliéderek, továbbá igazolta az alábbi szükséges feltételeket, melyek elégségességét 1954-ben B.A. VENKOV [12] látott be. 1980-ban P. MCMULLEN [10] bizonyította az állítást B.A. VENKOV eredményétől függetlenül.

1. Theorem. (B.A. VENKOV, P. MCMULLEN) *A $\mathcal{P}$ politóp, akkor és csak akkor parallelotóp, ha*

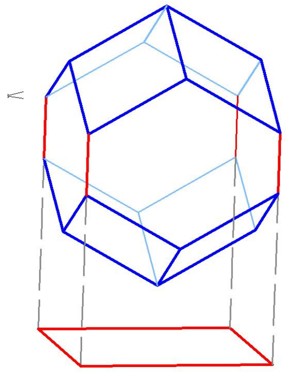
a) $\mathcal{P}$ centrálszimmetrikus,

b) $\mathcal{P}$ minden (n-1)-dimenziós lapja is centrálszimmetrikus,

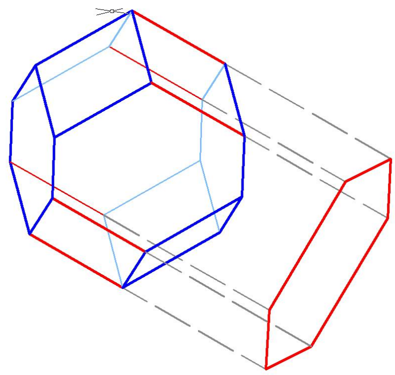
c) $\mathcal{P}$-nek valamely (n-2)-dimenziós lap mentén vett vetülete parallelogramma vagy centrálszimmetrikus hatszög.

*Kapcsolattartó szerző.
E-mail cím: vegh.attila@gamf.uni-neumann.hu

Az 1. és 2. ábrán 3-dimenziós eseteket ábrázoltunk, ekkor az (n-2)-dimenziós lap egy él, e mentén vett vetület a fenti tétel alapján az egyik esetben parallelogramma, a másikban centrálszimmetrikus hatszög. A poliéder azon lapjai, melyek vetülete parallelogramma, illetve centrálszimmetrikus hatszög a parallelotóp egy 4-, illetve 6-övét határozzák meg. Tehát a c) feltétel ekvivalens azzal, hogy parallelotóp esetén csak 4-, illetve 6-öv fordulhat elő.



1. ábra. 4-öv

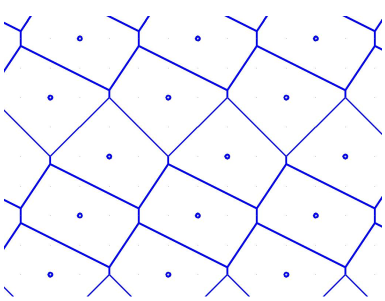


2. ábra. 6-öv

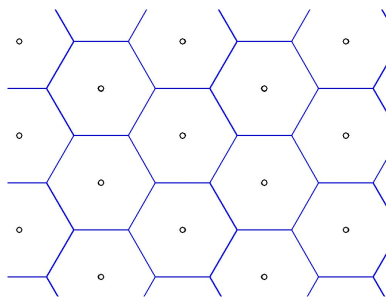
A síkban 2 parallelotóp létezik, a parallelogramma és a centrálszimmetrikus hatszög. A térben összesen 5 parallelotóp van, melyek kombinatorikus osztályait E.S. FEDOROV [5] írta le: a kocka, a hatszög alapú hasáb, a rombdodekaéder, a nyújtott rombdodekaéder és a csonkolt oktaéder.

1.2. Dirichlet-Voronoi cellák

Legyen adva egy L diszkrét ponthalmaz az n-dimenziós euklideszi térben. Az L halmaz egy P pontjának *Dirichlet Voronoi cellá*ja, röviden DV cellája a tér azon pontjainak halmaza, melyek a P ponthoz legalább olyan közel vannak mint az L ponthalmaz bármely más pontjához. A 3. ábra egy általános pontrendszer DV celláját ábrázolja, a 4. ábrán egy rács, mégpedig a szabályos háromszög-rács DV cellái láthatók. A továbbiakban mi csak rácsok DV celláit vizsgáljuk, ebben az esetben könnyen látható, hogy a DV cella egy parallelotóp.



3. ábra. DV cella



4. ábra. Rács DV cellája

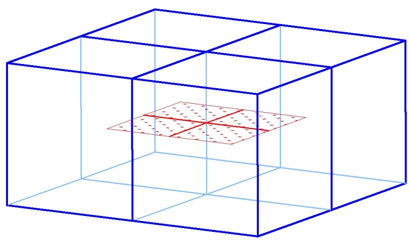
Először 1850-ben G.L. DIRICHLET [1] vizsgált ilyen alakzatokat, majd 1908-ban G. F. VORONOI [14] parallotópokkal kapcsolatos munkája során fogalmazta meg híres sejtését, mely azt állítja, hogy minden parallelotóp egy rács DV cellájának affin képe. A sejtést máig sem sikerült igazolni, de számos eredmény született. Ehhez a témakörhöz kapcsolódóan $(n-3)$-dimenziós lapok 3-dimenziós hiper alakzatait vizsgálom. E rövid bevezetés után a következő fejezet a legfontosabb fogalmakat tárgyalja, majd az állításunk bizonyítása után, összegzés zárja a cikket.

2. Fogalmak

2.1. k-dimenziós hiper alakzatok

Legyen L egy n dimenziós rács. Az $S(\mathbf{x},r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{E}^d : |\mathbf{y}-\mathbf{x}| = r\}$ gömböt üresnek nevezzük, ha $|\mathbf{z}-\mathbf{x}| \geq r$ teljesül minden $\mathbf{z} \in L$-re. Ha $S(\mathbf{x},r)$ egy üres gömb és $\dim(S(\mathbf{x},r) \cap L) = n$, akkor conv$(S(\mathbf{x},r) \cap L)$ ponthalmazt nevezzük a rács Delaunay n-cellájának. A DV cella felbontás és a Delaunay felbontás között duális kapcsolat van: A DV cellának a középpontja a Delaunay felbontás csúcsa. Legyenek F és F' a DV cellának a lapjai, és $D(F)$, $D(F')$ a Delaunay felbontás megfelelő cellái. $F' \subset F$, akkor és csak akkor ha $D(F) \subset D(F')$. A Delaunay felbontás motiválta a $\mathcal{P}$ paralelotóp $(n-k)$-dimenziós lapjához tartozó k-dimenziós hiper alakzat definícióját:

1. Definíció. *Legyen F a $\mathcal{P}$ paralelotóp egy $(n-k)$-dimenziós lapja. Tekintsük az F-et transverzálisan metsző k-dimenziós S síkot. F-nek egy kis környezetében a $\mathcal{P}$ paralelotóp kövezésnek az S síkkal vett metszete adja az F lap k-dimenziós hiper alakzatát, melyet $Fan(F)$-fel jelölünk.*



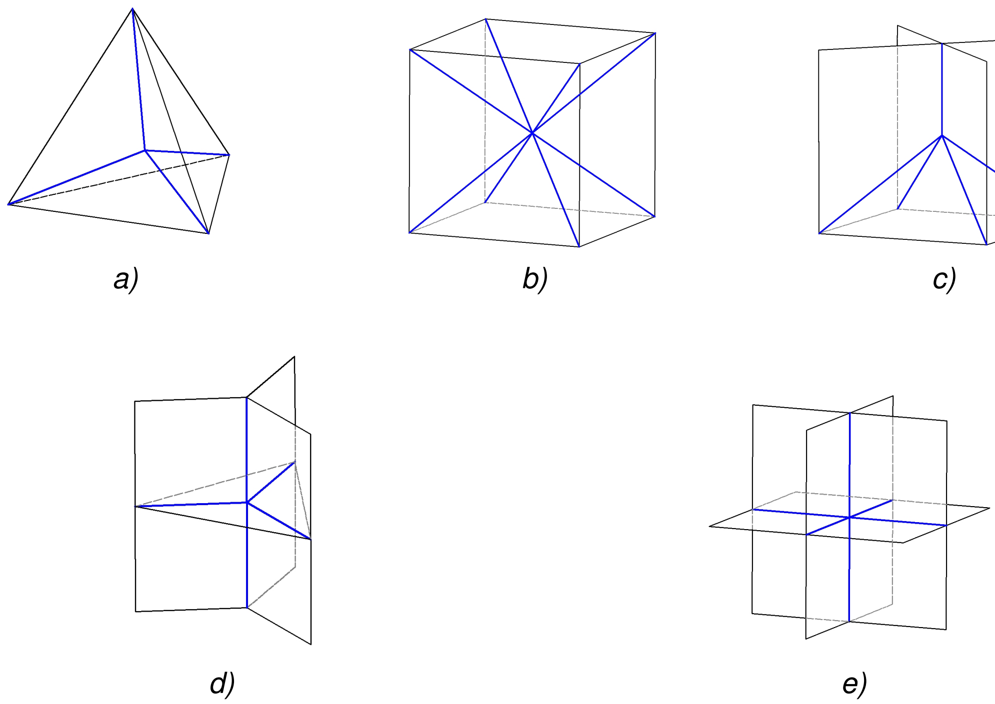
5. ábra. k-dimenziós hiper alakzatok

$Fan(F)$ és $D(F)$ kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak, mint azt az 5. ábra is mutatja. A függőleges élhez tartozó Delaunay cella a négy kocka középpontja által meghatározott négyzet, míg a 2-dimenziós alakzat 2 egymást metsző szakasz, mely a négyzet oldalainak a felezőpontjait köti össze.

B.N. DELAUNAY [2] megadta a 2- és 3-dimenziós hiper alakzatokat. 2-dimenziós hiper alakzatból 2 különböző (6. ábra), 3-dimenziós hiper alakzatból 5 különböző (7. ábra) kombinatorikus típus létezik:

a) *b)*

6. ábra. 2-dimenziós hiper alakzatok



7. ábra. 3*-dimenziós hiper alakzatok*

2.2. Kihúzás és szabadsági foka

Tekintsük az n-dimenziós $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ parallelotópokat. $S(\mathbf{z})$-vel jelöljük a $\mathbf{z}$ irányú és z hosszúságú szakaszt. Ha létezik olyan $\mathbf{z}$ irány, melyre $\mathcal{P}+S(\mathbf{z})=\mathcal{Q}$, ahol $+$ jelöli a Minkowski összeget, akkor $\mathcal{P}$-t a $\mathcal{Q}$ összenyomottjának és $\mathcal{Q}$-t a $\mathcal{P}$ kihúzottjának nevezzük. V. GRISHUKHIN a $\mathbf{z}$ vektort *szabad vektor*nak nevezte, ha a $\mathcal{P}$ $\mathbf{z}$ irányban kihúzható.

V. GRISHUKHIN [6] 2004-ben fogalmazta meg az alábbi tételt, mely egy jól használható szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy mikor húzható ki egy parallelotóp, bizonyítását 2014-ben M. DUTOUR [4] egészítette ki:

2. Theorem. (V. GRISHUKHIN*,* M. DUTOUR) *A következő állítások ekvivalensek egy* $\mathcal{P}$ *parallelotópra:*
(a) a $\mathcal{P}\oplus S(z)$ *Minkowski összeg parallelotóp,*
(b) a $\mathbf{z}$ *vektor merőleges a* $\mathcal{P}$ *parallelotóp minden 3-övének legalább egy lapvektorára.*

A parallelotóp tetszőleges $(n-1)$-dimenziós lapjához tartozik egy rácsvektor, mely a laphoz tartozó két parallelotóp középpontját köti össze. Ezt a vektor meghatározó vektornak nevezzük [3]. Á. G. HORVÁTH [8] igazolta, hogy egy 4-övhöz tartozó $(n-2)$-dimenziós lap mindig centrálszimmetrikus, így természetesen adódik, hogy az ilyen $(n-2)$-dimenziós lapokhoz is tartozik egy rácsvektor.

Legyen $\mathcal{P}$ egy parallelotóp és ennek egy $(n-2)$-dimenziós lapja F. Ekkor létezik két $(n-1)$-dimenziós lapja a parallelotópnak, mely tartalmazza az F lapot. E két lap rácsvektorai legyenek $\mathbf{t}_1$ és $\mathbf{t}_2$. Ha az F lap egy 4-övet határoz meg, akkor a $\mathbf{t}=\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2$ vektort nevezzük az F lap meghatározó-vektorának.

Az így definiált meghatározó-vektorok segítségével tetszőleges $\mathbf{z}$ irányhoz hozzárendelhetünk egy rácsot [7], [13], mely a parallelotópot meghatározó rács egy részrácsa lesz.

2. Definíció. *Legyen* $\mathcal{P}$ *az* L *rács egy parallelotópja és* $\mathbf{z}$ *egy adott irány a térben.* $L_{\mathbf{z}}$*-vel jelöljük az* L *rácsnak azt a részrácsát, melyet a* $\mathcal{P}$ *parallelotóp* $\mathbf{z}$ *irányú árnyékhatárához tartozó maximális lapok meghatározó-vektorai feszítenek ki. Ezt a rácsot nevezzük a* $\mathcal{P}$ *parallelotóp* $\mathbf{z}$ *irányú Venkov-rácsának, ahol a* $\mathcal{P}$ *parallelotóp* $\mathbf{z}$ *irányú* árnyékhatára $\mathcal{P}$*-nek azokból az* $\mathbf{x}$ *határpontjaiból áll, melyekre az* $\{\mathbf{x}+\lambda\mathbf{z}|\lambda\in\mathbb{R}\}$ *egyenes* $\mathcal{P}$*-nek egy támasz egyenese.*

Ha a parallelotóp $\mathbf{z}$ irányban kihúzott (nem nulla kövérségű), akkor a Venkov-rács $(n-1)$-dimenziós és megegyezik a Venkov által definiált ráccsal. A szabad vektorokból kiindulva A. MA-

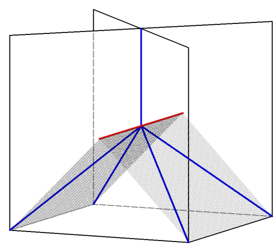
GAZINOV [9] is definiálja a szabad teret, melynek dimenziója megegyezik az általam definiált kihúzás szabadsági fokával és megadja a 3-dimenziós hiper alakzatok esetén a szabad terek helyzetét.

3. Definíció. *Legyen $\mathcal{P}$ egy parallelotóp, $\mathbf{z}$ és $\mathbf{z}'$ szabad vektor. Ha a $\mathbf{z}$ és $\mathbf{z}'$ vektorokhoz tartozó árnyékhatár megegyezik, azaz $L_{\mathbf{z}} = L_{\mathbf{z}'}$, akkor a $\mathbf{z}$ és $\mathbf{z}'$ vektorokat egy osztályba soroljuk. A $\mathbf{z}$-vel egy osztályba tartozó vektorok terét szabad térnek, ennek a térnek a dimenzióját $\mathbf{z}$ irányú kihúzás szabadsági fokának nevezzük.*

3. 3-dimenziós alakzatok és a kihúzás szabadsági foka

1. Állítás. *Ha a $\mathcal{P}$ parallelotóp esetén a $\mathbf{z}$ irányú kihúzás szabadsági foka 2, akkor $\mathbf{z}$-hez transzverzális, árnyékhatárhoz tartozó $(n-3)$-dimenziós lapok 3-dimenziós hiper alakzatai csak a 7. ábrán szereplők közül a d) vagy e) típusúak lehetnek.*

A 3-dimenziós alakzat definíciója miatt a 7. ábrán szereplő alakzatok középpontja a $\mathcal{P}$ parallelotóp egy $(n-3)$-dimenziós lapjának metszete a transzverzális 3-dimenziós térrel, a középpontból kiinduló élek pedig $(n-2)$-dimenziós lapok metszetei és értelemszerűen a középpontból kiinduló élek által határolt lapok pedig $(n-1)$-dimenziós lapok metszetei. Jelöljük az $(n-1)$-dimenziós lapokat F_i-vel, a metszeteit F_i'-vel, az $(n-2)$-dimenziós lapokat G_i-vel, a metszeteit G_i'-vel, az $(n-3)$-dimenziós lapot O-vel, a metszetét O'-vel. Az állítás feltétele miatt $\mathbf{z}$ transzverzális az $(n-3)$-dimenziós lappal, így benne van a 3-dimenziós metsző térben, tehát $\mathbf{z} = \mathbf{z}'$. Ha $\mathbf{z}$ ebben a 3-dimenziós térben valamely G_i' él irányába esik, akkor a kihúzás szabadsági foka 1. Nézzük azt az esetet a továbbiakban, hogy nem G_i' él irányú a $\mathbf{z}$ kihúzás. A 7. ábra a), b), c) típusú alakzatain az összes G_i' él kivéve a c) ábra függőleges élét olyan, hogy a nekik megfelelő G_i $(n-2)$-dimenziós lapok 6-övhöz tartoznak. Ezek a G_i $(n-2)$-dimenziós lapok nem lehetnek maximális dimenziós árnyékhatárbeli lapok, mert akkor a $\mathbf{z}$ irányú kihúzás után 8-övet is tartalmazna a poliéder, tehát nem lenne parallelotóp. Így a $\mathbf{z}$ irány benne van olyan síkokban, melyek 6-övhöz tartozó G_i' éleket tartalmaznak. A c) típus esetén 3 különböző eset lehet: vagy a négy függőleges síkban van a 6-övhöz tartozó G_i' él, tehát ezek függőleges metszetében, ami a függőleges él, ez ellentmondás. Vagy egy 6-övhöz tartozó élt tartalamzó függőleges síkban és a vele szemközti élt tartalmazó két ferde sík metszetében, de ez is egy él, tehát ellentmondás. Végül lehetne a 8. ábrán jelölt két ferde síkban a $\mathbf{z}$, de akkor ezek metszetébe kell esni, ami megint ellentmondás, mert a kihúzás szabadsági fokának 2-nek kell lenni. Tehát a c) típus esetén nem lehet a kihúzás szabadsági foka 2.



8. ábra. c) típus vizsgálata

Az a) és b) esetekben is könnyen látszik, hogy legalább 2 G_i' éleket tartalmazó sík metszetében benne kell lenni a $\mathbf{z}$-nek, tehát nem lehet a kihúzás szabadsági foka 2.

4. Összegzés

Tehát összefoglalva megállapíthatjuk, hogy ha egy $\mathcal{P}$ parallelotóp esetén a $\mathbf{z}$ irányú kihúzás szabadsági foka 2, akkor a $\mathbf{z}$ irányú árnyékhatárhoz tartozó transzverzális $(n-3)$-dimenziós lapok 3-dimenziós hiper alakzatai nem lehetnek a), b), c) típusúak. Tehát csak d) vagy e) típusú 3-dimenziós hiper alakzatok tartoznak az árnyékhatár $(n-3)$-dimenziós lapjaihoz. Ez azt jelenti, hogy ha a $\mathbf{z}$ irányú kihúzás szabadsági foka 2, akkor szinte csak 4-övet tartalmaz a parallelotóp.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozunk a kutatás támogatásáért, amely az EFOP-3.6.1-16-2016-00006 „A kutatási potenciál fejlesztése és bővítése a Neumann János Egyetemen” pályázat keretében valósult meg. A projekt a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával, a Széchenyi 2020 program keretében valósul meg.

Hivatkozások

[1] G.L. Dirichlet, *Über die Reduktion der positiven Quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen*, J. Reine und Angew. Math. Vol. **40**, (1850), 209-227.

[2] B.N. Delone, *Sur la partition reguliere de l'espace a 4-dimensions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Otdel. Fiz.-Mat. Nauk **7** (1929) 79-110, 147-164.

[3] N.P. Dolbilin, *Properties of Faces of Parallelohedra*, Tr Mat. Inst. Steklova Vol. **266**, (2009), 112-126.

[4] M. Dutour, V. Grishukhin and A. Magazinov, *On the sum of the Voronoi polytope of a lattice with a zonotope*, European Journal of Combinatorics, **42**, (2014), 49-73.

[5] E.S. Fedorov, *Elements of the study of figures*, Zap. Miner. Obsc. **21** (1885) 1-279.

[6] V. Grishukhin, *Parallelotopes of non-zero width*, Sb. Math., 195 (**5**), (2004), 669-686.

[7] Á.G. Horváth, *On the connection between the projection and the extension of a parallelotope*, Monatsh. Math. 150, (2007), 211-216.

[8] Á.G. Horváth, *On the boundary of an extremal body*, Beiträge zur Algebra und Geometrie Vol. **40**, No. 2. (1999), 331-342.

[9] A. Magazinov, *Voronoi's conjecture for extensions of Voronoi parallelohedra*, Russian Mathematical Surveys, **69**, Issue 4, (2014), 763-764.

[10] P. McMullen, *Convex bodies which tile space by translation*, Mathematica **27**, (1980), 113-121.

[11] H. Minkowski, *Allgemeine Lehrsatze über die konvexe Polyeder*, Nach. Ges. Wiss., Göttingen, (1897), 198-219.

[12] B. A. Venkov, *On a class of Euclidean polytopes*, Vestnik Leningradskogo Univ. **9**, (1954), 11-31. (in Russian)

[13] A. Végh, *On extraction and projection of Dirichlet-Voronoi cells of root-lattices*, Gradus Vol **2**, No 1. (2015), 200-211.

[14] G.F. Voronoi, *Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques*, J. Reine und Angew. Math. Vol. **134**, (1908), 198-287.