Gradus Vol 3, No 2 (2016) 23-29
ISSN 2064-8014

Az általánosított logisztikus eloszlás súlyozott első momentuma

The first moment of the generalized logistic distribution

*Osztényiné Krauczi Éva**

Természet- és Műszaki Alaptudományi Tanszék, GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Pallasz Athéné Egyetem, Magyarország

Kulcsszavak:
súlyfüggvény,
súlyozott várható érték,
általánosított harmonikus számok

Keywords:
weight function
weighted expected value
generalized harmonic numbers

Cikktörténet:
Beérkezett 2016. Szeptember 8.
Átdolgozva 2016. Szeptember 26.
Elfogadva 2016 November 10.

Összefoglalás
Ebben a cikkben az általánosított logisztikus eloszlás súlyozott várható értékét számítjuk ki, amit a súlyozott kvantilis korreláció teszt bevezetése motivál.

Abstract
In this paper the first moment of the generalized logistic distribution is explicitly obtained as the function of the generalized Harmonic numbers. The motivation is the weighted quantile correlation test.

1. Bevezetés

A hipotézisvizsgálat, és ezen belül az illeszkedésvizsgálat az egyik fontos területe a matematikai statisztikának. Azokat az eljárásokat, melyekkel arról a hipotézisről tudunk döntést hozni, hogy a minta egy megadott eloszláscsaládból származik-e, összetett illeszkedésvizsgálatnak nevezzük. Ezen eljárások egyik nagy osztálya a minta eloszlásának és az eloszláscsalád eloszlásainak távolságán alapuló tesztek, a másik a regresszió-, illetve korrelációtesztek. A Del Barrio, Cuesta-Albertos, Matrán és Rodríguez-Rodríguez [9] valamint del Barrio, Cuesta-Albertos és Matrán [8] által bevezetett kvantilis korreláció teszt különlegessége, hogy mindkét osztályhoz tartozik. A súlyfüggvény használatát ezen tesztstatisztikában egymástól függetlenül de Wet [6, 7] valamint Csörgő S. [2, 3] javasolta. Csörgő és Szabó [4, 5] számos eloszláscsaládra bevezette az új tesztet.

Két típusú eloszláscsalád, eltolás-skála valamint eltolás esetével foglalkozunk. Létezik a skála eloszláscsaládra is súlyozott kvantilis korreláció teszt, de ezt mi nem használjuk a későbbiekben. Adott $G(x),\ x\in\mathbb{R}$, eloszlásfüggvényre valamint $\theta\in\mathbb{R}$ és $\sigma>0$ eltolás és skála paraméterekre legyen $G_\sigma^\theta(x)=G((x-\theta)/\sigma)$, $x\in\mathbb{R}$, továbbá tekintsük a következő eltolás-skála és eltolás családokat:

$$\mathcal{G}_{l,s}=\{G_\sigma^\theta:\theta\in\mathbb{R},\sigma>0\},\qquad \mathcal{G}_l=\{G_1^\theta:\theta\in\mathbb{R}\}. \tag{1}$$

Jelölje

$$Q_G(t)=G^{-1}(t)=\inf\{x\in\mathbb{R}:G(x)\geq t\},\qquad 0<t<1, \tag{2}$$

a G kvantilisfüggvényét. Legyen a $w\ :\ (0,1)\to[0,\infty)$ súlyfüggvény olyan, amely a $\int_0^1 w(t)\,\mathrm{d}t=1$ feltételt kielégíti, és definiáljuk az r-edik súlyozott momentumot, $r=1,2,\ldots,$:

$$\mu_r(G,w):=\int_0^1 (Q_G(t))^r\,w(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} x^r w\,(G(x))\,\mathrm{d}G(x). \tag{3}$$

*Kapcsolattartó szerző.
E-mail cím: osztenyine.eva@gamf.kefo.hu

A továbbiakban feltesszük, hogy $\mu_1(G,w)$ és $\mu_2(G,w)$ véges, és definiáljuk a súlyozott szórásnégyzetet is:

$$\nu(G,w) := \mu_2(G,w) - \mu_1^2(G,w) \geq 0\ .$$

Két eloszlásfüggvény, F és G, súlyozott L^2-Wasserstein-távolságát definiáljuk a

$$\mathcal{W}_w(F,G) := \left[\int_0^1 \left(Q_F(t) - Q_G(t)\right)^2 w(t)\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}$$

mennyiséggel. Továbbá jelölje

$$\mathcal{W}_w(F,\mathcal{G}_l) := \inf\{\mathcal{W}_w(F,G) : G \in \mathcal{G}_l\} \ \text{ és } \ \mathcal{W}_w(F,\mathcal{G}_{l,s}) := \inf\{\mathcal{W}_w(F,G) : G \in \mathcal{G}_{l,s}\} \tag{4}$$

az F eloszlásnak a $\mathcal{G}_l$ illetve $\mathcal{G}_{l,s}$ családtól vett a súlyozott L^2-Wasserstein-távolságát. Csörgő S. [3] megmutatta, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_w^2(F,\mathcal{G}_l) &= \int_0^1 \left(Q_F(t) - Q_G(t)\right)^2 w(t)\mathrm{d}t - \left[\int_0^1 \left(Q_F(t) - Q_G(t)\right) w(t)\mathrm{d}t\right]^2 = \\ &= \nu(F,w) + \nu(G,w) - 2\int_0^1 Q_F(t)Q_G(t)w(t)\mathrm{d}t + 2\mu_1(F,w)\mu_1(G,w),\end{aligned}$$

illetve

$$\frac{\mathcal{W}_w^2(F,\mathcal{G}_{l,s})}{\nu(F,w)} = 1 - \frac{\left[\int_0^1 Q_F(t)Q_G(t)w(t)\mathrm{d}t - \mu_1(F,w)\mu_1(G,w)\right]^2}{\nu(F,w)\nu(G,w)}.$$

Tekintsünk egy $X_1,\ldots,X_n$ véletlen mintát egy ismeretlen F eloszlásfüggvénnyel, és legyen G egy rögzített eloszlásfüggvény. Szeretnénk tesztelni a $\mathcal{H}_0 : F \in \mathcal{G}_{l,s}$ nullhipotézist. Ebből a célból definiálni fogjuk a $\mathcal{W}_w^2(F,\mathcal{G}_{l,s})/\nu(F,w)$ hányadosnak az empirikus változatát a következő módon:

$$\begin{aligned}V_n \quad &:= 1 - \frac{\left[\int_0^1 Q_n(t)Q_G(t)w(t)\mathrm{d}t - \mu_1(G,w)\int_0^1 Q_n(t)w(t)\mathrm{d}t\right]^2}{\nu(G,w)\left[\int_0^1 Q_n^2(t)w(t)\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 Q_n(t)w(t)\mathrm{d}t\right)^2\right]} = \\ &= 1 - \frac{\left[\sum_{k=1}^n X_{k,n}\left\{\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} Q_G(t)w(t)\mathrm{d}t - \mu_1(G,w)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} w(t)\mathrm{d}t\right\}\right]^2}{\nu(G,w)\left[\sum_{k=1}^n X_{k,n}^2\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} w(t)\mathrm{d}t - \left(\sum_{k=1}^n X_{k,n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} w(t)\mathrm{d}t\right)^2\right]}.\end{aligned} \tag{5}$$

Hasonló módon a $\mathcal{H}_0 : F \in \mathcal{G}_l$ nullhipotézis tesztelésére a $\mathcal{W}_w^2(F,\mathcal{G}_l)$ empirikus változatát definiáljuk:

$$\begin{aligned}W_n \quad &:= \int_0^1 \left\{Q_n(t) - Q_G(t)\right\}^2 w(t)\mathrm{d}t - \left[\int_0^1 \left\{Q_n(t) - Q_G(t)\right\} w(t)\mathrm{d}t\right]^2 = \\ &= \nu(G,w) + \sum_{k=1}^n X_{k,n}^2\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} w(t)\mathrm{d}t - \left[\sum_{k=1}^n X_{k,n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} w(t)\mathrm{d}t\right]^2 + \\ &\quad -2\sum_{k=1}^n X_{k,n}\left\{\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} Q_G(t)w(t)\mathrm{d}t - \mu_1(G,w)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} w(t)\mathrm{d}t\right\}.\end{aligned}$$

Jegyezzük meg, hogy a V_n eltolás- és skálamentes, a W_n pedig eltolásmentes. A G eloszlásfüggvény segítségével legyen

$$-\infty \leq a_G := \sup\{x \in \mathbb{R} : G(x) = 0\} \leq \inf\{x \in \mathbb{R} : G(x) = 1\} =: b_G \leq \infty,$$

vagyis $a_G = \inf(\text{supp}(G))$, $b_G = \sup(\text{supp}(G))$, ahol supp$(G)$ a G tartója, azaz az a legszűkebb supp$(G) \subset \mathbb{R}$ halmaz, melynek mértéke G szerint 1. Legyen $Y_1,\ldots,Y_n$ a G eloszlásfüggvényből származó minta, és jelölje $Y_{1,n} \leq \ldots \leq Y_{n,n}$ a kapcsolatos rendezett mintát. Csörgőtől [3] származik a következő eredmény a V_n és W_n statisztikák aszimptotikus viselkedéséről.

1.1. Tétel (Csörgő [3]). *Legyen w egy nemnegatív, a $(0{,}1)$ intervallumon integrálható függvény, amelyre $\int_0^1 w(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Tegyük fel, hogy G olyan eloszlásfüggvény, amelynek van véges súlyozott második momentuma, és kétszer folytonosan differenciálható az (a_G, b_G) nyitott intervallumon, továbbá $g(x) = G'(x) > 0$ minden $x \in (a_G, b_G)$ esetén, legyen továbbá B a Brown-híd. Ha a*

$$\sup_{0<t<1} \frac{t(1-t)|g'(Q_G(t))|}{g^2(Q_G(t))} < \infty, \qquad \int_0^1 \frac{t(1-t)}{g^2(Q_G(t))} w(t)\,\mathrm{d}t < \infty, \tag{6}$$

és az

$$n\int_0^{\frac{1}{n+1}} [Y_{1,n} - Q_G(t)]^2\, w(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \qquad n\int_{\frac{n}{n+1}}^1 [Y_{n,n} - Q_G(t)]^2\, w(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \tag{7}$$

feltételek teljesülnek, akkor a következő állítások érvényesek:

(i) Ha F a G által generált $\mathcal{G}_l$ eltoláscsaládhoz tartozik, akkor

$$nW_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W_g := \int_0^1 \frac{B^2(t)}{g^2(Q_G(t))} w(t)\,\mathrm{d}t - \left[\int_0^1 \frac{B(t)}{g(Q_G(t))} w(t)\,\mathrm{d}t\right]^2. \tag{8}$$

(ii) Ha F a G által generált $\mathcal{G}_{l,s}$ eltolás-skála családhoz tartozik, akkor

$$\begin{aligned} nV_n \xrightarrow{\mathcal{D}} V_g := \frac{1}{\nu(G,w)} &\left\{\int_0^1 \frac{B^2(t)}{g^2(Q_G(t))} w(t)\,\mathrm{d}t - \left[\int_0^1 \frac{B(t)}{g(Q_G(t))} w(t)\,\mathrm{d}t\right]^2\right\} + \\ &- \left[\frac{1}{\nu(G,w)} \int_0^1 \frac{B(t)Q_G(t)}{g(Q_G(t))} w(t)\,\mathrm{d}t - \frac{\mu_1(G,w)}{\nu(G,w)} \int_0^1 \frac{B(t)}{g(Q_G(t))} w(t)\,\mathrm{d}t\right]^2. \end{aligned} \tag{9}$$

A célunk ennek a tételnek a segítségével az I. típusú általánosított logisztikus eloszláscsaládhoz tartozó súlyozott kvantilis korreláció teszt aszimptotikus viselkedését vizsgálni. Ehhez szükségünk van az I. típusú általánosított logisztikus eloszlás súlyozott várható értékére. Ebben a cikkben csak ezzel foglalkozunk.

2. Az I. típusú általánosított logisztikus eloszlás súlyozott első momentuma

Az I. típusú általánosított logisztikus eloszlást definiáljuk a

$$G(x,\alpha) := \frac{1}{(1+e^{-x})^{\alpha}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \alpha > 0, \tag{10}$$

eloszlásfüggvényével. Ekkor a hozzá tartozó sűrűségfüggvény

$$g(x,\alpha) = \frac{\alpha e^{-x}}{(1+e^{-x})^{\alpha+1}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \alpha > 0, \tag{11}$$

és kvantilisfüggvény

$$Q_G(t,\alpha) = \ln \frac{t^{\frac{1}{\alpha}}}{1 - t^{\frac{1}{\alpha}}}, \qquad 0 < t < 1, \qquad \alpha > 0. \tag{12}$$

De Wet [7] eltoláscsaládok esetében javasolt egy $w(t) = L_1'(Q_G(t))/I_1, 0 < t < 1$, alakú súlyfüggvényt, ahol

$$L_1(x) := \frac{-g'(x)}{g(x)},\ x \in \mathbb{R}, \qquad \text{és} \qquad I_1 := \int_{\mathbb{R}} L_1'(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.1. Állítás. *Az I. típusú általánosított logisztikus eloszlás esetében a de Wet-féle súlyfüggvény a következő alakú:*

$$w(t,\alpha)=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha}\left(1-t^{\frac{1}{\alpha}}\right)t^{\frac{1}{\alpha}} \qquad 0<t<1, \qquad \alpha>0. \tag{13}$$

2.2. Megjegyzés. *Megjegyezzük, hogy az állításbeli súlyfüggvény $\alpha=1$ esetben visszadja a logisztikus eloszláshoz tartozó de Wet-féle súlyfüggvényt.*

A 2.1. Állítás bizonyítása. Az I. típusú általánosított logisztikus esetben azt kapjuk, hogy a sűrűségfüggvény deriváltja

$$\begin{aligned}g'(x,\alpha)&=\alpha e^{-x}(-1)(1+e^{-x})^{-\alpha-1}+\alpha e^{-x}(-\alpha-1)(1+e^{-x})^{-\alpha-2}e^{-x}(-1)=\\&=\alpha e^{-x}(1+e^{-x})^{-\alpha-2}\left((-1)(1+e^{-x})+(\alpha+1)e^{-x}\right)=\\&=\alpha e^{-x}(1+e^{-x})^{-\alpha-2}(\alpha e^{-x}-1),\end{aligned}$$

ekkor

$$L_1(x,\alpha)=\frac{-\alpha e^{-x}(1+e^{-x})^{-\alpha-2}(\alpha e^{-x}-1)}{\alpha e^{-x}(1+e^{-x})^{-\alpha-1}}=\frac{1-\alpha e^{-x}}{1+e^{-x}},$$

illetve az L_1 függvény deriváltja

$$L_1'(x,\alpha)=\frac{\alpha e^{-x}(1+e^{-x})+(1-\alpha e^{-x})e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}=\frac{(\alpha+1)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

Mivel

$$g(x,\alpha+2)=G'(x,\alpha+2)=\frac{(\alpha+2)e^{-x}}{(1+e^{-x})^{\alpha+3}},$$

ezért egyszer parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}I_1(\alpha)&=\int_{\mathbb{R}}\frac{(\alpha+1)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\cdot\frac{\alpha e^{-x}}{(1+e^{-x})^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+2}\lim_{\substack{k\to-\infty\\K\to\infty}}\int_k^K e^{-x}\frac{(\alpha+2)e^{-x}}{(1+e^{-x})^{\alpha+3}}\,\mathrm{d}x=\\&=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+2}\lim_{\substack{k\to-\infty\\K\to\infty}}\left(\left[e^{-x}\frac{1}{(1+e^{-x})^{\alpha+2}}\right]_k^K-\int_k^K e^{-x}(-1)\frac{1}{(1+e^{-x})^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy

$$\lim_{k\to-\infty}\frac{e^{-k}}{(1+e^{-k})^{\alpha+2}}=\lim_{k\to-\infty}\frac{1}{e^k+1}\cdot\frac{1}{(1+e^{-k})^{\alpha+1}}=0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{K\to\infty}\frac{e^{-K}}{(1+e^{-K})^{\alpha+2}}=0,$$

illetve mivel g egy sűrűségfüggvény

$$\int_{\mathbb{R}}g(x,\alpha+1)\,\mathrm{d}x=1,$$

ennélfogva

$$I_1(\alpha)=\frac{\alpha}{\alpha+2}\lim_{\substack{k\to-\infty\\K\to\infty}}\int_k^K\frac{(\alpha+1)e^{-x}}{(1+e^{-x})^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{\alpha+2}.$$

Mivel

$$\begin{aligned}L_1'(Q_G(t,\alpha),\alpha)&=\frac{(\alpha+1)e^{-\ln\frac{t^{\frac{1}{\alpha}}}{1-t^{\frac{1}{\alpha}}}}}{\left(1+e^{-\ln\frac{t^{\frac{1}{\alpha}}}{1-t^{\frac{1}{\alpha}}}}\right)^2}=\frac{(\alpha+1)\frac{1-t^{\frac{1}{\alpha}}}{t^{\frac{1}{\alpha}}}}{\left(1+\frac{1-t^{\frac{1}{\alpha}}}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^2}=\\&=(\alpha+1)\frac{1-t^{\frac{1}{\alpha}}}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\left(t^{\frac{1}{\alpha}}\right)^2=(\alpha+1)\left(1-t^{\frac{1}{\alpha}}\right)t^{\frac{1}{\alpha}},\end{aligned}$$

így a súlyfüggvény

$$w(t,\alpha)=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha}\left(1-t^{\frac{1}{\alpha}}\right)t^{\frac{1}{\alpha}}$$

alakú.

□

A továbbiakban jelölje

$$H(z)=\int_0^1\frac{1-t^z}{1-t}\,\mathrm{d}t,\qquad Re(z)>-1, \tag{14}$$

az általánosított harmonikus számokat, melyekre a

$$H(z+1)=H(z)+\frac{1}{z+1} \tag{15}$$

összefüggés érvényes Abramowitz és Stegun [1], 6.3.5. alapján. A súlyfüggvény ismeretében meghatározzuk a súlyozott első momentumot.

2.3. Állítás. *Az I. típusú általánosított logisztikus eloszlás súlyozott első momentuma*

$$\mu_1(\alpha)=H(\alpha)-1,\qquad \alpha>0. \tag{16}$$

2.4. Megjegyzés. *Megjegyezzük, hogy a súlyozott első momentum az $\alpha=1$ esetben visszadja a logisztikus eloszláshoz tartozó súlyozott első momentumot, ami 0.*

A 2.3. Állítás bizonyítása. Először helyettesítsük be az (3) formulába a (12) és (13) függvényeket az $r=1$ esetben, és alkalmazzuk az $s=t^{\frac{1}{\alpha}}$ helyettesítést, ekkor

$$\begin{aligned}
\mu_1(\alpha)&=\int_0^1\ln\left(\frac{t^{\frac{1}{\alpha}}}{1-t^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\cdot\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha}\left(1-t^{\frac{1}{\alpha}}\right)t^{\frac{1}{\alpha}}\,\mathrm{d}t=\\
&=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\ln\left(\frac{t^{\frac{1}{\alpha}}}{1-t^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\cdot\left(1-t^{\frac{1}{\alpha}}\right)t^{\frac{1}{\alpha}}\,\mathrm{d}t\right)=\\
&=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}^{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}}\ln\left(\frac{s}{1-s}\right)\cdot(1-s)s\cdot\alpha s^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s\right)=\\
&=(\alpha+1)(\alpha+2)\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}^{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}}\ln\left(\frac{s}{1-s}\right)\cdot(1-s)s^{\alpha}\,\mathrm{d}s\right)
\end{aligned}$$

Mivel

$$\left(\frac{(\alpha+2)s^{\alpha+1}-(\alpha+1)s^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)'=(1-s)s^{\alpha}\quad\text{és}\qquad\left(\ln\frac{s}{1-s}\right)'=\frac{1}{s(1-s)},$$

így egyszer parciálisan integrálva

$$\begin{aligned}
\mu_1(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to0}\Bigg(&\left[\ln\left(\frac{s}{1-s}\right)\cdot\left((\alpha+2)s^{\alpha+1}-(\alpha+1)s^{\alpha+2}\right)\right]_{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}^{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}}+\\
&-\int_{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}^{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{1}{s(1-s)}\left((\alpha+2)s^{\alpha+1}-(\alpha+1)s^{\alpha+2}\right)\mathrm{d}s\Bigg)
\end{aligned}$$

Alakítsuk át az integranduszt a következőképpen:

$$\frac{1}{s(1-s)}\left((\alpha+2)s^{\alpha+1}-(\alpha+1)s^{\alpha+2}\right)=(\alpha+2)\frac{s^{\alpha}}{1-s}-(\alpha+1)\frac{s^{\alpha+1}}{1-s}=$$
$$=-(\alpha+2)\frac{1-s^{\alpha}}{1-s}+(\alpha+1)\frac{1-s^{\alpha+1}}{1-s}+\frac{1}{1-s}.$$

Ekkor (14) és (15) szerint

$$\begin{aligned}\mu_1(\alpha)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\left(\frac{s}{1-s}\right)\cdot\left((\alpha+2)s^{\alpha+1}-(\alpha+1)s^{\alpha+2}\right)+\ln(1-s)\right]_{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}^{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}}+\\&\quad+(\alpha+2)H(\alpha)-(\alpha+1)H(\alpha+1)\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\left(\frac{s}{1-s}\right)\cdot\left((\alpha+2)s^{\alpha+1}-(\alpha+1)s^{\alpha+2}\right)+\ln(1-s)\right]_{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}^{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}}+\\&\quad+H(\alpha)-1\end{aligned}$$

A parciálás integrálás során kapott kifejezések határértéke nullává válik, mivel $\lim_{x\to 0}x\ln x=0$ és $\lim_{y\to 1}(1-y^{\beta})\ln(1-y)=0,\ \beta>0$. Ahhoz, hogy ez látható legyen, először alakítsuk át ezeket a tagokat a logaritmus tulajdonságait használva, majd helyettesítsünk be és vonjunk össze, ekkor

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\left(\frac{s}{1-s}\right)\cdot\left((\alpha+2)s^{\alpha+1}-(\alpha+1)s^{\alpha+2}\right)+\ln(1-s)\right]_{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}^{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}}=\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln s\cdot s\left((\alpha+2)s^{\alpha}-(\alpha+1)s^{\alpha+1}\right)+\ln(1-s)\left(-(\alpha+2)s^{\alpha+1}+(\alpha+1)s^{\alpha+2}+1\right)\right]_{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}^{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}}=\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\ln(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\left((\alpha+2)(1-\varepsilon)-(\alpha+1)(1-\varepsilon)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right)+\\&\quad+\ln\left(1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\left(-(\alpha+2)(1-\varepsilon)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}+(\alpha+1)(1-\varepsilon)^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}+1\right)+\\&\quad-\ln\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}\left((\alpha+2)\varepsilon-(\alpha+1)\varepsilon^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right)+\ln(1-\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})\left(-(\alpha+2)\varepsilon^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}+(\alpha+1)\varepsilon^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}+1\right)\Bigg)=\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\ln(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\left((\alpha+2)(1-\varepsilon)-(\alpha+1)(1-\varepsilon)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right)+\\&\quad+\ln\left(1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\cdot\left(1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\left(-(\alpha+1)(1-\varepsilon)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right)+\ln\left(1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\cdot\left(1-(1-\varepsilon)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right)+\\&\quad-\ln\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}\left((\alpha+2)\varepsilon-(\alpha+1)\varepsilon^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right)+\ln(1-\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})\left(-(\alpha+2)\varepsilon^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}+(\alpha+1)\varepsilon^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}+1\right)\Bigg)=0\end{aligned}$$

□

Hivatkozások

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.*, volume 55 of *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964.

[2] S. Csörgő. Weighted correlation tests for scale families. *Test*, 11(1):219–248, 2002.

[3] S. Csörgő. Weighted correlation tests for location-scale families. *Mathematical and Computer Modelling*, 38(7-9):753–762, 2003. Hungarian applied mathematics and computer applications.

[4] S. Csörgő and T. Szabó. Weighted correlation tests for gamma and lognormal families. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 26(part II):337–356, 2003. Probastat '02. Part II.

[5] S. Csörgő and T. Szabó. Weighted quantile correlation tests for Gumbel, Weibull and Pareto families. *Probability and Mathematical Statistics*, 29(2):227–250, 2009.

[6] T. de Wet. Discussion of "Contributions of empirical and quantile processes to the asymptotictheory of goodness-of-fit tests". *Test*, 9(1):74–79, 2000.

[7] T. de Wet. Goodness-of-fit tests for location and scale families based on a weighted L_2-Wasserstein distance measure. *Test*, 11(1):89–107, 2002.

[8] E. del Barrio, J. A. Cuesta-Albertos, and C. Matrán. Contributions of empirical and quantile processes to the asymptotic theory of goodness-of-fit tests. *Test*, 9(1):1–96, 2000. With discussion.

[9] E. del Barrio, J. A. Cuesta-Albertos, C. Matrán, and J. M. Rodríguez-Rodríguez. Tests of goodness of fit based on the L_2-Wasserstein distance. *The Annals of Statistics*, 27(4):1230–1239, 1999.