

Nagy.PéterTibor.079: Geodetikus loopok Lie elmélete (MAT 043516)

## SZAKMAI ZÁRÓJELENTÉS

Vezető kutató neve: Nagy Péter Tibor Dr.

Projekt címe: Geodetikus loopok Lie elmélete

A „Geodetikus loopok Lie elmélete” kutatási témában a 2004-2007 évek időszakában az alábbiakban összefoglalt kutatásokat végeztem és eredményeket értem el:

A geodetikus loopok alapvető modellként szolgálnak a differenciálható loopok elméletében. Ennek megfelelően a projekt célkitűzése egyrészt az volt, hogy vizsgáljuk a geodetikusokkal kapcsolatos differenciálgeometriai struktúrákat, a tanulmányozott módszereket pedig törekedjünk a differenciálható loopok elméletében alkalmazni. Ez a cél motiválta egyrészt a nilsokaságok geodetikus struktúráinak és automorfizmus csoportjainak vizsgálatát, másrészt a geodetikus orbit terek elméletének kiterjesztését a Finsler geometriákra. Ezen célkitűzés keretében került sor a differenciálható loopok kanonikus koordináta rendszereinek vizsgálatára és a kidolgozott módszerek alkalmazására. az egydimenziós loopok izomorfia osztályainak leírására. A gazdag algebrai struktúrával rendelkező geodetikus loopok vizsgálatára Karl Strambach (Erlangen) professzorral közös „Loops in Group Theory and Lie Theory”, (Expositions in Mathematics 35, Walter de Gruyter, Berlin--New York, 2002) monográfiánkban gyakran alkalmaztuk a loopok bővítés elméletét. Ennek a módszernek további alkalmazásaihoz szükségessé vált a loop bővítés elméletnek absztrakt szinten való kiépítése, amit szintén elvégeztünk a beszámolási időszakban.

Folytattuk Karl Strambachhal a monográfiánkban kidolgozott eredményekkel megalapozott közös kutatásunkat. Korábban, az előző fél évszázadban, a topologikus és differenciálható loopok elméletéhez kapcsolódó kutatások súlypontja az orosz nyelvű tudományos környezet volt. Felkérésre, publikálásra benyújtottuk „Coverings of topological loops” című munkánkat az Itogi Nauki i Techniki kiadványsorozatnak, ahol az megjelent orosz nyelven, majd dolgozatunk angol nyelvű változatát a főképpen orosz tudományos eredményeket publikáló Journal of Mathematical Sciences, Springer kiadású folyóirat közölte. A dolgozat a topologikus és differenciálható loopok fedőloopjainak elméletét alapozza meg. Egy és többdimenziós példákkal illusztráltuk a fedőstruktúrák vizsgálatában kapott eredményeket, különös tekintettel a fedőcsoportok elméletével való analógiák és különbségek tárgyalására.

Az olyan egydimenziós topologikus és differenciálható loopokra vonatkozó kutatás alapjait, ahol a loop bal eltolásai Lie csoportot generálnak, Karl Strambachhal közös monográfiánkban kidolgoztuk. Azonban a loopot meghatározó mátrix-függvényt meghatározó valós függvényekre kapott differenciálegyenlőtlenség, melyet könyvünkben meghatároztunk, nem adott megfelelő választ a vizsgált loop osztály méretével kapcsolatos kérdésre. Tanítványommal, Stuhl Izabellával ennek a kérdésnek vizsgálatát kezdtük meg. „Differentiable loops on the real line” (Publicationes Mathematicae, Debrecen) című, megjelenés alatt álló dolgozatunkban az loopot meghatározó valós függvényeknek és a rájuk vonatkozó differenciálegyenlőtlenségnek sikerült a mátrix reprezentációval szemben invariáns tárgyalását megadni. A konstrukció által leírt koordinátarendszerekben a loop szorzás olyan explicit előállítását nyertük, amelyben a szorzás függvény  $x + \operatorname{arccot}(\cot y)$  alakú, ahol a közönséges összeadástól való eltérést a  $\varphi$  függvény írja le, amely két valós függvény lineáris

kombinációjaként adható meg. A loop szorzást meghatározó két valós függvény ki kell elégítsen egy közös differenciálegyenlőtlenséget. A kapott reprezentációból többek között könnyen nyerhető, hogy a megoldások a megfelelő függvénytérben nyílt környezetet alkotnak. A megoldásokat meghatározó görbéket a baleltolások által generált csoport kétoldali invariáns szemi-Riemann metrikájában, mint tetszőleges időszerű görbét írjuk le, amely eredmény szintén érdekes információt ad a megoldások sokaságáról, hiszen a vizsgált csoportgeometria a szokásos téridő modellekkel hozható analógiába. Ez az eredmény részben negatív választ adott egy Karl Strambach által megfogalmazott sejtésre vonatkozóan.

Az egydimenziós, Lie-féle baleltolás csoporttal rendelkező loopok izomorfia osztályozását vizsgálja a „Normal form of 1-dimensional differentiable loops”, (Acta Sci. Math., Szeged) című dolgozatom. Az előző dolgozatban leírt differenciálegyenlőtlenségnek eleget tevő függvény-pár által explicit módon képletekkel leírt loopműveletekről nem lehetett tudni, hogy milyen függvényparaméterek esetén határoznak meg izomorf loopokat. Ezzel a kutatással párhuzamosan Tomán Henrietta tanítványom irányításommal vizsgálta a differenciálható loopokon bevezethető kanonikus koordinátarendszereket, amelyek a geodetikus loopok és a Lie csoportok differenciálgeometriai elméletéből jól ismert kanonikus koordinátarendszer fogalmának általánosításai. Ezekre vonatkozó eredményeit publikálta „Canonical coordinate systems and exponential maps of differentiable n-ary loops” címmel (Note di Matematica, 24, 2005, 1-7). A korábban vizsgált egydimenziós loopok kanonikus koordinátarendszerét meghatározva bebizonyítottam, hogy minden izomorfia osztály egyértelműen reprezentálható a következő módon: az előbb említett differenciálegyenlőtlenségnek eleget tevő valós függvény-pár az általános explicit előállításban megkövetelt eltűnő kezdeti értékek feltételen túl kielégítik a deriváltak kezdeti értékének eltűnésére vonatkozó feltételt is. Így sikerült ezen loopoknak egy  $x + \operatorname{arccot} \varphi(\cot y)$  szerkezetű explicit normálformáját meghatározni. Ebből az eredményből látszik, hogy az egydimenziós loopok izomorfia típusai is egy nagyméretű sokaságot alkotnak. A kanonikus koordinátarendszer módszerének alkalmazását tervezem további differenciálható loop osztályok izomorfia problémájának vizsgálatára is.

Homolya Szilvia tanítványommal folytattuk a közös kutatást a Riemann-féle nilsokaságok geodetikusainak vizsgálatára vonatkozóan. Elkészült egy kéziratom „Metric Heisenberg algebras and groups” címmel, amelyen pontos leírást adok az egydimenziós centrummal rendelkező 2-lépcsős nilsokaságok automorfizmus csoportjára vonatkozóan. A referálási folyamat során kiderült egy átfedés J. Lauret: „Homogeneous nilmanifolds attached to representations of compact Lie groups” c. dolgozatával. Emiatt az eredményeim publikálása további kutatást igényel. Ezzel párhuzamosan részbeni irányításommal, Oldrich Kowalski professzorral közös kutatásban Homolya Szilvia befejezte az 5-dimenziós kétlépcsős nilsokaságok osztályozását. Eredményeiket „Simply connected two-step nilmanifolds of dimension 5” címmel publikálták (Note di Matematica, 26, 2006, 69-77). Az 5-dimenziós kétlépcsős nilsokaságok totálgeodetikus részsokaságainak osztályozásáról publikálás előtt áll Homolya Szilviával közös dolgozatunk. Homolya Szilvia PhD értekezése a fenti témakörben védelem előtt áll. Ennek a kutatásnak eredményeit tervezzük alkalmazni a nilsokaságokon értelmezhető geodetikus loopok struktúrájának leírására. Ezen a téren azonban még nem értünk el publikálható eredményeket.

Muzsnay Zoltánnal közös „Invariant Shen connections and geodesic orbit spaces” (Periodica Mathematica Hungarica, 51, 2005, 37-51) dolgozatunkban a Finsler terek elméletében használatos Shen konnexióra általánosítjuk a redukált homogén terek kanonikus invariáns konnexiójának fogalmát. Megmutatjuk, hogy az így bevezetett invariáns Shen

konnexió fontos szerepet játszik az u. n. geodetikus orbit tulajdonságú Riemann terek jellemzésében, melyek rendelkeznek a természetesen redukív terek egy fontos geometriai tulajdonságával. Elemezve a nem természetesen redukív, de geodetikus orbit tulajdonságú terek ismert konstrukcióit, rámutatunk arra, hogy ezen példák esetén a társítható invariáns Shen konnexió rendelkezik egy meglepő szingularitással. A Finsler-jellegű metrikus sokaságokon is természetes módon bevezethetők geodetikus loop struktúrák. Ezekre vonatkozóan ismert az a klasszikus eredmény, hogy a loop egységelemben a loopot meghatározó szorzás függvény nem differenciálható. A fenti eredmények felvetik az ilyen, szingularitásokkal rendelkező geodetikus loopok vizsgálatának kérdését. Erre vonatkozóan a kutatás folytatását tervezzük.

Karl Strambach professzorral közösen folytattuk a loop elmélet szisztematikus kiépítését. Az elmúlt években figyelemreméltó publikációkban (G. Birkenmeier -- B. Davis -- K. Reeves -- S. Xiao: „Is a semidirect product of groups necessarily a group?”, Proc. Amer. Math. Soc. 118, 1993, 689—692; G. Birkenmeier -- S. Xiao: „Loops which are semidirect products of groups”, Comm. in Algebra 23, 1995, 81--95.) vizsgálták azt a kérdést, hogy vajon előállhatnak-e loopok csoportnak csoporttal való kibővítéseként. Ugyanakkor monográfiánkban rendszeresen használtuk az ilyen loopokat a különböző absztrakt, topologikus és differenciálható struktúra osztályok példaanyagaként. Ezért célul tűztük ki annak a kérdésnek vizsgálatát, hogy a klasszikus csoportbővítés Schreier-féle elméletében tárgyalt konstrukciók és módszerek megfelelő általánosításával milyen loop osztályokat lehet reprezentálni. Kiderült, hogy ebben a keretben nagyon sok gyenge asszociativitási feltételre lehetséges példát konstruálni már csoportok csoportokkal való bővítésével is. A Schreier-féle elmélet a bővítést két leképezéssel adja meg: az egyik az alap csoport elempárain értelmezett a kibővített loop normálosztójának megfelelő bővítés komponensbe képező függvény, a másik pedig az alaps csoportból a normálosztó automorfizmus csoportjába képező függvény. Ha az első függvény azonosan eltűnik, akkor szemidirekt szorzatról beszélünk. Kiderült, hogy a szemidirekt szorzat képzése kevés példát eredményez a gyenge asszociativitási feltételekre, viszont az alap csoport elempárain értelmezett normálosztóba képező függvénnyel leírható csoport bővítésekkel sikerült a klasszikus gyenge asszociativitási feltételekre példákat megadni. 25 oldal terjedelmű „Schreier loops” c. dolgozatunkat elküldtük publikálásra.

Megemlítem, hogy Karl Strambach professzorral közös kutatásunk sikeréhez egy az OTKA támogatással párhuzamos MÖB-DAAD projekt („Loops in Group Theory and Lie Theory”) is hozzájárult.  
Debrecen, 2007. február 27.

Nagy Péter Tibor