

# A Zeeman-féle katasztrófagép kaotikus dinamikája

Nagy Péter<sup>1</sup>, Tasnádi Péter<sup>2</sup>

<sup>1</sup>GAMF, KEFO

<sup>2</sup>TTK, ELTE

**Összefoglalás:** A Zeeman-féle katasztrófagép mintapéldája a hiszterézist mutató statikai rendszernek. Tulajdonságai egyszerűen megérthetőek és megfelelő analógiák felállításával segítik a bonyolult komplex rendszerek viselkedésének megértését. Mivel a gép könnyen megépíthető, illetve mozgása egyszerűen szimulálható, a matematikai leírás és a kísérleti vizsgálat szemléletesen összekapcsolható. A Zeeman gépnek azonban nemcsak statikai, hanem dinamikai viselkedése is rendkívül értékes példákkal szolgálhat a kaotikus rendszerek tulajdonságainak bemutatásakor. Kiderült, hogy a periodikusan gerjesztett gép a disszipatív kaotikus rendszerek „állatorvosi lova”: minden lényegi vonás, jellemző kiválóan illusztrálható általa, valamint olyan izgalmas aspektusok mint pl. a bifurkáció jelenségköre, a spontán szimmetriasértés és a fázisátalakulás jelensége. Megfelelő kezdeti feltételekkel a magára hagyott gép tranziens káosz után éri el egyensúlyi állapotát. Váratlan statisztikus fizikai távlatokat nyitott azon ötletünk, hogy két gép összekapcsolásával tanulmányozzuk a konzervatív rendszerekben kialakuló kaotikus viselkedést. A vizsgálatok során használt szimulációs fájlok letölthetők [1] weboldalunkról.

**Abstract:** Investigation of chaotic motions and cooperative systems offers a magnificent opportunity to involve modern physics into the basic course of mechanics taught to engineering students. In the present paper it will be demonstrated that Zeeman Machine can be a versatile and motivating tool for students to get introductory knowledge about chaotic motion via interactive simulations. The Zeeman Catastrophe Machine is a typical example of a quasi-static system with hysteresis. It works in a relatively simple way and its properties can be understood very easily. Since the machine can be built easily and the simulation of its movement is also simple the experimental investigation and the theoretical description can be connected intuitively. Although Zeeman Machine is known mainly for its quasi-static and catastrophic behavior, its dynamic properties are also of interest with its typical chaotic features. By means of a periodically driven Zeeman Machine a wide range of chaotic properties of the simple systems can be demonstrated such as bifurcation diagrams, chaotic attractors, transient chaos, Ljapunov exponents and so on. The present paper organically linked to our website [1] where the discussed simulation programs could be downloaded. In a second paper a novel construction of a network of Zeeman Machines will be presented to study the properties of cooperative systems.

**Kulcsszavak:** káosz, Zeeman-féle katasztrófagép, szimuláció.

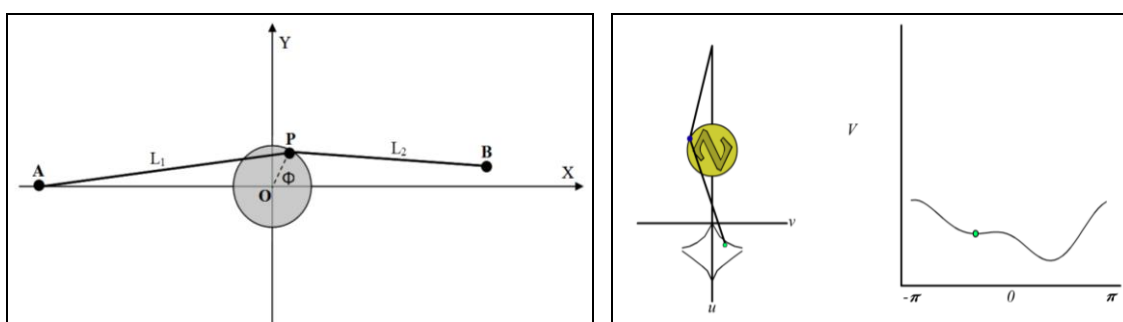
**Keywords:** chaos, Zeeman's catastrophe machine, simulation.

## 1. A Zeeman-féle katasztrófagép

Azokat a rendszereket, amelyek időbeli változását (dinamikáját) egyértelmű szabályok határozzák meg, *determinisztikus rendszereknek* nevezzük. A *katasztrófaelmélet* olyan determinisztikus rendszerek leírásával foglalkozik, amelyekben egy vagy több paraméter

folytonos, kicsiny változtatása a rendszer állapotában hirtelen, ugrásszerű, nagymértékű változást hoz létre.

A katasztrófajelenség szemléltetésére és tanulmányozására alkotta meg az 1970-es években E. C. Zeeman a nevét viselő katasztrófagépet [2]. A szerkezet igen egyszerű (bárki elkészítheti) és mennyiségileg is könnyen tanulmányozható. Merev síklap egy pontjában rögzítsünk  $R$  sugarú, tengelyezett lapos korongot. Vegyünk két azonos, nyújtatlan állapotban  $L_0$  hosszúságú gumiszálát, az egyik gumiszál egyik végét rögzítsük a korong kerületi  $P$  pontjához, majd a másik végét, a szálát kissé megnyújtva a síklap  $A$  pontjában. A másik gumiszál egyik végét rögzítsük szintén a korong  $P$  pontjához, a másik végét hagyjuk szabadon. Kísérleteink során ezt a  $B$  véget fogjuk mozgatni a lap síkjában. A mennyiségi leíráshoz vegyünk fel a lap síkjában olyan koordinátarendszert, amelynek origója a korong középpontja,  $x$  tengelye, az  $A$  és  $O$  pontokra fektetett egyenes (1.a. ábra), az  $y$  tengely pedig rá merőleges. (Az  $A$  pont koordinátája  $(-A, 0)$ ).



1.a. ábra

1.b. ábra

1. ábra: a Zeeman-féle katasztrófagép

Tanulmányozzuk a rendszer viselkedését úgy, hogy az  $L_2$  gumiszál  $B$  végét különböző  $B(x_0, y_0)$  pontból indulva lassan mozgatjuk az  $y$  tengellyel párhuzamosan az  $x$  tengely felé. Ügyeljünk arra, hogy közben a korong mindig egyensúlyi helyzetben legyen.

(Ha valaki mégsem kíván időt szánni a katasztrófagép megépítésére, a rendszer tanulmányozására használhatja a [3] weboldalon található nagyszerű flash-szimulációt (1.b. ábra). A szimuláción az 1.a. ábrához képest  $90^\circ$ -kal elfordítva látjuk a szerkezetet és  $X$  helyett  $u$ ,  $Y$  helyett  $v$  jelöli a síkbeli koordinátákat. A gumiszál  $B$  szabad végét jelölő zöld pontot a kurzorral „vonszolhatjuk” az  $u$ - $v$  síkban. Figyeljük közben a kék színű (kerületi rögzítési)  $P$  pont mozgását.)

Az egyensúlyi helyzet jellemezhető a  $P$  pont elhelyezkedésével, amelynek helyét egyértelműen megadhatjuk a körlap forgástengelyétől a  $P$  pontba húzott sugár és az  $X$  tengely által bezárt  $\Phi$  szöggel. Az esetek többségében azt tapasztaljuk, hogy a  $B$  vég helyzete egyértelműen meghatározza a  $\Phi$  szöget, ami  $B$  mozgásával folytonosan változik. A  $B$  szálvéggel az  $x$  tengely felé közeledve, majd átlépve azt és ellenkező irányban távolodva  $\Phi$  abszolút értéke csökken, a tengely átlépésekor előjelet vált és a távolodás során abszolút értéke növekszik. Kivételt képez azonban egy kísérletileg jól kijelölhető, furcsa, négy görbe vonallal határolt terület, amelynek bármely belső pontjában az egyensúlyi helyzethez tartozó  $\Phi$  szög előjele akár pozitív, akár negatív is lehet. Ezt a területet *bifurkációs területnek* nevezzük. Azt, hogy a bifurkációs terület valamely belső pontjában a  $\Phi$  szög éppen pozitív vagy negatív értékű az határozza meg, hogy az  $y$  tengellyel párhuzamosan mozgatott  $B$  szálvéggel hol léptük át a bifurkációs terület határát. A bifurkációs területen kívül az egyensúlyi szög előjele egyértelműen meghatározott. Ezt az előjelet őrzi a határ átlépése után

az egyensúlyi szög, amely a szálvég mozgása során egészen addig most is folytonosan változik, amíg a szálvég a terület másik határát el nem éri. Azt átlépve a szög ugrásszerű változást szenved.

## 2. A Zeeman-gép dinamikai leírása

A katasztrófaelméletben a Zeeman-gép kvázisztatikus tulajdonságait, az egyensúlyi helyzet ugrásszerű változásait vizsgáltuk. Nagyon érdekes kaotikus tulajdonságokat mutató eredményre vezet azonban a külső kényszer hatására mozgó Zeeman-gép dinamikája is.

A Zeeman-gép olyan *disszipatív rendszer*, amely tetszőleges  $(\Phi_0, \omega_0)$  kezdőfeltételből indulva a súrlódás miatti folyamatos energiavesztés következtében bizonyos idő alatt leáll (a fentebb tárgyaltak szerinti egyensúlyi helyzetben). A rendszer fázistere csupán kétdimenziós (a  $\Phi$  szög és az  $\omega = d\Phi/dt$  szögsebesség változókkal), ami mint ismeretes túl „szűk” kaotikus mozgás kialakulásához. A rendszer kaotikus viselkedésének tanulmányozásához vigyünk a rendszerbe periodikus gerjesztést, azaz „rángassuk” a második gumiszál **B** végét valamilyen periodikus mozgással: előbb *Y* irányú lineáris harmonikus mozgással, majd az *X* tengelyen levő origójú egyenletes körmozgással, a gerjesztés periódusidejét mindkét esetben jelölje  $T_p$ . A gerjesztés következtében a fázistér három dimenziósra bővül, így már elvi lehetőség van kaotikus viselkedésre. A  $\Phi$  szög és az  $\omega$  szögsebesség mellett a harmadik változó a  $\Theta = \frac{2\pi}{T_p} \cdot t$  gerjesztő fázis.

A modell mozgásegyenletét az F.1. függelékben vezetjük le. A dinamikai rendszerek standard leírásának megfelelően a mozgásegyenletet az  $n$  dimenziós fázistér  $x_i$  ( $i=1..n$ ) változóinak időderiváltjára vonatkozó  $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  alakú elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre alakítva kapjuk, hogy:

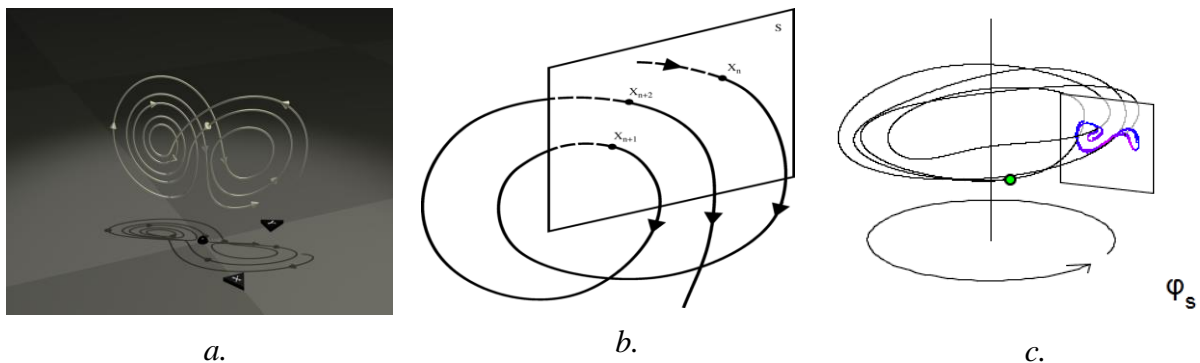
$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{dt} = f_1(\Phi, \omega, \Theta) = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = f_2(\Phi, \omega, \Theta) = c \cdot \left[ \frac{(l_1 - l_0)}{l_1} \cdot a \cdot \sin \Phi + \frac{(l_2(\Theta) - l_0)}{l_2(\Theta)} \cdot (y(\Theta) \cdot \cos \Phi - x(\Theta) \cdot \sin \Phi) \right] - \omega \\ \frac{d\Theta}{dt} = f_3(\Phi, \omega, \Theta) = \frac{2\pi}{T_p} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{ahol: } \begin{cases} l_1 = \sqrt{(\cos \Phi + a)^2 + (\sin \Phi)^2} \\ l_2(\Theta) = \sqrt{(x(\Theta) - \cos \Phi)^2 + (y(\Theta) - \sin \Phi)^2} \end{cases}$$

## 3. A dinamikai viselkedés numerikus vizsgálata

A rendszer dinamikájának numerikus vizsgálatához a szabad felhasználású *Dynamics Solver* programot használjuk, az általunk készített, a program telepítése után futtatható \*.ds fájlok az [1] honlapunkról letölthetők.

Valamely dinamikai rendszer állapotát minden időpillanatban a fázistér egy pontja adja meg, az időfejlődés során a fázispont egy fázistérbeli görbén, az ún. *trajektórián* mozog. Könnyen belátható, hogy determinisztikus rendszer esetén a trajektória nem metszheti önmagát. Mivel többdimenziós fázistérben a trajektória nehezen követhető, sokszor célravezetőbb csökkenteni a megjelenítendő dimenziók számát (általában 2-re, hogy pl. a számítógép képernyőjén szemlélhessük). Ennek legegyszerűbb módja a fázissíkra *vetítés* (*projekció*), azaz valamelyik kétdimenziós vetület megjelenítése (2.a. ábra). A vetítés során azonban nyilvánvalóan információt veszítünk (pl. a trajektória a vetületen metszheti önmagát!). Másik lehetőség, hogy a trajektóriának csak valamely, kiválasztott alacsonyabb dimenziós felületet átdöfő metszéspontjait (tehát már nem folytonos görbét, hanem diszkrét pontsorozatot), az ún. *Poincaré-metszetet* ábrázoljuk (2.b. ábra). Periodikus gerjesztés esetén kézenfekvő speciális Poincaré-metszetet, az ún. *stroboszkópikus leképezést* használni, azaz a trajektóriából csak a gerjesztési  $T_p$  periódusidő egészszámú többszöröseinek megfelelő pillanatokban (azaz állandó fázisértékeknél) vett diszkrét pontsorozatot (2.c. ábra) ábrázolni. A  $\varphi$  fázisváltozót (lévén szögváltozó típusú) köríven ábrázoljuk, a többi változót pedig a körívre merőleges síkok sokaságán. Ekkor tehát az idő múlásával - mivel  $\varphi \sim t$  - a trajektória körbe-körbe halad miközben a körforgásra merőleges irányokban bolyong. Mivel a  $\varphi$  változó  $2\pi$  periódusú, a trajektória újra és újra átdöfi a kiválasztott  $(\varphi \bmod 2\pi) = \varphi_s$  fázisú síkot,  $\varphi_s$  a szabadon választott fázisérték, ahol mintavételezni kívánunk, így a síkon fokozatosan kirajzolódik a stroboszkópikus leképezéssel alkotott kép.



2. ábra: trajektóriák megjelenítési módjai

Disszipatív rendszerekben a trajektóriák kellően hosszú idő alatt az ún. *attraktorokhoz* tartanak. Az attraktoroknak három alaptípusa van:

- Az ún. *pontattraktor* a rendszer egy stabil állapotát jelenti.
- A *periodikus attraktor* egy stabil határciklus, a rendszer ezt elérve oszcillálni kezd, periodikusan viselkedik.
- Az ún. *különös attraktor* esetén a kívülről érkező trajektóriák nem lépnek bele, csak rásimulnak, a különös attraktoron nincsenek periodikus oszcillációk, a rendszer soha nem ismétli magát, azt mondjuk *kaotikusan* viselkedik.

Egy fázistérben több különböző attraktor is lehet. Ha a rendszer valamely releváns paraméterét, ún. *kontrollparaméterét* folytonosan változtatjuk, akkor bizonyos értékeknél a rendszer hirtelen másként kezd viselkedni; új attraktorok jelennek meg, régiek tűnnek el, vagy megváltozik a típusuk, stabilitásuk. Ezen változás tipikus megjelenési formája a *bifurkáció* jelensége. Az ún. *bifurkációs diagramon* a kontrollparaméter függvényében ábrázoljuk a rendszer egy kiválasztott fázisváltozójának kellően hosszú időfejlődés után egy adott időintervallumban Poincaré- vagy stroboszkópikus leképezéssel kapott diszkrét értékeit, azaz

várakozásunk szerint a stabil attraktorhoz tartozó értékeket, így nyerve szemléletes képet az attraktor jellegéről az adott kontrollparaméter értéknél.

A következőkben a vetítéssel kapott ún. *fázisképet* használjuk a mozgás vizuális szemléltetésére, a *stroboszkópikus képet* pedig a kaotikus attraktor szerkezetének bemutatására. Mindenekelőtt azonban a *bifurkációs diagramot* készítjük el, amely mint egyfajta térkép igazít el bennünket abban, hogy milyen paraméterértékeknél érdemes különböző típusú viselkedéseket megjelenítő attraktorokat keresnünk.

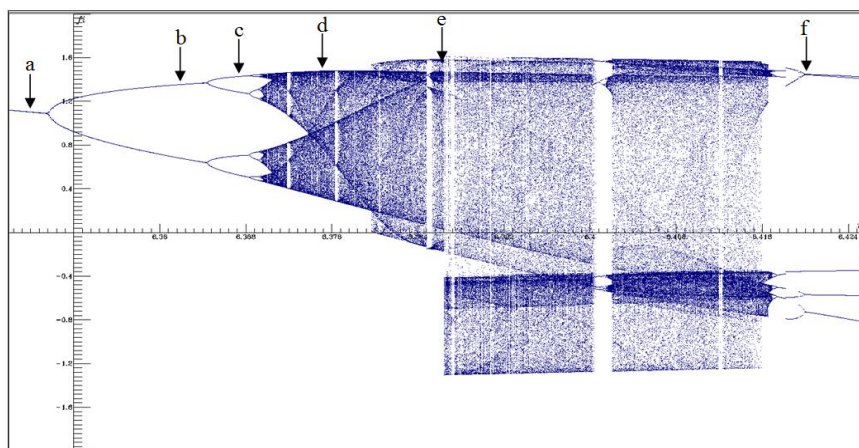
(i) Gerjesztés lineáris harmonikus mozgással

Mozgassuk tehát a gumiszál szabad végét (**B**) az  $X$  tengelyre merőleges,  $(x_0, 0)$  középpontú,  $y_0$  amplitúdójú,  $T_p$  periódusidejű lineáris harmonikus mozgással. Ez formálisan csupán annyit jelent, hogy az (1) mozgásegyenletben  $x(\Theta)$  helyére mindenütt  $x_0$ -át,  $y(\Theta)$  helyére pedig az  $y_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_p} t\right) = y_0 \cdot \sin(\Theta)$  kifejezést írjuk.

Az alábbiakban rendszert a  $c = 10 ; a = 6 ; l_0 = 3 ; y_0 = 0,6 ; T_p = 3$  rögzített paraméterértékek mellett vizsgáljuk az  $x_0$  kontrollparaméter változtatása mellett.

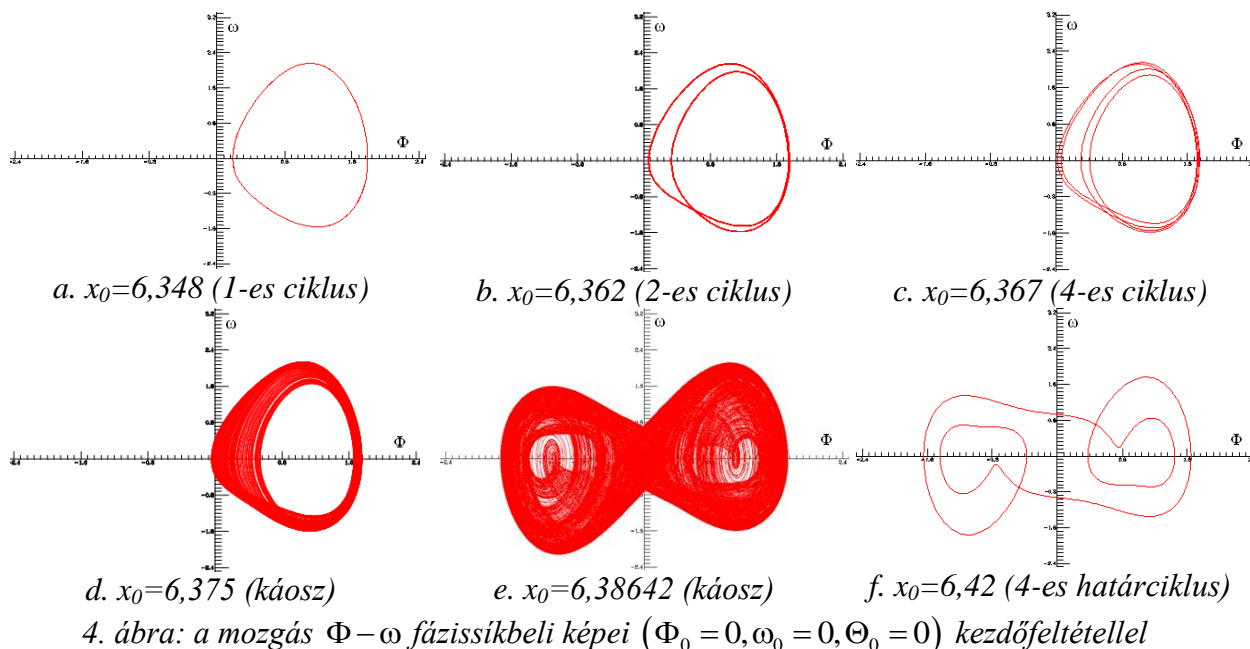
A rendszer bifurkációs diagramját a 3. ábra mutatja (a futtatható szimulációs fájl `zeeman_harmonic_bif.ds` néven található). A kezdőfeltétel minden  $x_0$  kontrollparaméter-értéknél  $(\Phi_0 = 0, \omega_0 = 0, \Theta_0 = 0)$ .

A bifurkációs kép tökéletes mintapéldáját mutatja a kaotikus rendszerek viselkedésének. Az **a** betűvel jelölt rész a stroboszkópikus képen egyetlen pontból álló *1-es határciklus*nak felel meg. A **b** tartományban adott kontrollparaméterhez a stroboszkópikus képen két pont tartozik, amelyek *2-es határciklust* reprezentálnak, a **c** részen pedig *4-es határciklust* találunk..., ez az ún. *bifurkációs sorozat*, mely tipikusan a káosz kialakulásának jele. A diagramon valóban megjelenik a *kaotikus tartomány*, amelyen belül nincs stabil periodikus viselkedés, azaz a rendszer hosszú távú előrejelzésére csak valószínűségi megállapítások tehetők. A kaotikus tartomány szerkezetét e helyen nem kívánjuk részletesen tárgyalni, annyit azonban megemlítünk, hogy a *kaotikus tartomány* jól láthatóan véges, ismét megjelenik a *periodikus viselkedés* (pl. az **f** részen).

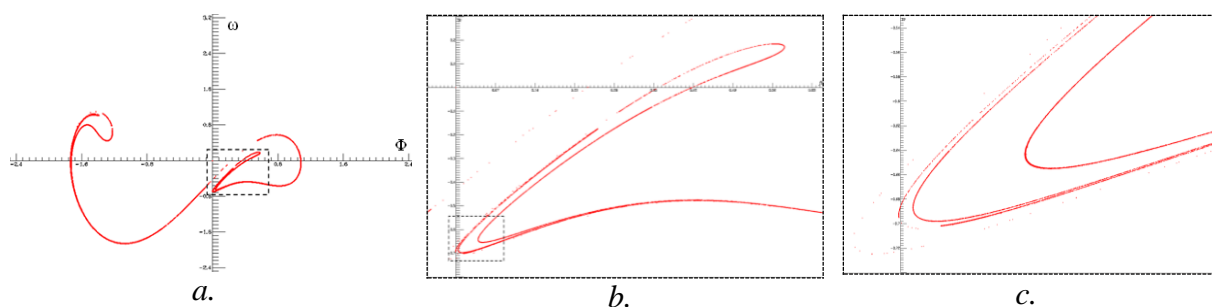


3. ábra: a rendszer bifurkációs diagramja  $(\Phi_0 = 0, \omega_0 = 0, \Theta_0 = 0)$  kezdőfeltétellel

A fentiek alapján már könnyen választhatunk olyan  $x_0$  kontrollparaméter értékeket, amelyeknél érdemes elkészíteni a fázisképeket (a futtatható szimulációs fájl zeeman\_harmonic.ds néven található). A 4. ábrán az egyes betűkkel jelölt képek a 3. ábrán azonos betűvel jelölt pontokhoz tartozó  $\Phi - \omega$  fázisképet mutatják.



A 3. ábra bifurkációs diagramján talált kaotikus tartomány trajektóriájának vetületét 4.d. és 4.e. ábra jeleníti meg. A vetület mint említettük nem alkalmas arra, hogy az attraktorról pontos képet kapjunk, ehhez a stroboszkópikus leképezést kell alkalmaznunk (a futtatható szimulációs fájl zeeman\_harmonic\_strob.ds néven található). A 4.e. ábrán látható mozgás  $\varphi_s=0$  fázisértékhez tartozó stroboszkópikus leképezéssel készített kaotikus attraktorát az 5. ábrán tanulmányozhatjuk. A b. ábra az a. ábrán szaggatott vonallal határolt terület nagyítása, míg a c. ábra a b. ábrán levő szaggatott vonallal jelölt terület kinagyított képe, az ábrák jól szemléltetik a kaotikus attraktor közismert skálatulajdonságát, a Cantor-szál jellegű fraktálszerkezetet.



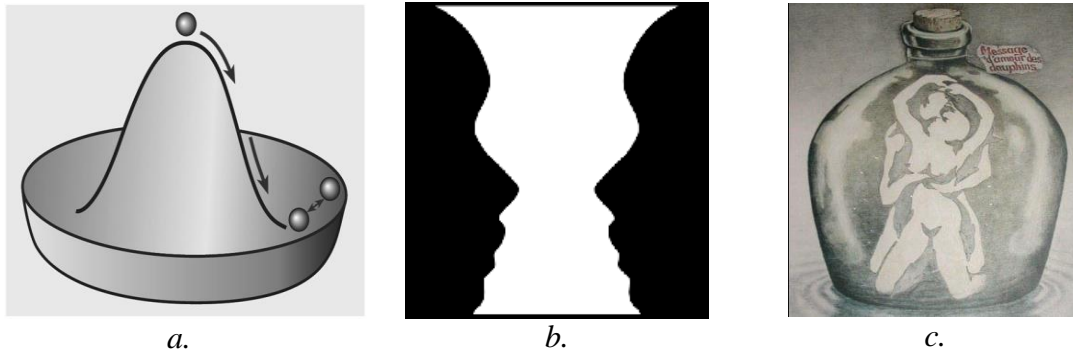
5. ábra: az  $x_0=6,38642$  értékhez tartozó kaotikus mozgás attraktorának fraktálszerkezete

### Spontán szimmetriasértés

A 4. ábráson a trajektóriák további igen érdekes tulajdonságát fedezhetjük fel: az e. és f. ábrákon látható attraktorok szimmetrikusak a  $\Phi - \omega$  fázissík origójára, míg az a.-d. ábrák attraktorai nem szimmetrikusak! A katasztrófagép leírása és az 1.a. ábra alapján nyilvánvaló,



hogy maga a szerkezet tükörszimmetrikus az  $X$  tengelyre, így a rendszert leíró mozgásegyenletek is hordozzák ezt a szimmetriát, azaz az (1) egyenletrendszer invariáns az  $X$  tengelyre való tükrözésnek megfelelő  $\Phi \rightarrow -\Phi$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $\omega \rightarrow -\omega$  változócserékre. Ezzel szemben különös módon, a rendszerben léteznek olyan (stabil és instabil) egyensúlyi állapotok (pl. 4.a.-4.d. ábrák), amelyek nem rendelkeznek a rendszer mozgásegyenleteinek szimmetriájával. Ezt a viselkedést spontán szimmetriasértésnek nevezzük.



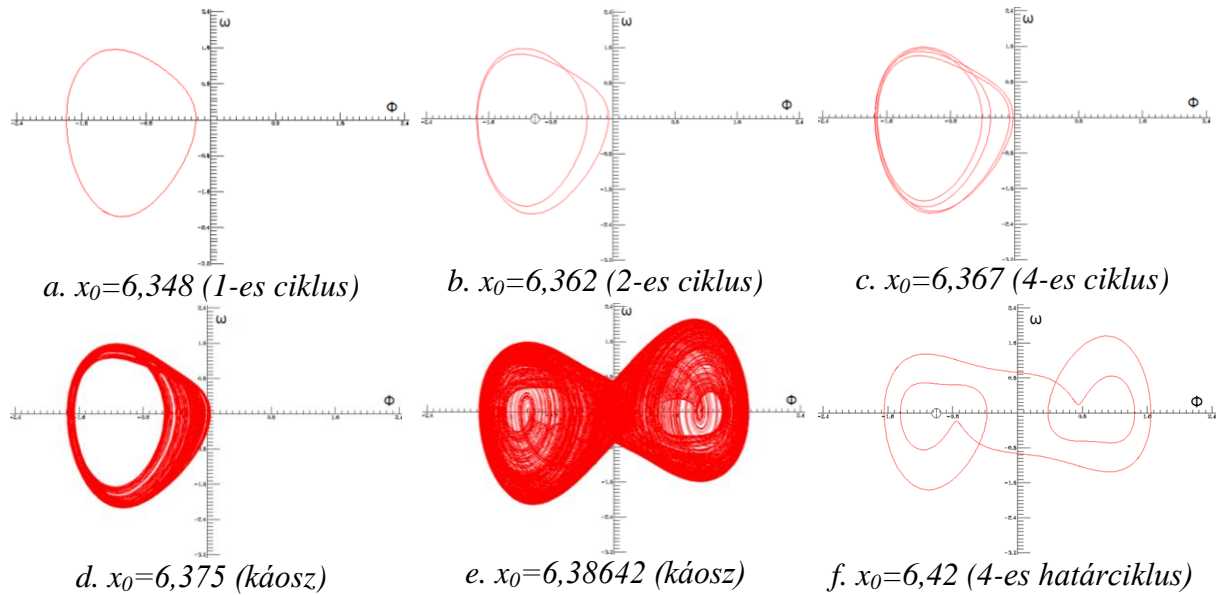
6. ábra: a szimmetria-sértés jelenségének szemléltetése

A jelenséget jól szemlélteti a 6.a. ábrán látható „sombbrero-modell”: a kalap alakja forgásszimmetrikus, viszont a tetejére helyezett (instabil helyzetű) golyó csak a perem körüli völgyben található stabil egyensúlyi állapotot, és hogy adott kísérletben éppen hol, az véletlenszerű – pontosabban fogalmazva extrém érzékenységet mutat a kezdeti feltételre (lásd alább) –, de az egyensúlyi állapot már semmiképpen sem mutat forgásszimmetriát. Ez a fizika egyik legfontosabb és legizgalmasabb jelensége (olvasásra ajánljuk például a [4] oldalt), ezen alapszik többek között az ún. Higgs-mechanizmus, amely a részecskefizika standard modellje szerint az elemi részecskék tömegét magyarázza és melléktermékként létrehozza a napjainkban elhíresült Higgs-bozont, amely után a CERN új LHC gyorsítójában folyik intenzív kutatás.

Könnyű megmutatni, hogy agyunk (érzékelésünk, gondolkodásunk) is produkálja a szimmetriasértés jelenségét. A 6.b. ábrát nézve két különböző alakzatot ismerhetünk fel, vagy egy fehér vázát, vagy két szembenéző fekete arcot, adott pillanatban mintegy véletlenszerűen választva a két lehetőségből. Felhívjuk a figyelmet arra, agyunk befolyásolható abban, hogy melyik lehetőséget választjuk. Ha az ábrára pillantást megelőzően fehér alapon fekete alakzatokat, illetve fekete alapon fehér alakzatokat nézünk, akkor az előzetes kombinációnak megfelelő értelmezés jelenik meg tudatunkban. Ezt nevezzük *indukált beállítódásnak*. A beállítódás létrejöhet korábbi beépülési (tanulási) folyamat révén is, pl. a 6.c. ábrán levő képen a felnőttek messze túlnyomó többsége meztelenül ölelkező párt lát, míg a kisgyerekek 9 kis fekete, ugráló delfint látnak, mivel nekik még nincsenek szexuális jellegű tapasztalataik, ez kiváló példa az ún. *a priori beállítódásra*. A [5] oldalon látható animáción egy forgó macska sziluettjét nézhetjük, amelyet véletlenszerűen láthatjuk forogni az óramutató szerint, vagy ellentétesen is (kísérletezzenek azzal, hogy tudják-e tudatosan választani a forgásirányokat). Mindez kézenfekvő lehetőséget nyit az emberi tudat manipulációjára. A [6] videón remek, mulatságos példát láthatunk arra, hogy miként vezérelhető a szimmetriasértés a megfelelő irányba.

Mint azt a 6.a. ábra kapcsán elmondtuk, szimmetriasértés esetén a kezdeti feltételek döntik el, hogy a lehetséges aszimmetrikus állapotok közül melyik jelenik meg. Az általunk tárgyalt rendszer esetén is csak annyit kell tennünk, hogy az eddig használt ( $\Phi_0 = 0, \omega_0 = 0, \Theta_0 = 0$ )

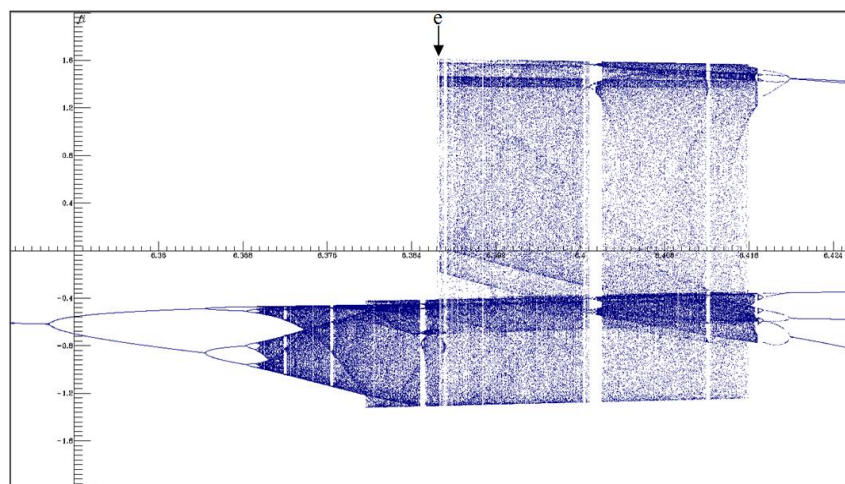
kezdőfeltétel helyett másik, megfelelő pl.  $(\Phi_0 = -1, \omega_0 = 0, \Theta_0 = 0)$  kezdőfeltételből indítsuk a szimulációt. A 7. ábrán mutatjuk be a 4. ábrával azonos kontrollparaméter értékekhez tartozó attraktorokat.



7. ábra: a mozgás  $\Phi - \omega$  fázissíkbeli képei  $(\Phi_0 = -1, \omega_0 = 0, \Theta_0 = 0)$  kezdőfeltétellel

### Fázisátalakulás modellezése

Összevetve a 4. és 7. ábrákat megállapíthatjuk, hogy az a.-d. attraktorok egymás origóra vonatkozó tükörkép párijai, míg az e. és f. attraktorok lévén már eleve szimmetrikusak az origóra azonosak a két ábrán. Ezek szerint a szimmetriasértés csak meghatározott kontrollparaméter tartományon következik be, más kontrollparamétereknél már olyan attraktorok jelennek meg, amelyek rendelkeznek a rendszer eredeti szimmetriájával. Megkönnyíti számunkra az általános kép kialakítását, ha a  $(\Phi_0 = -1, \omega_0 = 0, \Theta_0 = 0)$  kezdőfeltétel mellett is elkészítjük a rendszer bifurkációs diagramját (8. ábra).



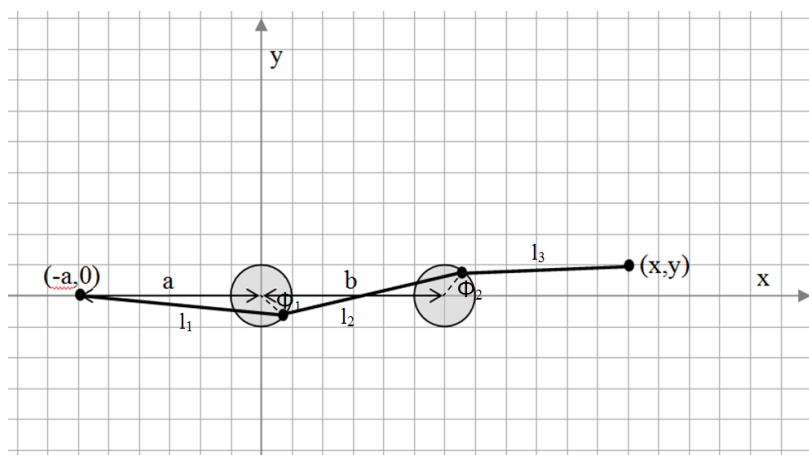
8. ábra: a rendszer bifurkációs diagramja  $(\Phi_0 = -1, \omega_0 = 0, \Theta_0 = 0)$  kezdőfeltétellel



A 3. és 8. ábrák bifurkációs diagramjait összehasonlítva már könnyen észrevehetjük, hogy az  $e$  ponttól balra a két diagram csak jellegében hasonlít egymásra, de az attraktorok numerikus értékei tekintetében teljesen különböznek, míg az  $e$  ponttól jobbra a két diagram tökéletesen megegyezik. Szabatosabban fogalmazva az  $e$  ponthoz tartozó kontrollparaméter-érték alatt, illetve felett a rendszer markánsan eltérő szimmetriájú egyensúlyi állapotokkal rendelkezik. Az ilyen típusú változásokat fázisátalakulásnak nevezzük, az  $x_0=6,38642$  kontrollparaméter-értéket pedig a fázisátalakuláshoz tartozó kritikus értéknek. Példaként a mágneses anyagok  $T_C$  ún. Curie-hőmérsékletét említhetjük, amely hőmérséklet felett a ferromágneses anyagok elveszítik mágneses tulajdonságukat (pontosabban fogalmazva paramágnessé alakulnak).

#### 4. A csatolt Zeeman-gép, mint konzervatív rendszer

A fentiekben tárgyalt Zeeman gép disszipatív rendszer. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy a Zeeman-féle katasztrófagép modellel tanulmányozható-e a konzervatív rendszerek kaotikus viselkedése. A probléma az, hogy az eredeti modell súrlódásmentes (és gerjesztés nélküli) változata konzervatív rendszer ugyan, de a kétdimenziós fázistér nem elég tág a kaotikus viselkedés megjelenéséhez (éppen a dimenziószám növelése érdekében vittünk be periodikus gerjesztést). Ötletünk szerint két súrlódásmentes katasztrófagép összekapcsolásával (9. ábra) természetes módon jutunk négydimenziós fázistérű konzervatív rendszerhez!



9. ábra: a csatolt Zeeman-féle katasztrófagép modell

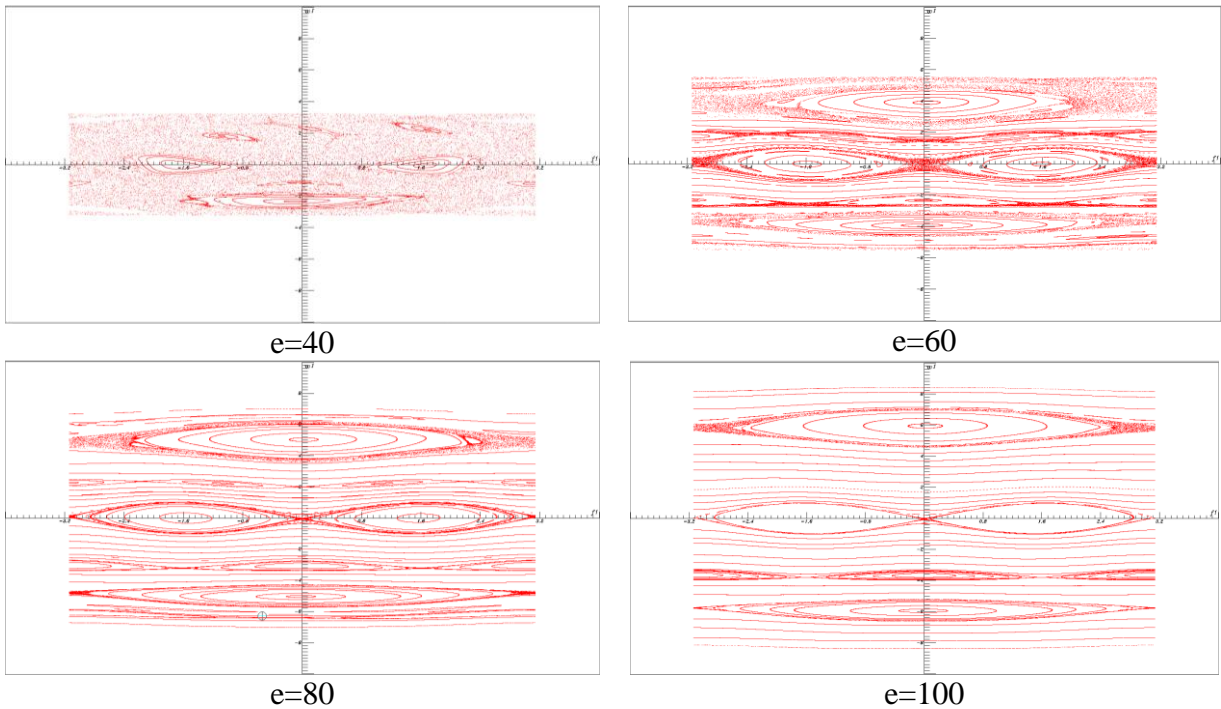
A csatolt Zeeman-gép modell mozgásegyenletét az F.2. függelékben vezetjük le, és az alábbi dinamikai egyenletrendszerrel kapjuk:

$$\begin{cases} \frac{d\Phi_1}{dt} = \omega_1 \\ \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{(l_1 - l_0)}{l_1} a \sin \Phi_1 + \frac{(l_2 - l_0)}{l_2} \{(\sin \Phi_2 \cos \Phi_1 - \sin \Phi_1 \cos \Phi_2) - b \sin \Phi_1\} \\ \frac{d\Phi_2}{dt} = \omega_2 \\ \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{(l_2 - l_0)}{l_2} \{b \sin \Phi_2 - (\sin \Phi_2 \cos \Phi_1 - \sin \Phi_1 \cos \Phi_2)\} + \frac{(l_3 - l_0)}{l_3} \{(b - x) \sin \Phi_2 + y \cos \Phi_2\} \end{cases} \quad (2)$$

A rendszer  $K+V$  energiája  $\frac{1}{2}kR^2$  egységben:

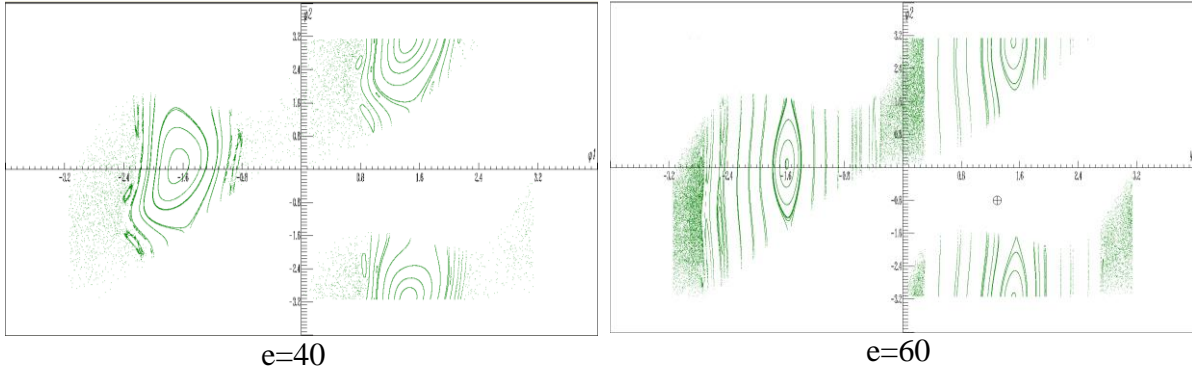
$$e = \omega_1^2 + \omega_2^2 + (l_1 - l_0)^2 + (l_2 - l_0)^2 + (l_3 - l_0)^2$$

Konzervatív rendszerekben nincsenek attraktorok, a mozgás jellege a kezdeti feltételektől függ. Az energia-kifejezésre szükség van a Poincaré-térképek elkészítéséhez, mivel sok különböző, de azonos energiájú kezdőfeltételből kell indítanunk a rendszert a teljes kép kirajzolásához, azaz esetünkben a négy  $(\Phi_{10}, \Phi_{20}, \omega_{10}, \omega_{20})$  kezdőértékből csak hármat választhatunk szabadon, a negyediket az energia értékéből határozzuk meg (a futtatható szimulációs fájl `zeeman_coupled.ds` néven található).



10. ábra: a mozgás  $\Phi_1 - \omega_1$  fázissíkbeli Poincaré-térképei  $l_0 = 3$ ,  $a = 6$ ,  $b = 6$  és  $(x = 12, y = 1)$

A 10. ábrán a mozgás  $\Phi_1 - \omega_1$  fázissíkbeli Poincaré-térképét mutatjuk be különböző energia értékek esetén és a konzervatív káoszra jellemző térképet láthatjuk: kövér fraktál jellegű kaotikus tartományokat periodikus szigetek és tartományok szabdalják. A mozgás  $\Phi_2 - \omega_2$  fázissíkbeli Poincaré-térképe nagyon hasonló jellegű, viszont a 11. ábrán látható  $\Phi_1 - \Phi_2$  fáziskép kissé más.



11. ábra: a mozgás  $\Phi_1 - \Phi_2$  fázissíkbeli Poincaré-térképei  $l_0 = 3$ ,  $a = 6$ ,  $b = 6$  és  $(x = 12, y = 1)$

A csatolt Zeeman-gép ötletet továbbgondolva vezettük be a Zeeman-hálózat modellt, amely igen gyümölcsözőnek bizonyult a statisztikus fizika tárgyalásában (lásd egy következő publikációban).

## Függelék

### F.1. A periódikusan gerjesztett sűrűlódásos Zeeman-gép dinamikája

A gép mozgásegyenletét származtassuk a Lagrange-függvényből (1.a. ábra). Használjuk a korábban már kijelölt koordináta-rendszert és legyen a gumiszálak nyugalmi hossza  $L_0$ ,  $k$  a direkciós állandója ( $[k] = N/m$ ). Tegyük fel, hogy az  $I$  tehetetlenségi nyomatékú korong adott pillanatban  $\dot{\Phi}$  szögsebességgel mozog, a  $B$  szálvég pedig a  $P(X, Y)$  pontban van. A korong mozgási energiája:

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\Phi}^2,$$

a gumiszálak megnyúlásából származó helyzeti energia pedig:

$$V = \frac{1}{2} k \left\{ (L_1 - L_0)^2 + (L_2 - L_0)^2 \right\},$$

ahol  $L_1$  és  $L_2$  a két gumiszál pillanatnyi hossza:

$$\begin{cases} L_1 = \sqrt{(R \cdot \cos \Phi + A)^2 + (R \cdot \sin \Phi)^2} \\ L_2 = \sqrt{(X - R \cdot \cos \Phi)^2 + (Y - R \cdot \sin \Phi)^2} \end{cases}.$$

A rendszer Lagrange-függvénye:

$$\mathcal{L} = K - V = \frac{1}{2} I \dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2} k \left\{ (L_1 - L_0)^2 + (L_2 - L_0)^2 \right\}.$$

A Lagrange-függvény a gumiszálak hosszán keresztül függ a  $\Phi$  szögtől, így szükség lesz a:

$$\begin{cases} \frac{dL_1}{d\Phi} = \frac{-(R \cos \Phi + A)R \sin \Phi + R^2 \sin \Phi \cos \Phi}{L_1} = -\frac{RA \sin \Phi}{L_1} \\ \frac{dL_2}{d\Phi} = \frac{(X - R \cos \Phi)R \sin \Phi - (Y - R \sin \Phi)R \cos \Phi}{L_2} = \frac{XR \sin \Phi - YR \cos \Phi}{L_2} \end{cases}$$

deriváltakra.

A Lagrange-függvény  $\Phi$  szög szerinti deriváltja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} &= -\frac{1}{2}k \left\{ 2(L_1 - L_0) \frac{dL_1}{d\Phi} + 2(L_2 - L_0) \frac{dL_2}{d\Phi} \right\} = \\ &= -k \left\{ -\frac{L_1 - L_0}{L_1} RA \sin \Phi + \frac{L_2 - L_0}{L_2} R(X \sin \Phi - Y \cos \Phi) \right\} \end{aligned}$$

valamint:

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi} = I \ddot{\Phi} \quad \text{és} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = I \ddot{\Phi}$$

Ezek alapján a  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}$  mozgásegyenlet már felírható:

$$I \ddot{\Phi} = Rk \left\{ \frac{L_1 - L_0}{L_1} A \sin \Phi + \frac{L_2 - L_0}{L_2} (Y \cos \Phi - X \sin \Phi) \right\}.$$

A továbbiakban minden hosszjellegű mennyiséget adjunk meg a korong  $R$  sugarához viszonyítva, azaz használjuk a kis betűvel jelölt dimenziótlan változókat:

$$A = a \cdot R, \quad X = x \cdot R, \quad Y = y \cdot R, \quad L_0 = l_0 \cdot R, \quad L_1 = l_1 \cdot R, \quad L_2 = l_2 \cdot R,$$

amelyekkel a mozgásegyenlet az

$$I \ddot{\Phi} = R^2 k \left\{ \frac{l_1 - l_0}{l_1} a \sin \Phi + \frac{l_2 - l_0}{l_2} (y \cos \Phi - x \sin \Phi) \right\} - \gamma \cdot \ddot{\Phi},$$

alakot ölti. Az egyenlet jobb oldalát kiegészítettük az *energia-disszipációt megadó szögsebességgel arányos súrlódási nyomatékkal*.

A  $t \rightarrow \frac{I}{\gamma} \cdot t$  új (dimenziótlan) időváltozó bevezetésével a

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} = c \cdot \left[ \frac{(l_1 - l_0)}{l_1} \cdot a \cdot \sin \Phi + \frac{(l_2 - l_0)}{l_2} \cdot (y \cdot \cos \Phi - x \cdot \sin \Phi) \right] - \frac{d\Phi}{dt},$$

a dimenziótlan mozgásegyenletet kapjuk, ahol  $c = \frac{I \cdot R^2 \cdot k}{\gamma^2}$  dimenziótlan paraméter.

A dinamikai rendszerek standard leírásának megfelelően alakítsuk a mozgásegyenletet az  $n$  dimenziós fázistér  $x_i$  ( $i=1..n$ ) változóinak elsőrendű deriváltjára vonatkozó

$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  alakú elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre. Az  $\omega = d\Phi/dt$  szögsebesség bevezetésével azt kapjuk, hogy:

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{dt} = f_1(\Phi, \omega) = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = f_2(\Phi, \omega) = c \cdot \left[ \frac{(l_1 - l_0)}{l_1} \cdot a \cdot \sin \Phi + \frac{(l_2 - l_0)}{l_2} \cdot (y \cdot \cos \Phi - x \cdot \sin \Phi) \right] - \omega \end{cases}$$

Ez a differenciálegyenlet-rendszer olyan *disszipatív rendszert* ír le, amely tetszőleges  $(\Phi_0, \omega_0)$  kezdőfeltételből indulva a súrlódás miatti folyamatos energiavesztés következtében bizonyos idő alatt leáll (a fentebb tárgyaltak szerinti egyensúlyi helyzetben). A rendszer fázistere csupán kétdimenziós (a  $\Phi$  szög és az  $\omega$  szögsebesség változókkal), ami mint ismeretes túl „szűk” kaotikus mozgás kialakulásához.

A rendszer kaotikus viselkedésének tanulmányozásához vigyünk a rendszerbe periodikus gerjesztést, azaz „rángassuk” a második gumiszál **B** végét valamilyen periodikus mozgással: előbb  $Y$  irányú lineáris harmonikus mozgással, majd az  $X$  tengelyen levő origójú egyenletes körmozgással, a gerjesztés periódusidejét mindkét esetben jelölje  $T_p$ . A gerjesztés következtében a fázistér három dimenziósra bővül, így már elvi lehetőség van kaotikus viselkedésre. A  $\Phi$  szög és az  $\omega$  szögsebesség mellett a harmadik változó a  $\Theta = \frac{2\pi}{T_p} \cdot t$

gerjesztő fázis, a rendszert leíró differenciálegyenlet rendszer pedig:

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{dt} = f_1(\Phi, \omega, \Theta) = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = f_2(\Phi, \omega, \Theta) = c \cdot \left[ \frac{(l_1 - l_0)}{l_1} \cdot a \cdot \sin \Phi + \frac{(l_2(\Theta) - l_0)}{l_2(\Theta)} \cdot (y(\Theta) \cdot \cos \Phi - x(\Theta) \cdot \sin \Phi) \right] - \omega \\ \frac{d\Theta}{dt} = f_3(\Phi, \omega, \Theta) = \frac{2\pi}{T_p} \end{cases}$$

$$\text{ahol: } \begin{cases} l_1 = \sqrt{(\cos \Phi + a)^2 + (\sin \Phi)^2} \\ l_2(\Theta) = \sqrt{(x(\Theta) - \cos \Phi)^2 + (y(\Theta) - \sin \Phi)^2} \end{cases}$$

## F.2. A csatolt Zeeman-gép modell dinamikája

A két azonos  $R$  sugarú,  $I$  tehetetlenségi nyomatékú korong (9. ábra) mozgási energiája:

$$K = \frac{1}{2} I \left( \dot{\Phi}_1^2 + \dot{\Phi}_2^2 \right),$$

amely a  $t \rightarrow \sqrt{\frac{I}{kR^2}} \cdot t$  dimenziótlan időváltozó bevezetésével:

$$K = \frac{1}{2} kR^2 \left( \dot{\Phi}_1^2 + \dot{\Phi}_2^2 \right).$$

A gumiszálak megnyúlásából származó helyzeti energia a fentebb használt ( $R$  egységben mért)  $A = a \cdot R$ ,  $B = b \cdot R$ ,  $X = x \cdot R$ ,  $Y = y \cdot R$ ,  $L_0 = l_0 \cdot R$ ,  $L_1 = l_1 \cdot R$ ,  $L_2 = l_2 \cdot R$ ,  $L_3 = l_3 \cdot R$  dimenziótlan hosszúság-változókkal:

$$V = \frac{1}{2} kR^2 \left\{ (l_1 - l_0)^2 + (l_2 - l_0)^2 + (l_3 - l_0)^2 \right\}$$

ahol:

$$\begin{cases} l_1 = \sqrt{(\cos \Phi_1 + a)^2 + (\sin \Phi_1)^2} \\ l_2 = \sqrt{(b + \cos \Phi_2 - \cos \Phi_1)^2 + (\sin \Phi_1 - \sin \Phi_2)^2} \\ l_3 = \sqrt{(b + \cos \Phi_2 - x)^2 + (y - \sin \Phi_2)^2} \end{cases}$$

A rendszer Lagrange-függvénye:

$$\mathcal{L} = K - V = \frac{1}{2} kR^2 \left( \dot{\Phi}_1^2 + \dot{\Phi}_2^2 - (l_1 - l_0)^2 - (l_2 - l_0)^2 - (l_3 - l_0)^2 \right),$$

amelyben a továbbiakban az  $\frac{1}{2} kR^2$  tényezőt el fogjuk hagyni, mivel a mozgásegyenletek nem változnak, ha a Lagrange-függvényt egy konstanssal szorozzuk.

A Lagrange-függvény csak a gumiszálak hosszán keresztül függ a  $\Phi_1$  és  $\Phi_2$  szögektől, szükség lesz a deriváltjaikra:

$$\begin{cases} \frac{dl_1}{d\Phi_1} = -\frac{a \sin \Phi_1}{l_1} \text{ és } \frac{dl_1}{d\Phi_2} = 0 \\ \frac{dl_2}{d\Phi_1} = \frac{b \sin \Phi_1 + (\sin \Phi_1 \cos \Phi_2 - \sin \Phi_2 \cos \Phi_1)}{l_2} \text{ és } \frac{dl_2}{d\Phi_2} = \frac{-b \sin \Phi_1 - (\sin \Phi_1 \cos \Phi_2 - \sin \Phi_2 \cos \Phi_1)}{l_2} \\ \frac{dl_3}{d\Phi_1} = 0 \text{ és } \frac{dl_3}{d\Phi_2} = \frac{(x-b) \sin \Phi_2 - y \cos \Phi_2}{l_3} \end{cases}$$

A Lagrange-függvény  $\Phi_1$  és  $\Phi_2$  szögek szerinti deriváltja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_1} &= -2(l_1 - l_0) \frac{dl_1}{d\Phi_1} - 2(l_2 - l_0) \frac{dl_2}{d\Phi_1} - 2(l_3 - l_0) \frac{dl_3}{d\Phi_1} = \\ &= 2 \frac{(l_1 - l_0)}{l_1} a \sin \Phi_1 - 2 \frac{(l_2 - l_0)}{l_2} \{ b \sin \Phi_1 + (\sin \Phi_1 \cos \Phi_2 - \sin \Phi_2 \cos \Phi_1) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_2} &= -2(l_1 - l_0) \frac{dl_1}{d\Phi_2} - 2(l_2 - l_0) \frac{dl_2}{d\Phi_2} - 2(l_3 - l_0) \frac{dl_3}{d\Phi_2} = \\ &= 2 \frac{(l_2 - l_0)}{l_2} \{ b \sin \Phi_2 + (\sin \Phi_1 \cos \Phi_2 - \sin \Phi_2 \cos \Phi_1) \} + 2 \frac{(l_3 - l_0)}{l_3} \{ (b-x) \sin \Phi_2 + y \cos \Phi_2 \} \end{aligned}$$

valamint:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_1} = 2\dot{\Phi}_1 \text{ és } \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_2} = 2\dot{\Phi}_2.$$



Ezek alapján a  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i}$  mozgásegyenletek már felírhatók:

$$\ddot{\Phi}_1 = \frac{(l_1 - l_0)}{l_1} a \sin \Phi_1 + \frac{(l_2 - l_0)}{l_2} \{(\sin \Phi_2 \cos \Phi_1 - \sin \Phi_1 \cos \Phi_2) - b \sin \Phi_1\}$$

$$\ddot{\Phi}_2 = \frac{(l_2 - l_0)}{l_2} \{b \sin \Phi_2 - (\sin \Phi_2 \cos \Phi_1 - \sin \Phi_1 \cos \Phi_2)\} + \frac{(l_3 - l_0)}{l_3} \{(b - x) \sin \Phi_2 + y \cos \Phi_2\}$$

A  $\omega_i = d\Phi_i/dt$  szögsebességek bevezetésével kapjuk a dinamikai egyenleteket:

$$\begin{cases} \frac{d\Phi_1}{dt} = \omega_1 \\ \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{(l_1 - l_0)}{l_1} a \sin \Phi_1 + \frac{(l_2 - l_0)}{l_2} \{(\sin \Phi_2 \cos \Phi_1 - \sin \Phi_1 \cos \Phi_2) - b \sin \Phi_1\} \\ \frac{d\Phi_2}{dt} = \omega_2 \\ \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{(l_2 - l_0)}{l_2} \{b \sin \Phi_2 - (\sin \Phi_2 \cos \Phi_1 - \sin \Phi_1 \cos \Phi_2)\} + \frac{(l_3 - l_0)}{l_3} \{(b - x) \sin \Phi_2 + y \cos \Phi_2\} \end{cases}$$

A rendszer  $K + V$  energiája  $\frac{1}{2} kR^2$  egységben:

$$e = \omega_1^2 + \omega_2^2 + (l_1 - l_0)^2 + (l_2 - l_0)^2 + (l_3 - l_0)^2$$

## Irodalomjegyzék

- [1] <http://csodafizika.hu/zeeman>
- [2] <http://www.math.sunysb.edu/~tony/whatsnew/column/catastrophe-0600/cusp4.html>
- [3] <http://lagrange.physics.drexel.edu/flash/zcm/>
- [4] <http://www.lassp.cornell.edu/sethna/OrderParameters/>
- [5] <http://jaced.com/2010/10/01/spinning-cat-illusion/>
- [6] [http://indavideo.hu/video/Tudat\\_manipulacio](http://indavideo.hu/video/Tudat_manipulacio)
- [7] <http://www.youtube.com/watch?v=FD2GdjWUkuc>
- [8] <http://www.youtube.com/watch?v=1YzvbmJiOc>

## Szerzők

Nagy Péter: TMAI, GAMF Kar, KEFO, 6000, Kecskemét, Izsáki út 10., Magyarország. e-mail: nagy.peter@gamf.kefo.hu

Tasnádi Péter: TTK, ELTE, 1117, Budapest, Pázmány P. sétány 1./A., Magyarország, e-mail: tasnadi.peter.jozsef@gmail.com