OTKA ZÁRÓJELENTÉS, T043520
DISZKRÉT ÉS KONVEX GEOMETRIA, MAKAI ENDRE

1) A 2007-BEN ELVÉGZETT MUNKA LEÍRÁSA, A 2003, 2004, 2005, 2006 ÉVIEKHEZ HASONLÓ TERJEDELEMBEN (l. ezen évek részjelentéseit)

2) A 2003-2007 ÉVEKBEN ELÉRT ÖSSZES EREDMÉNYEK RÖVID ÖSSZEFOGLALÁSA (a részjelentésekhez hasonló terjedelemben)

1) A 2007-BEN ELVÉGZETT MUNKA LEÍRÁSA

Egységkör véges sok konvex tartományra bontása esetén ezek beírt körei átmérőinek összege legalább 2; ez Tarski tételét javítja.

Legyen $H \subset R^3$, mely nem fekszik egy síkban. Tartalmazza H bármely 4, általános helyzetű pontja által meghatározott tetraéder beírt gömbjének középpontját. Ekkor H sűrű $\operatorname{conv} H$-ban. Általánosítottuk a (fentivel analóg) síkbeli beírt kör középpont problémát, megmutatva, hogy a sűrűség már egy sokkal gyengébb feltételből is következik.

Legyen H egy halmaz a szférikus vagy a hiperbolikus síkon, nem egy egyenesben. Tartalmazza H bármely 3, általános helyzetű pontja által meghatározott háromszög beírt körének középpontját. Elintéztük a H sűrűségének kérdését $\operatorname{conv} H$-ban.

Megoldottuk W. Kuperberg egy problémáját, aki egy 8 hengerből álló bonyolult rendszert konstruált, és azt kérdezte, hogy van-e közülük kettő diszjunkt.

Ismert, hogy az origóra nézve csillagszerű, origóra szimmetrikus testet meghatároznak a lineáris $(n-1)$-alterekkel való metszeteinek területei. Régi kérdésre válaszolva megmutattuk, hogy az aszimmetrikus esetben a metszetek területei és súlypontjai meghatározzák a testet. A rekonstrukciós probléma stabilitására is adtunk becslést.

V. Milman kérdését megválaszolva konvex testek polaritását (valamely 0-szimmetrikus ellipszoidra) sikerült karakterizálni, mint az origót belsejükben tartalmazó konvex testek olyan leképezését, mely konvex burkot metszetbe, es metszetet konvex burokba visz.

Rogers egy nevezetes tétele szerint R^n-ben egy konvex test eltolt példányaiból létezik ritka fedés. Megmutattuk, hogy Rogers sűrűségkorlátja olyan elrendezéssel is elérhető, amely egy rácsszerű rendszer $\mathrm{const} \cdot \log n$ eltolt példányából áll.

Új konstrukciót adtunk olyan Hamilton kört tartalmazó gráfokra, melyek szívóssága > 2.

Új módszert adtunk nagyméretű gráfok pontjainak klaszterezésére. A módszer továbbfejlesztése Derényi, Palla, Vicsek nagy viszhangot kapott módszerének, de sok szempontból jobb annál. A módszer alkalmazhatóságát két konkrét alkalmazáson is bemutattuk.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Rajola es Tallini nemrég egy új, lineáris algebrai szükséges feltételt talált Hamilton kör létezésére. Megmutattuk, hogy ez gyengébb a közismert szükséges feltételnél.

Vizsgáltuk a síkon a térfogatszorzat problémát (az $A(K)A(K^*)$, ill. hasonló mennyiség vizsgálata, Blaschke-Santaló, ill. inverz Blaschke-Santaló jellegű egyenlőtlenségek; itt A a terület, és K^* a K konvex lemez polárisa). Korábban ismert alsó becslésekre, pontos egyenlőségfeltételekkel, egyszerű elemi bizonyításokat adtunk. Felső becslést adtunk adott (páros) oldalszámú 0-szimmetrikus sokszögekre; pontosan az affin szabályos sokszögekre vétetik fel a területszorzat maximuma.

Beláttuk, hogy bármely d-hez van $\epsilon_d > 0$, hogy legfeljebb d-edfokú és legfeljebb d-dimenziós szemialgebrai halmazok bármely n-elemű rendszere tartalmaz két $\epsilon_d n$ elemű részrendszert, hogy vagy az első minden eleme metszi a második minden elemét, vagy az első minden eleme diszjunkt a második minden elemétől. Ebből következik, hogy minden ilyen rendszer tartalmaz n^δ (ahol $\delta > 0$) páronként metsző vagy páronként diszjunkt elemet. Ez választ ad Babai egy 20 éves sejtésére, mely szerint algebrai módszerekkel nem lehet Ramsey-gráfot definiálni, vagyis n csúcsú gráfot, amely nem tartalmaz se const$\cdot\log n$-nél nagyobb méretű teljes, se const$\cdot\log n$-nél nagyobb méretű üres részgráfot. (A véletlen gráf ilyen tulajdonságú.)

Általánosítottuk Ungár egy klasszikus tételét, amely azt mondja, hogy bármely n elemű, nem kollineáris, síkbeli ponthalmaz összekötő egyenesei között legalább $2\lfloor n/2 \rfloor$ különböző irányú található. Beláttuk, hogy bármely, fenti tulajdonságú ponthalmaz összekötő szakaszai közül ki lehet választani $2\lfloor n/2 \rfloor$-t, úgy, hogy ne legyen közöttük kettő, melyek egyenes meghosszabbításai mindkét szakaszon kívül metszik egymást. Igazoltuk Scott sejtését: bármely n elemű ($n \geq 7$ páratlan), nem koplanáris ponthalmaz R^3-ben meghatároz legalább $2n - 5$ különböző irányú egyenest; ez minden fenti n-re pontos.

Több állítást bizonyítottunk, melyek a geometriai algoritmusok elméletében merültek fel, és síkbeli alakzatok ütközés nélküli mozgására vonatkoznak. Pl.: van két olyan, egyenként n számozatlan diszjunkt egységkörből álló konfiguráció a síkon, hogy az egyikből a másikba lehetetlen $16n/15$-nél kevesebb lépésben eljutni. Egy lépésben egy kört mozgathatunk egy folytonos görbe mentén, anélkül, hogy összeütközne a többiekkel. Viszont találtunk olyan algoritmust, amellyel bármely n elemű konfigurációból bármely másikba el lehet jutni $3n/2 + o(n)$ lépésben.

Geometriai gráfokra vonatkozó vizsgálataink az utóbbi időben némiképp meglepő fordulatot vettek. Eddig is világos volt, hogy bizonyos részben rendezett halmazokra vonatkozó tételek szerepet játszanak ezen kérdések megközelítésében. Kiderült, hogy számos probléma megoldásának kulcsa síkbeli összefüggő halmazok (vagy görbék, néha konvex halmazok) metszetstruktúrájának vizsgálatában rejlik. Sikerült előrelépnünk néhány régi, metszet-gráfokra vonatkozó Ramsey- es Turán-típusú kérdés tisztázásában. Ezen eredmények következményeként sikerült jelentősen megjavítanunk néhány régi felső becslést, melyek azon síkba rajzolt n-pontú topológiai (vagyis görbevonalú) gráfok élszámára vonatkoznak, melyekben nincs k darab páronként metsző él (itt k fix, $n \to \infty$).

Egy n elemű halmaz 3 elemű részhalmazainak egy halmazát Steiner hármas rendszernek (STS) nevezünk, ha bármely 2 elemű részhalmaz pontosan egy darab fenti 3 eleműben van benne. Adtunk egy-egy karakterizaciót a nem projektív és nem affin STS-re.

Gráfok élszínezéseit vizsgáltuk, ahol minden színre az azonos színű éleken van egy-egy teljes rendezés, amelyek a gráf élhalmazával egy bizonyos kompatibilitási relációban vannak. Ennek segítségével definiálható a gráfra és bármilyen $k \geq 1$ egész számra egy bizonyos szám (k-track number). Vizsgáltuk ennek a számnak a gráf szokásos jellemzőivel való kapcsolatát.

2) A 2003-2007 ÉVEKBEN ELÉRT ÖSSZES EREDMÉNYEK RÖVID ÖSSZEFOGLALÁSA

Beláttuk az euklideszi háromszögkorlátot a hiperbolikus síkon egy nagy körnek kisebb kongruens körökkel való fedésére.

A Rogers-Shephard egyenlőtlenségnek egy stabilitási variánsát bizonyítottuk.

R^3-ben n pont meghatároz legalább const$\cdot n^{77/141-\epsilon}$ távolságot ($\epsilon > 0$ tetszőleges).

R^3-ben egymást páronként érintő, két irányban végtelen kongruens körhengerek száma < 25.

Adva R^n-ben egységgömbök egy rendszere, a középpontok távolságai ≥ 3.7, és közülük bármely n^2-nek van közös (egyenes) transzverzálisa. Ekkor az összesnek van közös transzverzálisa.

Befejeztük a Finite Packing and Covering 400 oldalas monográfiát, a Cambridge University Press adta ki.

50 évig nyitott kérdés volt hiperbolikus térbeli gömbelhelyezések sűrűségének definíciója. 2000-ben "szép" elhelyezésekre adtak egy definíciót. Mi tetszőleges gömbelhelyezésekre adtunk definíciót, ami a "szép" esetben az előbbire redukálódik.

Meghatároztuk a kör legritkább fedését 8, 9, 10 kongruens körrel.

R^3-ben n nem koplanáris pont ($n \geq 7$ páratlan) meghatároz $2n - 5$ irányt; ez minden fenti n-re pontos.

Korlátos fokú polinomokkal definiált R^d-beli halmazok (d fix) metszetstruktúra gráfja (n ponttal) tartalmaz n^c méretű teljes vagy üres gráfot ($c > 0$ konstans).

Rácstéglatestnek, melybe teljes n-es gráf berajzolható, úgy, hogy a csúcsok rácspontok és az (egyenes) élek más csúcson nem mennek át, minimális térfogata const$\cdot n^{3/2}$.

R^2-ben n pont láthatósági gráfjára a kromatikus szám korlátozva van a klikkszám egy függvényével, de polinomjával nem.

Molnár J. 40 éves sejtését megválaszoltuk: R^3-ben az egységgömböt tartalmazó, és alkalmas r-re, a koncentrikus r sugarú gömb által nem tartalmazott csúcsokkal rendelkező poliéderek között a minimális térfogatú/felszínű a szabályos oktaéder ill. ikozaéder.

R^3-ben C^2 konvex testeknek korlátozott élszámú konvex poliéderekkel történő térfogatapproximációját vizsgáltuk; aszimptotikus formulát adtunk és az extremális poliéderek tipikus lapját leírtuk.

Körhöz elég közeli konvex lemez kongruens példányainak adott sűrűségű rendszere esetén, a lefedett rész sűrűségére korábban csak a nemkeresztező esetben ismert felső becslést általánosan beláttuk; centrálszimmetrikus lemezre a becslés pontos. (Így egy 35 éve nyitott problémát részlegesen elintéztünk.)

Molekula a síkon egy egységkör és azt kívülről érintő r sugarú kör uniója. Létezik $[2/\sqrt{3} - 1, r_0]$ nemtriviális, expliciten megadható intervallum, hogy r-et ebből az intervallumból véve, a molekula kongruens példányaiból álló legsűrűbb elhelyezés két adott rácselhelyezés uniója.

Minden harmadfokú gráf egyenes élekkel síkba rajzolható, hogy él nem tartalmaz más csúcsot, és az élek irányainak száma legfeljebb const.

Legyen $H \subset R^n$, mely nem fekszik egy affin hipersíkban. Tartalmazza H bármely $n+1$, általános helyzetű pontja által meghatározott szimplex köréírt gömbjének középpontját. Ekkor H sűrű R^n-ben.

Egységkör véges sok konvex tartományra bontása esetén ezek beírt körei átmérőinek összege legalább 2; ez Tarski tételét javítja.

R^n-ben 2 átlagszélességű konvex test köré írt szimplex átlagszélessége legalább akkora, mint az egységgömb köré írt szabályos szimplexé.

Néhány H gráfra megadtuk, hogy legalább hány éle van egy n pontú gráfnak, melyből bárhogy elvéve k élet, marad benne H-val izomorf részgráf.

Lényegében pontosan megadtuk, hogy legalább hány éle van egy n pontú gráfnak, melyben nincs Hamilton út, de bármely élet hozzáadva már lesz.

R^n-ben $(n > 1)$ két konvex test, melyek bármely kongruens példányainak metszete/uniójuk konvex burka centrálszimmetrikus, kongruens gömbök.

Centrálszimmetrikus konvex C sokszöghöz, és $m \geq 1$ egészhez létezik $M = M(C, m) \geq 1$ egész, hogy minden, C eltoltjaiból álló M-szeres fedés m fedés uniója. Fix C-re $M \leq \text{const} \cdot m^2$ (a korábbi korlát exponenciális volt).

n konvex síkbeli halmaz között van két cn elemű részrendszer, hogy az elsőnek és másodiknak bármely eleme metsző, vagy az elsőnek és másodiknak bármely eleme diszjunkt ($c > 0$ konstans).

Minden véges síkbeli ponthalmazban van Hamilton út, hogy minden szög $\geq 20°$.

Pozitív százalékos Erdős-Szekeres típusú tételt láttunk be, pontok helyett síkbeli diszjunkt kompakt konvex halmazokra.

R^n-ben 0-ra csillagszerű testet meghatároznak a lineáris $(n-1)$-alterekkel való metszeteinek területei és súlypontjai (régi kérdésre válasz).

R^n-ben 0-t belső pontként tartalmazó konvex testek halmazának önmagába való leképezése, mely metszetet konvex burokba, konvex burkot metszetbe visz, egy 0-szimmetrikus ellipszoidra való polaritás (V. Milman kérdése).

Blaschke-Santaló egyenlőtlenséget láttunk be C 0-szimmetrikus $2n$-szögekre: $\max A(C)A(C^*)$ pontosan az affin szabályos $2n$-szögekre éretik el (A a terület, C^* a C polárisa).

Ha van két, n számozatlan diszjunkt egységkörből álló rendszer a síkon, akkor egyikből a másikba $3n/2 + o(n)$ lépéssel el lehet jutni, de $16n/15$-nél kevesebbel nem. Egy lépés egy kör folytonos mozgatása a többiekkel való ütközés nélkül.

Fix k-ra n pontú, görbevonalakkal síkba rajzolt gráfokra, úgy, hogy nincs k páronként metsző él, az élszámra a korábbiaknál sokkal jobb felső becslést adtunk.