KÖZGAZDASÁGI SZEMLE, LXVII. ÉVF., 2020. JÚLIUS–AUGUSZTUS (708–733. o.)

HEVÉR JUDIT

A piaci likviditás és a szabályozás kapcsolatának vizsgálata általános egyensúlyelméleti modellkeretben

A pénzügyi válságok következményeként az elmúlt évtizedben középpontba került a szabályozás kérdése. A gyakorlatban szerzett tapasztalat és az elméleti modellek azt mutatják, hogy a likviditási kockázat és a túlzott kockázatvállalás csökkentése érdekében bevezetett szabályozói lépések hatására a piaci szereplők módosítják befektetési döntéseiket, sőt a szabályozói előírás visszahat a piaci likviditásra. Tranzakciós költséggel (eladási és vételi ár közötti árréssel) bővített általános egyensúlyelméleti modellt alkalmazunk a különböző eszközök likviditása és a bevezetett szabályozói előírás közötti kapcsolat vizsgálatához. A modellben a szabályozás hatására nő az árrés (a piaci likviditás csökkenésének mutatója), ami visszafogja a piaci szereplők közötti kereskedést és kockázatmegosztást. Egyensúlyban a piaci szereplők fogyasztási profilja kockázatosabb marad, alacsonyabb hasznossági szintet érnek el.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: G11.

Bevezetés

A pénzügyi válságok tanulságait felismerve a likviditási kockázat mérséklése a szabályozás kulcskérdése lett. Ugyanakkor a magasabb tőkekövetelmény, a likvid eszközállomány előírása, illetve az alacsonyabb kockázatvállalás ösztönzése visszahat a piaci likviditásra. A tanulmány egy olyan keretrendszert definiál, amely segítségével elemezhető a szabályozás és a piaci likviditást megragadó árrés kapcsolata.

A tranzakciós költséggel (eladási és vételi ár közötti árréssel) bővített általános egyensúlyelméleti modellben a piaci szereplők kereskedésének célja, hogy a jövőbeli világállapottól függő kifizetésüket és (ezzel fogyasztásukat) simítsák a kockázatok megosztásán keresztül. A felírt keretrendszer számos gyakorlati probléma leírására

* A tanulmány az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-19-3-IV kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának szakmai támogatásával készült. Köszönöm témavezetőm, *Csóka Péter* szakmai iránymutatását és tanácsait. Emellett szeretném megköszönni *Carlo Acerbi, Zawadowski Ádám* és *Neszveda Gábor* előremutató megjegyzéseit.

Hevér Judit, Budapesti Corvinus Egyetem Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék.
A kézirat első változata 2020. március 1-jén érkezett szerkesztőségünkbe.
DOI: http://dx.doi.org/10.18414/KSZ.2020.7-8.708

alkalmas, hiszen a kezdeti és jövőbeli sztochasztikus készletek határozzák meg az adott piaci szereplő viselkedését és gazdaságban betöltött szerepét. Ha a jelenben a piaci szereplő jelentős pozitív készlettel rendelkezik, akkor optimumban készletének nagy részét tőketulajdonosként befektetheti. Ha a jövőben pozitív készlet realizálására számít, a jelenben viszont nem rendelkezik elegendő jövedelemmel és tőkével, akkor hitelfelvevő háztartásként/vállalatként viselkedik. Míg ha a jövőbeli világállapotok egy részében pozitív, egy részében negatív készletet realizál, akkor az eszközök tartásával fedezheti kockázatos pozícióját.

A modellben a legrosszabb kimenetekben várható negatív kifizetés függvényében meghatározott szabályozói előírás a piaci szereplők kockázatvállalásának csökkentése érdekében történik. Az előírás visszafogja a hitelfelvevő háztartások túlzott eladósodását, mérsékli a tőketulajdonosok kockázatvállalását a befektetési döntések meghozatalánál, emellett biztosítja a kockázatos jövőbeli pozíciókon elszenvedett veszteség kifizetését és a likvid eszközök tartását. A szabályozó a különböző eszközök tartása esetén eltérő szabályozási paramétert alkalmazhat, amellyel a preferált eszközök kereslete növelhető a kerülendő eszközök keresletének rovására. Például ha a szabályozó a környezeti, társadalmi és vállalatirányítási *(Environmental, Social, and Governance, ESG)* kockázat alapján határozza meg a paramétert, modellezhetjük a fenntartható eszközök tartásának ösztönzésére irányuló szabályozói lépést.

A piaci likviditást a tanulmányban az árrés, azaz a vételi és az eladási árak közötti különbség nagyságával mérjük. A modellben a piaci szereplők nem tudnak közvetlenül kereskedni, árjegyző párosítja az ellenoldali ajánlatokat, és monopolistaként határozza meg a számára optimális endogén árrést. Minden árrés mellett meghatározza a piaci szereplők legjobb válaszát, majd kiválasztja a számára legmagasabb profitot biztosító esetet. Mivel a szabályozói előírás bevezetése plusz korlátozó feltétellel módosítja a piaci szereplők optimalizálási döntését, a korábban optimális portfólió nem biztos, hogy elérhető marad, így az elérhető hasznosság adott árrés mellett nem nőhet. Ha a piaci szereplő az optimális döntés során beleütközik a szabályozói előírásba, akkor az árjegyzőnek megéri növelni az árrést arra a szintre, amelynél a szabályozói előírás mellett keresett portfólió a piaci szereplő legjobb válasza. Azaz a szabályozói előírás bevezetése (ha az optimalizáló szereplő beleütközik a korlátozó feltételbe) csökkenti a piaci likviditást és a piaci szereplők hasznosságát.

Természetesen a gyakorlatban a szabályozás kérdése sokkal összetettebb, és a piaci tökéletlenségek indokolják a beavatkozást. A tanulmány ugyanakkor megerősíti, hogy a beavatkozás költségekkel jár, a szabályozási előírás bevezetése visszahat a piaci likviditásra. A szabályozási mechanizmusok tervezésekor ezt a szempontot is mérlegelni kell.

A tanulmányban először a szabályozási gyakorlatot és a kapcsolódó irodalmat foglaljuk össze, majd a jelölések ismertetése után vázoljuk az általános egyensúlyelméleti keretet, amely leírja a piaci szereplők fogyasztási és portfólióallokálási döntését – szabályozói lépések bevezetése mellett is –, vázolja az árjegyző döntési problémáját, és megadja a piaci egyensúly feltételeit. Az ezt követő rész bemutatja a kétszereplős modellt, és példák segítségével illusztrálja az eredményeket. Végül a megállapítások összefoglalásával zárjuk a tanulmányt.

Szabályozási gyakorlat és a kapcsolódó irodalom

Az elmúlt évtizedek likviditási válságai, a fekete hétfő 1987-ben, az Egyesült Államok és Irak közötti háború 1990-ben, az LTCM összeomlása 1998-ban vagy a 2007-es amerikai jelzáloghitel-válság bizonyítják a likviditás pénzügyi piacokon betöltött kulcsszerepét (*Brunnermeier–Pedersen* [2008]). Számos tanulmány elemzi a válságok eredetét és dinamikáját. *Brunnermeier–Pedersen* [2008] a piaci likviditás *(market liquidity)* és a finanszírozási likviditás *(funding liquidity)* kétirányú interakcióját és likviditási válságok kialakulásában játszott szerepét modellezi. *Amihud és szerzőtársai* [1990] a tőzsdék összeomlása és a likviditási válság közötti kapcsolatot vizsgálta az 1987-es csődhullám példáján keresztül, és kitért arra, hogy a központi bankok és a szabályozó szervek milyen lépésekkel reagálhatnak egy likviditási sokkra. *Mitchell és szerzőtársai* [2007] az átváltható kötvények piacának 2005. évi összeomlását elemezte, és arra a következtetésre jutott, hogy a tőke szűkössége miatt likviditási válság esetén a piacok lassan állnak helyre, azaz az arbitrázs hosszú ideig fennmaradhat.

A kialakult válságok és a válságokat elemző tanulmányok felhívták a szabályozó szervek figyelmét a likviditás vizsgálatának fontosságára, miközben a pénzügyek számos területén középpontba került a szabályozás kérdése. 2013 januárjában a Bázeli Bizottság (*Basel Committee on Banking Supervision, BCBS*) a bankokra vonatkozó Bázel–III. szabályozás elemeként két új likviditási mértéket, a likviditásfedezeti mutatót *(Liquidity Coverage Ratio, LCR)*[1] és a nettó stabil forrás mutatót *(Net Stable Funding Ratio, NSFR)*[2] vezette be (*BCBS* [2013]). A bankrendszer sokktűrő képességét növelő szabályozás előírja, hogy a bankok kötelesek elegendő mennyiségű, a pénzpiacon könnyen és azonnal likvidálható eszközt tartani, illetve a kitettségeiket stabil forrással fedezni.

A bankrendszer szabályozásával párhuzamosan folyamatosan megújulnak az IOSC *(International Organisation of Securities Commissions)* pénzügyi alapok kezelésével kapcsolatos ajánlásai. Az *IOSC* [2018] ajánlás célja, hogy javítsa a nyílt végű befektetési alapok likviditási kockázatának kezelését azért, hogy védje a befektetőket, javuljon a pénzügyi piacok hatékonysága, és csökkenjen a szisztematikus kockázat. Érdekes szabályozási irány az *IOSC* [2019*b*] jelentésben megfogalmazott fenntartható pénzügyek *(sustainable finance)* irányába történő elmozdulás ösztönzése. A tanulmány a fejlődő piacok szemszögéből közelíti meg a kérdést, és 11 javaslatot fogalmaz meg, amelyeket a szabályozó szerveknek célszerű figyelembe venni a fenntartható eszközök és az ESG-típusú specifikus kockázatok szabályozásakor. Az ESG-szempontok befektetésekre gyakorolt hatását *Naffa–Fain* [2019] vizsgálta.

A SEC *(U.S. Securities and Exchange Commissions)* célkitűzései között fontos szerepet kap a pénzügyi piacokon befektető vagy hitelfelvevő háztartások védelme.[3]

[1] A likviditásfedezeti mutató előírt értéke 2019 januárjától 100 százalék, azaz a bankok legalább annyi likvid eszközt kötelesek tartani, mint amennyi a nettó kumulált pénzkiáramlás a következő 30 napban.

[2] *Láng* [2017] alapján az NSFR az elérhető stabil forrás *(available stable funding, ASF)* és a szükséges stabil forrás *(required stable funding, RSF)* hányadosa, amelynek el kell érnie a 100 százalékot.

[3] „The SEC enforces the securities laws to protect the more than 66 million American households that have turned to the securities markets to invest in their futures – whether it's starting a family, sending kids to college, saving for retirement or attaining other financial goals." (https://www.sec.gov/.)

Ugyanakkor a pénzügyi intézményi oldal szabályozása mellett a háztartások pénzügyi kultúrájának fejlesztése, a túlzott kockázatvállalás és eladósodottság visszaszorítása is kulcsfontosságú. *Király és szerzőtársai* [2008] szerint a 2007-es amerikai jelzáloghitel-válság kirobbanásának fontos előzménye a fejlett országok esetében kialakuló fogyasztási többlet és ezzel párhuzamosan a hitelboomok kialakulása és a háztartások tőkeáttételének növekedése. A probléma megoldását nehezíti, hogy a pénzügyi tanácsadók javaslatait a háztartások csupán elenyésző hányada fogadja meg, még abban az esetben is, amikor a tanácsadók önérdeke az értékesítéstől teljesen független, azaz félrevezetéstől nem kell tartaniuk (*Stolper* [2018]). *Stolper* [2018] és *Brounen és szerzőtársai* [2016] megállapította, hogy a pénzügyi műveltség szignifikánsan emeli a tanácsadás követésének és a megtakarításnak a valószínűségét. *Campbell* [2016] olyan modellkeretben vizsgálta a háztartások pénzügyi és fogyasztási döntéseinek szabályozását, amelyben a háztartások jelentős hányada nem rendelkezik az öngondoskodáshoz szükséges ismeretanyaggal. Eredménye a beavatkozás szükségességét hangsúlyozza.

A szabályozási gyakorlat mellett elméleti modellek is bevezetnek korlátozó feltételeket a szereplők döntési problémájába. *Acerbi–Scandolo* [2008] likviditási követelmény melletti portfólióértéket definiált, amely a portfóliók legjobb vételi és eladási árakon történő értékelése helyett figyelembe veszi, hogy a jövőbeli tervek megvalósítása az eszközök egy részének likvidálását követeli meg. *Bigio* [2015] modelljében a vállalatok az eszközök azonnali likvidálásának problémájával szembesülnek, illetve – a szerződések korlátozott kikényszeríthetőségéből következő bizonytalanság miatt – a fedezettartás szükségességével. *Kiyotaki–Moore* [2019] korlátozta a vállalkozók hitelfelvételét, így a befektetéshez likvidálni kell illikvid eszközeik egy részét. *Csóka* [2017] egy eladósodott vállalat divíziói közötti kockázatmegosztás lehetőségét pénzügyi korlátok mellett modellezte. *Gromb–Vayanos* [2010] a pénzügyi közvetítők tőkéje és a piaci likviditás közötti összefüggést modellezte. A modellben az alacsony likviditás miatt jelentkező arbitrázs teljes kihasználását és a piaci likviditás biztosítását akadályozzák a szofisztikált befektetők pénzügyi korlátai.

Számos tanulmány vizsgálta a szabályozási előírások sikerességét és lehetséges költségeit. *De Nicolò és szerzőtársai* [2014] részpiaci egyensúlyi modell keretében megmutatta, hogy a Bázel–III. keretében bevezetett likviditásfedezeti mutató alkalmazása visszafogja a hitelezést, csökken a hatékonyság és a jólét szintje. *Begenau* [2019] dinamikus általános egyensúlyelméleti modell segítségével vizsgálta a tőkekövetelmény optimális szintjét. A bevezetett tőkekövetelmény a betétek szűkösségén keresztül csökkenti a bankok tőkeköltségét, és növeli a bank hitelezési tevékenységét, mi több, a magasabb tőkekövetelmény ösztönzi a bankok monitoringtevékenységét, ezzel növelve a banki tevékenységek hatékonyságát. Ezzel szemben az *IOSC* [2019*a*] jelentés hangsúlyozta, hogy a vállalati kötvények másodpiacának válság utáni szabályozása korlátozza a pénzügyi közvetítőket a likviditás biztosításában, így a stressztesztek alapján a piaci nyomás a korábbiaknál súlyosabb hozamelmozdulást eredményezhet. *Sommer–Sullivan* [2018] modellje szerint a jelzáloghitelek adókedvezményének eltörlése az ingatlanárak és a jelzáloghitel-állomány csökkenését és a jólét emelkedését eredményezné.

Módszertanunkhoz hasonlóan általános egyensúlyelméleti keretet használt *LeRoy–Werner* [2001], *Csóka és szerzőtársai* [2007], *Herings–Zhou* [2019], *Eisfeldt* [2004], *Kőhegyi–Stépán* [2003] és *Zalai* [1998]. Ezek a tanulmányok a felírt modell megoldásához nyújtanak segítséget.

Az általános egyensúlyelméleti modell

A tanulmány az általános egyensúlyelméleti modell felépítésében alapvetőn *LeRoy–Werner* [2001] könyvére támaszkodik. Újítás ugyanakkor a várható veszteség függvényeként bevezetett szabályozói előírás, az árjegyző endogén árrésének használata és a készpénz kiemelése az eszközök közül, ami akár minden szereplő számára egyszerre is lehetővé teszi a kockázatmentes eszközben történő megtakarítást.

Jelölésrendszer

A jelölések bevezetése *Csóka–Herings* [2014] és *LeRoy–Werner* [2001] alapján történik. Két időszakos modellt feltételezünk: a kockázatos eszközökkel a 0-adik időszakban kereskednek, míg a kifizetések az első időszakban történnek. Egy piaci szereplő kockázatmentes eszközt/készpénzt és J különböző kockázatos eszközt tarthat. Tegyük fel, hogy a kockázatmentes eszköz kamatlába 0 százalék a piacon. Az első időszakban S különböző világállapot realizálódhat, amelyek közül $s \in \{1, \ldots, S\}$ világállapot $\pi_s > 0$ valószínűséggel következik be, és $\sum_{s=1}^{S} \pi_s = 1$. Jelölje $x_{js} \in \mathbb{R}$ a j-edik ($j \in J$) eszköz *kifizetését* az s-edik – $s \in \{1, \ldots, S\}$ – világállapotban. Míg $x_j = [x_{j1}, \ldots, x_{jS}] \in \mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ vektor a j-edik ($j \in J$) eszköz kifizetését az összes világállapotban és $X \in \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^S$ mátrix az összes eszköz kifizetését tartalmazó kifizetésmátrixot jelöli.[4]

A tanulmányban feltételezzük, hogy az árjegyző meghatározza a vételi és eladási ár közötti, számára optimális árrést. Jelölje a j-edik eszközre vonatkozó árrést $t_j = a_j - b_j$, ahol a_j az eladási *(ask)*, b_j pedig a vételi *(bid)* ár. A $b \in \mathbb{R}^J$ árvektor (oszlopvektor) a vételi árakat jelöli, azaz megmutatja $\forall j \in J$-re azt a b_j árat, amelyen a j-edik eszköz likvidálható. Az $a \in \mathbb{R}^J$ oszlopvektor az eladási (*ask*) árakat tartalmazza, $\forall j \in J$-re azt az a_j árat, amelyért meg tudjuk venni a j-edik eszköz egy egységét. Jelölje $t \in \mathbb{R}^J$ a t_j árrések oszlopvektorát. Ha a piacon nincs arbitrázs,[5] akkor $a_j \geq b_j$ $\forall j \in J$ esetén, azaz $t_j \geq 0$.

Egy kockázatos portfólió J eszközből áll. Jelölje $\times = \mathbb{R}^J$ a portfóliók terét, $\theta \in \times$ pedig egy *portfóliót*/pozíciót. A befektető piaci szereplők halmaza I. A $\theta^i \in \mathbb{R}^J$ portfólió megmutatja, hogy az $i \in I$ befektető milyen eszközöket tart és adott el rövidre. *LeRoy–Werner* [2001] alapján a szereplők két portfóliót választanak, $\theta_b^i \geq 0$-t adják el a vételi árakon, és $\theta_a^i \geq 0$-t veszik az eladási árakon, azaz $\theta^i = \theta_a^i - \theta_b^i$ pozíciót tartanak. Az i-edik szereplő c_0^i-t fogyaszt a 0-adik időszakban és $c_1^i = \left[c_{11}^i, \ldots, c_{1S}^i\right]$-t az 1. időszakban, ahol c_{1s} az $s \in \{1, \ldots, S\}$ világállapotban választott fogyasztási szintet jelöli.

[4] Ha az X mátrix rangja S, akkor a piac teljes. A tanulmányban nem feltételezünk teljes piacot.

[5] Nincs arbitrázs, ha $\nexists$ olyan $\theta_a \geq 0$ és $\theta_b \geq 0$ portfóliók, amelyekre $\theta_a^i a - \theta_b^i b < 0$ és $\left(\theta_a^i - \theta_b^i\right) X \geq 0$.

Az i-edik szereplő rendelkezésére álló készpénz készlete a 0-adik időszakban ω_0^i, az 1. időszakban pedig a világállapottól függő valószínűségi változó, $\omega_1^i = \left[\omega_{11}^i,\ \ldots,\ \omega_{1S}^i\right]$. A tanulmányban az i-edik szereplő preferenciáit a folytonos $u^i : \mathbb{R}^{S+1} \to \mathbb{R}$ hasznossági függvénnyel írjuk le.

A piaci szereplők fogyasztási és portfólióallokálási döntése

A piaci szereplők fogyasztási és portfólióallokálási döntését első lépésként szabályozás beavatkozása nélkül, majd a várható veszteség függvényében megadott szabályozói előírás mellett mutatjuk be.

Az optimalizálási probléma szabályozói előírás nélkül • Az i-edik befektető optimális fogyasztási és portfólióallokálási döntése a következő optimalizálási feladat megoldásaként adható meg:

$$\max_{c_0^i,\ c_1^i,\ \theta_a^i,\ \theta_b^i,\ \theta_0^i} u^i\left(c_0^i,\ c_1^i\right), \tag{1}$$

feltéve, hogy

$$c_0^i \leq \omega_0^i - \theta_a^i a + \theta_b^i b - \theta_0^i$$
$$c_1^i \leq \omega_1^i + \left(\theta_a^i - \theta_b^i\right) X + \theta_0^i 1^S$$
$$\theta_a^i \geq 0$$
$$\theta_b^i \geq 0.$$

A szereplők hasznosságuk maximalizálásakor a c_0^i és c_1^i fogyasztásról, a 0. időszakban megvásárolt, 1. időszakban kifizetést biztosító $\theta^i = \theta_a^i - \theta_b^i$ portfólióról és a θ_0^i félretett készpénzmennyiségről döntenek. A döntést korlátozza, hogy a 0. időszaki c_0^i fogyasztás nem haladhatja meg azt az összeget, amely az ω_0^i kezdeti készletből a θ^i portfólió nyitása és θ_0^i kockázatmentes eszköz (készpénz vagy bankbetét) tartása után marad. Míg az első időszaki c_1^i sztochasztikus fogyasztás nem nagyobb, mint az ω_1^i sztochasztikus készlet, a θ^i portfólió kifizetése és a θ_0^i félretett kockázatmentes eszköz összege.

Szabályozói előírás a várható veszteség függvényeként • Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a piaci szereplőknek a portfólió *várható veszteségének (Expected Shortfall, ES)* függvényeként megadott szabályozói előírásnak kell megfelelniük! Az *ES* definiálásához a *Csóka és szerzőtársai* [2009] tanulmányt követjük. A j-edik ($j \in J$) eszköz esetén jelölje az $x_{j1}, \ldots, x_{js}$ kimenetek rendezett értékeit $x_{j,\,s:S}$, ahol $\{x_{j,\,1:S}, \ldots, x_{j,\,s:S}\} = \{x_{j1}, \ldots, x_{jS}\}$ és $x_{j,\,1:S} \leq x_{j,\,2:S} \cdots \leq x_{j,\,s:S}$. A különböző világállapotok bekövetkezésének a valószínűsége megegyezik, azaz tegyük fel, hogy $\pi_1 = \ldots = \pi_S = 1/S$.

1. DEFINÍCIÓ • *A kimenetek bekövetkezésének valószínűsége azonos, és* $k \in \{1, \ldots, S\}$. *A j-edik* ($j \in J$) *eszköz esetén a kimenetek* x_j *realizációs vektorára a k-várható veszteség* (ES_k) *az*

$$ES_k\left(x_j\right) = -\sum_{s=1}^{k} \frac{1}{k} x_{j,\, s:S}$$

egyenlettel definiálható.

Ha a várható kifizetés a k legalacsonyabb kifizetést biztosító világállapotban negatív, azaz veszteségről beszélhetünk, akkor az ES értéke pozitív lesz. Míg várható nyereség esetén az ES értéke negatív. Tegyük fel, hogy a szabályozó minden j-edik ($j \in J$) eszköz esetében meghatároz egy δ_j szabályozói paramétert, amely eszközönként/piaconként különbözhet. A j-edik ($j \in J$) eszközre a tőkekövetelmény a $\theta_j^i = \theta_{aj}^i - \theta_{bj}^i$ pozíció kimeneteire számszerűsített ES δ_j-szerese lesz. A tőkeallokálásra vonatkozó szabály szerint a piaci szereplők annyi kockázatmentes eszközt kötelesek tartani, amennyi meghaladja a $\theta^i = \theta_a^i - \theta_b^i$ portfólió azon j-edik ($j \in J$) eszközeire összegzett tőkekövetelmény nagyságát, amelyek ES-értéke pozitív. Ebben az esetben az i-edik befektető optimális fogyasztási és portfólióallokálási döntése a következő optimalizálási feladat megoldásaként adható meg:

$$\max_{c_0^i,\, c_1^i,\, \theta_a^i,\, \theta_b^i,\, \theta_0^i} u^i\left(c_0^i,\, c_1^i\right), \tag{2}$$

feltéve, hogy

$$c_0^i \leq \omega_0^i - \theta_a^i a + \theta_b^i b - \theta_0^i$$

$$\theta_0^i \geq \sum_{j \in J} \delta_j \max\left[0,\, ES_k\left(\theta_j^i x_j\right)\right]$$

$$c_1^i \leq \omega_1^i + \left(\theta_a^i - \theta_b^i\right) X + \theta_0^i 1^S$$

$$\theta_a^i \geq 0$$

$$\theta_b^i \geq 0.$$

Az árjegyző döntési problémája

A modellben a piaci szereplők nem kereskedhetnek közvetlenül, árjegyző/közvetítő párosítja az ellenkező oldali ajánlatokat, és elfogyasztja a profitját a 0. időszakban. Egyensúlyban az árjegyző a modellben csak közvetítőként jelenik meg, nem tart eszközöket, így nem szükséges a veszteség fedezését biztosító tőkét félretennie. A pénzügyi piacok mikrostruktúráját és azon belül az árjegyzői piacokat *Erb–Havran* [2015] részletesen bemutatja. Tanulmányukban kiemelik, hogy a piaci tökéletlenségek hátterében a cserepartner-keresés és a kapcsolatteremtés költsége, hálózati externáliák, aszimmetrikus információ és a készlettartás költsége egyaránt állhat, amely okok különböző piaci mikrostruktúrák kialakulásához vezetnek.

Jelen tanulmányban *LeRoy–Werner* [2001] alapján a legegyszerűbb esetet feltételezzük, az árjegyző/közvetítő tranzakciós monopolistaként dönt minden eszköz esetén az eladási és vételi ár különbségéről, azaz az árrésről, ezzel befolyásolva a különböző eszközök piacának likviditását. *Havran–Szűcs* [2016] a közvetítői hálózatok elemzésekor duopolista árjegyzői magatartást feltételezett, amely egy további kutatási irányként jelen modellkeretben szintén vizsgálható lenne.

Definiáljuk a j-edik ($j \in J$) eszközre a $T_j\left(\theta_j^1, \ldots, \theta_j^I\right)$ tranzakciós költségfüggvényt

$$T_j\left(\theta_j^1, \ldots, \theta_j^I\right) = t_j \sum_{i \in I} \theta_{aj}^i = t_j \sum_{i \in I} \theta_{bj}^i \tag{3}$$

alakban. Az árjegyző profitot maximalizál, így optimalizálási feladatában

$$\max_{t_j\ \forall j \in J} \sum_{j \in J} T_j\left(\theta_j^1, \ldots, \theta_j^I\right) = \sum_{j \in J} t_j \sum_{i \in I} \theta_{aj}^i, \tag{4}$$

feltéve, hogy a befektető piaci szereplők hasznosságot maximalizálva döntenek a θ_a^i és θ_b^i portfóliókról.

1. LEMMA • *Ha az árjegyző a* (4) *optimalizálási feladat szerint optimalizál, akkor* t_j $\forall j \in J$ *eszközre nemnegatív.*

BIZONYÍTÁS • Tegyük fel, hogy $\exists\, \hat{j} \in J$, amelyre $t_{\hat{j}} < 0$. Ekkor a $\hat{j}$ eszköz esetén bármely $\theta_{a\hat{j}}^i = \theta_{b\hat{j}}^i > 0$ pozíció arbitrázs a piacon, hiszen a 0. időszakban a $-\theta_{a\hat{j}}^i a_{\hat{j}} + \theta_{b\hat{j}}^i b_{\hat{j}} > 0$, míg az 1. időszakban a kifizetés $\left(\theta_{a\hat{j}}^i - \theta_{b\hat{j}}^i\right) = 0$. Mivel a kifizetés minden $s \in \{1, \ldots, S\}$ világállapotban 0, és a *várható veszteség* (ES) is 0, ezért a piaci szereplők ki tudják használni az arbitrázst a korábbiakban az (1) és a (2) összefüggéssel leírt modell esetében is, ami veszteséget okoz az árjegyzőnek. Így nem lehetett optimális döntése a $t_{\hat{j}} < 0$ árrés.

A piactisztító feltételek egyensúlyban

Egy egyensúly megadható a piaci szereplők optimális kockázatoseszköz-portfóliói, az optimális készpénzmennyiség, az optimális fogyasztási szintek és az optimális árrések halmazaként $\left\{\theta_{aj}^{*i}, \theta_{bj}^{*i}, \theta_0^{*i}, c_0^{*i}, c_1^{*i}, t_j^*\right\}$ alakban, ahol θ_{aj}^{*i}, θ_{bj}^{*i}, θ_0^{*i}, c_0^{*i} és c_1^{*i} megoldása a piaci szereplők optimalizálási feladatának, míg t_j^* az árjegyző optimalizálási problémájának megoldása. A piactisztító feltétel a tőkepiacon és a fogyasztási piacon a 0. és az 1. időszakban a következő:

$$\sum_{i \in I} \theta^i = \sum_{i \in I} \left(\theta_a^i - \theta_b^i\right) = 0 \tag{5}$$

$$\sum_{i \in I} c_0^i \le \sum_{i \in I} \omega_0^i - \sum_{j \in J} T_j\left(\theta_j^1, \ldots, \theta_j^I\right) - \sum_{i \in I} \theta_0^i \tag{6}$$

$$\sum_{i \in I} c_1^i \le \sum_{i \in I} \omega_1^i + \sum_{i \in I} \theta_0^i 1^S. \tag{7}$$

1. ÁLLÍTÁS • *Egyensúlyban, ha a tőkepiac egyensúlyban van,*

$$\sum_{i\in I}\theta^i=\sum_{i\in I}\left(\theta_a^i-\theta_b^i\right)=0,$$

akkor a fogyasztási piac is egyensúlyban lesz,

$$\sum_{i\in I}c_0^i\leq\sum_{i\in I}\omega_0^i-\sum_{j\in J}T_j\left(\theta_j^1,\ \ldots,\ \theta_j^I\right)-\sum_{i\in I}\theta_0^i$$
$$\sum_{i\in I}c_1^i\leq\sum_{i\in I}\omega_1^i+\sum_{i\in I}\theta_0^i1^S.$$

BIZONYÍTÁS • Összegezzük az összes *i-edik* ($i\in I$) piaci szereplő 0. és 1. időszaki költségvetési korlátját:

$$\sum_{i\in I}c_0^i\leq\sum_{i\in I}\omega_0^i-\sum_{i\in I}\theta_a^ia+\sum_{i\in I}\theta_b^ib-\sum_{i\in I}\theta_0^i$$
$$\sum_{i\in I}c_1^i\leq\sum_{i\in I}\omega_1^i+\sum_{i\in I}\left(\theta_a^i-\theta_b^i\right)X+\sum_{i\in I}\theta_0^i1^S.$$

Tőkepiaci egyensúlyban

$$\sum_{i\in I}\theta_a^i=\sum_{i\in I}\theta_b^i,$$

ezért

$$\sum_{i\in I}\theta_a^ia-\sum_{i\in I}\theta_b^ib=\sum_{i\in I}\theta_a^i\left(a-b\right)=\sum_{i\in I}\theta_a^it=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\theta_{aj}^it_j=$$

$$=\sum_{j\in J}t_j\sum_{i\in I}\theta_{aj}^i=\sum_{j\in J}T_j\left(\theta_j^1,\ \ldots,\ \theta_j^I\right),$$

és

$$\sum_{i\in I}\left(\theta_a^i-\theta_b^i\right)X=\left(\sum_{i\in I}\theta_a^i-\sum_{i\in I}\theta_b^i\right)X=0.$$

2. ÁLLÍTÁS. *Tegyük fel, hogy az i-edik szereplő preferenciáit leíró $u^i:\mathbb{R}^{S+1}\to\mathbb{R}$ hasznossági függvény folytonos és szigorúan monoton. Ekkor a költségvetési korlátok egyenlőséggel teljesülnek, és a fogyasztási piaci egyensúlyból következik a tőkepiaci egyensúly.*[6]

3. ÁLLÍTÁS. *Tegyük fel, hogy az i-edik szereplő preferenciáit leíró $u^i:\mathbb{R}^{S+1}\to\mathbb{R}$ hasznossági függvény folytonos és szigorúan monoton. Ekkor egyensúlyban $\forall j\in J$ eszközre és $\forall i\in I$ piaci szereplő esetén létezik olyan optimális portfólió, amelyre*

$$\theta_{aj}^i\theta_{bj}^i=0. \tag{8}$$

[6] Az állítást bizonyítás nélkül közöljük, mivel nem hivatkozunk rá a tanulmányban.

BIZONYÍTÁS. Az 1. LEMMA alapján egyensúlyban $\forall j \in J$ eszközre a $t_j \geq 0$. Tegyük fel, hogy $\exists\ \hat{i} \in I$ szereplő, akinek az optimális pozíciójában $\exists\ \hat{j} \in J$ eszköz, amelyre $\theta^{\hat{i}}_{a\hat{j}}\theta^{\hat{i}}_{b\hat{j}} \neq 0$. A szigorúan monoton hasznossági függvény miatt a költségvetési korlát egyensúlyban egyenlőséggel teljesül:

$$c^{\hat{i}}_0 = \omega^{\hat{i}}_0 - \theta^{\hat{i}}_a a + \theta^{\hat{i}}_b b - \theta^{\hat{i}}_0.$$

Definiáljunk egy új $\overline{\theta}^{\hat{i}}_a$ portfóliót úgy, hogy $\overline{\theta}^{\hat{i}}_{aj} = \theta^{\hat{i}}_{aj} \forall j \in J,\ j \neq \hat{j}$ esetén, és $\overline{\theta}^{\hat{i}}_{a\hat{j}} = \theta^{\hat{i}}_{a\hat{j}} - \theta^{\hat{i}}_{b\hat{j}}$. Míg az új $\overline{\theta}^{\hat{i}}_b$ portfólió $\overline{\theta}^{\hat{i}}_{bj} = \theta^{\hat{i}}_{bj} \forall j \in J,\ j \neq \hat{j}$ esetén, és $\overline{\theta}^{\hat{i}}_{b\hat{j}} = 0$. Mivel

$$\theta^{\hat{i}}_a - \theta^{\hat{i}}_b = \overline{\theta}^{\hat{i}}_a - \overline{\theta}^{\hat{i}}_b,$$

ezért az új $\overline{\theta^{\hat{i}}}$ pozíció kifizetése az 1. időszakban megegyezik a $\theta^{\hat{i}}$ pozíció kifizetésével.

Ugyanakkor, ha a $t_{\hat{j}}$ árrés pozitív, akkor az elérhető új fogyasztási szint a 0. időszakban:

$$\overline{c^{\hat{i}}_0} = \omega^{\hat{i}}_0 - \overline{\theta^{\hat{i}}_a} a + \overline{\theta^{\hat{i}}_b} b - \theta^{\hat{i}}_0 > c^{\hat{i}}_0 = \omega^{\hat{i}}_0 - \theta^{\hat{i}}_a a + \theta^{\hat{i}}_b b - \theta^{\hat{i}}_0.$$

Így a hasznossági függvények szigorú monotonitása miatt a $\theta^{\hat{i}}$ pozíció nem lehetett az $\hat{i}$ szereplő optimális döntése. Ha pedig a $t_{\hat{j}}$ árrés 0, akkor a $\theta^{\hat{i}}$ portfólióhoz hasonlóan a $\overline{\theta^{\hat{i}}}$ portfólió is optimális.

Egyensúly szabályozói előírás bevezetésével és a nélkül

A tanulmány kulcskérdése, hogy mi történik a piaci likviditással a szabályozói előírás bevezetésekor. A kérdés vizsgálatához össze kell hasonlítanunk azt az egyensúlyt, amelynek meghatározásakor a piaci szereplők a szabályozói előírás bevezetése nélkül az (1) optimalizálási probléma alapján döntenek, azzal az egyensúllyal, amelyet a szabályozói korlát teljesítését is előíró (2) optimalizálási feladat megoldása határoz meg. A szabályozói előírás bevezetésével a feltételes szélsőérték-feladat megoldása addicionális korlát mellett történik, ezért a döntési lehetőségek halmaza nem bővülhet. Két esetet különböztethetünk meg.

4. ÁLLÍTÁS • *Legyen a* $\left\{\theta^{*i}_{aj},\ \theta^{*i}_{bj},\ \theta^{*i}_0,\ c^{*i}_0,\ c^{*i}_1,\ t^*_j\right\}$ *egyensúly, ahol* $\theta^{*i}_{aj},\ \theta^{*i}_{bj},\ \theta^{*i}_0,\ c^{*i}_0$ *és* c^{*i}_1 *megoldása a piaci szereplők* (1) *optimalizálási feladatának. Ha* $\forall i \in I$*-re*

$$\theta^{*i}_0 \geq \sum_{j \in J} \delta_j \max\left[0,\ ES_k\left(\theta^{*i}_j x_j\right)\right]$$

teljesül, akkor a $\left\{\theta^{*i}_{aj},\ \theta^{*i}_{bj},\ \theta^{*i}_0,\ c^{*i}_0,\ c^{*i}_1,\ t^*_j\right\}$ *egyensúly marad, ha a piaci szereplők a* (2) *optimalizálási feladat szerint döntenek.*

A triviális állítás azt az esetet fogalmazza meg, amikor a szabályozói előírás nélkül meghatározott optimum teljesíti az előírt szabályozói korlátot, azaz a szabályozói előírás redundáns. Ekkor az eredeti egyensúly elérhető marad, az árjegyző optimális döntése nem változik, így a piaci likviditást megragadó endogén árrés is megegyezik a vizsgált két egyensúly esetében.

5. ÁLLÍTÁS • *Legyen a* $\left\{\theta_{aj}^{*i},\ \theta_{bj}^{*i},\ \theta_0^{*i},\ c_0^{*i},\ c_1^{*i},\ t_j^*\right\}$ *egyensúly, ahol* $\theta_{aj}^{*i},\ \theta_{bj}^{*i},\ \theta_0^{*i},\ c_0^{*i}$ *és* c_1^{*i} *megoldása a piaci szereplők* (1) *optimalizálási feladatának, és tegyük fel, hogy létezik* $i \in I$, *amelyre*

$$\theta_0^{*\bar{i}} < \sum_{j \in J} \delta_j \max\left[0,\ ES_k\left(\theta_j^{*\bar{i}} x_j\right)\right].$$

Ekkor a $\left\{\theta_{aj}^{**i},\ \theta_{bj}^{**i},\ \theta_0^{**i},\ c_0^{**i},\ c_1^{**i},\ t_j^{**}\right\}$ *egyensúly, ahol a piaci szereplők a* (2) *optimalizálási feladat szerint döntenek, nem egyezik meg a* $\left\{\theta_{aj}^{*i},\ \theta_{bj}^{*i},\ \theta_0^{*i},\ c_0^{*i},\ c_1^{*i},\ t_j^*\right\}$ *egyensúllyal.*

Ha a szabályozói előírás nélkül meghatározott optimumban van olyan szereplő, aki megsérti a szabályozói előírásként bevezetett korlátot, akkor számára a szabályozói előírás bevezetése után már nem érhető el a korábban választott portfólió. A szabályozói előírás bevezetésének következtében megváltozik az egyensúly.

1. SEJTÉS. *Tegyük fel, hogy* $t_j = t\ \forall j \in J$*-re, és az i-edik szereplő preferenciáit leíró* u^i: $\mathbb{R}^{S+1} \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos és szigorúan monoton.*

Legyen $\left\{\theta_{aj}^{*i},\ \theta_{bj}^{*i},\ \theta_0^{*i},\ c_0^{*i},\ c_1^{*i},\ t^*\right\}$ *egyensúly, ahol* $\theta_{aj}^{*i},\ \theta_{bj}^{*i},\ \theta_0^{*i},\ c_0^{*i}$, *és* c_1^{*i} *megoldása a piaci szereplők* (1) *optimalizálási feladatának, és* $\left\{\theta_{aj}^{**i},\ \theta_{bj}^{**i},\ \theta_0^{**i},\ c_0^{**i},\ c_1^{**i},\ t^{**}\right\}$ *egyensúly, ahol a* $\theta_{aj}^{**i},\ \theta_{bj}^{**i},\ \theta_0^{**i},\ c_0^{**i}$ *és* c_1^{**i} *megoldása a piaci szereplők* (2) *optimalizálási feladatának. Tegyük fel továbbá, hogy létezik* $\bar{i} \in I$, *amelyre*

$$\theta_0^{*\bar{i}} < \sum_{j \in J} \delta_j \max\left[0,\ ES_k\left(\theta_j^{*\bar{i}} x_j\right)\right].$$

Ekkor

1. $\theta_0^{**\bar{i}} = \sum_{j \in J} \delta_j \max\left[0,\ ES_k\left(\theta_j^{**\bar{i}} x_j\right)\right]$,

2. $u^i\left(c_0^{**i},\ c_1^{**i}\right) \le u^i\left(c_0^{*i},\ c_1^{*i}\right) \forall i \in I$ *esetén, és* $u^{\bar{i}}\left(c_0^{**\bar{i}},\ c_1^{**\bar{i}}\right) < u^{\bar{i}}\left(c_0^{*\bar{i}},\ c_1^{*\bar{i}}\right)$,

3. $t^{**} > t^*$.

Szigorúan monoton hasznossági függvény feltevése mellett az új portfóliót választó piaci szereplőkre vonatkozó szabályozási előírás kötni fog (1. SEJTÉS 1. pont), hasznosságuk pedig csökken, mert az új portfóliót előtte is választhatták volna (1. SEJTÉS 2. pont). A piaci szereplők hasznossága nem nőhet, hiszen a döntési lehetőségeik halmaza nem változik vagy szűkül. Amíg köt a korlát, addig a piaci szereplők nem tudnak olyan mennyiséget venni/eladni az eszközökből, ami a szabályozói előírás nélkül optimális volt, ezért a kereskedett mennyiség növelése nem tudja kompenzálni az árrés csökkentése miatt kieső bevételt. Az árjegyző magasabb profitot tud elérni az árrés emelésével (1. SEJTÉS 3. pont). Az árrést egészen addig emeli az árjegyző, amíg a szabályozói előírás redundánssá válik.

A modell két piaci szereplővel

A következőkben feltesszük, hogy két piaci szereplő kereskedik egymással, miközben az árjegyző csak közvetít, nem tart eszközöket. A kereskedés célja, hogy a szereplők simítsák fogyasztásukat a két időszak és a különböző világállapotok között. A kereskedés feltétele, hogy a készletek vagy a hasznossági függvények különbözzenek. Célunk, hogy a speciális eset levezetésén és példákon keresztül megvizsgáljuk, hogy szabályozói előírás bevezetésének hatására hogyan módosítják döntésüket a szereplők, és ennek következtében hogyan változik az egyensúly.

Két piaci szereplő, J eszköz és S világállapot

Tegyük fel, hogy $|I|=2$, azaz legyen két piaci szereplőnk. Az i-edik szereplő fogyasztási és portfólióallokálási döntése:

$$\max_{c_0^i,\, c_1^i,\, \theta_a^i,\, \theta_b^i,\, \theta_0^i} u^i\left(c_0^i,\, c_1^i\right), \tag{9}$$

feltéve, hogy

$$c_0^i \leq \omega_0^i - \theta_a^i a + \theta_b^i b - \theta_0^i$$
$$c_1^i \leq \omega_1^i + \left(\theta_a^i - \theta_b^i\right) X + \theta_0^i 1^S$$
$$\theta_a^i \geq 0$$
$$\theta_b^i \geq 0.$$

Amikor a tőkepiac egyensúlyban van, a piactisztító feltétel alapján az optimális portfóliókra teljesül, hogy

$$\theta^1 + \theta^2 = \theta_a^1 - \theta_b^1 + \theta_a^2 - \theta_b^2 = 0,$$

azaz $-\theta_j^1 = \theta_j^2\ \forall j \in J$ kockázatos eszközre. Az 1. ÁLLÍTÁS értelmében a költségvetési korlátok összegzése biztosítja tőkepiaci egyensúly esetén a fogyasztási piacok egyensúlyát. Az árjegyző a t_j árrésről ($\forall j \in J$ eszközre) döntve maximalizálja a tranzakciós költségfüggvények összegét:

$$\max_{t_j \forall j \in J} \sum_{j \in J} t_j \left(\theta_{aj}^1 + \theta_{aj}^2\right),$$

és elfogyasztja profitját a 0-adik időszakban. Egyensúlyban az optimális árrés nem lehet negatív az 1. LEMMA értelmében. Ezért, ha a kereskedő piaci szereplők hasznossági függvénye szigorúan monoton, akkor sosem éri meg egyszerre venni és eladni ugyanazt az eszközt: $\theta_{aj}^1 \theta_{bj}^1 = 0$ és $\theta_{aj}^2 \theta_{b2}^2 = 0$ (3. ÁLLÍTÁS).

A kétszereplős modellt módosíthatjuk, ha a piaci szereplőknek teljesíteniük kell a likvid eszközök tartását előíró szabályt. A szabályozás szerepeltetése

$$\theta_0^i \geq \sum_{j \in J} \delta_j \max\left[0,\ ES_k\left(\theta_j^i x_j\right)\right]$$

feltétellel módosítja az i-edik szereplő fogyasztási és portfólióallokálási döntését, ugyanakkor a szabályozás nem változtat az egyensúly piactisztító feltételein.

Speciális kétszereplős modell megoldása

Legyen a modellben $|I|=2$, $|J|=2$, és $|S|=2$ az 1. időszakban, azaz két szereplő, két eszköz és két világállapot. A két világállapot bekövetkezésének valószínűsége megegyezik ($\pi_1=\pi_2=1/2$). A két eszköz kifizetése legyen $x_1=[x_{11}, -x_{11}]$ és $x_2=[-x_{22}, x_{22}]$. Tegyük fel továbbá, hogy a két piaci szereplő különböző jövőbeli világállapotban realizál pozitív készletet, azaz $\omega_{11}^1>0$ és $\omega_{12}^1=0$, illetve $\omega_{11}^2=0$ és $\omega_{12}^2>0$. Ekkor $x_{11}>0$ és $x_{22}>0$ esetén az első szereplő kizárólag a második eszközt $\left(\theta_{a1}^1=0,\ \theta_{b2}^1=0\right)$, míg a második szereplő az első eszközt veszi $\left(\theta_{a2}^2=0,\ \theta_{b1}^2=0\right)$.

Logaritmikus hasznossági függvényt feltételezve írjuk fel a fogyasztási és portfólióallokálási döntést. Ekkor a hasznossági függvény szigorú monotonitása miatt a költségvetési korlátok egyenlőséggel teljesülnek, és a c_0 és c_1 fogyasztás szigorúan pozitív. A szabályozási előírásként bevezetett korlát egyszerűsödik, mivel a két világállapot esetén az ES számításakor $k=1$. A maximalizálási problémák a következő alakban adhatók meg:[7]

$$\max_{c_0^1,\ c_1^1} \ln\left(c_0^1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(c_{11}^1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(c_{12}^1\right), \tag{10}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned}
&c_0^1=\omega_0^1+\theta_{b1}^1 b_1-\theta_{a2}^1 a_2-\theta_0^1\\
&\theta_0^1\geq\delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{b1}^1 x_{11}\right)+\delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{a2}^1 x_{22}\right)\\
&c_{11}^1=\omega_{11}^1-\theta_{b1}^1 x_{11}+\theta_{a2}^1 x_{22}+\theta_0^1\\
&c_{12}^1=\theta_{b1}^1 x_{11}+\theta_{a2}^1 x_{22}+\theta_0^1\\
&\theta_{a2}^1\geq 0\\
&\theta_{b1}^1\geq 0\\
&c_0^1>0\\
&c_1^1>0,
\end{aligned}$$

és

$$\max_{c_0^2,\ c_1^2} \ln\left(c_0^2\right)+\frac{1}{2}\ln\left(c_{11}^2\right)+\frac{1}{2}\ln\left(c_{12}^2\right), \tag{11}$$

[7] A fogyasztás szigorú pozitivitása miatt az optimalizálási problémákban két feltétel szigorú egyenlőtlenség formájában adott, ezért a lehetséges megoldások halmaza nem zárt. Ha az egyensúlyi megoldás nem teljesíti a szigorú egyenlőtlenséget, akkor nincs globális maximuma az optimalizálási feladatoknak. A példában a fogyasztás pozitivitását csak az optimalizálás után ellenőrizzük.

feltéve, hogy

$$c_0^2 = \omega_0^2 + \theta_{b2}^2 b_2 - \theta_{a1}^2 a_1 - \theta_0^2$$
$$\theta_0^2 \geq \delta_1 \left(\frac{1}{2} \theta_{a1}^2 x_{11} \right) + \delta_2 \left(\frac{1}{2} \theta_{b2}^2 x_{22} \right)$$
$$c_{11}^2 = \theta_{b2}^2 x_{22} + \theta_{a1}^2 x_{11} + \theta_0^2$$
$$c_{12}^2 = \omega_{12}^2 - \theta_{b2}^2 x_{22} - \theta_{a1}^2 x_{11} + \theta_0^2$$
$$\theta_{a1}^2 \geq 0$$
$$\theta_{b2}^2 \geq 0$$
$$c_0^2 > 0$$
$$c_1^2 > 0.$$

Vegyük észre, hogy az első piaci szereplőnek az első jövőbeli világállapotban mindkét eszköz negatív kifizetést, míg a második világállapotban mindkét eszköz pozitív kifizetést biztosít. Mivel a két eszköz nem független egymástól, a megoldás során a két eszközből kikevert portfólió kifizetését határozzuk meg, a két eszköz egyensúlyi ára mellett a piaci szereplőnek mindegy, hogy a két eszközből hogyan keveri ki a keresett portfóliót.

Helyettesítsük be az egyenlőséggel adott feltételeket a hasznossági függvényekbe a c_0^1, c_{11}^1, c_{12}^1, c_0^2, c_{11}^2 és c_{12}^2 fogyasztás helyére, és írjuk fel a Lagrange-függvényeket a feltételes optimalizáláshoz:

$$G\left(\theta_{b1}^1, \theta_{a2}^1, \theta_0^1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1\right) = \ln\left(\omega_0^1 + \theta_{b1}^1 b_1 - \theta_{a2}^1 a_2 - \theta_0^1\right) +$$
$$+ \frac{1}{2} \ln\left(\omega_{11}^1 - \theta_{b1}^1 x_{11} - \theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_0^1\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_0^1\right) +$$
$$+ \gamma_1 \left[\theta_0^1 - \delta_1 \left(\frac{1}{2} \theta_{b1}^1 x_{11} \right) - \delta_2 \left(\frac{1}{2} \theta_{a2}^1 x_{22} \right) \right] + \lambda_1 \theta_{b1}^1 + \mu_1 \theta_{a2}^1,$$

$$G\left(\theta_{b2}^2, \theta_{a1}^2, \theta_0^2, \gamma_2, \lambda_2, \mu_2\right) = \ln\left(\omega_0^2 + \theta_{b2}^2 b_2 - \theta_{a1}^2 a_1 - \theta_0^2\right) +$$
$$+ \frac{1}{2} \ln\left(\theta_{b2}^2 x_{22} + \theta_{a1}^2 x_{11} + \theta_0^2\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\omega_{12}^2 - \theta_{b2}^2 x_{22} - \theta_{a1}^2 x_{11} + \theta_0^2\right) +$$
$$+ \gamma_2 \left[\theta_0^2 - \delta_1 \left(\frac{1}{2} \theta_{a1}^2 x_{11} \right) - \delta_2 \left(\frac{1}{2} \theta_{b2}^2 x_{22} \right) \right] + \lambda_2 \theta_{b2}^2 + \mu_2 \theta_{a1}^2,$$

ahol γ_1, γ_2, λ_1, λ_2, μ_1 és μ_2 a Lagrange-szorzók. Az első szereplő optimalizálási problémájának Karush–Kuhn–Tucker-feltételei:

$$\frac{\partial G\left(\theta_{b1}^1, \theta_{a2}^1, \theta_0^1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1\right)}{\partial \theta_{b1}^1} = \frac{b_1}{c_0^1} + \frac{-x_{11}}{2c_{11}^1} + \frac{x_{11}}{2c_{12}^1} - \gamma_1 \delta_1 \frac{1}{2} x_{11} + \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial G\left(\theta_{b1}^1,\ \theta_{a2}^1,\ \theta_0^1,\ \gamma_1,\ \lambda_1,\ \mu_1\right)}{\partial \theta_{a2}^1} = \frac{-a_2}{c_0^1} + \frac{-x_{22}}{2c_{11}^1} + \frac{x_{22}}{2c_{12}^1} - \gamma_1 \delta_2 \frac{1}{2} x_{22} + \mu_1 = 0$$

$$\frac{\partial G\left(\theta_{b1}^1,\ \theta_{a2}^1,\ \theta_0^1,\ \gamma_1,\ \lambda_1,\ \mu_1\right)}{\partial \theta_0^1} = \frac{-1}{c_0^1} + \frac{1}{2c_{11}^1} + \frac{1}{2c_{12}^1} + \gamma_1 = 0$$

$$\frac{\partial G\left(\theta_{b1}^1,\ \theta_{a2}^1,\ \theta_0^1,\ \gamma_1,\ \lambda_1,\ \mu_1\right)}{\partial \gamma_1} = \theta_0^1 - \delta_1 \left(\frac{1}{2}\theta_{b1}^1 x_{11}\right) - \delta_2 \left(\frac{1}{2}\theta_{a2}^1 x_{22}\right) \geq 0$$

$$\frac{\partial G\left(\theta_{b1}^1,\ \theta_{a2}^1,\ \theta_0^1,\ \gamma_1,\ \lambda_1,\ \mu_1\right)}{\partial \lambda_1} = \theta_{b1}^1 \geq 0$$

$$\frac{\partial G\left(\theta_{b1}^1,\ \theta_{a2}^1,\ \theta_0^1,\ \gamma_1,\ \lambda_1,\ \mu_1\right)}{\partial \mu_1} = \theta_{a2}^1 \geq 0.$$

A komplementaritás és a Lagrange-szorzók nemnegativitása miatt

$$\gamma_1 \left[\theta_0^1 - \delta_1 \left(\frac{1}{2}\theta_{b1}^1 x_{11}\right) - \delta_2 \left(\frac{1}{2}\theta_{a2}^1 x_{22}\right)\right] = 0$$

$$\lambda_1 \left[\theta_{b1}^1\right] = 0$$

$$\mu_1 \left[\theta_{a2}^1\right] = 0$$

$$\gamma_1 \geq 0$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\mu_1 \geq 0.$$

A második szereplő optimalizálási problémájának Karush–Kuhn–Tucker-feltételei:

$$\frac{\partial G\left(\theta_{b2}^2,\ \theta_{a1}^2,\ \theta_0^2,\ \gamma_2,\ \lambda_2,\ \mu_2\right)}{\partial \theta_{b2}^2} = \frac{b_2}{c_0^2} + \frac{x_{22}}{2c_{11}^2} + \frac{-x_{22}}{2c_{12}^2} - \gamma_2 \delta_2 \frac{1}{2} x_{22} + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial G\left(\theta_{b2}^2,\ \theta_{a1}^2,\ \theta_0^2,\ \gamma_2,\ \lambda_2,\ \mu_2\right)}{\partial \theta_{a1}^2} = \frac{-a_1}{c_0^2} + \frac{x_{11}}{2c_{11}^2} + \frac{-x_{11}}{2c_{12}^2} - \gamma_2 \delta_1 \frac{1}{2} x_{11} + \mu_2 = 0$$

$$\frac{\partial G\left(\theta_{b2}^2,\ \theta_{a1}^2,\ \theta_0^2,\ \gamma_2,\ \lambda_2,\ \mu_2\right)}{\partial \theta_0^2} = \frac{-1}{c_0^2} + \frac{1}{2c_{11}^2} + \frac{1}{2c_{12}^2} + \gamma_2 = 0$$

$$\frac{\partial G\left(\theta_{b2}^2,\ \theta_{a1}^2,\ \theta_0^2,\ \gamma_2,\ \lambda_2,\ \mu_2\right)}{\partial \gamma_2} = \theta_0^2 - \delta_1 \left(\frac{1}{2}\theta_{a1}^2 x_{11}\right) - \delta_2 \left(\frac{1}{2}\theta_{b2}^2 x_{22}\right) \geq 0$$

$$\frac{\partial G\left(\theta_{b2}^2,\ \theta_{a1}^2,\ \theta_0^2,\ \gamma_2,\ \lambda_2,\ \mu_2\right)}{\partial \lambda_2} = \theta_{b2}^2 \geq 0$$

$$\frac{\partial G\left(\theta_{b2}^2,\ \theta_{a1}^2,\ \theta_0^2,\ \gamma_2,\ \lambda_2,\ \mu_2\right)}{\partial \mu_2} = \theta_{a1}^2 \geq 0.$$

A komplementaritás és a Lagrange-szorzók nemnegativitása miatt

$$\gamma_2\left[\theta_0^2-\delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{a1}^2x_{11}\right)-\delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{b2}^2x_{22}\right)\right]=0$$

$$\lambda_2\left[\theta_{b2}^2\right]=0$$

$$\mu_2\left[\theta_{a1}^2\right]=0$$

$$\gamma_2\geq 0$$

$$\lambda_2\geq 0$$

$$\mu_2\geq 0.$$

A megoldás során első lépésként feltesszük, hogy a komplementaritás teljesüléséhez γ_1, λ_1, μ_1, γ_2, λ_2 és μ_2 értéke 0. Ekkor az egyenlőtlenségként megadott feltételek nélkül megoldhatjuk a maximalizálási problémákat, majd ellenőrizhetjük, hogy az így kapott optimális megoldás valóban teljesíti-e a korlátozó feltételeket. Ha teljesíti, akkor az egyenlőtlenség formájában megadott korlátozó feltételek – köztük a szabályozói előírás – nem módosítanak az egyensúlyon, hiszen nem befolyásolják a piaci szereplők döntését (4. ÁLLÍTÁS). Ha a szabályozói előírás nem teljesül, akkor a kiinduló feltevésünk, miszerint egyensúlyban $\gamma_1=0$ és $\gamma_2=0$, hamis. A modellt

$$\theta_0^1=\delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{b1}^1x_{11}\right)+\delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{a2}^1x_{22}\right) \tag{12}$$

$$\theta_0^2=\delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{a1}^2x_{11}\right)+\delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{b2}^2x_{22}\right) \tag{13}$$

$$\gamma_1>0 \tag{14}$$

$$\gamma_2>0 \tag{15}$$

feltételek mellett kell megoldanunk. Ekkor a szabályozói előírás bevezetése új egyensúlyt eredményez (5. ÁLLÍTÁS).

A REDUNDÁNS SZABÁLYOZÓI ELŐÍRÁS ESETE • Tegyük fel, hogy a szabályozói előírás bevezetése nem módosítja a piaci szereplők optimális döntését (4. ÁLLÍTÁS). Az egyszerűsödött elsőrendű feltételek, $\gamma_1=0$, $\lambda_1=0$, $\mu_1=0$, $\gamma_2=0$, $\lambda_2=0$ és $\mu_2=0$ esetén:

$$\frac{b_1}{c_0^1}+\frac{-x_{11}}{2c_{11}^1}+\frac{x_{11}}{2c_{12}^1}=0 \tag{16}$$

$$\frac{-a_2}{c_0^1}+\frac{-x_{22}}{2c_{11}^1}+\frac{x_{22}}{2c_{12}^1}=0 \tag{17}$$

$$\frac{-1}{c_0^1}+\frac{1}{2c_{11}^1}+\frac{1}{2c_{12}^1}=0 \tag{18}$$

$$\frac{-a_1}{c_0^2}+\frac{x_{11}}{2c_{11}^2}+\frac{-x_{11}}{2c_{12}^2}=0 \tag{19}$$

$$\frac{b_2}{c_0^2}+\frac{x_{22}}{2c_{11}^2}+\frac{-x_{22}}{2c_{12}^2}=0 \tag{20}$$

$$\frac{-1}{c_0^2}+\frac{1}{2c_{11}^2}+\frac{1}{2c_{12}^2}=0. \tag{21}$$

A logaritmikus hasznossági függvény alkalmazása és a kockázatmentes eszközről történő döntés következtében a különböző időszaki fogyasztások között a következő harmonikus átlagszerű összefüggések adódnak:

$$c_0^1=\frac{2}{\frac{1}{c_{11}^1}+\frac{1}{c_{12}^1}},$$

$$c_0^2=\frac{2}{\frac{1}{c_{11}^2}+\frac{1}{c_{12}^2}}.$$

Az elsőrendű feltételeket a fogyasztás helyett a megtakarított kockázatmentes eszköz $\left(\theta_0^1,\ \theta_0^2\right)$, a portfóliók $\left(\theta_{b1}^1,\ \theta_{a2}^1,\ \theta_{a1}^2,\ \theta_{b2}^2\right)$ és a készletek $\left(\omega_{11}^1,\ \omega_{12}^2\right)$ függvényében is megadhatjuk:

$$\begin{aligned}
b_1\left(\omega_{11}^1+2\theta_0^1\right)&=x_{11}\left(2\theta_{b1}^1x_{11}+2\theta_{a2}^1x_{22}-\omega_{11}^1\right)\\
-a_2\left(\omega_{11}^1+2\theta_0^1\right)&=x_{22}\left(2\theta_{b1}^1x_{11}+2\theta_{a2}^1x_{22}-\omega_{11}^1\right)\\
-a_1\left(\omega_{12}^2+2\theta_0^2\right)&=x_{11}\left(2\theta_{b2}^2x_{22}+2\theta_{a1}^2x_{11}-\omega_{12}^2\right)\\
b_2\left(\omega_{12}^2+2\theta_0^2\right)&=x_{22}\left(2\theta_{b2}^2x_{22}+2\theta_{a1}^2x_{11}-\omega_{12}^2\right).
\end{aligned}$$

Ekkor az egyensúly meghatározásához szükségünk lesz a fogyasztások közötti harmonikus átlag összefüggésére is a portfóliók és a készletek függvényében felírva:

$$\begin{aligned}
&\left(\omega_0^1+\theta_{b1}^1b_1-\theta_{a2}^1a_2-\theta_0^1\right)\left(\omega_{11}^1+2\theta_0^1\right)=2\left(\omega_{11}^1-\theta_{b1}^1x_{11}-\theta_{a2}^1x_{22}+\theta_0^1\right)\left(\theta_{b1}^1x_{11}+\theta_{a2}^1x_{22}+\theta_0^1\right)\\
&\left(\omega_0^2+\theta_{b2}^2b_2-\theta_{a1}^2a_1-\theta_0^2\right)\left(\omega_{12}^2+2\theta_0^2\right)=2\left(\omega_{12}^2-\theta_{b2}^2x_{22}-\theta_{a1}^2x_{11}+\theta_0^2\right)\left(\theta_{b2}^2x_{22}+\theta_{a1}^2x_{11}+\theta_0^2\right).
\end{aligned}$$

A továbbiakban közvetlen kereskedés (0 árrés) és árjegyző közvetítése (exogén, illetve endogén árrés) mellett egyaránt vizsgáljuk a megoldást.

Egyensúly árjegyző közvetítése nélkül • Tegyük fel, hogy a kereskedés közvetlenül történik, és nincs árrés. Akkor és csak akkor lehet $b_1=b_2=a_1=a_2=0$, ha $c_{11}^1=c_{12}^1=c_0^1$ és $c_{11}^2=c_{12}^2=c_0^2$. Ekkor

$$\omega_0^1 - \theta_0^1 = \omega_{11}^1 - \theta_{b1}^1 x_{11} - \theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_0^1$$
$$\omega_{11}^1 - \theta_{b1}^1 x_{11} - \theta_{a2}^1 x_{22} = \theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22}$$
$$\omega_0^2 - \theta_0^2 = \theta_{b2}^2 x_{22} + \theta_{a1}^2 x_{11} + \theta_0^2$$
$$\theta_{b2}^2 x_{22} + \theta_{a1}^2 x_{11} = \omega_{12}^2 - \theta_{a1}^2 x_{11} - \theta_{b2}^2 x_{22}.$$

Kifejezve a két piaci szereplő által megtakarított kockázatmentes eszköz, θ_0^1 és θ_0^2 értékét:

$$\theta_0^1 = \frac{\omega_0^1 - \frac{\omega_{11}^1}{2}}{2}$$
$$\theta_0^2 = \frac{\omega_0^2 - \frac{\omega_{12}^2}{2}}{2},$$

meghatározhatjuk az optimális fogyasztást:

$$c_{11}^1 = c_{12}^1 = c_0^1 = \frac{\omega_{11}^1}{4} + \frac{\omega_0^1}{2}$$
$$c_{11}^2 = c_{12}^2 = c_0^2 = \frac{\omega_{12}^1}{4} + \frac{\omega_0^2}{2}.$$

A szereplők úgy optimalizálnak, hogy az első időszaki készlet felét realizálják mindkét jövőbeli világállapotban:

$$\theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_{b1}^1 x_{11} = \frac{\omega_{11}^1}{2}$$
$$\theta_{b2}^2 x_{22} + \theta_{a1}^2 x_{11} = \frac{\omega_{12}^2}{2},$$

ezzel tökéletesen kiküszöbölve a bizonytalanságból eredő kockázatot és tökéletesen simítva a fogyasztást. Tőkepiaci egyensúly esetén $\theta_{b1}^1 = \theta_{a1}^2$ és $\theta_{a1}^1 = \theta_{b2}^2$, ezért a szimmetria miatt csak akkor lesz a feltételezett $b_1 = b_2 = a_1 = a_2 = 0$ árrendszer egyensúlyi, ha

$$\omega_{11}^1 = \omega_{12}^2.$$

Abból indultunk ki, hogy egyensúly esetén teljesülnek az egyenlőtlenséggel megadott korlátozó feltételek. Ezért az ellentmondás elkerülése érdekében meg kell vizsgálnunk, hogy a szabályozói előírás miatt bevezetett korlátot teljesíti-e a szabályozói előírás nélkül meghatározott optimum, azaz

$$\theta_0^1 > \delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{b1}^1 x_{11}\right) + \delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{a2}^1 x_{22}\right)$$
$$\theta_0^2 > \delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{a1}^2 x_{11}\right) + \delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{b2}^2 x_{22}\right)$$

mikor áll fenn. Ha $\delta = \delta_1 = \delta_2$ és $\omega_0^1 = \omega_0^2$, akkor

$$\delta < \frac{2\theta_0^1}{\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22}} = \frac{4\theta_0^1}{\omega_{11}^1} = \frac{\omega_0^1 - \frac{\omega_{11}^1}{2}}{\frac{\omega_{11}^1}{2}}.$$

Amíg a szabályozói paraméter értéke kisebb, mint a jelenbeli és a jövőbeli világállapotban várható készlet különbsége a jövőbeli világállapotban várható készlethez viszonyítva, addig a szabályozói előírás bevezetésének hatására nem módosul a piaci szereplők döntése és az elérhető hasznosság szintje sem. Ezzel szemben, ha túl magas a szabályozói paraméter értéke, akkor egyensúly esetén γ_1 és γ_2 értéke nem lehetett 0, ellentmondáshoz jutottunk.

Megoldás árrés mellett • Következő lépésként tegyük fel, hogy $b_1 = a_1 - t_1$ és $b_2 = a_2 - t_2$, ahol t_1 és t_2 exogén árrés. Ekkor

$$\left(a_1 - t_1\right)\left(\omega_{11}^1 + 2\theta_0^1\right) = x_{11}\left(2\theta_{b1}^1 x_{11} + 2\theta_{a2}^1 x_{22} - \omega_{11}^1\right) \tag{22}$$

$$\left(-a_2\right)\left(\omega_{11}^1 + 2\theta_0^1\right) = x_{22}\left(2\theta_{b1}^1 x_{11} + 2\theta_{a2}^1 x_{22} - \omega_{11}^1\right) \tag{23}$$

$$\left(-a_1\right)\left(\omega_{12}^2 + 2\theta_0^2\right) = x_{11}\left(2\theta_{a2}^1 x_{22} + 2\theta_{b1}^1 x_{11} - \omega_{12}^2\right) \tag{24}$$

$$\left(a_2 - t_2\right)\left(\omega_{12}^2 + 2\theta_0^2\right) = x_{22}\left(2\theta_{a2}^1 x_{22} + 2\theta_{b1}^1 x_{11} - \omega_{12}^2\right). \tag{25}$$

Alakítsuk a piaci szereplők elsőrendű feltételeit. Ha b_1, b_2, a_1 és a_2 nem nulla, mivel a fogyasztás pozitivitása miatt $\omega_{11}^1 + 2\theta_0^1 \neq 0$, $\omega_{12}^2 + 2\theta_0^2 \neq 0$, ezért

$$\frac{x_{11}}{x_{22}} = \frac{b_1}{-a_2} = \frac{a_1 - t_1}{-a_2}$$
$$\frac{x_{11}}{x_{22}} = \frac{-a_1}{b_2} = \frac{-a_1}{a_2 - t_2}.$$

A vételi árak (a_1 és a_2) előjele pozitív, míg az eladási árak (b_1 és b_2) negatív előjelűek. Átalakítva

$$t_2 = \frac{x_{22}}{x_{11}} t_1, \tag{26}$$

azaz az egyensúly létezésének feltétele, hogy a két exogén árrés aránya megegyezzen a kifizetések arányával. Ha $\omega_0^1 = \omega_0^2$ és $\omega_{11}^1 = \omega_{12}^2$, akkor

$$a_1 = \frac{t_1}{2}$$
$$a_2 = \frac{t_2}{2} = \frac{x_{22}}{x_{11}} \frac{t_1}{2} = \frac{x_{22}}{x_{11}} a_1.$$

Az egyensúlyi árak kialakulása esetén az egyensúlyi portfóliókra a következő összefüggés teljesül:

$$\frac{-\frac{t_1}{2}}{x_{11}} = \frac{\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22} - \frac{\omega_{11}^1}{2}}{\theta_0^1 + \frac{\omega_{11}^1}{2}}. \tag{27}$$

Abban az esetben, amikor az árrés 0 volt, optimumban a kereskedésen keresztül a jövőbeli készlet felét cserélték el egymás között a szereplők, így tökéletesen simítva a jövőbeli bizonytalan kifizetést és ezzel a fogyasztást is. Árrés esetén csökken a piaci szereplők közötti kockázatmegosztás, és kockázatosabb marad a fogyasztási profil. Ha felírjuk a fogyasztások közötti harmonikusátlag-összefüggést:

$$\left(\omega_0^1 - \theta_{b1}^1 \frac{t_1}{2} - \theta_{a2}^1 \frac{x_{22}}{x_{11}} \frac{t_1}{2} - \theta_0^1\right)\left(\theta_0^1 + \frac{\omega_{11}^1}{2}\right) =$$
$$= \left(\omega_{11}^1 - \theta_{b1}^1 x_{11} - \theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_0^1\right)\left(\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_0^1\right), \tag{28}$$

a (27) és a (28) egyenlet megoldásával meghatározható az optimális θ_0^1 és $\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22}$ értéke és ezzel a $2\theta_0^1 / \left(\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22}\right)$ korlát δ-ra.

Megoldás árjegyzői döntés mellett • Az általános modellhez hasonlóan tegyük fel, hogy árjegyző párosítja az ellenoldali ajánlatokat, és a két eszközre t_1 és t_2 árrést határoz meg. Az árjegyző maximalizálási problémája:

$$\max_{t_1, t_2} t_1 \theta_{b1}^1 + t_2 \theta_{a2}^1,$$

feltéve, hogy $\theta_{a1}^2 = \theta_{b1}^1$ és $\theta_{a2}^1 = \theta_{b2}^2$ megoldása a kereskedő piaci szereplők optimalizálási feladatainak, azaz teljesülnek a (22) és a (25) közötti elsőrendű feltételek, amelyek a (27) és a (28) egyenletekké alakíthatók. Az árjegyző maximalizálási problémája egyváltozós feladattá módosul a (26) összefüggés és $\Theta = \theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22}$ jelölés felhasználásával:

$$\max_{t_1} \frac{t_1}{x_{11}} \Theta, \tag{29}$$

feltéve, hogy

$$-\frac{t_1}{2}\left(\theta_0^1 + \frac{\omega_{11}^1}{2}\right) = x_{11}\left(\Theta - \frac{\omega_{11}^1}{2}\right)$$
$$\left(\omega_0^1 - \frac{t_1}{2x_{11}}\Theta - \theta_0^1\right)\left(\theta_0^1 + \frac{\omega_{11}^1}{2}\right) = \left(\omega_{11}^1 - \Theta + \theta_0^1\right)\left(\Theta + \theta_0^1\right).$$

A vizsgált három esetben (árrés nélkül, exogén árrés és endogén árrés mellett) meghatározott egyensúly összevetését a következő példa illusztrálja.

1. PÉLDA • *A számpéldában a levezetett speciális esetet követve legyen $|I| = 2$ szereplő, $|J| = 2$ eszköz és $|S| = 2$ világállapot az 1. időszakban. A szereplők hasznossági függvénye megegyezik:*

$$u^i\left(c_0^i,\ c_1^i\right) = \ln\left(c_0^i\right) + \frac{1}{2}\ln\left(c_{11}^i\right) + \frac{1}{2}\ln\left(c_{12}^i\right),$$

készleteik pedig ellentétesek: $\omega_0^1 = 10$, $\omega_1^1 = (20;\ 0)$ *és* $\omega_0^2 = 10$, $\omega_1^2 = (0;\ 20)$. *A két eszköz kifizetése legyen* $x_1 = (5;\ -5)$ *és* $x_2 = (-5;\ 5)$. *Jelölje t_1 és t_2 az árrések nagyságát. Első lépésként megoldjuk a szereplők fogyasztási portfólióallokálási feladatát, azaz a* (27) *és* a (28) *egyenletekből álló egyenletrendszert, szabályozói előírás nélkül, a t_1 exogén árrés különböző szintjei mellett. Majd módosítjuk a példát endogén árrés bevezetésével. Ebben az esetben az árjegyző a* (29) *feladat alapján $\Pi = (t_1/x_{11})\Theta$ profitját maximalizálja a t_1 árrés szerint, feltéve, hogy a két piaci szereplő hasznosságot maximalizál.*

A példában a szereplők kereskedés segítségével fedezik várható kifizetéseiket és simítják fogyasztásukat az első időszak két világállapota között. Az *1. táblázat* alapján árrés bevezetésekor, majd az árrés fokozatos növelésekor csökken a kereskedett eszközök jövőbeli kifizetése (Θ), míg a vételi árak emelkednek. Ennek eredményeként egyensúlyban a piaci szereplők alacsonyabb hasznossági szintet érnek el, és a fogyasztási profiljuk kockázatosabb marad. Ha az árrést az árjegyző határozza meg profitmaximalizálás alapján, akkor egyensúlyi értéke a példában 4,58. Ha az árrés 7,3205 fölé emelkedik, akkor nem kereskednek egymással a piaci szereplők.

1. táblázat
Eredmények exogén és endogén árrés esetén szabályozói előírás nélkül

$t_1 = t_2$	$b_1 = b_2$	$a_1 = a_2$	θ_0^1	Θ	c_0^1	$c_{12}^1 = c_{11}^2$	$c_{11}^1 = c_{12}^2$	$u^1 = u^2$	Π
0	0	0	0	10	10	10	10	4,6	0
1	–0,5	0,5	–0,4	9,0	9,5	8,6	10,6	4,51	1,81
2	–1,0	1,0	–0,6	8,1	9,0	7,5	11,2	4,41	3,25
3	–1,5	1,5	–0,7	7,2	8,5	6,5	12,1	4,33	4,32
4	–2,0	2,0	–0,5	6,2	8,0	5,7	13,3	4,25	4,95
4,58	*–2,3*	*2,3*	*–0,2*	*5,5*	*7,7*	*5,3*	*14,2*	*4,20*	*5,07*
5	–2,5	2,5	0,0	5,0	7,5	5,0	15,0	4,17	5,00
6	–3,0	3,0	0,9	3,4	7,0	4,4	17,5	4,11	4,12
7	–3,5	3,5	2,7	1,1	6,5	3,8	21,7	4,08	1,51

Meghatározhatjuk a szabályozói paraméter ($\delta = \delta_1 = \delta_2$) értékére a korlátot, amely szint alatt szabályozói előírás bevezetése esetén sem változik az eredeti egyensúly *(2. táblázat).* Jelen példában árrés nélkül a szabályozási előírás bevezetése $\forall\delta > 0$ esetén új egyensúly kialakulásához vezet, és a szabályozói előírás egészen addig módosít mindenképpen az egyensúlyon, amíg az árrés 5 fölé emelkedik. Az árrés további növekedésekor a δ-ra vonatkozó korlát értéke emelkedik, hiszen a készpénz-megtakarítás emelkedése miatt egyre magasabb szabályozói paraméter melletti szabályozói előírásnak is megfelel a szabályozói előírás nélkül kiszámított egyensúly. Ha az árrés szintje 6, akkor redundáns a szabályozói követelmény, ha a $\delta < 0{,}55$, azaz ha a portfólió eszközeire aggregált várható veszteség (*ES*) 55 százalékát nem éri el a tőkekövetelményként elvárt készpénz mennyisége.

2. táblázat
Korlát δ értékére az árrés különböző szintje mellett

$t_1 = t_2$	Korlát δ értékére
1	–0,09
2	–0,15
3	–0,18
4	–0,15
4,58	–0,09
5	0,00
6	0,55
7	5,09

Az egyensúlyt módosító szabályozói előírás • Tegyük fel, hogy λ_1, μ_1, λ_2 és μ_2 Lagrange-szorzók értéke 0, ugyanakkor γ_1 és γ_2 értéke pozitív, azaz az 5. állítás áll fenn. Ekkor a komplementaritás miatt (12) és (13) egyenlőség teljesül, ezért a θ_0^1 és θ_0^2 értéke a szabályozói előírás nélkül meghatározott optimumhoz képest emelkedik. Az elsőrendű feltételekből nem esnek ki a γ_1-et és γ_2-öt tartalmazó tagok, ugyanakkor eliminálhatjuk azokat. Ha az elsőrendű feltételek közül a θ_{b1}^1 szerinti deriválással kapott egyenletből fejezzük ki a γ_1-et, és behelyettesítjük a θ_{a2}^1 szerinti deriválással kapott egyenletbe, akkor

$$\frac{-a_2 - b_1\left[(\delta_2 x_{22})/(\delta_1 x_{11})\right]}{c_0^1} + \frac{-x_{22} + \left[(\delta_2 x_{22})/(\delta_1 x_{11})\right]x_{11}}{2c_{11}^1} + \frac{x_{22} - \left[(\delta_2 x_{22})/(\delta_1 x_{11})\right]x_{11}}{2c_{12}^1} = 0.$$

Ha a szabályozói paraméter a két eszközre azonos, azaz $\delta = \delta_1 = \delta_2$, akkor

$$\frac{-a_2 - b_1\left(x_{22}/x_{11}\right)}{c_0^1} = 0,$$

alakítva:

$$\frac{-a_2}{b_1} = \frac{x_{22}}{x_{11}}.$$

Ha feltesszük a készletek szimmetriáját, azaz $\omega_0^1 = \omega_0^2$ és $\omega_{11}^1 = \omega_{12}^2$, akkor a fogyasztásokra teljesül, hogy $c_0^1 = c_0^2$, $c_{11}^1 = c_{12}^2$ és $c_{11}^2 = c_{12}^1$. Ezt kihasználva a vételi és eladási árak megadhatóak az árrés függvényében: $a_1 = t_1/2$, $b_1 = -t_1/2$, $a_2 = t_2/2$ és $b_2 = -t_2/2$. Az árrések között a szabályozói előírás nélküli esethez hasonló összefüggés adódik:

$$t_2 = t_1 \frac{x_{22}}{x_{11}},$$

és kihasználhatjuk a

$$c_0^1 = \omega_0^1 - \frac{t_1\theta_0^1}{x_{11}\delta} - \theta_0^1$$

$$c_{11}^1 = \omega_{11}^1 - \theta_0^1 \frac{2}{\delta} + \theta_0^1$$

$$c_{12}^1 = \theta_0^1 \frac{2}{\delta} + \theta_0^1$$

költségvetési korlátokat, ezért az elsőrendű feltételek a következő egyenletre redukálódnak:

$$\frac{\frac{-t_1}{2} - \delta\frac{1}{2}x_{11}}{\omega_0^1 - \frac{t_1\theta_0^1}{x_{11}\delta} - \theta_0^1} + \frac{-x_{11} + \delta\frac{1}{2}x_{11}}{2\left(\omega_{11}^1 - \theta_0^1\frac{2}{\delta} + \theta_0^1\right)} + \frac{x_{11} + \delta\frac{1}{2}x_{11}}{2\left(\theta_0^1\frac{2}{\delta} + \theta_0^1\right)} = 0.$$

Az egyenletből kifejezhetjük θ_0^1 értékét. Ha az árjegyző határozza meg a számára optimális árrést, akkor

$$\max_{t_1,\, t_2} t_1\theta_{b1}^1 + t_2\theta_{a2}^1 = \max_{t_1} \frac{t_1}{x_{11}}\left(\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22}\right) = \max_{t_1} \frac{t_1}{x_{11}} \frac{2\theta_0^1}{\delta},$$

feltéve, hogy a

$$\frac{\frac{-t_1}{2} - \delta\frac{1}{2}x_{11}}{\omega_0^1 - \frac{t_1\theta_0^1}{x_{11}\delta} - \theta_0^1} + \frac{-x_{11} + \delta\frac{1}{2}x_{11}}{2\left(\omega_{11}^1 - \theta_0^1\frac{2}{\delta} + \theta_0^1\right)} + \frac{x_{11} + \delta\frac{1}{2}x_{11}}{2\left(\theta_0^1\frac{2}{\delta} + \theta_0^1\right)} = 0$$

feladatot oldja meg. A probléma alapján az árrés elszáll, így az árjegyző azt a legmagasabb árrést határozza meg, amely mellett a szabályozói előírás még nem válik redundánssá. A modellben lényegében a szabályozási paraméter értéke korlátozza az elszálló árrést. Megfigyelésünk összecseng *Castellano–Cerqueti* [2011] eredményével, amely szerint az árrésnek van egy optimális felső korlátja, amelyet a gazdasági körülményeknek megfelelően az adott tőzsdének kellene szabályoznia. A kétszereplős speciális eset eredménye megerősíti az 1. SEJTÉSKÉNT megfogalmazott általános állítást. A szabályozói előírás bevezetése az egyensúlyi árrés emelkedéséhez vezet. Az eredményt az 1. PÉLDA folytatásával illusztrálhatjuk.

2. PÉLDA • *Vizsgáljuk az* 1. PÉLDÁT *szabályozói előírás bevezetése esetén. Megfigyelhető, hogy adott paraméterű* ($\delta = 0{,}4$) *szabályozási előírás mellett az árjegyző profitja folyamatosan emelkedik, ahogy egyre magasabb az árrés szintje. Ugyanakkor az elszálló árrést a redundánssá váló szabályozási előírás korlátozza, így míg szabályozói előírás nélkül az* 1. PÉLDÁBAN 4,58 *lett az optimális árrés értéke,* 0,4 *paraméterű szabályozói előírás bevezetése esetén az egyensúlyi árrés* 5,84. *Ha az árrés tovább emelkedik, akkor a piaci szereplők szabályozói előírás nélkül meghatározott egyensúlyi portfóliója is teljesíti a szabályozói előírást, így azt választják.*

3. táblázat
Eredmények endogén árrés (δ) esetén 0,4 paraméterű szabályozói előírás mellett

$t_1 = t_2$	θ_0^1	Θ	$u^1 = u^2$	Π
0	1,8	9,0	4,6	0
1	1,5	7,4	4,5	1,5
2	1,3	6,3	4,4	2,5
3	1,1	5,3	4,3	3,2
4	0,9	4,6	4,2	3,7
4,58	0,86	4,3	4,19	3,95
5	0,82	4,1	4,17	4,10
5,8	*0,75*	*3,7*	*4,13*	*4,37*

Összefoglalás

A tanulmányban felírt általános keretrendszer lehetővé teszi a tranzakciós költségként bevezetett árrés és a szabályozói előírás következtében megváltozó optimális döntések vizsgálatát.

A piaci szereplők kereskedésének célja a jövőbeli kifizetés bizonytalanságából fakadó kockázat mérséklése, a fogyasztás simítása és hasznosságuk maximalizálása. A levezetett speciális esetben közvetlen kereskedés ($t_1 = t_2 = 0$) során tökéletes kockázatmegosztás valósul meg. Az árrés emelkedésének hatására a piaci szereplők kereskedett portfóliójának jövőbeli kifizetése fokozatosan csökken, míg egy szint fölött a szereplők már nem kereskednek egymással, így a diverzifikáció meghiúsul. Ha az árrés szintjéről profitmaximalizáló árjegyző dönt, akkor egyensúlyban a piaci szereplők kereskednek egymással, a jövőbeli világállapotokban realizált kifizetések közötti különbség csökken.

A gyakorlatban alkalmazott szabályozói lépések célja sok esetben a kockázatvállalás visszafogása. Ennek megfelelően a modellben várható veszteség *(Expected Shortfall)* függvényeként definiált szabályozói előírást vezetünk be. A δ paraméter határozza meg, hogy a tőkekövetelmény a várható veszteség mekkora hányada legyen. Egyértelmű, hogy mivel szabályozás esetén egy új korláttal bővül a piaci szereplők feltételes szélsőérték-feladata, az optimalizáló szereplők helyzete nem javulhat. Amíg a szabályozói előírás redundáns, az egyensúly nem változik. Az exogén árrés növelésekor szigorúbb (magasabb δ melletti) szabályozói előírás is redundáns marad. Ha a szabályozói előírás miatt új egyensúly alakul ki, akkor a kereskedés és a kockázatmegosztás visszaesik, a piaci szereplők hasznossága alacsonyabb.

A szabályozói előírás bevezetése az optimalizáló árjegyző problémáját is megváltoztatja. Ha adott szabályozói paraméter mellett a szabályozói előírás köt, akkor az árjegyző egészen addig emeli az árrést, amíg a szabályozói előírás redundáns nem lesz. Ebben az esetben az eszközök árrése a szabályozói előírás bevezetésének hatására növekszik, így a piaci likviditás csökken. A δ szabályozói paraméter emelkedése mellett az árjegyző optimális árrése emelkedik. Minél szigorúbb tehát a bevezetett szabályozói előrás, annál jobban csökken a piacon a likviditás. A modell felhívja a figyelmet arra, hogy a megfelelő szabályozási mechanizmus kiválasztásakor a szabályozás likviditásra gyakorolt hatását is célszerű figyelembe venni.

Hivatkozások

Acerbi, C.–Scandolo, G. [2008]: Liquidity risk theory and coherent measures of risk. Quantitative Finance, Vol. 8. No. 7. 681–692. o. http://dx.doi.org/10.1080/14697680802373975.

Amihud, Y.–Mendelson, H.–Wood, R. [1990]: Liquidity and the 1987 Stock Market Crash. Journal of Portfolio Management, Vol. 16. No. 3. 65–69. o. https://doi.org/10.3905/jpm.1990.409268.

BCBS [2013]: Basel III: The Liquidity Coverage Ratio and liquidity risk monitoring tools. Basel Committee on Banking Supervision, Bank for International Settlements, január.

Begenau, J. [2019]: Capital Requirements, Risk Choice, and Liquidity Provision in a Business-Cycle Model. Journal of Financial Economics, Vol. 136. No. 2. 355–378. o. https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2019.10.004.

Bigio, S. [2015]: Endogenous Liquidity and the Business Cycle. American Economic Review, Vol. 105. No. 6. 1883–1927. o. https://doi.org/10.1257/aer.20110035.

Brounen, D.–Koedijk, K. G.–Pownall, R. A. J. [2016]: Household financial planning and savings behavior. Journal of International Money and Finance, Vol. 69. No. 12. 95–107. o. https://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2016.06.011.

Brunnermeier, M. K.–Pedersen, L. H. [2008]: Market Liquidity and Funding Liquidity. Review of Financial Studies, Vol. 22. No. 6. 2201–2238. o. https://doi.org/10.1093/rfs/hhn098.

Campbell, J. Y. [2016]: Restoring Rational Choice: The Challenge of Consumer Financial Regulation. American Economic Review, Vol. 106. No. 5. 1–30. o. https://doi.org/10.1257/aer.p20161127.

Castellano, R.–Cerqueti, R. [2011]: The optimal bid/ask spread in a Specialist System. Economic Modelling, Vol. 28. No. 5. 2247–2253. o. https://doi.org/10.1016/j.econmod.2011.06.019.

Csóka Péter [2017]: Fair Risk Allocation in Illiquid Markets. Finance Research Letters, Vol. 21. 228–234. o. https://doi.org/10.1016/j.frl.2016.11.007.

Csóka Péter–Herings, P. J.-J. [2014]: Risk Allocation under Liquidity Constraints. Journal of Banking and Finance, Vol. 49. 1–9. o. https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2014.08.017.

Csóka Péter–Herings, P. J.-J.–Kóczy Á. László [2007]: Coherent Measures of Risk from a General Equilibrium Perspective. Journal of Banking and Finance, Vol. 31. No. 8. 2517–2534. o. https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2006.10.026.

Csóka Péter–Herings, P. J.-J.–Kóczy Á. László [2009]: Stable allocations of risk. Games and Economic Behavior, Vol. 67. No. 1. 266–276. o. https://doi.org/10.1016/j.geb.2008.11.001.

De Nicolò, G.–Gamba, A.–Lucchetta, M. [2014]: Microprudential Regulation in a Dynamic Model of Banking. The Review of Financial Studies, Vol. 27. No. 7. 2097–2138. o. https://doi.org/10.1093/rfs/hhu022.

Eisfeldt, A. L. [2004]: Endogenous Liquidity in Asset Markets. Journal of Finance, Vol. 59. No. 1. 1–30. o. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.2004.00625.x.

Erb Tamás–Havran Dániel [2015]: Mit veszítünk a piaci súrlódásokkal? A pénzügyi piacok mikrostruktúrája. Közgazdasági Szemle, 62. évf. 3. sz. 229–262. o.

Gromb, D.–Vayanos, D. [2010]: A model of financial market liquidity based on intermediary capital. Journal of the European Economic Association, Vol. 8. No. 2/3. 456–466. o. https://doi.org/10.1111/j.1542-4774.2010.tb00516.x.

Havran Dániel–Szűcs Balázs Árpád [2016]: Árjegyzői viselkedés belső kockázatmegosztás mellett. Szigma, 47. évf. 1–2. sz 1–30. o.

Herings, P. J.-J.–Zhou, Y. [2019]: Competitive Equilibria in Matching Models with Financial Constraints. GSBE Research Memorandum, 19/007. Maastricht University, Maastricht, 1–39. o. https://doi.org/10.2139/ssrn.3373744.

IOSC [2018]: Recommendations for Liquidity Risk Management for Collective Investment Schemes. International Organization of Securities Commissions, FR01/2018. február.

IOSC [2019*a*]: Liquidity in Corporate Bond Markets Under Stressed Condition. International Organization of Securities Commissions, FR10/2019. június.

IOSC [2019*b*]: Sustainable finance in emerging markets and the role of securities regulators. International Organization of Securities Commissions, CR01/2019. február.

Király Júlia–Nagy Márton–Szabó E. Viktor [2008]: Egy különleges eseménysorozat elemzése – a másodrendű jelzáloghitel-piaci válság és (hazai) következményei. Közgazdasági Szemle, 55. évf. 7–8. sz. 573–621. o.

Kiyotaki, N.–Moore, J. [2019]: Liquidity, Business Cycles, and Monetary Policy. Journal of Political Economy, Vol. 127. No. 6. 2926–2966. o. https://doi.org/10.1086/701891.

Kőhegyi Gergely–Stépán Gábor [2003]: A versenyzői gazdaság stabilitása késleltetett áralkalmazkodás mellett. Közgazdasági Szemle, 50. évf. 2. sz. 112–135. o.

Láng Péter [2017]: A model of bank behaviour for the assessment of the potential balance sheet impact of the NSFR liquidity requirement. MNB Working Papers, No. 3. https://www.mnb.hu/letoltes/mnb-wp-2017-3-final-1.pdf.

LeRoy, S. F.–Werner, J. [2001]: Principles of Financial Economics. Cambridge University Press, https://doi.org/10.1017/cbo9781139162272.

Mitchell, M.–Pedersen, L. H.–Pulvino, T. [2007]: Slow Moving Capital. American Economic Review, Vol. 97. No. 2. 215–220. o. https://doi.org/10.1257/aer.97.2.215.

Naffa, H.–Fain, M. [2019]: Do ESG factors matter in emerging markets? Megjelent: *Dömötör Barbara–Keresztúri Judit Lilla* (szerk.): PRMIA Hungary Chapter Research Conference, 2019. Conference proceedings, Budapest, Corvinus University of Budapest, 26–34. o.

Sommer, K.–Sullivan, P. [2018]: Implications of US Tax Policy for House Prices, Rents, and Homeownership. American Economic Review, Vol. 108. No. 2. 241–274. o. https://doi.org/10.1257/aer.20141751.

Stolper, O. [2018]: It takes two to Tango: Households' response to financial advice and the role of financial literacy. Journal of Banking & Finance, Vol. 92. No. 7. 295–310. o. https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2017.04.014.

Zalai Ernő [1998]: Általános egyensúlyi modellek alkalmazása gazdaságpolitikai elemzésekre. Közgazdasági Szemle, 45. évf. 12. sz. 1065–1081. o.