MONTON LEKÉPEZÉSEK FIXPONTJAI 2.

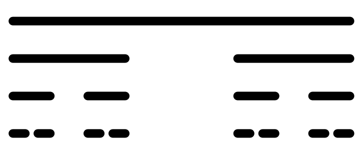
BESSENYEI MIHÁLY ÉS PÉNZES EVELIN

KIVONAT. A fraktálokat szokás leképezéscsaládok invariáns halmazainak tekinteni. Hutchinson nevezetes fraktáltétele is ezt veszi alapul, mivel ez az értelmezés kaput nyit a fixponttételek módszerei előtt. Célunk Hutchinson eredeti megközelítésének egyszerűsített formában történő bemutatása. Az egyszerűsítést a Knaster–Tarski-féle fixponttétel élesített változata biztosítja.

1. BEVEZETÉS

A *fraktál* mindannyiunk számára jól ismert kifejezés. Túlzás nélkül állíthatjuk, hogy a fraktálok mindenütt jelen vannak [2], hiszen találkozhatunk velük fizikai, kémiai, biológiai folyamatokban, sőt a művészetben vagy a természetben is. Eközben magát a pontos definíciót a titokzatosság homálya övezi, részben azért, mert a matematikai szakirodalomban sincs egységes, mindenki számára elfogadott fraktálfogalom. Vannak, akik a törtdimenziós halmazokat tekintik fraktálnak. Maga az elnevezés a latin 'fragmentus', azaz „töredezett" szóból ered, és Mandelbrot, a fraktálok atyja szintén ezt a definíciót használta [8].

Egy másik elterjedt értelmezés az önhasonlóság tulajdonságából indul ki. Tekintsük például a jól ismert Cantor-halmazt! Ehhez úgy jutunk, hogy a $[0,1]$ intervallum középső nyílt harmadát eltávolítjuk, majd a keletkező két intervallum középső nyílt harmadát hagyjuk el. Ezt az eljárást ismételjük, minden lépésben a meglévő zárt intervallumok középső nyílt harmadát törölve:



Végezetül, az egyes lépésekben kapott halmazok közös részét véve, kapjuk a Cantor-halmazt. Megmutatható, hogy e közös rész nem üres, sőt kontinuum számosságú.

Azonnal látható, hogy a Cantor-halmaz önhasonló, hiszen a harmadára zsugorított képe és ennek $2/3$-dal vett eltoltja visszaadja az eredeti halmazt. Másképpen fogalmazva, a Cantor-halmaz eleget tesz az alábbi invariancia egyenletnek:

$$C = \frac{1}{3}C \cup \left(\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}\right). \tag{1}$$

Természetesen az üres halmaz vagy a valós számok halmaza is teljesíti ezt az invarianciát. Azonban a Cantor-halmaz az *egyetlen* olyan nem üres megoldás, amely korlátos és zárt. (Egy valós részhalmaz *zárt*, ha a komplementer minden pontja egy, a pontot tartalmazó nyílt intervallummal együtt tartozik a komplementerhez.)

Date: 2020. május 13..

A cikk a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj, az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-19-2 és az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-19-4 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült.

A Cantor-halmaz önhasonlósági tulajdonságát szem előtt tartva, bevezethetjük az invariancia absztrakt fogalmát. Azt mondjuk, hogy az f egy *megengedett leképezés* az X nem üres halmazon, ha szokásos értelemben vett $f\colon X \to X$ függvény, vagy létezik olyan $A_0 \subseteq X$ halmaz, hogy minden $A \subseteq X$ esetén $f(A) = A_0$. Legyen $\mathscr{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$ egy megengedett leképezéscsalád. A $H \subset X$ halmaz *$\mathscr{F}$-invariáns*, ha kielégíti a $H = F(H)$ egyenletet, ahol az F *invariancia operátor* az alábbi módon adott:

$$F(H) = \bigcup_{k=1}^{m} f_k(H) := f_1(H) \cup \dots \cup f_m(H). \tag{2}$$

Itt a H halmaz $f\colon X \to X$ függvény általi képét a szokásos $f(H) := \{f(x) \mid x \in H\}$ módon értelmezzük. Nyilvánvaló, hogy a Cantor-halmaz $\mathscr{F}$-invariáns halmaz, ha az $\mathscr{F}$ leképezéscsalád a korábban látott két zsugorítást tartalmazza.

Tegyük fel, hogy az alaptér a valós számok halmaza, vagy az euklideszi sík, vagy az euklideszi tér, és tekintsünk ezen egy véges $\mathscr{F}$ leképezéscsaládot. Azt mondjuk, hogy egy H részhalmaz *$\mathscr{F}$-fraktál*, ha nem üres, korlátos, zárt, és $\mathscr{F}$-invariáns. Egy alaptérbeli halmaz zártságát továbbra is úgy értelmezzük, hogy a komplementer minden pontja egy, a pontot tartalmazó nyílt intervallummal vagy nyílt körlemezzel vagy nyílt gömbbel együtt tartozik a komplementerhez. A bevezető példához fűzött megjegyzést ezek szerint úgy is fogalmazhatjuk, hogy a Cantor-halmaz az egyetlen fraktál, amely az (1) egyenletet teljesíti.

A fraktálelmélet alaptétele, Hutchinson híres eredménye [5] valójában a fraktálok egyértelmű létezésére vonatkozó egyszerű elegendő feltétel: *Kicsinyítések bármely véges $\mathscr{F}$ családja meghatároz pontosan egy $\mathscr{F}$-fraktált.* Megjegyezzük, hogy Hutchinson tétele ennél jóval általánosabb formában érvényes, de olyan fogalmakra támaszkodik, melyek messze túlmutatnak cikkünk keretein. Azonban még ebből az egyszerűsített változatból is könnyen levezethető a Cantor-halmaz fraktál tulajdonsága. Hutchinson bizonyítása a fixponttételek módszerén alapul. A $H = F(H)$ invariancia egyenlet egyértelmű fraktál megoldásának létezése azzal egyenértékű, hogy az F leképezésnek létezik egyértelmű fixpontja a nem üres, korlátos, zárt halmazok körében. Ehhez számos mély analízisbeli eszköz szükséges, például Banach híres fixponttétele [1]. A kontrakciós elvként közismert eredmény nemcsak a létezés és egyértelműség kérdését válaszolja meg, hanem iterációs eljárást is ad a fraktál tetszőleges pontosságú közelítésére.

Ha a fraktálelmélet alaptételét a megfogalmazás szintjén sem tudjuk hűen tolmácsolni, akkor természetesen a bizonyítás ismertetéséről is le kell mondanunk a szükséges elméleti háttér hiányában. Mégis föltett szándékunk, hogy Hutchinson művészi értékű megközelítéséből legalább egy kis ízelítőt adunk. A merész vállalkozáshoz szintén a **P. 329** jelű pontversenyen kívüli probléma, a Knaster–Tarski-féle fixponttétel [7] nyújt kapaszkodót. A Banach-féle fixponttételt ezzel helyettesítve kiderül, hogy az (2) egyenletnek *létezik* megoldása. Az egyértelműség helyett csupán egy gyengébb állítást tudunk megmutatni, nevezetesen, hogy a megoldások között van egy *legszűkebb* megoldás. Végezetül, a Banach-féle iterációt a Kantorovics-félével [6] kicserélve, *eljárás* nyerhető a legszűkebb megoldás előállítására. Jelen cikk a [3] dolgozat egyszerűsített változata.

2. Leképezéscsaládok invariáns halmazai

Ahogy azt korábban láttuk [4], a Knaster–Tarski-féle fixponttétel szerint *minden monoton leképezésnek létezik fixpontja*. Elsőként ennek az állításnak egy élesítését igazoljuk. Fölidézzük, hogy egy leképezés *monoton*, ha megőrzi a halmazelméleti tartalmazást.

Tétel. *Bármely monoton leképezésnek létezik legszűkebb fixpontja.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $F\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ egy monoton leképezés. Emlékeztetünk arra, hogy a Knaster–Tarski fixponttételhez az előző cikkünkben közölt bizonyításban a

$$H_0 = \bigcap \{H \subset X \mid F(H) \subseteq H\}$$

halmaz fixpont tulajdonságát igazoltuk. Ha most H tetszőleges fixpont, akkor $F(H) \subseteq H$ szintén fönnáll. Így $H_0 \subseteq H$ a fenti definíció értelmében. Azaz, H_0 minden más fixpontnak része, ami pontosan a kívánt állítást adja. □

A továbbiakban a (2) invariancia operátor néhány egyszerű, de hasznos tulajdonságát foglaljuk össze. Nyilvánvaló, hogy $A \subseteq B$ esetén $f(A) \subseteq f(B)$ is fönnáll, ha f tetszőleges megengedett leképezés. Innen láthatjuk, hogy *az invariancia operátor monoton*. Könnyen ellenőrizhető az is, hogy bármely f megengedett leképezésre

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Ezt fölhasználva kapjuk, hogy *az invariancia operátor fölcserélhető a halmazelméleti egyesítés műveletével*. Használni fogjuk még az invariancia operátor *iteratív hatvány*ait, melyeket rekurzióval értelmezünk: $F^1(H) := F(H)$, továbbá $F^{n+1}(H) := F\big(F^n(H)\big)$, ahol $H \subset X$ tetszőleges. A pozitív egész számok halmazára az $\mathbb{N}$ jelölést alkalmazzuk.

Fő eredményünk a Hutchinson-féle alaptétel „struktúramentes” megfelelője. A fraktálok geometriai tulajdonságai (korlátosság és zártság) sajnos nem igazolhatók a rendelkezésünkre álló eszközökkel. Cserében az alkalmazott módszerek nem lépik túl a naiv halmazelmélet kereteit, miközben hűen tükrözik Hutchinson fixpontos szemléletű megközelítését.

Tétel. *Ha $\mathscr{F}$ megengedett függvények egy véges családja egy nem üres halmazon, akkor létezik legszűkebb $\mathscr{F}$-invariáns halmaz, amely az alábbi alakban állítható elő:*

$$L_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(\emptyset). \tag{3}$$

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$ adott függvénycsalád az X nem üres halmazon. Mivel az invariancia operátor monoton, ezért létezik legszűkebb H_0 fixpontja. A monotonitás és a nyilvánvaló $\emptyset \subseteq H_0$ tartalmazás miatt $F(\emptyset) \subseteq F(H_0) = H_0$ következik, hiszen H_0 fixpont. Ezt a gondolatmenetet teljes indukcióval kombinálva kapjuk, hogy $F^n(\emptyset) \subseteq H_0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül. Így,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(\emptyset) \subseteq H_0,$$

azaz $L_0 \subset H_0$ adódik. Most azt igazoljuk, hogy L_0 fixpontja az invariancia operátornak. Ezúttal a $\emptyset \subseteq F(\emptyset)$ tartalmazásból kiindulva de az előbbi gondolatmenetet használva kapjuk, hogy $F^n(\emptyset) \subseteq F^{n+1}(\emptyset)$ ha $n \in \mathbb{N}$. Vagyis, $\{F^n(\emptyset) \mid n \in \mathbb{N}\}$ egy bővülő halmazcsalád. Az egyszerűség kedvéért vezessük be az $L_n = F^n(\emptyset)$ jelölést! Az egyesítés függvényhatással való kapcsolatát és az egyesítés felcserélhetőségi tulajdonságát szem előtt tartva,

$$\begin{aligned} F\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(\emptyset)\Big) &= \bigcup_{k=1}^{m} f_k\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n\Big) = \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_k\big(L_n\big) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=1}^{m} f_k\big(L_n\big) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F\big(L_n\big) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F(F^n(\emptyset)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{n+1}(\emptyset) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(\emptyset). \end{aligned}$$

Itt az utolsó lépésben azért lehetséges a kitevő csökkentése, mert bővülő halmazrendszert egyesítünk. Megállapíthatjuk tehát, hogy $F(L_0) = L_0$, ami pontosan a kívánt fixpont tulajdonság.

Azonban H_0 a legszűkebb fixpont, ezért $H_0 \subseteq L_0$. Mivel korábban a fordított irányú tartalmazást már beláttuk, ezért összességében $H_0 = L_0$ adódik. $\square$

Példaként tekintsük a
$$H = \frac{1}{10}H \cup \Big(\frac{1}{10}H + \frac{9}{10}\Big) \cup \{0\}$$
invariancia egyenletet! A fönti tétel értelmében ennek létezik legszűkebb megoldása, melyet a (3) alakban állíthatunk elő. Hogyan kaphatjuk meg ezt az előállítást? Elsőként teljes indukcióval azt igazoljuk, hogy
$$F^{n+1}(\emptyset) = \big\{0, x_1 \dots x_n \mid x_k \in \{0; 9\},\, k = 1, \dots, n\big\}$$
teljesül minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén. Azonnal láthatjuk, hogy $F(\emptyset) = \{0\}$, vagyis az állítás igaz, ha $n = 0$. Tegyük fel, hogy $F^{n+1}(\emptyset)$ a fenti alakban adott. Ennek minden elemét 10-zel osztva majd 0-val és $9/10$-del eltolva kapjuk $F^{n+2}(\emptyset)$ elemeit. Ha tehát egy $0, x_1 \dots x_n$ alakú elemből indulunk ki, akkor ez az eljárás egy $0, 0x_1 \dots x_n$ és egy $0, 9x_1 \dots x_n$ elemet eredményez. Vagyis, $F^{n+2}(\emptyset)$ olyan $(n+1)$ hosszúságú tizedes törteket tartalmaz, melyek 0 vagy 9 számjegyekből állnak. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. Ebből azonnal kapjuk, hogy a keresett egyesítési halmaz, vagyis a legszűkebb fixpont
$$H_0 = \big\{0, x_1 \dots x_n \mid x_k \in \{0; 9\},\, k = 1, \dots, n;\, n \in \mathbb{N}\big\}.$$
Érdemes megjegyezni, hogy a H_0 legszűkebb invariáns halmaz nem üres, és megszámlálhatóan végtelen számosságú.

A Cantor-halmazt definiáló egyenlet nagyfokú hasonlóságot mutat a példabeli invarianciaegyenlettel. Az eredeti formában ennek az üres halmaz a legszűkebb megoldása. Ha azonban (1) jobb oldalát egyesítjük a $\{0\}$ halmazzal, az üres halmaz már nem megoldás, miközben a most bemutatott módszer ugyanígy alkalmazható. Végeredményképpen a Cantor-halmaz egy valódi, megszámlálhatóan végtelen részhalmazát kapjuk. Mivel ezt a legszűkebb invariáns halmazt triadikus törtek írják le, melyek tárgyalása nem célunk, ezért választottuk inkább a fönti példát.

A fixponttételek elmélete nem csupán a fraktálelméletben jut kulcsszerephez. Számos meglepő alkalmazásával találkozhatunk a klasszikus és modern analízisben, a geometriában, sőt a játékelméletben vagy az algebrában. A téma iránt érdeklődőknek ajánljuk Shapiro könyvét [9].

HIVATKOZÁSOK

[1] S. Banach, *Un théorème sur les transformations biunivoques*, Fund. Math. **6** (1924), 236–239.
[2] M. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
[3] M. Bessenyei and E. Pénzes, *Fractals for minimalists*, Aequat. Math. (2019), to appear.
[4] Bessenyei M. és Pénzes E., *Monoton leképezések fixpontjai 1.*, KöMaL. **73** (2020), 141–146.
[5] J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 713–747.
[6] L. Kantorovitch, *The method of successive approximations for functional equations*, Acta Math. **71** (1939), 63–97.
[7] B. Knaster and A. Tarski, *Un théoreme sur lesfonctions d'ensembles*, Ann. Soc. Polon. Math. **6** (1927), 133–134.
[8] B. Mandelbrot, *Les objets fractals*, Flammarion, Editeur, Paris, 1975, Forme, hasard et dimension, Nouvelle Bibliothèque Scientifique.
[9] J. H. Shapiro, *A fixed-point farrago*, Universitext, Springer, 2016.

DEBRECENI EGYETEM, MATEMATIKAI INTÉZET H-4010 DEBRECEN, PF. 12
E-mail address: besse@science.unideb.hu
E-mail address: penzesevelyn@gmail.com