Szakmai beszámoló

Keleti Tamás befejezte Petr Holickyval a Borel halmazok extrém és „exposed" pontjaiból álló halmazok Borel osztályainak meghatározását. Megmutatták, hogy legalább 4-dimenzióban már G_δ halmaz esetén is lehetnek ezek a halmazok tetszőleges Borel osztályban, viszont 3-dimenzióban csak legfeljebb egyel bonyolultabb Borel osztályban lehetnek mint az eredeti halmaz, ennél jobb viszont már nem mondható.

Keleti Tamás befejezte azt a cikkét, amelyben M. van den Berg egy kérdésére válaszolva bebizonyította, hogy egy általánosított von Koch féle hópehelygörbe, amelyben a középső 1/3 rész helyett mindig a középső c-edrészt cseréjük ki, pontosan akkor metszi önmagát, ha c legálabb 1/2.

Keleti Tamásnak (Mihalis Kolountzakis-szal közösen) sikerült meghatároznia, hogy mely n-ekre igaz, hogy Z_n tetszőleges részhalmazát eltolás erejéig meghatározza, hogy a halmaz mely ponthármasnak hány eltoltját tartalmazza.

E kutatás során merült fel Keleti Tamásban az alábbi kérdés: igaz-e, hogy ha egy egész értékű függvény előáll valós értékű periodikus függvények összegeként, akkor biztos előáll ugyanilyen periódusú egész értékű periodikus függvények összegeként is? Először Károlyi Gyulával, Kós Gézával és Ruzsa Imrével sikerült Keletinek az állítást az egészeken értelmezett függvényekre bizonyítani, valamint részeredményeket elérni a számegyenesen értelmezett függvényekre. Végül Farkas Bálinttal, Harangi Viktorral és Révész Szilárddal sikerült a teljes állítást bizonyítani valósokon értelmezett függvényekre. Ez az eredmény a következő bekezdésben ismertetett kutatás egy alkalmazásaként adódott. Keleti Tamás azt is megmutatta, hogy az analóg állítás nem mindig igaz, ha mérhető függvényekre szorítkozunk, továbbá jellemezte azokat a periódushalmazokat, amelyekre mérhető függvényekre is igaz az állítás.

Ruzsa Imre a hetvenes években vizsgálta, hogy mely függvények állnak elő adott periódusú periodikus függvények összegeként. Miután kiderült, hogy a differenciaoperátor segítségével megadható egyszerű szükséges feltétel általában nem elégséges, sokáig abban az irányban folyt igen eredményes kutatás, hogy milyen függvényosztályokra szorítkozva lesz a feltétel elégséges. Farkas Bálint és Révész Szilárd kezdte a közelmúltban vizsgálni annak a lehetőségét, hogy esetleg egy kicsit bonyolultabb feltétel már szükséges és elégséges lehet tetszőleges függvényekre. Ebbe a kutatásba kapcsolódott bele Keleti Tamás. Végül Harangi Viktorral is kiegészülve sikerült karakterizálni az adott periódusú periodikus függvények összegére felbontható függvényeket. Miután a jellemzést tetszőleges számegyenesről osztható Abel csoportba menő függvényre sikerült bizonyítani, egyszerűen adódott az előző bekezdésben említett eredmény.

Elekes Márton és Keleti Tamás D. Mauldin egy 15 éves kérdésére válaszolva megmutatták, hogy a Liouville számok halmazát "nem lehet megmérni", azaz a mértéke minden eltolás invariáns Borel mértékre nézve nulla vagy nem szigma-véges. Ezután más természetes halmazokra, például a nem-normális számokra, illetve a számegyenes additív nem F-szigma részcsoportjaira mutatták meg ugyanezt a tulajdonságot.

Mauldin ezzel az eredménnyel kapcsolatban újra felvetette Saks egy ősi kérdését: igaz-e, hogy a számegyenesen minden szigma-véges eltolás-invariáns Borel-mérték a Lebesgue-mérték konstansszorosa. Elekes és Keleti azt a meglepő választ adták, hogy ez attól függ, mit is értünk Borel mértéken, illetve attól is, hogy megengedünk-e végtelen konstanst.

Elekes Márton igazolta, hogy Hausdorff mértékekre nézve mérhető síkbeli Sierpinski halmaz (tehát függőleges egyeneseken megszámlálható, vízszinteseken komegszámlálható halmaz) létezése független ZFC-től. Ehhez kapcsolódóan a következő nagyon meglepő eredményt is bizonyította. Ismert, hogy a Lebesgue mértékre minden halmaznak van Borel (pontosabban G-delta) burka. Elekes igazolta, hogy ennek a természetes analogonja Hausdorff mértékekre nézve független!

Gyenes és Pálvölgyi kérdezte, hogy a halmazok G-delta illetve Borel burkát ki lehet-e jelölni monoton módon (a tartalmazásra nézve). Mivel a kérdés érdekes az összes halmaz (vagy ekvivalens módon a mérhető halmazok) és a nullmértékű halmazok esetében is, összesen 4 problémához jutunk. Elekes Máthé Andrással megmutatta, hogy egy kivételével mind függetlenek, a kimaradó esetben pedig konzisztenciát igazoltak.

Elekesnek sikerült lezárnia egy Gruenhage által felvetett, Darji és Keleti által is tárgyalt problémát. Megmutatta ugyanis, hogy a klasszikus Erdős-Kakutani halmaz egy olyan nullmértékű kompakt halmaz, amely minden perfekt halmaz alkalmas eltoltját nem megszámlálható halmazban metszi. Ezzel választ adott Darji és Keleti ide vonatkozó kérdésére, és ennek segítségével megmutatta, hogy a Sacks-modellben egy nullmértékű kompakt halmaz kontinuumnál kevesebb eltoltja lefedheti a számegyenest. Később Steprans-szal erősítették az eredményt, majd Tóth Árpáddal általánosították dualitás és reprezentáció-elmélet segítségével, pontos (konzisztens) karakterizációt adva arra, hogy mely lokálisan kompakt csoportok fedhetők egy alkalmas nullmértékű kompakt részhalmazuk kontinuumnál kevesebb eltoltjával. Mauldin vetette fel, hogy mondhatunk-e nullmértékű helyett nulldimenziós halmazt. Ezt Elekes és Steprans munkájára építve Máthé András egy friss eredménye igazolja.

Elekes Steprans-szal lényegében lezárt egy Laczkovich Miklós által a 90-es évek első felében felvetett problémát. Azt mutatták meg, hogy a Martin-axióma feltételezése mellett egy kontinuumnál kisebb számosságú rendezett halmaz pontosan akkor reprezentálható Baire 1 függvényekkel, ha minden jólrendezett része megszámlálható. Komjáth egy tétele szerint ennél több nem bizonyítható. Elekes emellett megmutatta, hogy kontinuum számosságú rendezésekre ilyen karakterizáció nem érvényes.

A különböző dimenziós Hausdorff-mértékeket természetüknél fogva sokáig nagyon különböző objektumoknak kezelték, ezért igen meglepő volt, amikor két nagynevű matematikus, H. Furstenberg és D. Preiss a következőt kérdezték. Lehetnek-e különböző dimenziós Hausdorff mértékek Borel izomorfak? Váratlan módon Elekes pozitív eredményt bizonyított, belátva, hogy ha Borel halmazok helyett mérhető halmazokat tekintünk, akkor a Kontinuum Hipotézis feltételezése esetén az összes Hausdorff mérték izomorf! Shelah és Steprans egy friss eredménye szerint itt valószínűleg szükség van a Kontinuum Hipotézisre. Ami a Borel verziót illeti, Máthé András friss eredménye teljes negatív választ ad!

Elekes Laczkovich Miklóssal meghatározta (néhány esetben csak konzisztencia erejéig) a legtöbb ismert függvényosztály megoldhatósági számosságát. Ez a számosság végtelen differencia-egyenletrendszerek megoldhatóságára ad elégséges feltételt; azt vizsgálták, hogy mekkora részrendszerek megoldhatósága garantálja a teljes rendszer megoldhatóságát.

Minden teljes metrikus tér rendelkezik az ú.n. Banach fixpont-tulajdonsággal, azaz rajta minden kontrakciónak van fixpontja. Ismert volt, hogy nem teljes metrikus tér is lehet ilyen, hiszen a síknak létezik ilyen tulajdonságú nem zárt része. E. Behrends kérdezte, hogy a számegyenesen is van-e ilyen példa, illetve, hogy milyen bonyolultságú példák léteznek. Elekes minden dimenzióban megadta a (leíró halmazelméleti szempontból) minimális bonyolultságú példát.

Egy valós függvényt merevnek nevezünk, ha minden pozitív c-re cf(x) grafikonja izometrikus f(x) grafikonjával. Elekes Balka Richárddal igazolta az ú.n. Jankovic-sejtést; egy folytonos függvény pontosan akkor merev, ha a+bx vagy a+be^x alakú. Emellett negatív választ adtak Cain, Clark és Rose egy merev függvények általános alakjára vonatkozó problémájára, és számos eredményt értek el Borel illetve Lebesgue mérhető függvények merevségére vonatkozóan. Meglepő módon az analóg ,,vízszintes skálázás'' esetében regularitás feltételezése nélkül értek el hasonló eredményt.

Elekes Márton és Keleti Tamás (Máthé Andrással közösen) önhasonló illetve önaffin halmazokra vizsgálták egy eltolt/elmozgatott/hasonló példányával vett metszetének mértékét a természetes mérték szerint. Megmutatták, hogy számos alapvető esetben (például diszjunkt darabokból álló önhasonló halmazra, továbbá a legtöbb önaffin Sierpinski szivacsra) egyrészt a metszet mértéke csak úgy lehet majdnem 1 (azaz majdnem annyi, mint az eredeti halmaz mértéke), ha a metszet tartalmazza az eredeti halmazt; másrészt csak triviálisan lehet pozitív a metszet mértéke, azaz ha tartalmaz egy elemi darabot.

Keleti Tamás és Mátrai Tamás közösen megválaszolták Szergej Konyjagin kérdését, mutatva tetszőleges nem megszámlálható lengyel téren folytonos valós függvények sorozatát úgy, hogy az összeg mindenütt divergens, de az előjelek tipikus megváltoztatásával már az összeg legalább egy pontban konvergens. Az eredményt egy közös cikkben publikálták.

Mátrai Tamás 2005-ben megírta és megvédte doktori disszertációját. Ebben kidolgozta a topologikus Hurewicz teszthalmazok elméletét, mely általánosítja A. Louveau és J. S. Raymond egy Hurewicz teszthalmazok létezéséről szóló eredményét és a valós függvénytan alapvető eszközének számító Baire Kategória Tételt. Az elméletnek számos alkalmazása született: Mátrai új karakterizációt mutatott adott additív Borel osztályba tartozó halmazok jellemzésére; megválaszolta T. Natkaniec egy transzfinit konvergenciákra vonatkozó kérdését; Hurewicz teszthalmazt talált Borel halmazok általánosított szeparációjának illetve redukciójának problémájához; topologikus Hurewicz teszthalmazokat konstruált a differencia-hierarchiához; Elekes kérdését megválaszolva megmutatta, hogy a Borel halmazoknak nem adható meg bizonyos monotonitási feltételeknek eleget tevő kanonikus előállítása; sikerült bizonyítania egy Borel ideálokra vonatkozó generálási tételt ZFC-ben, valamint konstruált egy olyan ideálcsaládot, ahol "alacsony" Borel osztályú kofinális rendszer konzisztensen nem létezik (ez a két eredmény egyben egymás optimális voltát is mutatja).

Mátrai Tamás másik fő kutatási területe az operátorfélcsoportok elmélete volt. Egy új Banach-tér konstrukció segítségével megcáfolta A. Pazy egy immáron negyven éves sejtését, mely az operátorfélcsoportok azonnali normafolytonosságának egy igen egyszerű és alkalmazásokban jól használható karakterizációját jelentette volna. Ugyanakkor megmutatta, hogy az alkalmazásokban tipikusan előforduló perturbációs módszerek megőrzik az azonnali normafolytonosságot; ezzel a perturbáció-elméletben ismert számos részeredményre adott egységes, új, általános bizonyítást. Mátrai szintén megmutatta, hogy az un. Miyadera-Voigt perturbációk megőrzik az operátorfélcsoportok kompaktságát. Sikolya Eszterrel közös munkájában lefektette a hálózatokon értelmezett transzportfolyamatok operátorfélcsoport-elméleti alapjait.

Csörnyei Marianna szerzőtársaival geometriai mértékelméleti jellemzést talált Lagrange függvényekkel megadott variációszámítási problémák úgynevezett univerzális szinguláris halmazaira. J. M. Ball és N. Nadirashvilli 1-dimenziós reguláris variációs problémák vizsgálata során vezették be az univerzális szinguláris halmaz fogalmát. Ez a halmaz a sík azon pontjaiból áll, melyeken egy az adott Lagrange-függvényhez tartozó folytonos minimalizáló függvény végtelen deriválttal halad át. Ball és Nadirashvilli megmutatták, hogy az univerzális szinguláris halmazok első kategóriájúak, míg Sychëv eredménye szerint egy ilyen halmaz nullmértékű. Természetesen adódik a kérdés, vajon mi az univerzális szinguláris halmazok pontos mérete. Az idézett két eredményt általánosítva Csörnyei Marianna B. Kircheimmel, T. C. O'Neillel, D. Preiss-szal és S. Winterrel közösen megmutatta, hogy az univerzális szinguláris halmazok sehol sem rektifikálhatók, azaz minden Lipschitz görbét nulla 1-dimenziós Hausdorff mértékű halmazban metszenek. A jellemzés pontosságát mutatja, hogy minden kompakt sehol sem rektifikálható K halmazhoz mutattak olyan sima Lagrange függvényt, melynek univerzális szinguláris halmaza tartalmazza K-t.