Zárójelentés a K 61908 számú OTKA pályázathoz

Az elért eredmények rövid ismertetése:

Ruzsa Imre a madridi matematikai kongresszuson meghívott előadóként tartott előadást. Ennek írott változata Additive combinatorics and geometry of numbers címmel a konferencia kötetben jelent meg. Ebben azt vizsgálta, hogy miként kapcsolódnak egy rácspontokból álló halmaz geometriai tulajdonságai (dimenzió, konvex burok mérete) additív tulajdonságokhoz.

Ruzsa Imre a Cardinality questions about sumsets című a Montreal school on combinatorial number theory kötetben megjelenő cikke részben ismertető, részben új eredményeket tartalmazó cikk. Az új eredmények egyike az $|A+B+C|^2 \leq |A+B| |A+C| |B+C|$ egyenlőtlenség, amely más régebbi eredményekkel együtt lényegében leírja az $|A|$, $|2A|$, $|3A|$ lehetséges együttes nagyságrendjeit.

Ruzsa Imre V. Bergelsonnal írt, Sumsets in difference sets című, az Israel J. Math. folyóirathoz benyújtott cikkében differenciahalmazokat vizsgál a 2 és 3 dimenziós rácsban, továbbá a bennük található struktúrákat és Bohr környezeteiket tanulmányozták.

Ruzsa Imre T. Sanders-szel közös, Difference sets and the primes című, az Acta Arithmetica-ban megjelent cikkében az első n pozitív egész szám olyan részhalmazait vizsgálják, ahol semelyik két kiválasztott szám különbsége sem p-1 alakú, ahol p prímszám. Megmutatják, hogy ekkor a halmaz számossága legfeljebb Cnexp{-c(logn){1/4}} alkalmas c,C konstansokkal.

Ruzsa Imre Gyarmati Katalinnal és Matolcsi Mátéval közös, A superadditivity and submultiplicativity property for cardinalities of sumsets című, a Combinatorica-ban megjelenő cikkükben $S=A_1+\ldots A_n$ összeghalmazokat vizsgálnak, ahol A_i az egészek véges halmazai. Az $S_i=A_1+\ldots+A_{i-1}+A_{i+1}+\ldots A_n$ halmazok számosságát használva nem javítható alsó és felső becsléseket adnak S számosságára.

M. B. Nathanson, K. O'Bryant, B. Orosz I. Z. Ruzsa, and M. Silva:
Ha van két lineárs függvény, f(x; y) és g(x; y), készítenek olyan halmazt, amelyre f(A,A) elemszáma nagyobb, mint g(A,A) elemszáma.

B. J. Green and I. Z. Ruzsa: Freiman's theorem in an arbitrary Abelian group, Journal London Math-ban megjelent cikkükben
Struktúratétel bizonyítanak azon halmazokra, amelyekre $|A+A| < c|A|$. Ezek benne vannak egy úgynevezett "mellékosztály-sorozatban", ami egy alkalmas faktorcsoportban elhelyezkedő többdimenziós számtani sorozat ősképe, a dimenzió $< f(c)$, a lefedő halmaz mérete pedig $< g(c)|A|$.

E. Croot, I. Z. Ruzsa, and T. Schoen. Arithmetic progressions in sparse sumsets.
In B. Landman et al., editor, Proc. Integers Conference 2005, pages 157{
164, Carrollton, Ga., USA. de Gruyter.
Aránylag ritka halmaz összeghalmaza is tartalmaz számtani sorozatot: k

tagúhoz elég kb. $n^{1-1/k}$ szám n-ig.

K. Gyarmati, S. Konyagin, and I. Z. Ruzsa. Double and triple sums modulo a prime. In A. Granville, M.B. Nathanson, and J. Solymosi, editors, Additive Combinatorics, volume 43 of CRM Proceedings and Lecture Notes, pages 271{277, Providence, RI, USA, 2007. American Math. Soc.
Ha A halmaz modulo p, p prím, és $|2A| = n$, mekkora lehet $|3A|$? Kicsi n-re ez kb. $(3/2)n$, mint az egész számoknál, aztán valahol $p/2$ tájékán megváltozik és kvadratikus módon folytatódik; p-t csak akkor éri el, amikor már $n > p-c\sqrt{p}$

Katalin Gyarmati, F. Hennecart, and I. Z. Ruzsa. Sums and differences of finite sets. Functiones et Approximatio, 37:175{186, 2007.
Megvizsgálják, hogy ha adott A és $A + B$ számossága, akkor mekkora lehet $A-B$, illetve $X-B$ dzámossága, ahol X részhalmaza A-nak.

Katalin Gyarmati, M. Matolcsi, and I. Z. Ruzsa. Plünnecke's inequality for different summands. In Building Bridges, volume 19 of Bolyai Society Mathematical Studies, pages 309{320. Springer, 2008.
Ha vannak kommutatív csoportban $A,B_1,\dots,B_k$ halmazok, amikra $|A|=n$, továbbá az □összes $|A + B_{i_1}+\dots+B_{i_l}|<\beta (i_1,\dots,i_l)*n$, akkor, belátjuk, hogy alkalmas $X\subset A$ nem□üres részre $|X + B1 + \dots+B_k| <j\gamma |X|$, ahol a γ β_i együtthatók szorzata a megfelelő hatványon. Ha az összes B_i ugyanaz a halmaz, ez Plünnecke tétele.

I. Z. Ruzsa. Sumsets and entropy. Random Structures and Algorithms, 34:1{10, 2009.
Különféle kapcsolatok □összeghalmaz-egyenlőtlenségek és entrópiaegyenlőtlenségek között. Például bebizonyítja a Ruzsa-féle összeg-különbség egyenlőtlenségnek az entrópia általáanosítását: $h(X) + h(Y-Z) \leq h(X-Y) + h(X-Z)$ független diszkrét változókra.

I. Z. Ruzsa. Many differences, few sums. Ann. Univ. Eötvös, 51:27-38, 2008.
Megnézi, hogy ha $|A| = n$ és $|A-A|$ közel van a maximumhoz, ami n^2-n+1, milyen kicsi lehet $|A + A|$, vagyis mekkora lehet $|A + A| + (n^2-|A-A|)$ minimális értéke. Tudjuk, hogy ez lehet <n{2-c} valamilyen pozitív c-vel. Könnyű látni, hogy ez mindig >n{3/2}, és ezt megjavítja $n^{5/3}$ -ra.

H. Maehara, I. Z. Ruzsa, and N. Tokushige. Large regular simplices contained in a hypercube. Periodica Math. Hungar., 58:121{126, 2009.
Megmondják, mekkora szabályos szimplex fér bele egy egységkockába.

Balog Antal 2006 tavaszán 4 hónapot Montrealban töltött, részben az OTKA támogatásával. Ott többek közt részt vett a School on Additive Number Theory cimű két hetes programban, és előadásárol "Many additive quadruples" címmel cikket írt a Lecture Notes számára. Ebben egy kvantitatív szempontból nagyon erős bizonyítást adott Szemerédi Endrével közös, mintegy tíz éves eredményükre. Ha az A és B egész számok véges halmazaiból alkotott (a,b) párok egy "nagy" halmazán az a+b alakú összegek csak "kevés" különböző számot állítanak elő, akkor vannak olyan "nagy" A', B' részhalmazok, hogy minden a'+b' alakú összeg is csak "kevés" különböző számot állít elő.

Hegyvári Norbert Answer to the Burr-Erdős question on restricted addition and further results című F. Hennecart és A. Plagne-nyal közös, Combinatorics Probability & Combuting-ban megjelenő cíkkében megvizsgálta, hogy mit lehet mondani kxA megszorított összeghalmazban a legnagyobb hézagról, tudva, hogy hA-ban minden elég nagy szám előfordul (hA a h-tagú összeghalmaz nem feltétlenül különböző elemekkel).

Hegyvári Norbert On Monochromatic sums of squares and primes F. Hennecart-tal közös, a JNTh-ban megjelenő cikkében egy Sárközy által felvetett Ramsey-típusú additív problémára adtak választ: Ha a négyzetszámokat (prímeket) k színnel színezzük, legalább hány „egyszínű" elemet kell vennünk, hogy minden elég nagy szám előálljon ezek összegeként.

Hegyvári Norbert On Additive and Multiplicative Hilbert Cubes címü, közlésre a J. of Combinatorial Th.A-ba benyújtott cikkében additív és multiplikatív Hilbert-kockákat vizsgált. Kvantitatív formában is becslést adott egy Nathanson által bizonyított tételre, miszerint ha A 1 felsősűrűségű, akkor van benne végtelen H-kocka.

Hegyvári Norbert IP sets, Hilbert cubes a Public. Math-ban közlésre elfogadott cikkében Bergelson és Ruzsa egy eredményéhez kapcsolódva azt vizsgálta, hogy M(A) halmaz komplementere, ahol M(A) az A-beli elemek összes többszörösét tartalmazza, tartalmaz-e végtelen Hilbert-kockát. Hasonló kérdéseket vizsgáltak Z^k-ban is.

Hegyvári Norbert Linear Operations on sets with positive upper density F. Hennecart és A. Plagne-nyal közös cikkében a következő problémát vizsgálták: Stewart, Tijdeman, Ruzsa iterált differencia-halmazainak egy
másirányú vizsgálata; D(X)=X-X helyett az O(X)=aX+bX (a,b egészek)
operációt iteráljuk, ahol X pozitív felső sűrűségű halmaz. A fő
nehézség: a Kneser tétel-- ellentétben D(X) esetével, közvetlenúl nem
alkalmazható, más kominatorikus áthidaló segédlet kell.

Hegyvári Norbert F. Hennecart-ral írt Iterated difference sets in dense sets című cikkében nem kommutatív sigma-végtelen halmazokban lévő iterált különbség halmazokat vizsgál.

Hegyvári Norbert On sum-product bases című cikkében Ebben a prímtestben adott A halmaz elemszámára adok becslést, megkívánva, hogy a_1*A*A+a_2*A*A+…+a_k*A*A minden elemet előállít. A kérdés Glibichuk, Konyagin és Bourgain kérdéséhez kapcsolódik.

Hegyvári Norbert F. Hennecart-ral Explicit Constructions of Extractors and Expanders, Acta Arithmetica 140.3 (2009) p. 233-249

A prímtestben adott f(x,y) fv-ét expandernek nevezik, ha minden A,B

halmazra, melyre $|A|,|B|\sim p^t$, $0<t<1$ $|f(A,B)|>|A|^{t+e}$, $e>0$. Mei-Chu Chang, Croot, Lev és mások kérdezték: adjunk explicit expandereket. Bourgain: $f(x,y)=x^2+xy$ expander, valamilyen $e>0$ mellett. Ebben a cikkben végtelen sok expandert megadunk, bizonyos t-k halmazára Bourgain expanderének (és másoknak is) e-ját is megbecsüljük.
Továbbá megadunk végtelen sok 3-forrású extraktort is $\mathbb{F}_p$-ben $f:A\times B\times C \to \{-1,1\}$ és $\sum_{a,b,c}f(a,b,c)=o(|A||B||C|)$. E kérdésnek számítógéptudományi kapcsolata is van.

Hegyvári Norbert: Additív és multiplikatív Hilbert-kockákat vizsgált. Kvantitatív formában is becslést adott egy Nathanson által bizonyított tételre, miszerint ha A 1 felsősűrűségű, akkor van benne végtelen H-kocka.

Révész Szilárdnak Tiles with no spectra in dimension 4 című Farkas B-val közös a Math. Scand., 98 no. 1 (2006)-ban megjelent cikkében a Fuglede probléma – általánosságban Tao illetve Kolountzakis-Matolcsi által nemrégiben negatív irányban megválaszolt – „megfordított irányát” sikerült még tovább élesítenie azáltal, hogy konstruáltak példát arra, hogy lehet egy halmaz parkettázó, de mégsem spektrális akár 4 dimenzióban is. Ez megjavította Kolountzakis és Matolcsi korábbi 5 dimenziós konstrukcióját.

Révész Szilárd, N. Reyes, G. A. M. Velasco-val közös, Oscillation of Fourier Transforms and Markov-Bernstein Inequalities, (J. Approx. Theory, 145 (2007), 100-110.) cikkében megmutatta, hogy ha egy pozitív definit folytonos függvény deriváltjára van egy, a függvény normájától függő korlátunk, akkor a függvény nem tűnhet el a 0 egy alkalmas környezetében.

Révész Szilárd, On some extremal problems of Landau (Serdica Math. J., 33 (2007), 125-162.) cikkében a prímszámformula hibatagjának becslésénél használható Landau-féle extremális problémáról ad áttekintést ill. általánosít kérdéseket.

Révész Szilárd A. Bonamival írt, Integral concentration of idempotent trigonometric Polynomials cikkükben idempotens trigonometrikus polinomok koncentrációjával kapcsolatos becslésekre bizonyít éles egyenlőtlenségeket korábbi eredményeket lényeges javítva.

Sándor, C.: On the minimal gaps between products of members of a sequence of positive density. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 48 (2005), 3--7.

A cikkben megmutatja, hogy ha a természetes számok egy részsorozatának sűrűsége \alpha, akkor a szorzathalmaz szomszédos elemei között a hézag végtelen sokszor legfeljebb \frac{1}{\alpha ^3} nagyságú.

Sándor Csaba a Non-degenerate Hilbert Cubes in Random Sets című a Journal de Théorie des Nombres –ben megjelenés alatt lévő cikkében a k-dimenziós nem-degenerált Hilbert-kockák küszöbfüggvényét határozta meg ill. véletlen halmazokban vizsgált rokon kérdéseket.

Sándor Csaba igazolja: Erdõs és Turán sejtése szerint ha a természetes számok egy A részhalmaza esetén az additív reprezentációfüggvény korlátos, akkor végtelen sokszor veszi fel a 0-t. A fenti cikkben azt mutatom meg, hogy ha a reprezentációfüggvény limsup-ja A, akkor liminf-je legfeljebb A-\sqrt{A}+1.