

A pályázat címe: **Új elméleti és numerikus módszerek tartószerkezetek topológia-  
optimalására determinisztikus és sztochasztikus feladatok esetén.**

*(Részletes jelentés)*

Az alábbiakban a pályázat keretében elért kutatási eredményeket foglaljuk össze. Valamennyi témában számos példát is megoldottunk és azok eredményei alapján parametrikus vizsgálatokat folytattunk. Ezek ismertetésére ezen a helyen csak nagyon korlátozottan van lehetőség.

## **1 LINEÁRISAN RUGALMAS SZERKEZETEK TOPOLOGIAOPTIMÁLÁSA**

Valamennyi kutatási eredmény és témakör publikálásra került. A zárójelentésben a terjedelmi korlátok miatt a topológiaoptimalás kidolgozott feladatköreit egy bővített (támaszoptimalási) probléma és egy valószínűségi változókkal megadott terhelésű tartó topológiaoptimalása kapcsán mutatjuk be. A számítási modellek minden esetben nemlineáris matematikai programozási feladatra vezetnek. Felhasználva az optimalitás feltételét, egy iterációs formulát vezettünk le – SIMP ( Solid Isotropic Material with Penaltization) -, amely ellentétben a standard matematikai programozási algoritmusokkal, igen nagyszámú tervezési változó felhasználását teszi lehetővé. Vizsgáltuk az analitikusan kapott, illetve a numerikusan kiszámított ún. Michell-típusú optimális topológiák egyezőségét különböző térfogati arányok, merevségek és terhelési esetek kapcsán.

### **1.1 A topológiaoptimalás feladatai**

#### **1.1.1 A determinisztikus feladat megfogalmazása**

A topológiaoptimalási feladata az alábbi tervezési esetet alapján fogalmazható meg:

- Legyen a lineárisan rugalmas anyagú szerkezet (tárcsa) 2D tervezési tartománya ismert. A szerkezetet a végeleemes diszkretizálás szabályi szerint osszuk fel  $G$  ( $g=1,2,\dots,G$ ) alaptartományra. Az egyes tartományok  $t_g$  vastagsága legyen konstans (egységnyi). Minden alaptartományt osszuk fel további  $E_s$  ( $e=1,2,\dots,E_s$ ) elemre. (Gyakorlatilag ez azt jelenti, hogy a hálózat generáláskor egy elsődleges hálózatot készítünk, majd ezt tovább osztjuk egy másodlagos hálózattal.)
- A terhelés egyparaméteres, statikus, determinisztikus adatokkal leírt.
- A megtámasztások adatai adottak.

- Adottak az elmozdulási korlátokat definiáló feltételek – hely ( $d=1,2,\dots,D$ ) és nagyság -.

Felhasználva az előbbi normált vastagságú szerkezetet, a linearitás miatt a feladat könnyen átranzformálható egy  $t_g = t_{\max}$  vastagságú szerkezet vizsgálatára. Belátható, hogy a terheket  $t_g = t_{\max}$  tetszőleges értékkel beszorozva a kapott feladatban a feszültségek, alakváltozások és elmozdulások azonosak lesznek az eredeti feladat eredményeivel.

A szerkezet  $W$  súlyát az alábbi módon számíthatjuk:

$$W = \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g. \quad (1.1)$$

Itt  $\gamma_g$  a szerkezet anyagának fajsúlya,  $A_g$  a  $g$ -edik alapelem területe. Az elmozdulási korlát a mint globális feltétel az ún. „compliance” feltétel alkalmazásával oldható meg:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - C \leq 0; \quad (1.2.)$$

ahol  $C$  (compliance) a külső potenciális energia,  $\mathbf{K}$  a szerkezet merevségi mátrixa,  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{P}$  teherből számított tényleges csomóponti elmozdulások vektora,. A továbbiakban ezt az (1.2.b) egyenlőtlenséget használjuk a topológiaoptimalás matematikai programozási feladatában. (Ezt az ún. (compliance) tervezési módszer elméletét Hegemier és Prager (1969) bizonyította és általános tervezési módszernek javasolta.)

Továbbá adjunk meg minden alaptartomány  $t_g$  vastagságára egy alsó, illetve egy felső korlátot (praktikusan  $t_{\min} \approx 0$  és  $t_{\max} = 1$ ):

$$\begin{aligned} -t_g + t_{\min} &\leq 0; \quad (g = 1, \dots, G), \\ t_g - t_{\max} &\leq 0; \quad (g = 1, \dots, G). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ezek a korlátok (0 és 1) azt szolgálják, hogy a tervezés eredményeként azt adott elem létezik-e vagy nem. Ahhoz, hogy elkerüljük a közbenső vastagsági értékeket a szerkezet súlyát egy módosított összefüggéssel számoljuk:  $\tilde{W} = \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g^p$ , ahol  $p$  ( $p \geq 1$ ) a büntető paraméter, és szerepe ugyan az, mint a klasszikus OC módszereknél használt büntető paraméternek. Megjegyezzük, hogy  $t_g = 0$  és  $t_g = 1$  esetén a módosított képlet is a tényleges súlyt szolgáltatja.

A topológiaoptimalás alapfeladata büntető paraméterrel kifejezett súly-célfüggvény és „compliance”-feltétel alkalmazásával a következőképpen adható meg:

$$\min \tilde{W} = \min \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g^{\frac{1}{p}} \quad (1.4.a)$$

az alábbi feltételek mellett

$$\begin{cases} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - C \leq 0; \\ -t_g + t_{\min} \leq 0; \quad (g = 1, \dots, G), \\ t_g - t_{\max} \leq 0; \quad (g = 1, \dots, G). \end{cases} \quad (1.4.b-d)$$

Az (1.4) matematikai programozási feladatban az  $\mathbf{u}$  csomóponti elmozdulások vektora a  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{P}$  lineáris egyenletrendszerből meghatározott a ható  $\mathbf{P}$  terhelés hatására.

## 1.2 A determinisztikus topológiaoptimalás bővített feladata

A mérnöki gyakorlat sokszor kíván megoldani olyan tervezési feladatot, hogy a megtámasztások helyét, illetve a belső megerősítések mennyiségét vagy/és minőségét kell meghatároznunk. Ez a feladattípus alkalmas a passzív módon való támaszerő szabályzásra, a súlyelhelyezés miatt a konzolhatás erősítésére, a sajátfrekvencia módosításra. A klasszikus támasz-optimalási feladatok megjelenése a 70-es évek közepére tehető (Rozvany és Mroz (1977)) és az optimalitási feltétel (OC) módszerére alapulnak. A probléma a numerikus nehézségek miatt szinte feltáratlan maradt, és csak néhány éve került ismét a kutatók vizsgálatára tárgyává. Buhl (2002), Pomezanski (2004) a támaszoptimalás numerikus számításra alkalmas módszert mutatott be. Rozvany, Lógó és Kaliszky (2003) egy „költség”-függvény alkalmazásával oldotta meg a feladatot rúdtámaszok esetén. Itt a célfüggvény a külső, illetve belső megtámasztások egy alkalmas kombinációját fejezi ki az alábbi módon:

$$\min \left( \sum_i k \ell_i |F_i| + \sum_j b \ell_j |R_j| \right); \quad (1.5)$$

ahol  $k$  és  $b$  adott konstansok,  $\ell_i$  és  $\ell_j$  az  $i$ -edik, illetve  $j$ -edik rúd hossza,  $F_i$  és  $R_j$  az  $i$ -edik belső, illetve a  $j$ -edik külső támaszerő nagysága.

Ebben a pontban az (1.5) célfüggvény egy módosított változata Lógó (2006a) kerül felhasználásra, amelynél feltételeztük, hogy a költség arányos a keletkező erő nagyságával, azaz arányos azzal a térfogattal, amit a kérdéses rúddal megadott támasz képvisel. Ennél fogva az erők helyett a lineárisan rugalmas anyag felhasználása miatt az anyagtörvény szerint a  $\sigma_y A_0$  mennyiség került bevezetésre ( $\sigma_y$  egy feszültségi határ mérőszáma, és húzásra, illetve nyomásra az egyszerűség kedvéért azonos pozitív értéket tételezzünk fel,  $A_0$  a keresztmetszeti méret). Az abszolút érték jelek így elhagyhatók és az új típusú célfüggvény az

alábbi módon írható:

$$\min \left( \sum_i k \ell_i \sigma_{y_i} A_i + \sum_j b \ell_j \sigma_{y_j} A_j \right). \quad (1.6)$$

A továbbiakban minden támaszt, annak a helyén egy rúdcsoporttal helyettesítünk, oly módon, hogy a rudak minden lehetséges irányban elhelyezésre kerülnek. Továbbá a fix támaszokat is helyettesíthetjük a fentiekben megadott módon. (Ez azt jelenti, hogy egy görgős megtámasztást egységnyi hosszú, de merev rúddal helyettesíthetünk.)

### 1.2.1 A bővített feladat matematikai programozási megfogalmazása

Tekintsük az 1.2 pontban megadott feladatot. A megfogalmazásának adatai a következő feltétellel bővülnek:

- a rúdelemek  $\ell_i$  hossza legyen ismert,  $A_i$  jelölje az ismeretlen keresztmetszeti méretet. Továbbá a keresztmetszeti méretet fejezzük ki „normált” formában, ahol  $A_i = A_0 t_i$ . Itt  $A_0$  egy alkalmasan választott keresztmetszeti alapérték (hossz dimenzióval),  $t_i$  pedig egy arányossági tényező, de hossz dimenzióval.

Ahogy korábban is jeleztük, most is a szerkezet alapelemeinek (tárcsa és rúdelemek) száma legyen  $G$ , amely  $G = N_{Disk} + N_{Bar}$  összefüggés alapján számítható. Itt  $N_{Disk}$  jelzi a tárcsa-alapelemeinek számát,  $N_{Bar}$  pedig a rúdelemek számát (külső, illetve belső). A teljes szerkezet ( $W$ ) súlya az alábbi módon írható fel:

$$W = \sum_{id=1}^{N_{Disk}} \gamma_{id} A_{id} t_{id} + \sum_{ib=1}^{N_{Bar}} \gamma_{ib} A_{ib} t_{ib} \ell_{ib}. \quad (1.7)$$

Itt  $\gamma_{id}$  és  $\gamma_{ib}$  jelenti a tárcsa, illetve a rudak anyagának fajsúlyát.  $A_{id}$  jelöli az  $i$ -edik tárcsa alapelem területét és  $t_{id}$  annak vastagságát.  $A_{ib} t_{ib}$  jelölje az  $i$ -edik rúdelem keresztmetszeti területét, míg  $\ell_{ib}$  annak hosszát. Az összegzés második tagja mind a külső, mind a belső megtámasztásokat tartalmazza.

Vezessük be az  $A_g$  mesterséges változót. Ez a tárcsa elem esetén az előzőekben használt értékkel azonos, azaz a tárcsaelemnél  $A_g = A_{id}$ . A rúdelemek esetében  $A_g$  egy olyan keresztmetszeti területet jelöl, amelyet az  $A_g = A_{ib} \ell_{ib}$  összefüggés alapján számolunk és most már terület dimenziójú. Ennélfogva a  $A_{ib} \ell_{ib} t_{ib}$  három tagból álló szorzat az  $A_g t_g$  kifejezésre egyszerűsödik az  $i$ -edik rúdelemre nézve. Amennyiben a rúdelemek anyagának  $\gamma_{ib}$  fajsúly mérőszámába beleértjük a  $k \sigma_y$ , illetve a  $b \sigma_y$  szorzatokat (a költségeket és a feszültségi

korlátokat jelző mennyiségek szorzatát) a teljes szerkezet súlya az (1.1) egyenletben megadott

módon  $W = \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g$  alapján számítható. Az így kialakított feladatnál a szerkezet  $\mathbf{K}$

merevségi mátrixa az egyes tárcsák, illetve rudak elemi merevségi mátrixainak felhasználásával tudjuk összeállítani. Az (1.1) pontban ismertetett elveket követve a bővített topológiaoptimalás feladata „compliance” feltétel esetén formailag az (1.4) matematikai programozási feladattal azonos. Megoldása az ott ismertetett elvek alapján történik. A részletek Lógó (2006) dolgozatban megtalálhatók.

### 1.3 Topológiaoptimalás valószínűségi változókkal adott terhek esetén

A valószínűség számítás, mint matematikai elmélet régóta szerepet játszik a mérnöki tervezésben és az azt szabályzó nemzeti szabványokban. A valószínűségi adatokkal megadott tervezés azonban annak komplex volta miatt nem tudott teret nyerni a fontosságának megfelelően, ahol nem elkerülhetetlen, ott ma is a determinisztikus adatokra épülő tervezés játszik elsődleges szerepet. A stochasztikus számítás elmélete, a megbízhatósági elméletre alapuló optimális tervezés hosszú ideje foglalkoztatja a kutatókat (Vásárhelyi (1981, 1987)), de napjainkban került igazán az optimális tervezéshez kapcsolódó kutatások középpontjába. Ennek további igen fontos bizonyítéka, hogy két fontos nemzetközi folyóirat (ZAMM és a Structural and Multidisciplinary Optimization) is speciális számot adott ki a témakörben 2007-ben és 2008-ban. Ebben a részben az előzőleg, megadott módszert terjesztjük ki valószínűségi változókkal megadott terhek esetére, ahol ismertnek tételezzük fel a terhek eloszlását, várható értékét és szórását. Az általunk kidolgozott eljárás Prekopa (1995) által publikált tételre alapul, amely szerint egy valószínűségi változók lineáris kombinációjából képzett valószínűséggel korlátozott feltétel, egy vele egyenértékű, konvex determinisztikus kifejezéssé alakítható. Ennek fontossága miatt ezt röviden ismertetjük.

#### 1.3.1 A feladat matematikai alapjai

Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  valószínűségi változók, normális eloszlással. Továbbá legyen adott egy valós számokból alkotott  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  vektor, amely kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$\text{Prob}(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \dots + x_n \xi_n \leq 0) \geq q; \quad (1.8)$$

Prékopa (1995) megmutatta, hogy az előző (1.20) egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\sum_{i=1}^n x_i \mu_i + \Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} \leq 0 \quad (1.9)$$

OTKA nyilvántartási szám K 62555

egyenlőtlenséggel. Itt a  $\xi_i$ , ( $i=1,2,\dots,n$ ) valószínűségi változó várható értékét jelölje  $\mu_i = E(\xi_i)$ , továbbá  $\mathbf{K}_{ov}$  a  $\xi^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  valószínűségi változókhoz tartozó kovariancia mátrix,  $q$  ( $0 < q < 1$ ) egy előre adott valószínűségi érték,  $\Phi^{-1}(q)$  ún. „probit” függvény, azaz a normális eloszlás kumulatív inverz eloszlásfüggvénye. A továbbiakban erre a tételre alapuló átalakítást alkalmazzuk.

### 1.3.2 A sztochasztikus topológia optimalás matematikai programozási megfogalmazása

Az (1.2) feltétel átírható  $\mathbf{u}^T \mathbf{P} - C \leq 0$  alakba, hiszen  $\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{P}$ . Így determinisztikus topológia optimalás feltételes szélsőérték feladata más megfogalmazásban a következő módon adható meg:

$$\tilde{W} = \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g^p = \min! \quad (1.10.a)$$

az alábbi feltételek mellett

$$\begin{cases} \mathbf{u}^T \mathbf{P} - C \leq 0; \\ -t_g + t_{\min} \leq 0; \quad (g = 1, \dots, G), \\ t_g - t_{\max} \leq 0; \quad (g = 1, \dots, G). \end{cases} \quad (1.10.b-d)$$

Tételezzük fel, hogy  $\mathbf{P}^T = [P_1, P_2, \dots, P_n]$  tehervektor elemei valószínűségi változóként adottak. Az erőmegadás adatai közül az erő nagyságát tekintjük valószínűségi változónak, amelyeket normális eloszlásúaknak tételezünk fel. A terhek várható értékét jelöljük  $\bar{P}_i = E(P_i)$ -vel, ( $i=1, \dots, n$ ), míg a kovariancia mátrix  $\mathbf{K}_{ov}$  elemeit  $\kappa_{i,j}$ -vel; ( $i=1, \dots, n; j=1, \dots, n$ ). A  $\bar{\mathbf{P}}^T = [\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n]$  terhelés hatására az  $\bar{\mathbf{u}}^T = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n]$  csomóponti elmozdulásokat a  $\mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{P}}$  lineáris egyenletrendszerből kapjuk. A virtuális erők tételének alkalmazásával az  $u_i$  elmozdulás számítható, hiszen  $u_i = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_i$ . Itt  $\bar{\mathbf{u}}_i$  az  $i$ -edik helyen lévő egységvektorból számított elmozdulás vektor. A kapott elmozdulások felhasználásával az  $\mathbf{u}^T \mathbf{P} = u_1 P_1 + u_2 P_2 + \dots + u_n P_n$  külső potenciál „compliance” felírható, de (1.9) alkalmazásához ennek linearizálására van szükségünk. Ezt az alábbi módon tehetők meg: bontsuk két részre a  $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}} + d\mathbf{P}$  valószínűségi változóként megadott tehervektort. Az elmozdulások és a terhek közötti lineáris kapcsolat miatt:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} \text{ és } \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{P}}. \quad (1.11)$$

Mivel a  $\mathbf{K}$  merevségi mátrix szimmetrikus az  $\mathbf{u}^T = \mathbf{P}^T \mathbf{K}^{-1}$  és az  $\bar{\mathbf{u}}^T = \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{K}^{-1}$  elmozdulások

OTKA nyilvántartási szám K 62555

számíthatók és a „sztochasztikus compliance” az alábbi módon írható fel:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} = (\bar{\mathbf{P}} + d\mathbf{P})^T \mathbf{K}^{-1} (\bar{\mathbf{P}} + d\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{P}} + 2\bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{K}^{-1} (d\mathbf{P}) + (d\mathbf{P})^T \mathbf{K}^{-1} (d\mathbf{P}). \quad (1.12.a)$$

Elhagyva az utolsó, másodfokú tagot, a „sztochasztikus compliance” számítása az alábbi lineáris képlet alapján közelíthető:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{P} \sim \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{P}} + 2\bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{K}^{-1} (d\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{P}} + 2\bar{\mathbf{u}}^T (d\mathbf{P}) = 2\bar{\mathbf{u}}^T (\bar{\mathbf{P}} + d\mathbf{P}) - \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{P}}. \quad (1.12.b)$$

Tehát a „sztochasztikus compliance” egy lehetséges linearizált számított értéke:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{P} \sim 2\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{P} - \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{P}}. \quad (1.12.c)$$

Adott minimális  $q$  valószínűség, ( $0 < q < 1$ ) és  $C$  „compliance” esetén az alábbi feltétel felírható:

$$\text{Prob} \left( \left( 2(\bar{u}_1 P_1 + \bar{u}_2 P_2 + \dots + \bar{u}_n P_n) - (\bar{u}_1 \bar{P}_1 + \bar{u}_2 \bar{P}_2 + \dots + \bar{u}_n \bar{P}_n) \right) - C \leq 0 \right) \geq q. \quad (1.12.d)$$

Bevezetve a  $P_{n+1}$  hiányváltozót  $E(P_{n+1}) = 1$  várható értékkel és zérus kovariancia értékekkel ( $\kappa_{n+1,i} = 0; \kappa_{i,n+1} = 0; (i = 1, \dots, n+1)$ ), a (1.12.d) feltétel az alábbi módon írható:

$$\text{Prob} \left( 2 \sum_{i=1}^{n+1} x_i P_i - \sum_{i=1}^n \bar{u}_i \bar{P}_i \leq 0 \right) \geq q; \quad (1.13.a)$$

itt  $x_i = \bar{u}_i; (i = 1, \dots, n)$  és  $x_{n+1} = -C/2$ . Prékopa által megadott (1.8) feltétel alapján (1.13.a) az alábbi konvex feltétellé átírható:

$$2 \sum_{i=1}^{n+1} x_i \bar{P}_i - \sum_{i=1}^n \bar{u}_i \bar{P}_i + 2\Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} \leq 0; \quad (1.13.b)$$

itt  $\Phi^{-1}(q)$  a un. „probit” függvény,  $\mathbf{K}_{ov}$  a hiányváltozóhoz kapcsolatos bővített kovariancia mátrix. Belátható, hogy (1.13.b) első része ekvivalens a determinisztikus „compliance” feltétellel –zérus korreláció esete-:

$$2 \sum_{i=1}^{n+1} x_i \bar{f}_i - \sum_{i=1}^n \bar{u}_i \bar{f}_i = \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} - C \quad (1.14)$$

Így valószínűségi változóként megadott terhelés esetén a bővített „compliance” feltétel az alábbi módon írható fel:

$$\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} - C + 2\Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} \leq 0 \quad (1.15)$$

Ennélfogva valószínűségi változóként megadott terhelés esetén a bővített topológia optimalás feladata az alábbi módon írható fel:

$$W = \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g^p = \min! \quad (1.16.a)$$

$$\text{az alábbi feltételek mellett } \begin{cases} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} - C + 2\Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{\text{ov}} \mathbf{x}} \leq 0; \\ -t_g + t_{\min} \leq 0; \quad (g = 1, \dots, G), \\ t_g - t_{\max} \leq 0; \quad (g = 1, \dots, G). \end{cases} \quad (1.16.b-d)$$

A kapott matematikai programozási feladat megoldása az (1.4) feladatnál ismertetett elvek alapján szintén iterációs algoritmus formájában történik. Matematikailag az (1.4) és (1.16) feltételes szélsőérték feladatok azonos tulajdonságúak, hiszen az (1.4.b) feltételt helyettesítő (1.16.b) feltétel konvex (Prékopa(1995)).

### 1.3.3 Az iterációs képlet számítása

Az klasszikus topológiaoptimalásnál megismertet elveket követve a sztochasztikus topológiaoptimalás feladata formailag az (1.4) matematikai programozási feladattal azonos. Megoldása az ott ismertetett elvek alapján történik, azaz az optimalitási feltételekből az iterációs formula levezethető. Itt csak a lényeges részeket ismertetjük. Ahogy a klasszikus optimalitási feltétel (COC) módszereknél ismert, a Lagrange-szorzó kiszámítása előtt az ismeretlen vastagsági értékekre egy tartományt kell megadnunk, amely alapján a kapott vastagsági értékeket ( $\mathcal{A}$ ) aktív, illetve ( $\mathcal{P}$ ) passzív vastagsági értékek halmazába tudjuk sorolni.

Három eset lehetséges: ha  $t_{\min} < t_g < t_{\max}$  (vagyis a  $g$ . alapelem “aktív”,  $g \in \mathcal{A}$ ) akkor a  $t_g$

$$\text{vastagság számított értéke: } t_g = \left( \frac{vp(R_g + B_g)}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}. \quad (1.17)$$

Itt az előzőekhez hasonlóan  $R_g = t_g^2 \sum_{e=1}^{E_g} \mathbf{u}_{ge}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ge} \bar{\mathbf{u}}_{ge}$ , ahol  $\tilde{\mathbf{K}}_{ge}$  az egységnyi vastagságú elemekből ( $t_g = 1$ ) számított un. „normált” merevségi mátrix. Továbbá a korrelációs értékek miatt egy további tagot eredményez a számítás:

$$B_g = t_g^2 \cdot \Phi^{-1}(q) \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \kappa_{ij}^2 \bar{u}_j \sum_{e=1}^{E_x} \bar{\mathbf{u}}_{ge}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ge} \bar{\mathbf{u}}_{gei} + \bar{u}_i \kappa_{ij}^2 \sum_{e=1}^{E_x} \bar{\mathbf{u}}_{ge}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ge} \bar{\mathbf{u}}_{gej} \right)}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{\text{ov}} \mathbf{x}}}.$$

A következő eset, ha  $t_g = t_{\min}$ . Ekkor a Kuhn-Tucker feltételekből a következő egyenlőtlenséget kapjuk



$$t_g \geq \left( \frac{vp(R_g + B_g)}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}. \quad (1.18)$$

Ez azt jelenti, ha (1.18) alapján számolt  $t_g$  vastagság alsó korlátja kisebbre jönne ki mint  $t_{\min}$ , az (1.18) egyenlőtlenség a  $t_g = t_{\min}$  esetén mindig teljesül. Végezetül hasonló módon járunk el a  $t_g = t_{\max}$  esetén is. Itt a Kuhn-Tucker feltételekből a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$t_g \leq \left( \frac{vp(R_g + B_g)}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}. \quad (1.19)$$

Ez megengedi, hogy a  $t_g = t_{\max}$  legyen, amikor a számolt  $t_g$  vastagság nagyobb min  $t_{\max}$ .

Ha  $t_g = t_{\min}$  vagy  $t_g = t_{\max}$ , akkor a  $g$ -edik alapelemet "passzív"-nak nevezzük ( $g \in \mathcal{P}$ ).

A minimális illetve a maximális vastagsági érték megállapítása az előzőekhez azonos módon történik ( $t_{\min} = 10^{-6}$ ).

Ha az (1.16.b) feltétel aktív, akkor az egyenlőtlenség egyenlőségként teljesül:

$$\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} - C + 2\Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} = 0. \quad (1.20)$$

Mivel a  $g$ -edik alapelem „determinisztikus compliance” értéke az  $R_g = t_g^2 \sum_{e=1}^{E_g} \bar{\mathbf{u}}_{ge}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ge} \bar{\mathbf{u}}_{ge}$  alapján számítható, a teljes szerkezetre (aktív és passzív elemeket szétválasztva) a következő egyenletet írhatjuk fel.

$$C - 2\Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} = \sum_{g \in \mathcal{P}} \frac{R_g}{t_g} + \sum_{g \in \mathcal{A}} \frac{R_g}{t_g}. \quad (1.21)$$

Ebbe behelyettesítve az aktív elemekre számított vastagsági értékeket

$$C - 2\Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} = \sum_{g \in \mathcal{P}} \frac{R_g}{t_g} + \sum_{g \in \mathcal{A}} \frac{R_g}{\left( \frac{vp(R_g + B_g)}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}}. \quad (1.22)$$

az iterációs lépést szabályzó  $v$  Lagrange szorzó számítható. Értéke

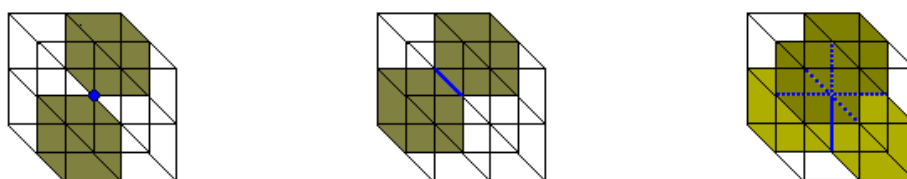
$$v = \frac{\left( \frac{\sum_{g \in \mathcal{A}} \left( \frac{A_g \gamma_g}{p(R_g + B_g)} \right)^{\frac{p}{p+1}} R_g}{C - 2\Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} - \sum_{g \in \mathcal{P}} \frac{R_g}{t_g}} \right)^{\frac{p+1}{p}}}{\left( \frac{\sum_{g \in \mathcal{A}} \left( \frac{A_g \gamma_g}{p(R_g + B_g)} \right)^{\frac{p}{p+1}} R_g}{C - 2\Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} - \sum_{g \in \mathcal{P}} \frac{R_g}{t_g}} \right)^{\frac{p+1}{p}}}. \quad (1.35)$$

Ezekután az (1.16) feladat iterációs módszerrel történő megoldási algoritmus

megtalálható az irodalomjegyzékben megadott publikációkban.

## 2 A sakk-tábla minta elkerülése

Ebben a témakörben folytattuk korábbi munkánkat, kiegészítettük és hatékonyabbá tettük azt. Összefoglaltuk a sakktáblaminták problémakörét, megjelenésük formáit, elnyomásuk lehetséges módjait, és az alapelemek bővítése  $n \times n$  végeselemre és sarokponti kapcsolatok kialakulását gátló célfüggvény alkalmazásával oldottuk meg. Szemléltető példákkal demonstráltuk a módszerek hatékonyságát. Ami új, az a térbeli sakktáblaminta vizsgálata. Egy nyolc alapelemből álló kocka segítségével végigvetük a lehetséges mintázatokat, és megadtunk egy minősítő függvényt, mely képes megkülönböztetni és súlyozni az él menti kapcsolatok adta térbeli sakktábla-mintákat és a pontbeli sarokkapcsolat adta térbeli sakktábla-mintákat az oldalak mentén kialakuló kedvező kapcsolati módoktól.



A részletes leírás megtalálható az irodalomjegyzékben megadott publikációkban.

## 3 Optimális topológiák a „layout” elmélet alapján

Rácsos tartók „layout” optimalizálását végeztük el. Az alap alakzat, a 9 rudas rácsos tartószerkezet Lógó mintapéldája. Kombinatorikus módon létrehoztuk és megvizsgáltuk valamennyi lehetséges megoldást. A megoldásokat csoportosítottuk topológiai megfelelésük és határozottságuk alapján. Az így kapott eredményeket összehasonlítottuk a numerikus optimalizálás eredményeivel, valamint az irodalomból ismert elvárt megoldással. A vizsgálatot megismételtük a tartó megtámasztásainak módosítása után is. Az új szerkezet valamennyi olyan csomópontját megtámasztottuk, melyre külső tehererő nem hat. Az így kapott szerkezettel a lehetséges, de statikailag vagy kinematikailag mégsem megfelelő megoldási formákat szemléltettük. Az első szerkezetenél a rácsos tartós megoldásokat

összehasonlítottuk egy hasonló peremfeltételekkel ellátott tárcsaszerkezetre felírt topológiai optimalás eredményeivel. Ezt követően a rácsos tartószerkezetet kiterjesztettük egy nagyobb, összetettebb formára, mely az optimalás után az előzőekben bemutatott alakzatokhoz képest új belső labilitást jelentő kapcsolódásokat is létrehozhat, melyben a támaszok és a terhek között sokszor nincs közvetlen és egyenes vonalú kapcsolat.

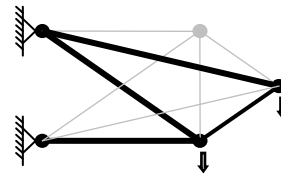
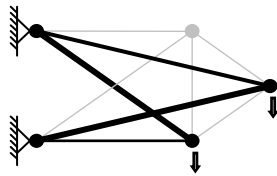
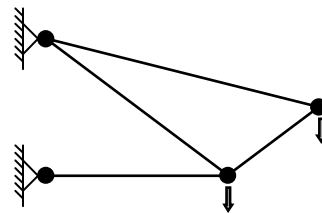
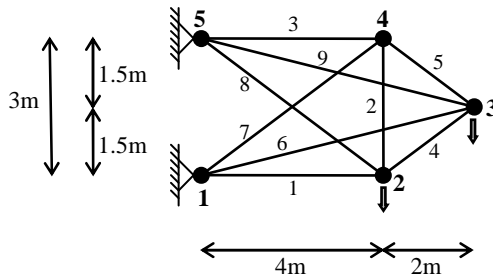


Figure 2: Holding the loaded nodes separately

Figure 3: Holding the loaded nodes with raising

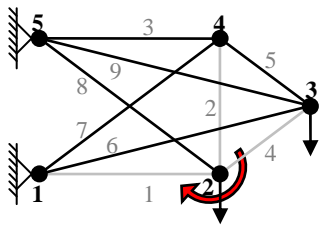


Figure 6: A 6 bar structure with an unstable loaded bar

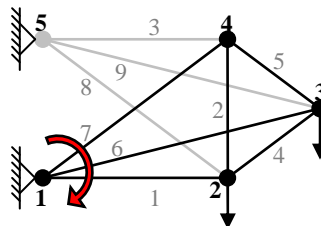


Figure 7: A labile 6 bar structure

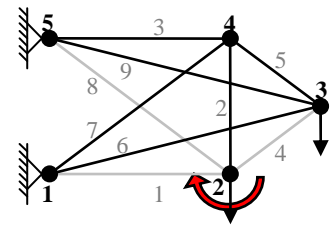


Figure 8: A 5 bar structure and a suspension

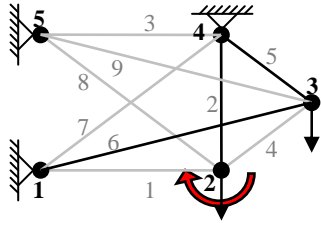


Figure 18: The minimal length 3 bars structure with swinging bar

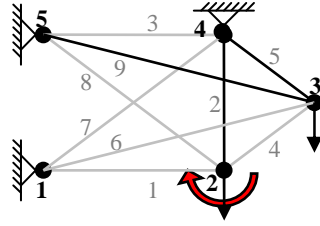


Figure 19: A 3 bars structure with swinging bar

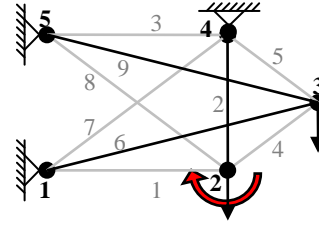
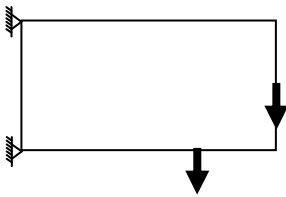


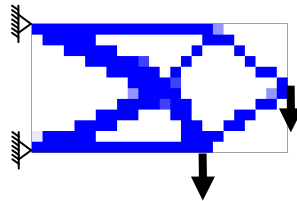
Figure 20: A 3 bars structure which does not satisfy the minimal weight design

**The original disc**

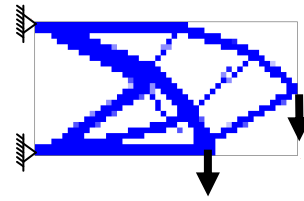


**The result**

12 x 24 elements

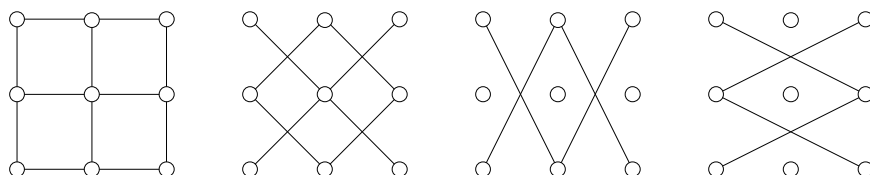


24 x 48 element

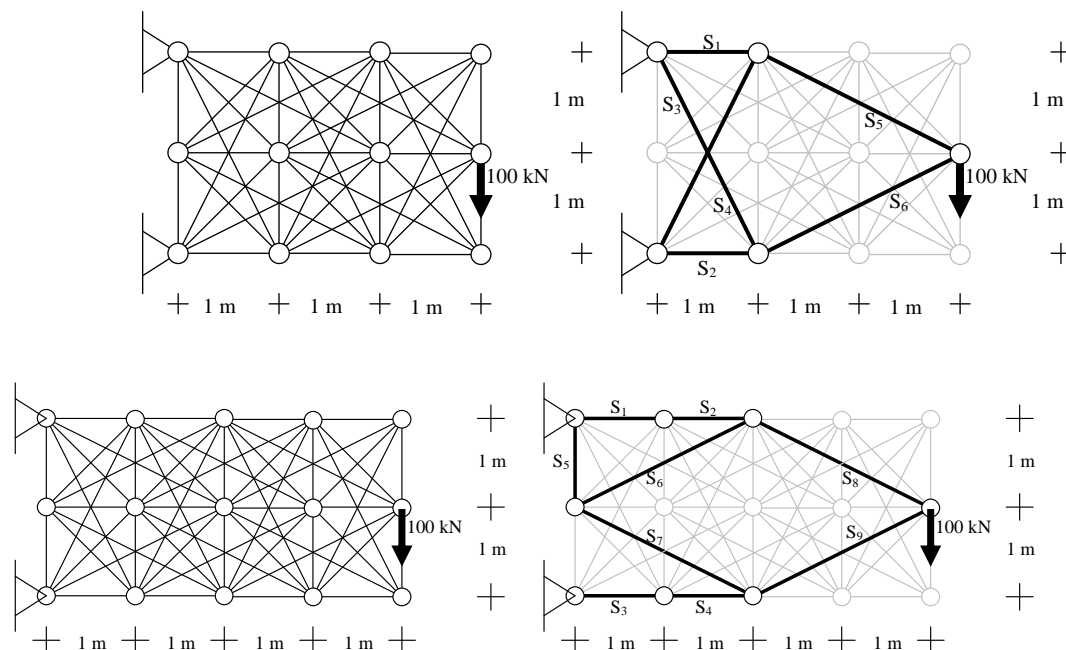


A rácsos tartós és a tárcsaszerkezetes modellezés különbségeit, korlátjait is elemeztük. Az előzőleg definiált rácsos tartószerkezet, mint Michell-féle konzoltartó topológiai optimalálásának menetét és eredményeit szemléltetjük. A bemutatott eredmények alapján látni, hogy viszonylag alacsony csomópontszám és ebből következően rúdszám esetében a topológiai optimalálás jól értelmezhető alakzatokat ad, melyek belső stabilitása viszont nem egyértelmű. Gyakori pl., hogy a nyomott övben azonos állású rudak csatlakoznak egymáshoz, mely az eredményábrában olyan, mintha egy hosszú rúd lenne, pedig legalább két, egymáshoz csuklósan kapcsolódó rúdelemből áll.

Rúdtípusok:



Szerkezetek:



Látható ugyanakkor az is, hogy az így definiált szerkezetek belső elrendezése ("íves" megközelítés a támasztól a teherig, ill. a belső merevítések megjelenése) a tárcsa-moddal számolt eredményekhez jobban idomul.

## 4 „Michell-típusú” topológiák

Michell (1904) közel 100 éve publikálta a legkisebb súlyú rácsos tartók tervezésére vonatkozó dolgozatát, amelyet több kutató mérföldkőnek tart a topológiaoptimalás területén. Az ún. „Michell-elmélet” általánosítása Prager és Rozvany nevéhez köthető. Az elmúlt évtizedben számos kutató, de leginkább a Rozvany iskolához tartozók mutattak kiemelkedő eredményeket a témakörben. A továbbiakban néhány új „Michell-típusú” optimális topológia analitikus megoldását mutatjuk be. Részletes leírás megtalálható az irodalomjegyzékben megadott kapcsolódó publikációkban

### 4.1 Analitikusan meghatározott topológiák

Részletek nélkül közlünk néhány analitikusan meghatározott topológiát.

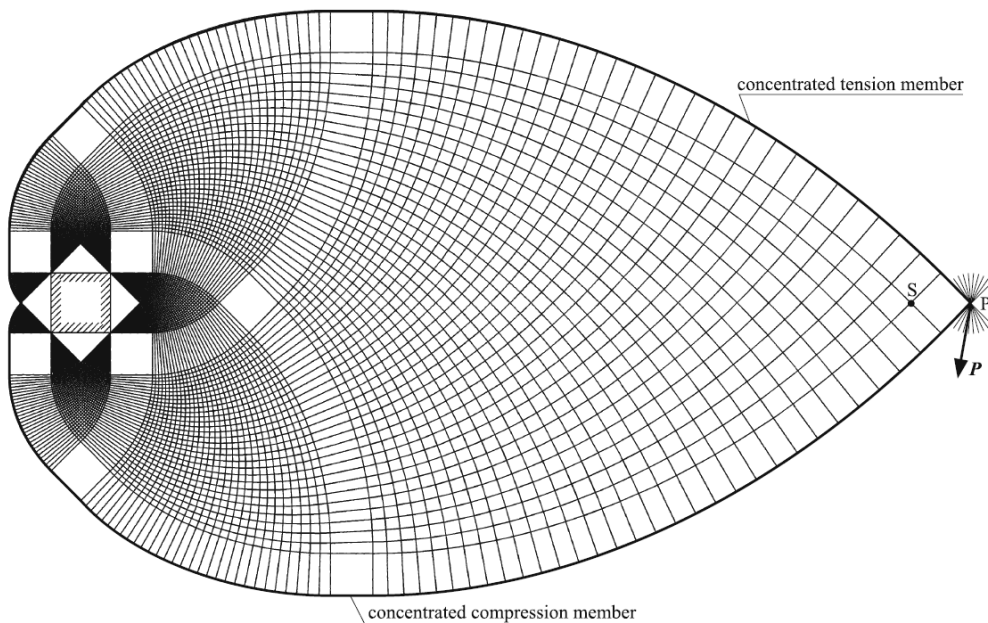


Fig. 1 The longest cantilever considered. Force  $P$  must be directed within the fans indicated

1. Ábra: A leghosszabb konzoltartó

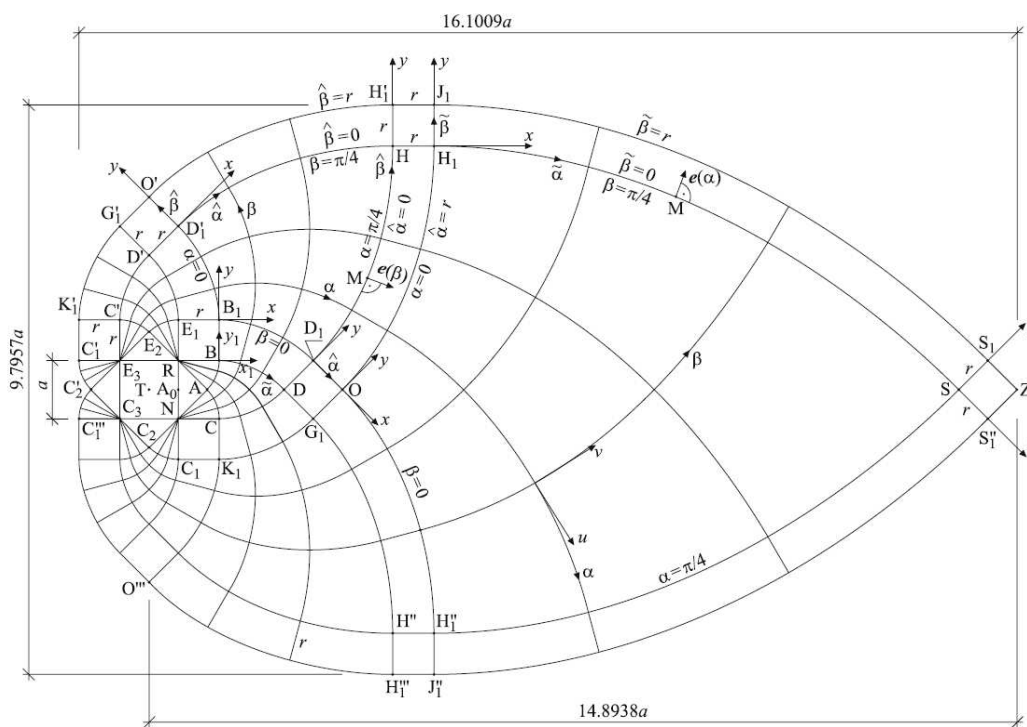


Fig. 4 Parameterization of the Hencky net

2. Ábra: Un. Henky-hálók parametrikus leírása

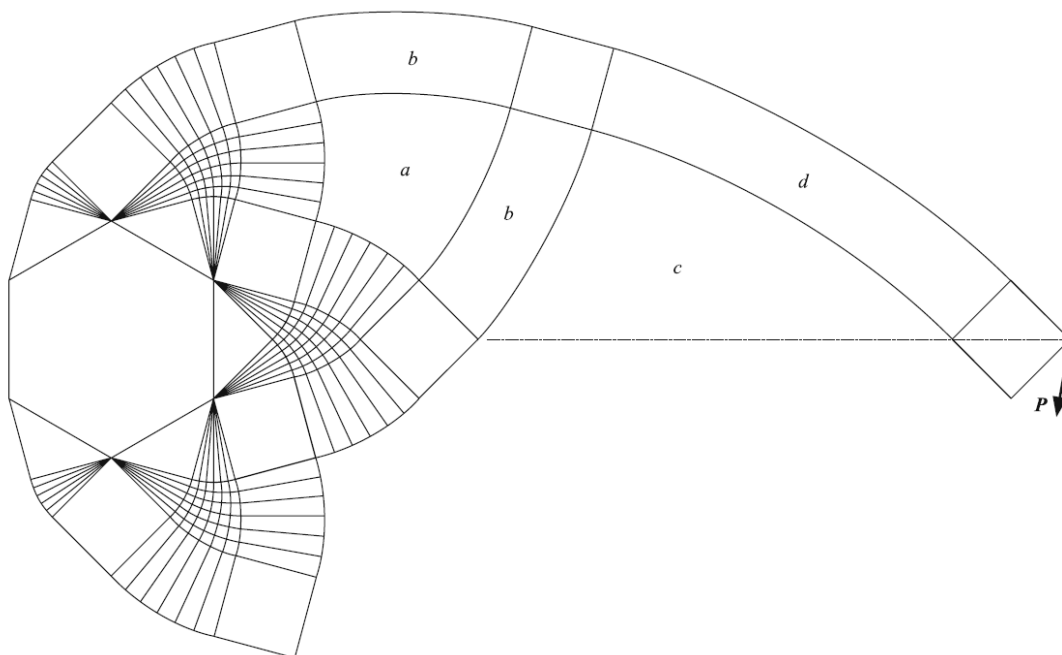
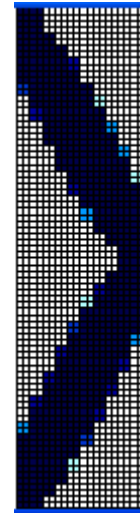
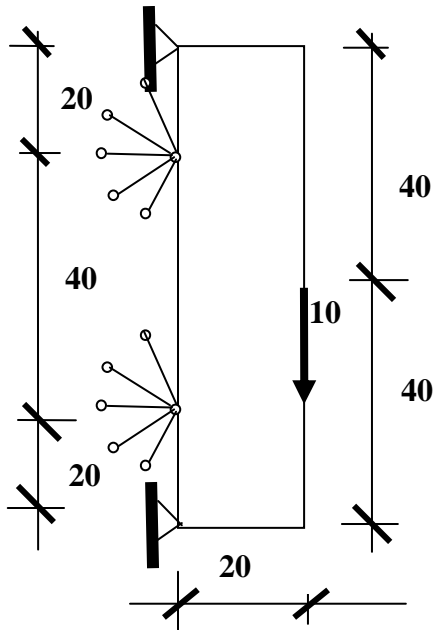


Fig. 10 Optimal topology for a regular hexagonal support

### 3. Hexagonális megtámasztású tartó optimális topológiája

#### 4.2 Numerikus topológiaoptimalás rudakkal való megtámasztások esetén

A téglalap alakú tervezési tartomány mérete 20x80 egység. Ezt 10x40 alapelemre és minden alapelemet további 2x2 elemre bontottunk, így 1600 négy csomópontú tárcsaelemet használtunk ennek a résznek a diszkretizálása során. A teher 10 egység nagyságú koncentrált erő és a jobb oldali él közepén hat függőleges irányban. A tervezési tartomány megtámasztásai közül a bal alsó és a felső sarokpontot fix csuklóval támasztjuk meg. Továbbá a bal oldali élen a magasság  $\frac{1}{4}$ -ben, illetve  $\frac{3}{4}$  -ben végtelen számú rugalmas anyagú rudat helyeztünk el (ez gyakorlatilag 5 fokként elhelyezett rudakat jelent). A megtámasztások költsége változik, költség nélküli (ez 1 egység költséget jelent, mivel ez meghagyja a támaszokat), illetve nagy költségű támaszok (10000 egység).



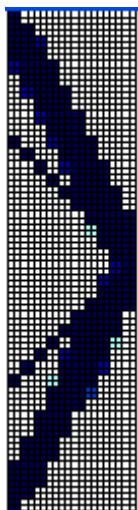
. Tervezési tartomány a rúdtámaszokkal

. Optimális topológia: A eset

Itt három esetet mutatunk be. Ezek: A eset: a rudak költsége magas, míg a fix csuklók költség nélküliek, B eset: minden támasz számításba veendő költséggel rendelkezik, mégpedig a rúdtámaszok költsége háromszorosa a fix támaszok költségének, C eset: minden megtámasztás azonos költséggel bír. Poisson-tényező ismét 0. A  $p$  paraméter értéke  $p=1.5$ -ig  $\Delta=0.1$  lépésközzel növeltük, majd  $p=3.0$ -ig (ami a végső érték volt) már  $\Delta=0.25$  volt a növekmény.

Az egyes esetekhez tartozó optimális topológiák rajzai az ábrákon láthatók. Megállapíthatjuk, hogy jó egyezőséget mutatnak az előre elvárt képpel. Továbbá jelentős az az eredmény is, hogy a „végtelen” mennyiségű rúdtámasz közül az A esetben nem létezik egy sem, míg a B és C esetekben csak 1-1 rúdtámasz (azaz feladatonként kettő), 135, illetve a 225 fokba eső hatásvonal irányában levők léteznek az optimális megoldásban. Továbbá a C esetben a fix támaszok szüségtelenek az optimális topológiához.





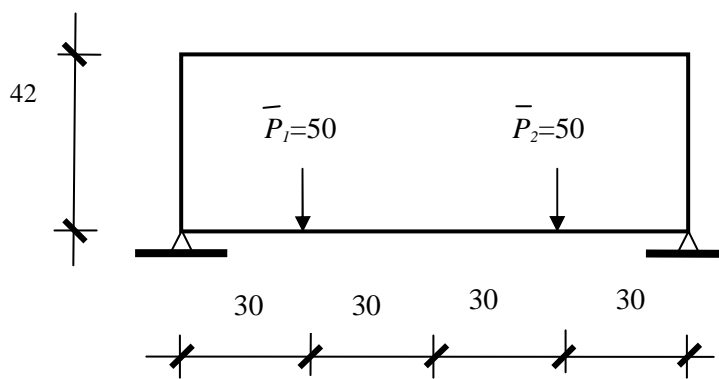
5.13 ábra. Optimális topológia: B eset



5.14 ábra. Optimális topológia: C eset

### 4.3 Topológiaoptimalás stochasztikus terhek esetén

A feladatban egy téglalap alakú kéttámaszú tartó topológia optimalását végeztük (ábra). A szerkezetre  $\bar{\mathbf{P}}^T = [\bar{P}_1, \bar{P}_2]$  két koncentrált erő hat, melyek normális eloszlásúak és várható értékük 50 egység. A tervezési tartományt a végeselemes diszkretizálás során 42x120 alapelemre és minden alapelemet még 2x2 elemre bontottunk. A Poisson-tényező most is zérus. A rugalmassági modulus pedig ismét egységnyi.

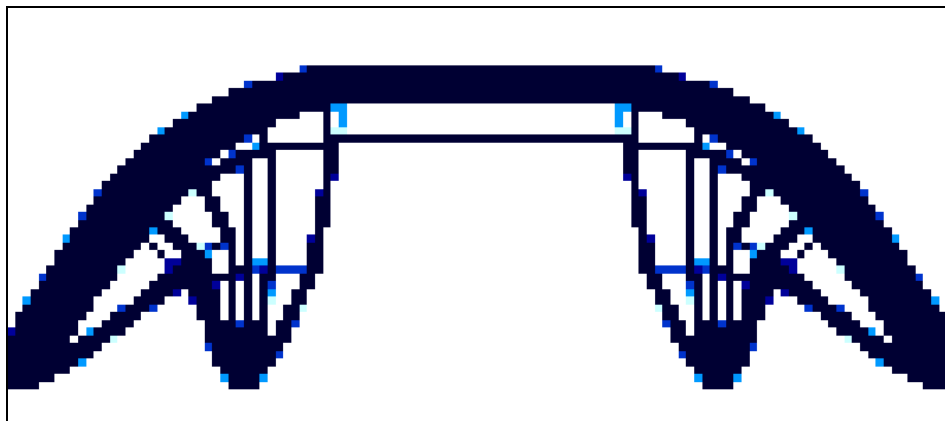


A tervezési tartomány és a peremfeltételek.

A feladatot először determinisztikusként (nulla korrelációval) oldjuk meg, majd a későbbiekben a kovariancia értékeket változtatjuk.

#### 4.3.1 Determinisztikus (korrelálatlan) terhelés esete

A végelemek száma 20160. A  $p$  büntetőparaméter értékét dinamikusan változtattuk, kiindulási érték  $p=1$ . A  $p$  paraméter értéke  $p=1.3$ -ig  $\Delta = 0.1$  lépésközzel növeltük, majd  $p=2.5$ -ig (ami a végső érték volt) már  $\Delta = 0.35$  volt a növekmény.



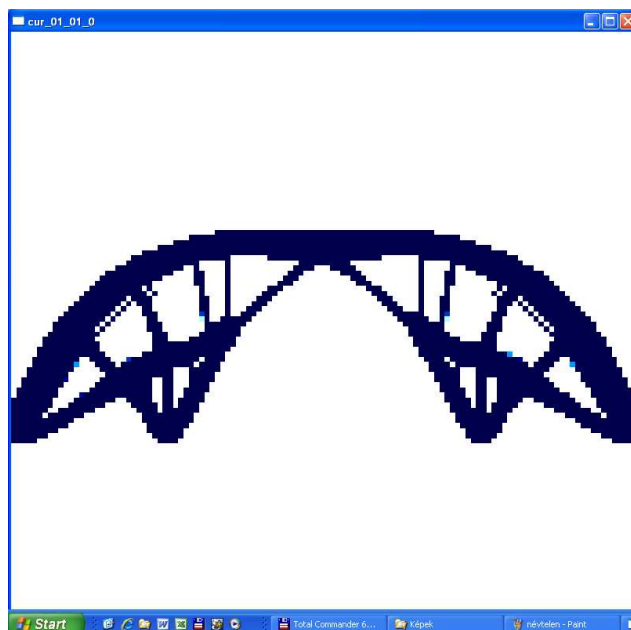
. Optimális megoldás determinisztikus terhek esetén.

A „compliance” korlátnál  $C=410000$  volt. Az optimális megoldás az előző ábrán látható.

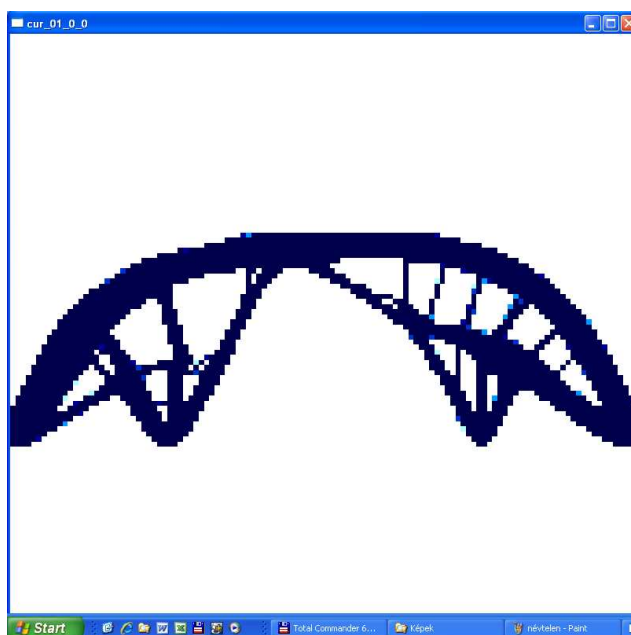
#### 4.3.2 Stochasztikus (korrelált) terhelés esete

Az előzőekben ismertetett feltételeknek megfelelően a terheket normális eloszlásúaknak tételezzük fel. A terhek korreláltságát az alábbi kovariancia értékekkel adjuk meg : ( $\kappa_{1,1}^2 = 0.1$ ,  $\kappa_{2,2}^2 = 0.1$ ,  $\kappa_{1,2}^2 = 0.0$ ,  $\kappa_{2,1}^2 = 0.0$ ). A feltételezett minimális valószínűségi érték legyen  $q = 0.90$ . A „compliance” korlát  $C=410000$ . Az iterációt szabályzó feltételek, leállási érték az előző pontban megadott adatokkal történt. Az egyes ábrákon a stochasztikus topológia optimálás eredményei láthatók. A feliratokban a kovariancia értékek a következő sorrendben adottak:

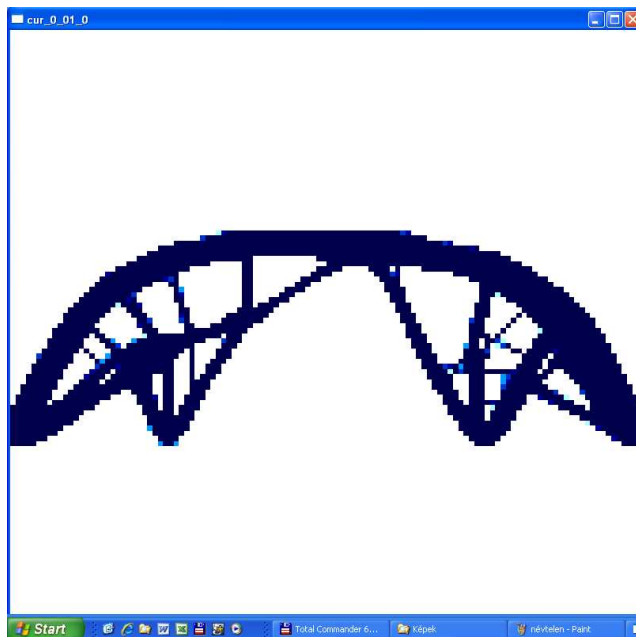
$$\kappa_{1,1}^2, \kappa_{2,2}^2, \kappa_{1,2}^2, \kappa_{2,1}^2.$$



Optimális megoldás korrelált terhek esetén. (0.1, 0.1, 0, 0)



Optimális megoldás korrelált terhek esetén. (0.1, 0, 0, 0)



Optimális megoldás korrelált terhek esetén (0, 0.1, 0, 0)

A kapott topológiák megmutatják, hogy a korreláció nagymértékben befolyásolja az optimális megoldást, ami felhívja a figyelmet a téma fontosságára.

## 5 Összefoglalás

Az ismertett modellek alapján algoritmusokat és számítógépes programokat készítettünk és a feladatokat főleg iterációs úton oldottuk meg.

Valamennyi vizsgált feladat esetében számos példát megoldottunk és az eredményeket diagramokkal és táblázatokkal szemléltettük. Parametrikus vizsgálatokat is végeztünk és elemeztük az egyes paramétereknek az eredményekre gyakorolt hatását.

Az eredményeket nemzetközi folyóiratokban, nemzetközi és hazai konferencián ismertettük, néhány dolgozatunk pedig elektronikus cikk formájában jelent meg. Részt vettünk és előadást tartottunk az International Society of Structural and Multidisciplinary Optimization (ISSMO) 2 nemzetközi kongresszusán. Előadást tartottunk az ICTAM kongresszusán. Az ISSMO kutatóival és az IPPT (Institute of Fundamental Technological Research, Poland) szoros együttműködésben dolgoztunk. A kutatási időszakban dolgozatainkra számos hivatkozás történt.