

OTKA ZAROJELENTES, T68398
DISZKRET GEOMETRIA, MAKAI ENDRE

1) A 2010. VII. 1-TOL 2011. VI. 30-IG ELVEGZETT MUNKA LEIRASA, A 2008, 2009, 2010 EVIEKHEZ HASONLO TERJEDELEMBEN (1. ezen evi reszjelenteseket)

2) A 2007. VII. 1-TOL 2011. VI. 30-IG ELERT OSSZES EREDMENYEK ROVID OSSZEFOGLALASA (a reszjelentesekekhez hasonlo terjedelemben)

1) A 2010. VII. 1-TOL 2011. VI. 30-IG ELVEGZETT MUNKA LEIRASA

Ket 0-ra szimmetrikus konvex test logaritmikus kozepe az a legnagyobb 0-ra szimmetrikus konvex test, melynek tamaszfuggvenye legfeljebb a ket test tamaszfuggvenyenek mertani kozepe. Ha a ket test a koordinatahipersikokra szimmetrikus, akkor belattuk, hogy a logaritmikus kozep terfogata legalabb a ket terfogot mertani kozepe. Ez az egyenlotlenseg erosebb a Brunn-Minkowski egyenlotlensegnel ebben az esetben.

Gromovot, Milmant stb. kovetve egy 0-ra szimmetrikus konvex poliederhez hozza lehet rendelni az un. kupterfogot merteket a gombfelszinen. Ez a kulso normalisokra van koncentralva, es egy kulso normalis merteke a hozza tartozo lap alapu es 0 csucsu kup terfogata. Sikerult jellemezni a 0-ra szimmetrikus konvex poliederek kupterfogot mertekeit.

A szeparacios problema: hany hipersikkal lehet egy P konvex d -politop hiperlapjait szigoruan szeparalni tetszoleges adott belso pontjato. A sejtes szerint ez a szam legfeljebb 2^d . (Ez ekvivalens a Gohberg-Markus-Hadwiger-fele fedesi problemaival.) Belattuk a szeparacios sejtest a 4-dimenziós szomszedsagi politopok egy olyan vegtelen osztalyara, amelyek egy bizonyos specialis varrassal keletkeznek.

Sikbéli kórkonvex alakzatok közelítéset vizsgáltuk korulirt, ill. beirt kórpolygonok segítségével. Belattunk aszimptotikus formulákat különbozo metrikákban (területkülönbség, kerületkülönbség, Hausdorff metrika, stb.) a közelítés rendjere. Ezen eredmények McClure és Vitale 1975-os klasszikus eredményeinek analogjai.

H^2 -ben leirtuk azon nem-üres belseju, zart konvex halmazok parjait, melyek bármely kongruens példányainak metszete rendelkezik nem-trivialis szimmetriával, azon feltétel mellett, hogy a határok összefüggő komponenseinek száma véges (9 eset).

Leirtuk az Abel csoportok olyan részosztályait, amelyek zartak részcsoportra, összegre, és homomorf képre. A leírás a csoportbeli elemek rendjeivel kapcsolatos.

Egy véges $(d + 1)$ -uniform H hipergraf onatfedési száma az a legkisebb $c(H) \in (0, 1]$ szám, melyre akarhogy agyazzuk be H csucsait \mathbb{R}^d -be, van olyan pont \mathbb{R}^d -ben, amely a hipereleknek megfelelő szimplexek legalább $c(H)$ -szorosában benne van. Belattuk Gromov sejtését: vannak olyan tetszőlegesen nagy méretű, de korlátos

foku $(d + 1)$ -uniform hipergrafok, melyek onatfedési száma legalább egy $c(d) > 0$ konstans. $c(d)$ legjobb értéke aszimptotikusan egyenlő az n -pontú teljes $(d + 1)$ -uniform hipergrafok onatfedési számai limeszevel, ha $n \rightarrow \infty$.

Hauszler és Welzl nevezetes tetele szerint bármely korlátos VC-dimenziós hipergrafban van $O[\varepsilon^{-1} \log \log \varepsilon^{-1}]$ -méretű ε -net. Beláttuk, hogy vannak olyan geometriai módon definiált 2 VC-dimenziós hipergrafok a síkban, melyekre ezen becslés éles. Vannak olyan hipergrafok is, melyek hipereleit egy ponthalmaz tengelyparhuzamos teglalapokkal való metszeteiként kapjuk, és melyekben a legkisebb ε -net mérete $\Omega[\varepsilon^{-1} \log \log \varepsilon^{-1}]$, ami pontos.

Legyen $f(d)$ az 1 atmerőjű gombok maximális száma, melyek bepakolhatók $[-1, 1]^d$ -be. $7 \leq d \leq 24$ -re $f(d)$ -re felső korlátokat adtunk; beláttuk: $f(6) \leq 116$.

Egy graf metszési száma, $cr(G)$ (ill. monoton metszési szám. $\text{mon-cr}(G)$) a lerajzolásához szükséges metszések minimális száma (ill. ha meg az összes elt x -monoton görbével kell lerajzolni). Beláttuk: $\text{mon-cr}(G) \leq 2 cr(G)^2$. Mutattunk grafokat, melyekre $\text{mon-cr}(G) \geq (7/6) cr(G) - 6$.

Egy graf pár-metszési száma, $\text{pair-cr}(G)$ a lerajzolásához szükséges metsző elpárok minimális száma. Beláttuk: ha $\text{pair-cr}(G) = k$, akkor $cr(G) \leq c(k^{7/4} \log^{3/2} k)$.

Thomassen híres tetele szerint minden síkgraf lista-színezési száma ($\text{ch}(G)$) legfeljebb 5. Beláttuk: ha $cr(G) = 2$, akkor is $\text{ch}(G) \leq 5$.

2) A 2007. VII. 1-TOL 2011. VI. 30-IG ELERT OSSZES EREDMENYEK ROVID OSSZEFOGLALASA

Megcáfoltuk Fejes Toth László 60 éves sejtését: van olyan konvex lemez, amelynek kongruens példányaiból való bármely legritkább fedésben van két keresztező lemez (azaz az uniójuk mínusz bármelyik nem összefüggő). Ez azt mutatja, hogy a fedési problémák lényegesen nehezebbek, mint az elhelyezési problémák, a sejtett dualitás nem áll fenn.

\mathbb{R}^n -ben, fix $r > 1$ -re, vizsgáltunk az egységgömböt tartalmazó konvex testeket, melyek minden extrémális pontja 0-tól legalább r távolságra van. Ezen testek terfogatai/felszínei/atlagszeleségei minimuma mínusz az egységgömb terfogata/felszíne/atlagszelesége, $r \rightarrow 1$ -re aszimptotikusan, mindhárom esetre, $\text{const} \cdot (r - 1)$.

Különbozó értelemben vizsgáltunk véletlen politopokat: konvex testhez koreirt, beirt politopokat, határon egyenletesen elosztott pontok konvex burkat. Reszben bizonyos feltételek mellett, aszimptotikusan meghatároztuk a test és a véletlen politop quermassintegráljai különbségeit, és a hiperlapok számanak várható értékét. Továbbá szorasokat is meghatároztunk, és egy nagy számok éros törvényét bizonyítottunk.

Beláttuk két alapvető affin-invariáns egyenlőtlenségnek, a Blaschke-Santaló, és az affin izoperimetrikus egyenlőtlenségnek optimális hibátagnu stabilitási változatát. Zonoidokra a terfogatszorzat minimuma a paralelepipedonra vetetik fel: beláttuk ennek stabilitási változatát, optimális hibátagnuval. Beláttuk a Prekopa-Leindler egyenlőtlenség stabilitását 1 dimenzióban, és páros függvényekre n dimenzióban.

Rogers fedési tetelet javítottuk: \mathbb{R}^n -ben bármely konvex test eltöltjaiból van $O(n \log n)$ surusegu fedés, ami egy testracs $O(\log n)$ számú eltölt példányából áll.

A síkban, legfeljebb 1 sugárú körök elhelyezésére, bármely két, általuk le nem fedett, d távolságu pont összeköthető a körökön kívül haladó $(1, 273\dots + o(1)) \cdot d$ hosszú uttal.

Korkonvex alakzatok közelítéset vizsgáltuk beirt és koreirt korpolygonok segítségével. Különböző metrikákban (terület és kerületkülönbség, Hausdorff metrika) aszimptotikus formulákat bizonyítottunk, amelyek a klasszikus McClure-Vitale eredmények analogjai.

A transzverzális problémával foglalkoztunk, kor, ill. konvex lemez eltoltjaira. T : minden lemeznek van közös szelője. $T(k)$: minden k lemeznek van közös szelője. t -diszjunkt eltoltak: a súlypontból t -szeresre nagyított eltoltak diszjunktak. Danzer klasszikus tételét elcsúsztattuk: korokra, amelyek $\sqrt{3}/2$ -diszjunktak, fennáll $T(5) \implies T$. Ha $t \in [2/\sqrt{3}, \sqrt{2}]$, ill. $t \in [1, 2/\sqrt{3}]$, és a korok száma elég nagy ($\geq N_3(t)$, ill. $\geq N_4(t)$), akkor $T(3) \implies T$, ill. $T(4) \implies T$.

Adott konvex lemez eltoltjaira, ha azok t -diszjunktak, és t elég nagy, akkor $T(3) \implies T$. Itt az optimális t -k, amik a lemeztől függnek, a $[\sqrt{2}, 2]$ intervallumot töltik ki. Az intervallum végpontjai az ellipszisre ill. a paralelogrammra érnek el. Ha viszont itt t akarmilyen kicsi, van egy a lemeztől független $k(t)$, melyre $T(k(t)) \implies T$.

Beláttuk a síkon a területszorzat problémára az alsó ill. felső becslések stabilitását, optimális rendben. Az alsó becslésnél a Banach-Mazur távolságot használtuk, a felsőnél a beirt/koreirt ellipszissel való legjobb területi közelítést.

\mathbb{R}^n -ben, $n \geq 3$ -ra, bármely adott lapterületekkel rendelkező konvex politopok terfogatainak infimuma 0.

S^2 , \mathbb{R}^2 , H^2 eseten leírtuk azon nem-üres belsejű zárt konvex halmazok parjait, melyek bármely kongruens példányainak metszete tengelyesen szimmetrikus. S^d , H^d eseten, két C_+^2 határu konvex testre, ha a fenti feltétel centralis szimmetriával áll fenn, akkor a testek kongruens gombok.

$P, Q \subset \mathbb{R}^2$ veges, $|P| = m$, $|Q| = n$ -re a $P + Q$ -ban konvex helyzetben lévő pontok száma $O(m^{2/3} + n^{2/3} + m + n)$.

n diszjunkt \mathbb{R}^d -beli konvex halmazra van olyan pont, amelyből kiinduló bármely felegyenes legfeljebb $dn/(d+1)$ halmazt metsz. Ez a sikra eles.

Halmazrendszerek metszetgrafjait vizsgáltuk. A halmazokra vonatkozó különböző feltevések mellett, a tetszőleges grafokra vonatkozó Ramsey-tétel, szeparáló halmaz mérete, Turan-fele extrémális grafelméleti tételek lényeges érosítéseit kaptuk.

Aszimptotikusan majdnem pontosan meghatároztuk, legfeljebb hány szín kell, hogy bármely n csúcsú graf pontjait kiszínezhessük, úgy hogy bármely csúcsnak szomszedságában legyen olyan pont, melynek színe a szomszedságon belül nem ismétlődik (conflict-free colouring).

Beláttuk Gromov egy sejtését: vannak olyan tetszőlegesen nagy méretű, de korlátos fokú $(d+1)$ -uniform hipergrafok, melyekre, alkalmas $c(d) > 0$ mellett, a csúcsok bármely \mathbb{R}^d -be való beagyazása eseten, van \mathbb{R}^d -nek olyan pontja, amely a hipereleknek megfelelő szimplexeknek legalább $c(d)$ -szeresében benne van.

$d > 2$ -re, minden n -re van n db. páronként érinto síma szigorúan konvex test \mathbb{R}^d -ben.

$f(d, n)$ a minimális szám, hogy $[0, 1]^d$ lefedhető n db. legfeljebb ekkora atmerőju tengelyparhuzamos teglatesttel. $f(d, n)$ -re also, felső becsléseket adtunk, ill. bizonyos esetekben pontosan meghatároztuk.

$\forall \varepsilon \exists \delta n \geq N(\varepsilon) \implies$ minden n csúcsú és $m \geq n^{1+\varepsilon}$ elű G grafnak van G' reszgrafja, $(1-\delta)m$ elű, $cr(G') \geq (1-\varepsilon)cr(G)$ (cr a metszesi szám).

n általános helyzetű pont a síkon, 2 színnel színezve, meghatároz legalább $cn^{4/3}$

ures haromszoget egyszinu csucsokkal.

$C \subset \mathbb{R}^2$ fedes-felbonthato, ha letezik $k(C)$, hogy ha a sik $k(C)$ -szeresen fedett C eltoltjaival, akkor ez a fedes ket osztalyba oszthato, hogy mindket osztaly fedes. C nyilt konvex, es van 3 szakasz a hataran, melyek által meghatározott egyenesek C -t tartalmazo haromszoget határoznak meg $\implies C$ fedes-felbonthato.

Ismert: $r \leq 12$ -re egy r -kromatikus graf metszesi szama lagalabb annyi, mint a teljes K_r grafe. Ezt kiterjesztettuk $13 \leq r \leq 16$ -ra.

n pont a sikon bejarhato egy Hamilton korrel ugy, hogy minden pontban legalabb $\pi/3$ -at kanyarodunk, ami bizonyos n -ekre pontos.

Egy graf metszesi szama, monoton-metszesi szama, par-metszesi szama a lerajzolasahoz szukseges metszeseknek, x -monoton gorbekkel valo lerajzolasahoz szukseges metszeseknek, ill. a lerajzolasahoz szukseges metszo elparoknak minimalis szama. Ezen mennyisegek kozott vannak nyilvánvaló egyenlotlensegek. A fordított irányban viszont: az egyik mennyiség a másiknak egyszeru függvényeivel becsulhető.