Szakmai zárójelentés az F68872 számú OTKA (2007-2010) pályázatról.

A kutatási pályázat keretében számos effektív végességi eredményt értünk el Appell sorozatokat tartalmazó diofantikus egyenletek egész megoldásaira vonatkozóan. Az alábbiakban ismertetjük a legfontosabb elért eredményeket.

Schäffer 1956-ban bebizonyította, hogy az

$$S_k(x) = 1^k + 2^k + \cdots + x^k = y^n \tag{1}$$

diofantikus egyenletnek rögzített $k \geq 1$ és $n \geq 2$ esetén csak véges sok x, y pozitív egész megoldása van, eltekintve a

$$(k, n) \in \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 2)\} \tag{2}$$

kivételes esetektől. Azt is megmutatta, hogy a fent felsorolt esetekben az (1) egyenletnek mindíg van végtelen sok x, y megoldása. Schäffer eredménye ineffektív, ami azt jelenti, hogy a bizonyítási módszer nem szolgáltat semmilyen algoritmust a megoldások meghatározására.

1980-ban Győry, Tijdeman és Voorhoeve az (1) egyenletnél lényegesen általánosabb

$$s(1^k + 2^k + \cdots + x^k) + r = y^n \tag{3}$$

egyenlet vizsgálatával kezdtek el foglalkozni. A Baker-módszer felhasználásával azt sikerült bebizonyítaniuk, hogy a (3) egyenletnek rögzített $k \geq 2$, r, s egészek esetén csak véges sok x, $y \geq 2$, $n \geq 2$ megoldása van, feltéve, hogy s egy négyzetmentes páratlan egész, $k \notin \{3, 5\}$, ha $r = 0$. A bizonyítás során egy effektíve meghatározható felső korlátot adtak a megoldások abszolút értékeire.

1984-ben Brindza egy effektív végességi állítást bizonyított szuperelliptikus egyenletek megoldásszámára vonatkozóan. Ezen eredményét felhasználva belátta, hogy a (3) egyenletnek abban az esetben is csak véges sok effektíve meghatározható megoldása van, ha s egy tetszőleges páratlan egész szám.

1990-ben Hiroyuki Kano japán matematikus igazolta, hogy a (3) egyenletnek az alábbi esetekben is csak véges sok x, $y \geq 2$, $n \geq 2$ megoldása van:

a) k páros és s páratlan,
b) k páros és $s \equiv 4 \pmod 8$,
c) k kettő hatvány és $s \equiv 2 \pmod 4$,
d) $k \equiv 3 \pmod 4$ és az $s/(k + 1)$ tört számlálója $\not\equiv 2^{k+1} \pmod{2^{k+2}}$.

1996-ban Brindza és Pintér $s = 8$ és $n = 2$ esetén nyertek effektív végességi állítást a (3) egyenletre vonatkozóan.

A korábbi módszerekkel és elért eredményekkel azonban nem lehetett teljesen leírni azon r, s, k egészeket, amelyek mellett a (3) egyenletnek csak véges sok x, $y \geq 2$, $n \geq 2$ egész megoldása van.

A 2007-ben induló OTKA pályázatunk fő célkitüzése az volt, hogy ezt a majd 30 éves problémát részben, vagy esetleg teljesen megoldjuk. 2007-ben Pintérrel közösen sikerült bebizonyítanunk, hogy páratlan k esetén a k-adik $B_k(x)$ Bernoulli polinomot bármilyen komplex b számmal eltolva a kapott $B_k(x) + b$ polinomnak mindig van három egyszeres gyöke. Ismert, hogy az $S_k(x) = 1^k+2^k+\cdots+x^k$ hatványösszeg kifejezhető a $k+1$-edik Bernoulli polinom felhasználásával az alábbi módon:

$$S_k(x) = \frac{B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(0)}{k+1}. \tag{4}$$

Ezt az összefüggést kombinálva a Pintérrel közös eredményünkkel meg lehet mutatni, hogy a (3) egyenletnek páros $k > 7$ esetén tetszőleges r, s egészek mellett csak véges sok x, $y \geq 2$, $n \geq 2$ egész megoldása van. Sajnos a bizonyítási módszerünk nem tette lehetővé a páratlan k esetek hasonló vizsgálatát. A módszert továbbfejlesztve, illetve kombinálva bizonyos számelméleti eszközökkel, a Bernoulli polinomokra nyert állítások egy analóg verzióját igazoltuk a másik legismertebb Appell sorozat tagjaira, az Euler polinomokra ($E_k(x)$).

2010-ben ortogonális polinomok egy családjáról, a $H_k(x)$ Hermite polinomokról beláttuk, hogy $k \geq 7$ esetén egy tetszőleges b komplex számmal eltolt $H_k(x) + b$ polinom is mindig rendelkezik három egyszeres gyökkel. Emellett, egy teljesen új módszert kidolgozva végre sikerült mind az Euler mind a Bernoulli polinomok esetén is igazolni, hogy páros $k \geq 6$ értékek esetén is igaz, hogy a k-adik Euler, illetve Bernoulli polinomok komplex számmokkal való eltoltjainak szintén van legalább három egyszeres gyöke. Ezen eredmények alkalmazásaként effektív felső korlátot adtunk Appell sorozatokat tartalmazó hiperelliptikus, illetve szuperelliptikus egyenletek

$$F(H_k(x)) = y^2, \;\; F(E_k(x)) = y^2, \;\; F(B_k(x)) = y^n$$

egész megoldásaira vonatkozóan, ahol F(x) tetszőleges nem négyzet, illetve nem n-edik hatvány, racionális együtthatós polinom. Végül teljesen leírtuk mindazon (s, r, k) egész számhármasokat, amelyek mellett a (3) egyenletnek lehet végtelen sok x, $y \geq 2$, $n \geq 2$ egész megoldása. Ezen kivételes esetekben meg is adunk végtelen sok x, $y \geq 2$, $n \geq 2$

megoldást. Ezzel az eredménnyel sikerült a Győry, Tijdeman, Voorhoeve által elkezdett, Kano, Brindza, Pintér által tovább vizsgált 30 éves problémát megoldanunk.

Eredményeinket 5 tudományos cikkben publikáltuk és több nemzetközi konferencián tartottunk róluk előadásokat.

A 2007-ben megjelent, Pintérrel közös cikkben azért nincs feltüntetve az OTKA szám, mert az eredetileg 2007 januártól induló OTKA pályázat csak 2007 júliustól indult, így a cikk megjelenésekor még nem volt meg a pályázat OTKA száma.

A pályázat munkatervében szerepel olyan ineffektív végességi eredmények kidolgozása, amelyek az $A_n(x) = g(y)$ típusú diofantikus egyenletekre vonatkoznak. Ezen erdeményeket részben a probléma bonyolultsága miatt nem sikerült megvalósítani. A másik oka ennek az, hogy az effektív eredmények esetén jóval több mindent sikerült a kutatás ideje alatt belátni, mint azt eredetileg terveztük. Például a fent említett 30 éves diofantikus probléma teljes megoldása.