

# Beszámoló

## Az F43749 nyilvántartási számú ifjúsági OTKA pályázat zárójelentése

### 1. Általános körülmények

Az OTKA kutatási pályázat kezdetén, 2003-ban az Eötvös Loránd Tudományegyetem Szilárdtestfizika Tanszékének főállású adjunktusa voltam. 2005-ben járt le fix idejű szerződése. Ekkor elfogadtam a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematikai Intézetének főállású adjunktusi állásajánlatát, és a Szilárdtestfizika (később Anyagfizikai) Tanszéken félállású oktatóként működtem tovább. Így kerültem szorosabb kapcsolatba a BME Matematikai Analízis Tanszékének munkatársaival, és az itt folyó, főleg  $C^*$ -algebrákkal, kvantuminformációelmélettel kapcsolatos kutatásokkal. Ez serkentőleg hatott saját kutatómunkámra, ugyanakkor az új kollégákkal való együttműködés kismértékben el is térítette a vizsgálatok fő vonulatát. Oktatási terheim növekedése nehezítette, hogy kutatómunkám minden eredményét a pályázat zárására publikálásra kész állapotba hozzam, de az eredmények publikálásán folyamatosan dolgozom.

### 2. Pénzügyi beszámoló részletezése

A személyi juttatások terén nem volt eltérés a tervezetthez képest, összesen 40 ezer forint kifizetés történt az OTKA pályázat adminisztrálásában segítő tanszéki titkárnő részére, és mintegy 200 ezer forint költségre került sor napidíj címen.

A 3.1-es „Külföldi konferencián való részvétel dologi kiadásai” keretben a pályázat teljes futamideje alatt mintegy 400 ezer forintos alulköltés mutatkozott, melynek fő oka az, hogy egyetemi oktatóként szorgalmi-, illetve vizsgaidőszakban nem, vagy csak nagyon nehezen tudok elszakadni külföldi konferenciákra. Így lényegében csak nyaranta nyílt lehetőség konferencián való részvételre, és nem mindig találtam alkalmas időben, helyen, témában konferenciát. (A tengerentúli konferenciák költsége olyan magas lett volna, hogy irreálisnak találtam az ezekre való jelentkezést.) A 3.1-es rovatban fennmaradt összegnek a 4.-es beruházási keretbe való átcsoportosítására kértem engedélyt, amit meg is kaptam.

A 4.-es „Befektetett eszközök költsége” rovatban csaknem 400 ezer forintos túlköltés mutatkozik, melyet a 3.1-es rovat alulköltése fedez. (Az átcsoportosításra külön engedélyt kaptam.) A befektetett eszközök főként számítástechnikai eszközök, melyeket folyamatosan használtam kutatásom során. A pályázat elején vettem egy asztali számítógépet monitorral, a pályázat zárásakor pedig a

fennmaradt összeget egy notebook-ra költöttem, és tartozékokra.

A dologi keretben nem mutatkozott túlköltés. A keretet szakkönyvekre, illetve fogyóeszközökre (toner, papír, floppy, CD lemezek) költöttem. Technikai okokból a dologi keret utolsó tételeinek számlázása átcsúszott a 2008-as évre. (A 2007 decemberében megrendelt eszközök éppen nem voltak raktáron.) Az OTKA bizottság –tekintetbe véve, hogy a rendelés még 2007 decemberében történt–, engedélyezte, hogy a megrendelések 2008-as számlákkal kerüljenek teljesítésre.

### 3. A pályázat által támogatott külföldi utak, iskolák, konferenciák

A jobb átláthatóság kedvéért időrendben összefoglalom azokat a konferenciákat, iskolákat, külföldi utakat, amelyeken az OTKA pályázat támogatásával vettem részt:

- 2003 október, Budapest. "Linear Operators and Foundations of Quantum Mechanics" címmel Neumann János születésének 100. évfordulójára rendezett konferencián poszterrel szerepeltem: „*Hyperbolic Dynamical Systems and Noncommutative Geometry*”.
- 2003 június–július, Grenoble, Franciaország, három hetes nyári iskola "Open Quantum Systems" címmel.
- 2004 elején kéthetes látogatáson voltam Belgiumban, a Leuveni Katolikus Egyetemen, ahol értékes konzultációkat folytattam, és az Elméleti Fizika Tanszékén „*Penrose tilings, Arnold's cat map and noncommutative geometry*” címmel szemináriumi előadást tartottam.
- 2007 augusztus 6.–12., Będlewo, Lengyelország. 10th Workshop: Noncommutative Harmonic Analysis with Applications to Probability. A konferencián előadást tartottam „*Groupoid convolution algebras and dynamical systems*” címmel.
- 2007 október 22–26., Trieszt, Olaszország. Workshop on Noncommutative Manifolds II.

### 4. Publikált, előadáson bemutatott eredmények

Még az OTKA pályázat indulása előtt született egy hosszú (54 oldalas) angol nyelvű írás ([arXiv:math-ph/0204022v1](https://arxiv.org/abs/math-ph/0204022v1)), mely szorosan kapcsolódik a pályázat témájához, ezért mindenképpen fontosnak tartom megemlítését. Az itt leírt eredményeket a pályázat futamideje alatt több előadáson, szemináriumon is bemutatattam (2003 március, Budapest: szemináriumi előadás az ELTE Általános Fizika Tanszékén. 2003 október, Budapest, Neumann János születésének 100. évfordulójára rendezett konferencián poszter: *Hyperbolic Dynamical Systems and Noncommutative Geometry*. 2004 február, Belgium, szemináriumi előadás a Leuveni Katolikus Egyetem Elméleti Fizika Tanszékén: *Penrose tilings, Arnold's cat map and noncommutative geometry*.) Az arxiv-ra feltett munka elsősorban terjedelme és túlságosan részletes, didaktikus felépítése miatt nem került folyóiratban publikálásra.

A 2003-as évben egy klasszikus mágneses biliárdrendszerben vizsgáltam (társ-szerzőkkel együtt) a pályák stabilitását. A vizsgálati módszer félig analitikus, félig numerikus volt; a homogén mágneses térben történő repülési szakaszok stabilitásának vizsgálata analitikus eszközökkel történt, míg az egyes szakaszokhoz tartozó stabilitási mátrixok szorzatának vizsgálata a pályák mentén már numerikusan. A Ljapunov-exponens sok egymással nem kommutáló mátrix szorzata határozta meg. A munka fő eredménye annak a bemutatása, hogy a mágneses tér nagysága hogyan befolyásolja a kevert fázisterű rendszer Ljapunov-exponensét. A munka a Physical Review E folyóiratban került publikálásra 2003-ban. ([arXiv:cond-mat/0208491v1](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0208491v1)).

2005-ben a Budapesti Műszaki Egyetemen dolgozó kollégáimmal együtt a relativitáselmélet egy régóta ismert jelenségének (Thomas-rotáció) az eddignél precízebb, absztraktabb (koordinátamentes) matematikai formalizmussal való leírásán dolgoztam. Kutatásaink eredménye az Ulmer Seminare kiadványban, valamint a General Relativity and Gravitation című folyóiratban jelent meg. ([arXiv: math-ph/0611047v1](https://arxiv.org/abs/math-ph/0611047v1); [arXiv:math-ph/0611046v1](https://arxiv.org/abs/math-ph/0611046v1))

2007 nyarán a lengyelországi Będlewo-ban konferenciaelőadást tartottam „*Groupoid convolution algebras and dynamical systems*” címmel. Előadásomban azt mutattam be, hogy hogyan lehet használni a groupoid algebra konstrukciót –mely tipikusan nemkommutatív geometriai eszköz– különböző egyszerű dinamikai rendszerek vizsgálatában. Ez a munka egyenes folytatása a pályázat elején megkezdett kutatásoknak. A konferencián sajnos proceedings nem jelent meg. Az előadás anyagából publikálásra szánt cikk írását megkezdtem, de a publikáció még nem készült el.

A 2007. év végén egy egyszerű, kétállapotú kvantummechanikai rendszer, a kvantumbit állapotbecslésére adtam új módszert, és a módszer hatékonyságát összehasonlítottam a már ismert állapotbecslési módszerekkel. ([arXiv: 0803.1946v1](https://arxiv.org/abs/0803.1946v1)) Jól ismert tény, hogy a kvantumbit állapotai a háromdimenziós egységgömb (Bloch-gömb) pontjaival hozhatók egy-egyértelmű kapcsolatba; a gömb felszínén levő pontok a tiszta állapotoknak, míg a gömb belsejében levő pontok a kevert állapotoknak felelnek meg. Az eddigi állapotbecslési módszerek vagy projektív méréseken (különböző irányokban vett spin méréseken), vagy diszkrét pozitív operátor értékű mértékeken alapultak. Ezek az eljárások sértik az állapottér gömbszimmetriáját. Az általam javasolt új állapotbecslési eljárás folytonos pozitív operátor értékű mértéken alapul, mely nem sérti az állapottér gömbszimmetriáját. Az itt alkalmazott konstrukció és a nemkommutatív geometria eszköztára között szoros kapcsolatot érzek, ezt a következő fejezetben részletezem.

A kvantumbittel kapcsolatos munkámat 2008 elején nyújtottam be publikálásra a Physical Review A folyóirathoz. Már megérkezett a referee válasza, melyben elismeri a konstrukció újszerűségét, és több apró javaslat mellett néhány komolyabb megfontolást igénylő kérdést is föltesz az állapotbecsléssel kapcsolatban. A munkát a referee javaslatainak megfelelően átdolgozva újra beküldöm a folyóirathoz.

Ugyanezt a munkát ismertettem a SZTAKI-ban tartott szemináriumon, valamint a 2008-as Statisztikus Fizikai Napon is.

## 5. Publikációra előkészített, illetve publikálás alatt álló eredmények

A pályázat során megkezdett kutatásoknak több elvarratlan szála is maradt. Töreksem ezen félkész munkák mielőbbi lezárására, publikálására. Az esetleges sikeres publikációról értesítem az OTKA irodát.

Az előző fejezet elején említett hosszú dolgozatot ([arXiv:math-ph/0204022v1](https://arxiv.org/abs/math-ph/0204022v1)) átszerkesztettem, sok részt kihagytam belőle, és lényegesen lerövidítettem. Tervezem e munka folyóiratban való publikálását.

A lengyelországi konferencián tartott előadás anyagából elkezdtem egy cikk írását, töreksem ennek a munkának mielőbbi befejezésére és publikálására. Ez a munka egy igen általános konstrukciót, a groupoidokhoz rendelt  $C^*$ -algebrákat vizsgálja, illetve a konstrukció alkalmazhatóságát az egyszerű dinamikai rendszerek elméletében. A groupoid-algebra konstrukció egy tipikus nemkommutatív geometriai eszköz.

A groupoid igen általános matematikai kategória, mely speciális esetként magában foglalja például a csoport, az ekvivalencia-reláció valamint a csoporthatás fogalmát. A groupoidokra épülő nemkommutatív algebrák lényegében annak a konstrukciónak az általánosításával kaphatók meg, amellyel W. Heisenberg a hidrogénatom energiaszintjei közti spektrálatmenetkehez hozzárendelte a végtelen dimenziós mátrixalgebrát. (Modern nyelven az energiaszintek és a közöttük levő átmenetek groupoiddal írhatók le, és a mátrixalgebra a groupoidhoz rendelt groupoid-algebra.)

Itt is megjegyzem, hogy a kvantumbit állapotbecslésével kapcsolatos munkám publikálása folyamatban van.

Egy, az előzőekhez kapcsolódó, de azoktól elkülönülő további vizsgálat tárgyát képezi még a kvantumbit állapotbecslésre adott konstrukciónak és a groupoid-algebrák kapcsolatának vizsgálata. Említettem, hogy a csoporthatások speciális groupoidok. A kvantumbit állapotbecslésében használt pozitív operátor értékű mérték ekvivariáns a kvantumbit állapotterén ható  $SO(3, \mathbb{R})$  csoport hatásaira nézve. Igen érdekes kérdés a csoporthatáshoz rendelt groupoid-algebra és a kvantumbit állapotbecslésben szereplő ekvivariáns pozitív értékű mérték kapcsolatának vizsgálata. Pozitív eredmény esetén egy alapvetően kvantuminformáció-elméleti valamint egy nemkommutatív geometriai konstrukció között tárulna föl kapcsolat. A vizsgálat elvégzését feltétlenül tervezem a közeljövőben.