

KOLTAY J. - BENKŐ J.

MECHANIZMUSOK

GATE MEZŐGAZDASÁGI GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

Egyetemi jegyzet

GÖDÖLLŐI AGRÁRTUDOMÁNYI EGYETEM
Mezőgazdasági Gépészmérnöki Kar
Mezőgazdasági Géptani Intézet

MECHANIZMUSOK

Írta:

dr. Koltay Jenő
egyetemi docens

dr. Benkő János
egyetemi adjunktus

Gödöllő
2021.

Lektorálta:

Dr. Soós Pál

egyetemi tanár

a mezőgazdaság tudományok kandidátusa

Dr. Csorba László

egyetemi adjunktus

Barna Mátyás

egyetemi hallgató

A kiadást szeretett munkatársaim

dr. Soós Pál

egyetemi tanár és

dr. Koltay Jenő

egyetemi docens

emlékének ajánlom

Tartalomjegyzék

Előszó a második kiadáshoz	9
Előszó	10
1. Mechanizmusok szerkezeti felépítése és osztályozása (Koltay J.)	13
1.1. A mechanizmus fogalma	13
1.2. A kinematikai párok és osztályozásuk	14
1.3. A kinematikai vázlat felépítése	17
1.4. Néhány fontosabb síkban mozgó mechanizmus	18
1.5. Síkban mozgó mechanizmusok szerkezeti felépítése	21
1.6. Térbeli mechanizmusok szerkezeti felépítése	24
1.7. A síkban mozgó mechanizmusok osztályozása	27
2. Mechanizmusok kinematikai vizsgálata grafikus módszerrel (Koltay J.)	33
2.1 A tagok helyzetének és az egyes pontok mozgáspályájának meghatározása	33
2.2. A hajtó (vezető) tag sebesség és gyorsulásterve	34
2.3. Összetett mozgást végző tagok sebessége és gyorsulása, sebesség- és gyorsulásterve	37
2.4. Momentán centrumok és gyorsuláspólusok meghatározása	44
2.5. Elemi csoportokból felépített II. osztályú mechanizmusok vizsgálata	47
2.5.1 Két tagból és három forgómozgást megengedő kinematikai párból álló csoport	47
2.5.2 Két csuklót és egy külső haladómozgást megengedő kinematikai párt tartalmazó csoport	52
2.5.3 Elemi csoport két külső csuklóval és egy belső haladó mozgást megengedő kinematikai párral	55
2.5.4 Elemi csoport egy belső csuklóval és két külső haladó mozgást megengedő kinematikai párral	57
2.5.5 Elemi csoport egy külső csuklóval és két haladó mozgást megengedő kinematikai párral	59
2.5.6 Sebességek és gyorsulások meghatározása, ha a vezető tag a hajtórúd vagy egy relatív mozgást végző tag	61
2.5.7 III. osztályú csoportot tartalmazó mechanizmusok sebességének és gyorsulásának meghatározása ..	64
3. Mechanizmusok kinematikai vizsgálata matematikai módszerrel (Benkő J.)	69
3.1. Egy szabadságfokú I. osztályú mechanizmus	70
3.2. Zérus szabadságfokú csoport belső forgó és külső forgó kinematikai párokkal	71
3.3. Zérus szabadságfokú csoport egy külső haladó és forgó kinematikai párokkal	76
3.4. Zérus szabadságfokú csoport belső haladó és külső forgó kinematikai párokkal	79
3.5. Zérus szabadságfokú csoport belső forgó és külső haladó kinematikai párokkal	81
3.6. Zérus szabadságfokú csoport belső haladó, külső forgó és haladó kinematikai párokkal	83
3.7. Ismert mozgásállapotú forgó és haladó tag tetszőleges pontjának sebessége és gyorsulása	85
3.7.1 Ismert mozgásállapotú forgó tag tetszőleges pontja	85
3.7.2 Ismert mozgásállapotú haladó tag tetszőleges pontja	86
3.8. Összetett mozgást végző hajtótag vizsgálata	87
3.8.1 A hajtótag összetett mozgást végző rúd	87
3.8.2 A hajtótag összetett mozgást végző munkahenger	90
3.9. Az elemi csoportok BASIC programjai és alkalmazásuk	93
4. Síkban mozgó mechanizmusok dinamikai vizsgálata (Koltay J.)	109
4.1 A mechanizmusra ható erők osztályozása	109
4.2. Elemi csoportok erőegyensúlya, a kinematikai párokban ébredő reakcióerők meghatározása	109
4.3. I. osztályú mechanizmusok (hajtótagok) erőegyensúlya	117
4.4. Kinematikai párokban ébredő reakcióerők meghatározása a súrlódás figyelembevételével	119
4.6. Felsőrendű kinematikai párokban ébredő reakcióerők meghatározása	122
4.6. A mechanizmus egy tagjára ható tehetetlenségi erő	124
4.7. Tehetlenségi erők kiegyensúlyozása	128
4.7.1 Forgó tömegek kiegyensúlyozása	128
4.7.2 Síkban mozgó mechanizmusok kiegyensúlyozása	132
Síkban mozgó mechanizmusok statikus kiegyensúlyozása	132
Síkban mozgó mechanizmusok dinamikus kiegyensúlyozása (Benkő J.)	143
4.8. A virtuális elmozdulások elvének alkalmazása az egyensúlyt tartó erők és nyomatékok meghatározására	150
4.8.1 Zsukovszkij segédemelés módszere	150
4.8.2 A mechanizmusok grafoanalitikus vizsgálata	154
Felhasznált forrásmunkák	161

Előszó a második kiadáshoz

A jegyzet első kiadása 1989-ben jelent meg. A megjelenést követően, a tárgykör iránt megnyilvánuló csökkenő érdeklődés ellenére, az elmúlt 30 évben az első kiadás több utánnomott változata is megjelent. Az idő kíméletlen nagyúr, szerzőtársam és kedves barátom *dr. Koltay Jenő* egyetemi docens már több mint tíz éve tragikusan fiatalon elhunyt, és ma már senki nem él azok közül, akik annak idején a Mezőgazdasági Gépészmérnöki Karon lelkes úttörői voltak a „Mechanizmusok” tantárgy elindításának. A teljesség igénye nélkül, *dr. Soós Pál* professzor, *dr. Véner István* és *dr. Fábián Lajos* egyetemi adjunktusok nevét kell megemlíteni. A digitalizált kiadást az Ő emléküknél is ajánlom.

Az elmúlt években a hazai gépészmérnöki karok tantervreformjainak köszönhetően, a megedzsmnt tudományok agresszív térhódításával párhuzamosan, a műszaki tudományok egyes területei időhiányában nemcsak visszaszorultak, hanem egyes területek el is tűntek a tantervekből. Ezek a változások nem kedveztek a „Mechanizmusok” tantárgy oktatásának sem. Először törölték az alaptantervből, és csak bizonyos szakirányokon maradt kötelező szakirányú tantárgy. Később ez a státusza is megváltozott, választható tantárggyá degradálódott. A következők ismertek. A gépészmérnöki karokon végző hallgatók jelentős része egyszerűbb géptervezési feladatok elvégzésére sem alkalmas. Azok a hallgatók, akik mégis a géptervezés mellett kötelezik el magukat, csak önképzéssel juthatnak olyan ismeretek birtokába, amelyek feltétlen szükségesek e tevékenység műveléséhez. A jegyzet digitalizált közzététele elsősorban a mezőgazdasági géptervezés területén dolgozó mérnökök hiányzó ismereteinek pótlását igyekszik megkönnyíteni.

A géptervezés eszközei a számítástechnika fejlődésének köszönhetően jelentősen megváltoztak, a tervezőintézetekből eltűntek a rajzasztalok, a CAD programok használata általánossá vált. A műszaki számítások (szilárdságtani, technológiai, stb.) gyors végzését számítógépprogramok segítik. Ezeknek az alkalmazásoknak a hatékony használata azonban háttérismeretek nélkül elképzelhetetlen. A mérnöki tevékenység soha nem válik betanított munkává. A mérnök csak alapos statikai, szilárdságtani, kinetikai, kinematikai, technológiai stb. ismeretek birtokában képes a számítástechnika kínálta lehetőségekkel élni. A jó mérnök tudja, hogy mit csinál a számítógép, milyen adatok szükségesek az adott feladat elvégzéséhez, és értelmezni tudja a kimeneti eredményeket.

A gépészmérnök-képzésben, a mechanizmusokkal kapcsolatos ismereteket illetően, sajnálatos módon a múlt század 50-es éveire tértünk vissza, amikor a „Mechanika” tantárgy keretében a mechanizmusok analitikai vizsgálatának rendszerint csak néhány alapelemig jutottak el. Ma újra itt tartunk, jobbesetben csak azokat a különleges mechanizmusokat ismertetik, amelyek feltétlen szükségesek a mérnöki alapintelligencia megszerzéséhez. Közismert azonban, hogy a rohamosan fejlődő, tökéletesedő, számítógéppel vezérelt hidraulikus és elektromos (elektronikus) berendezések sem teszik időszerűtlenné a mechanizmusokkal való foglalkozást. Sőt a régebben használatos mechanizmusok helyett, a hidraulikus vagy elektromos berendezésekkel egybeépített mechanizmusok célravezetőbb megoldást szolgáltathatnak, ugyanakkor fejlődő ipar újabb alkalmazási területek kapuit is megnyitotta; példaként elég a robotokat (manipulátorokat) megemlíteni. Mindezek az új problémák a mechanizmusok alapelemeinek megismerését teszik szükségessé. Nem haszontalan tehát az alapelveket rögzítő, a múlt században megírt, de nem elavult könyveket átlapozni (pl. *Burmester*, *Csebisev*, *Zsukovszkij*, *Artobolev-szkij*, *Asszur* munkáit), és az időközben megjelent számtalan szakkikk és összefoglaló könyv tanulságait levonni.

Ez a kiadás tulajdonképpen tartalmilag változatlan másolata az elsőnek néhány apróbb sajtóhiba kijavításával és az ábrák újrarajzolásával. A saját kezűleg számítógéppel megrajzolt ábrák

reményeim szerint esztétikusabb és áttekinthetőbb külsőt kölcsönöznek a jegyzetnek.

Gödöllő, 2021. március 10.

Prof. Benkő János

Előszó

A „Mechanizmusok” című tantárgy a világ valamennyi műszaki felső- oktatási intézményének tantervében szerepel. Hazánkban önálló tárgyként történő oktatása aránylag rövid múltra tekint vissza. A korszerű technikának a népgazdaság szinte valamennyi ágában végbemenő rohamos fejlődése tette szükségessé, hogy a technika egyik alapozó tudománya, a mechanizmusok elmélete a külföldi, elsősorban a szovjet és német tapasztalatok alapján külön tárgyként bekeverüljön a hazai gépészmérnöki karok tantervébe is. Nálunk először a Budapesti Műszaki Egyetemen és a Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetemen vezették be 1952-ben. A GATE Mg.-i Gépészmérnöki Karán a diszciplína úttörője, dr. Soós Pál professzor először 1959-ben szorgalmi tárgyként hirdette meg, majd a hatvanas évek elején végrehajtott tantervreform tette lehetővé, hogy 1963-tól önálló alapozó tárgyként Karunkon is bevezessük a „Mechanizmusok” című féléves tantárgyat.

E tantárgy anyaga általában két fő részből áll: analízisből és szintézisből. Az analízis keretében adott szerkezetek elemzésével foglalkoznak, a szintézis pedig adott feladat (mozgás) elvégzésére alkalmas szerkezetek tervezését jelenti.

A Karunkon oktatott „Mechanizmusok” című tárgy anyaga, az egyes anyagrészek tárgyalásának sorrendje nagyjából megegyezik a hazai és külföldi egyetemeken kialakult gyakorlattal.

Az anyag terjedelme és arányai azonban némileg eltérnek a más egyetemeken oktatott anyaghoz képest. Ez elsősorban a tárgy féléves jellegével és a képzési célban megfogalmazottakkal magyarázható. Egyes fejezeteket részletesebben, másokat rövidebben, csak a legfontosabb összefüggéseket kiemelve tárgyaljuk. A rendelkezésre álló heti előadási óra szám keretében a szintézisnek csak igen szűk ismertetésére szorítkozhatunk. Az anyagot azonban igyekszünk úgy összeállítani, hogy az, az egyszerűbb szerkezetek tervezésénél is támpontul szolgálhasson.

A jegyzet anyaga három fő részből áll. Az első rész a mechanizmusok szerkezeti felépítését és osztályozását tartalmazza. A második részben a mechanizmusok kinematikai, a harmadikban pedig a dinamikai vizsgálatának módszereit ismertetjük.

A mechanizmusok kinematikai és dinamikai analízisének - tekintettel az egyszerűbb megoldásra és a jobb áttekinthetőségre - általában a grafikus megoldást részesítjük előnyben. A technikai haladás, a számítógéppel segített tervezésben elért eredmények azonban szükség-szerűen felvetik a numerikus eljárások megismerésének az igényét is. Ezért a 3. fejezetben bemutatunk egy saját fejlesztésű, a másodosztályú mechanizmusok kinematikai vizsgálatára alkalmas rendszert.

E tantárgyban foglaltak elsajátításához a megfelelő alaptárgyi ismeretek mellett szükség van bizonyos jártasságra a grafikus szerkesztési eljárásokban is. Ennek megfelelően a „Mechanizmusok” című tárgyat a matematika, a számítástechnika, a fizika, a mechanika és az ábrázoló geometria után és a speciális szaktárgyak előtt oktatjuk, mintegy építve az előbbiekre és alapozva az utóbbiakat. A jegyzetben foglalt ismeretek és vizsgálati módszerek jól hasznosíthatók a szaktárgyakban, - elsősorban a traktorok és motorok, mezőgazdasági gépek, kertészeti gépek, állattenyésztés gépei, élelmiszeripari gépek c. tárgyak során-, oktatott szerkezetek és gépek kinematikai és dinamikai viszonyainak megismerésében.

E helyen mondunk köszönetét a lektoroknak, akik észrevételeikkel és értékes megjegyzéseikkel

jelentős mértékben támogatták munkánkat. Befejezésül köszönetünket fejezzük Pólyák Bélánénak az ábrák gondos, esztétikus elkészítéséért, valamint Benkő Miklósnak, aki a határidőre történő megjelenés érdekében a nyári szabadságának jelentős részét a jegyzet gépelésével töltötte.

Gödöllő, 1989. május

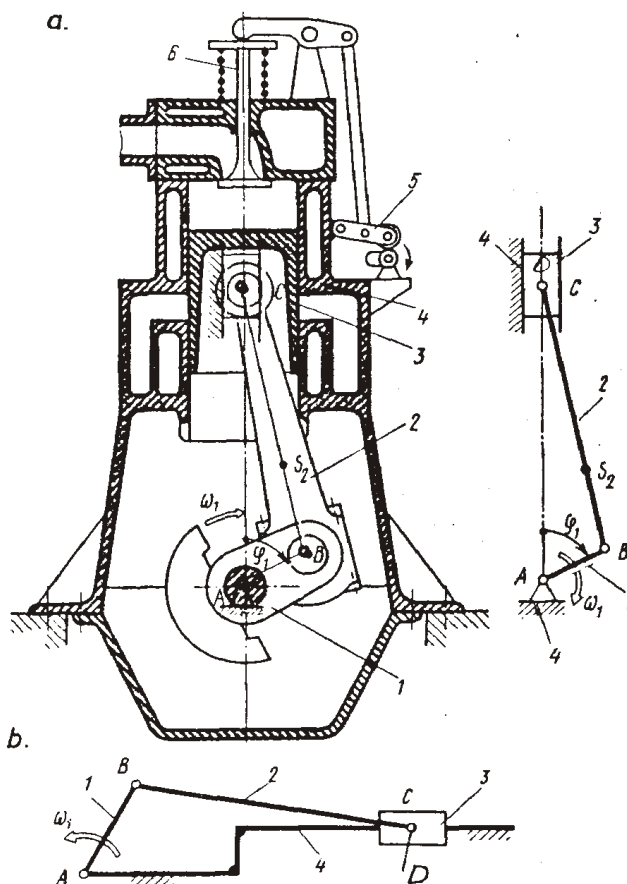
A Szerzők

1. Mechanizmusok szerkezeti felépítése és osztályozása

1.1. A mechanizmus fogalma

A *mechanizmus* (1.1. ábra) az olyan mesterségesen kialakított testek rendszere, amely egy vagy több testnek egy másik test (testek) által előírt mozgását biztosítja.

A mechanizmust alkotó, egymáshoz viszonyítva elmozdíthatóan összekapcsolt merev testeket *tagoknak* nevezzük és számokkal (1, 2, 3...) jelöljük. A mechanizmus tagjai közül azt, amelyhez képest a többi tag mozgását vizsgáljuk *állványnak* (4) nevezzük és mozdulatlanak tekintjük. Gépeknél rendszerint a gépkeret (alváz, gépalap, stb.) képezi az állványt.



1.1. ábra

Minden mechanizmusban van egy vagy több olyan tag, amelynek mozgási törvényszerűsége adott és a többi tagot mozgatja. Az adott mozgástörvénnyel rendelkező tagot *vezető* vagy *hajtótagnak* (1), az általa mozgásra kényszerített tagokat pedig *hajtott* vagy *vezetett* tagoknak (2 és 3) nevezzük.

A mechanizmus tagjai elméletben egymással pont, vonal vagy felület mentén kapcsolódnak. Egy tagnak az a pontja, vonala vagy felülete, amellyel a másik tag érintkezik: a *kinematikai elem*. Két kapcsolódó tag érintkező kinematikai elemei képezik a *kinematikai párt* (A, B, C, D). A síkban mozgó mechanizmusok leggyakoribb kinematikai párojai: a csap és csapágy (A, B, D), vagy a kulisszakő és a vezetőke (C). A kinematikai párok biztosítják a mechanizmus tagjainak egymáshoz viszonyított elmozdulását.

A kinematikai párok útján összekapcsolt tagok *kinematikai láncot* képeznek. A kinematikai

lánc lehet egyszerű és összetett, valamint nyitott és zárt. *Egyszerű a kinematikai lánc*, ha a tagok mindegyike két másikkal képez elmozdítható kapcsolatot. A kinematikai lánc *összetett*, ha a láncba kapcsolt tagok kettőnél több másik taggal kapcsoltak. A *nyitott* kinematikai lánc egymást követő tagok sorozata az első és az utolsó tagon kiképzett egy-egy szabad kinematikai párral. Az egyszerű nyitott kinematikai láncot úgy zárhatjuk, hogy az utolsó tagot az elsővel összekapcsoljuk.

A mérnöki gyakorlatban alkalmazott mechanizmusok *zárt kinematikai láncot* alkotnak. Ennek megfelelően a merev testekből felépített mechanizmus a következők szerint definiálható.

Mechanizmusnak nevezük az olyan, egy mozdulatlan taggal rendelkező zárt kinematikai láncot, amelyben a hajtótag (tagok) előírt (állványhoz viszonyított) mozgásakor a hajtott tagok, adott célnak megfelelő, szabatosan meghatározott mozgást végeznek.

1.2. A kinematikai párok és osztályozásuk

A kinematikai párok, vagyis a mechanizmus tagjainak kapcsolódási lehetőségei sokfélék lehetnek. Két tag mozgékony kapcsolatában a kinematikai elemek kialakításától függően a kinematikai párok különböző kötöttségi feltételeket valósíthatnak meg.

A kinematikai pár kötöttségének számán azt értjük, hogy a mechanizmus két tagjának kapcsolódása hány szabad mozgási lehetőséget szüntet meg a két tag egymáshoz viszonyított mozgásában. A kapcsolódó kinematikai elemek, vagyis a kinematikai párok egy, de legfeljebb öt kötöttséget valósíthatnak meg. Mivel a térben egy merev testnek hat mozgási lehetősége van (a 3 koordinátatengely menti haladó és forgó mozgás), ami egyben azt is jelenti, hogy a merev test *szabadságfoka* a térben hattal egyenlő, nyilvánvaló, hogy nulla kötöttség esetén a két test nem kapcsolódik, hat kötöttségnél pedig a két tag egymáshoz képest nem mozdulhat el, hiszen az összes mozgáslehetőséget (szabadságfokot) elvettük. Térbeli mozgásnál a szabadságfok és a kötöttség mindig hatra egészíti ki egymást.

A kinematikai párok által megvalósított kötöttségek számát úgy határozhatjuk meg, hogy megvizsgáljuk a kapcsolódás mely koordináta tengely irányába gátolja meg a haladó mozgást, illetve mely koordináta tengely körül akadályozza meg a forgást.

A kinematikai párokat a könnyebb vizsgálat kedvéért szabadságfokuk, megvalósított kötöttségük és kinematikai elemek érintkezése alapján szokásos osztályozni. Szabadságfokuk szerint egy-, két-, három-, négy- és öt-szabadságfokú kinematikai párokat különböztetünk meg. Megvalósított kötöttségük szerint az előbbieknél megfelelő kinematikai párokat az V., IV., III., II., és I. osztályba soroljuk.

A kinematikai elemek érintkezésének jellegétől függően a kinematikai párok alsó- és felsőrendű kinematikai párokra oszlanak.

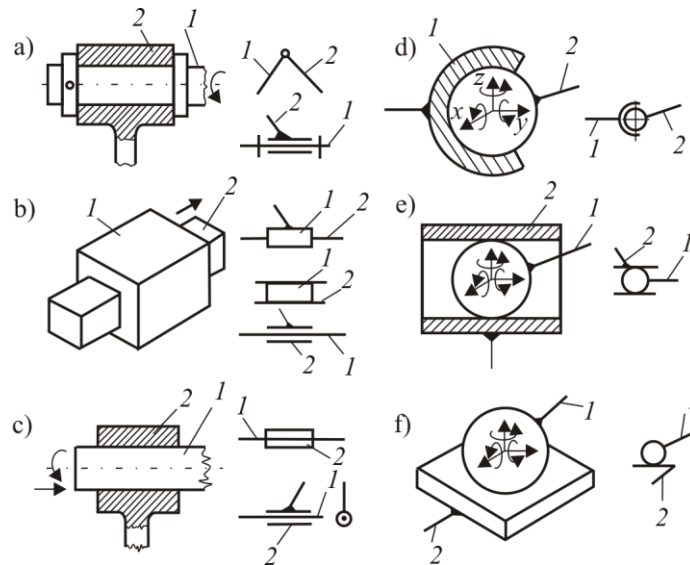
Az alsórendű kinematikai párokhoz azok tartoznak, amelyek kinematikai elemei kölcsönösen felfekvő felületek vagy felület részek. Felsőrendű kinematikai pároknak azokat nevezük, amelyeknek elemi pont vagy vonal mentén érintkeznek.

Fontos megjegyezni, hogy ha a síkban történő mozgást megengedő felsőrendű kinematikai párok elemei között tiszta (csúszásmentes) gördülés lép fel, akkor ötkötöttségű (egy-szabadságfokú) a felsőrendű kinematikai pár (pl. görgő és síklap, bütök és görgős szelepszár, stb.). Ha felsőrendű kinematikai pár elemei csúszással gördülnek egymáson, akkor a felsőrendű kinematikai pár négykötöttségű (pl. fogaskerékpár; bütökös síklappal kapcsolódó szelepszárral, stb.).

Egy-szabadságfokú kinematikai pár (V. osztály) a tagok viszonylagos mozgásában egy moz-

gáslehetőséget enged meg és öt kötöttséget valósít meg. A forgó-, a haladó mozgást megengedő és csavarmentes kapcsolatú kinematikai párok tartoznak ide. Ezek a leggyakrabban előforduló síkban mozgó mechanizmusok legfontosabb kapcsolódási módjai.

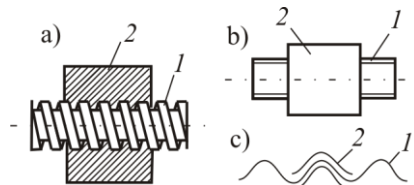
A *forgómozgást megengedő kinematikai pár* (1.2/a ábra) lényeges tulajdonsága, hogy csak egyetlen mozgást enged meg: az x tengely körüli forgó mozgást. A kinematikai elemek érintkezése alapján a kinematikai pár alsórendű. Az 1.2/a ábrán látható kinematikai pár geometriailag zárt, más szóval *kétoldali kötöttségű*. *Egyoldali kötöttségű* az a kinematikai pár, amelynél a csap a perselytől eltávolodhat, és hogy a párok szétkapcsolódását megakadályozzuk, a csapot (pl. rugóerővel) hozzá kell szorítani a perselyhez. Az ábrán a forgómozgást megengedő kinematikai pár jelképes ábrázolását is feltüntettük.



1.2. ábra

A *haladó mozgást megengedő kinematikai pár* (1.2/b ábra) szintén csak egyetlen mozgást enged meg: a kulisszakő és a vezetőke közötti haladó mozgást. Ez a kinematikai pár is alsórendű, mivel a kinematikai elemek érintkezése felület mentén megy végbe. Jelképes jelölését szintén megadtuk.

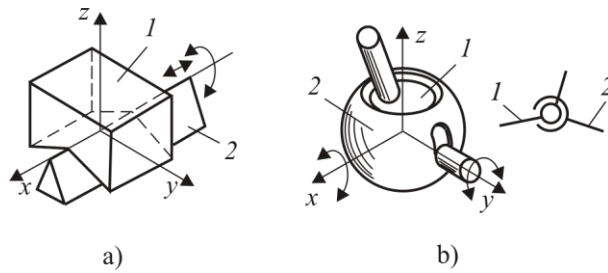
Csavarmentes kapcsolatú kinematikai pár (1.3. ábra) esetén a csavarorsó tengelye körüli elfordulási szög és a tengely irányú elmozdulás között meghatározott összefüggés áll fenn, ezért ez a kinematikai pár is az egy-szabadságfokú kinematikai párokhoz tartozik. Alsórendű geometriailag zárt kinematikai pár jelképes ábrázolása a 1.3/b és c. ábrákon látható.



1.3. ábra

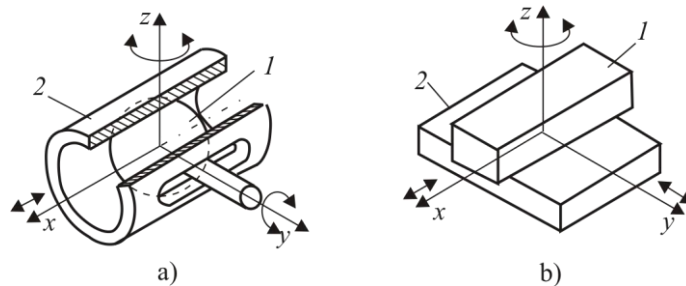
A *két-szabadságfokú kinematikai pár* (IV. osztály) a tagok viszonylagos mozgásában két szabadságfokkal és négy kötöttséggel jellemezhető. Ezek a kinematikai párok egy forgó és egy haladó, vagy két forgó relatív mozgást engednek meg.

Ide tartozik a 1.2/c ábrán látható alsórendű *hengeres kinematikai pár* amely x tengely körüli elfordulást és x tengely irányú elmozdulást biztosít a kapcsolódó tagok viszonylagos mozgásában.



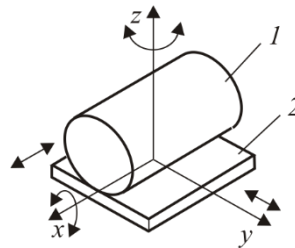
1.4. ábra

Szintén két-szabadságfokú, de felsőrendű kinematikai pár a két prizmából létesített kapcsolat is (1.4/a ábra). A megengedett relatív mozgáslehetőség: az x tengely irányú haladó és az x tengely körüli forgó mozgás. Geometriailag nyitott, ezért az elemek kapcsolódásához külső erő alkalmazása szükséges.



1.5. ábra

A tagok kölcsönös mozgásában két forgó mozgást enged meg a 1.4/b ábrán bemutatott csapogömbcsukló. Lehetséges mozgás: az x és y tengelyek körüli elfordulás. Három-szabadságfokú (III. osztály) kinematikai párokat láthatunk a 1.2/d és az 1.5. ábrákon. A meghagyott viszonylagos mozgások száma az első esetben (gömbcsukló) három forgó mozgás, a másodikban (1.5/a ábra), két forgó (y és z tengely körül) és egy haladó (x tengely irányú) mozgás, végül a harmadik esetben (1.5/b ábra) két haladó (x és y tengely irányú) és egy forgó mozgás (z tengely körül). Az itt bemutatott kinematikai párok közül az 1.5/a ábrán látható felsőrendű, a másik kettő alsórendű kinematikai pár.



1.6. ábra

A 1.6. ábrán látható négy-szabadságfokú kinematikai párnál (II. osztály) egy haladó és egy forgó mozgást szüntettünk meg, így a lehetséges relatív mozgások száma négy (haladó mozgás x és y tengely irányában, forgó mozgás x és z tengely körül). Négy-szabadságfokú a 1.2/e. ábrán bemutatott kinematikai pár is. Minden négy-szabadságfokú kinematikai pár felsőrendű.

Két gömbfelület, vagy sík és gömbfelület (1.2/f. ábra) érintkezésekor öt-szabadságfokú kinematikai párt (I. osztály) kapunk, mivel pontszerű érintkezés csak az egyik koordináta tengely (esetünkben z irányában) akadályozza meg a haladó mozgást. A másik két tengely irányában, illetve a három koordináta tengely körül szabad marad a mozgási lehetőség. Az öt-szabadságfokú kinematikai párok is mindig felsőrendűek.

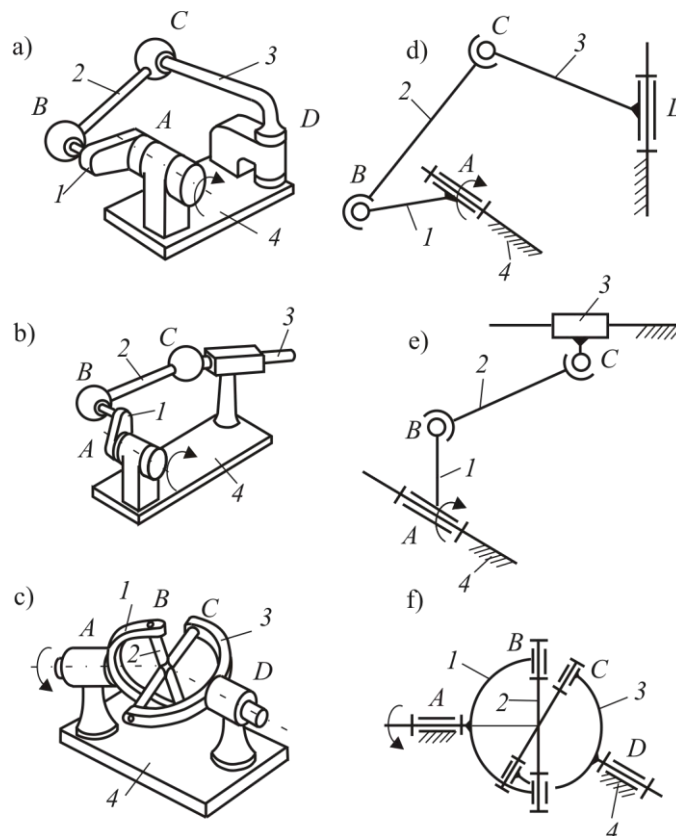
A 1.2.-1.6. ábrákon bemutatott kinematikai párok egyszerűek. A kinematikai párok képzésének

lehetősége ezekkel természetesen nem merül ki. Jegyzetünkben csak a legfontosabbak ismertetésére szorítkozunk.

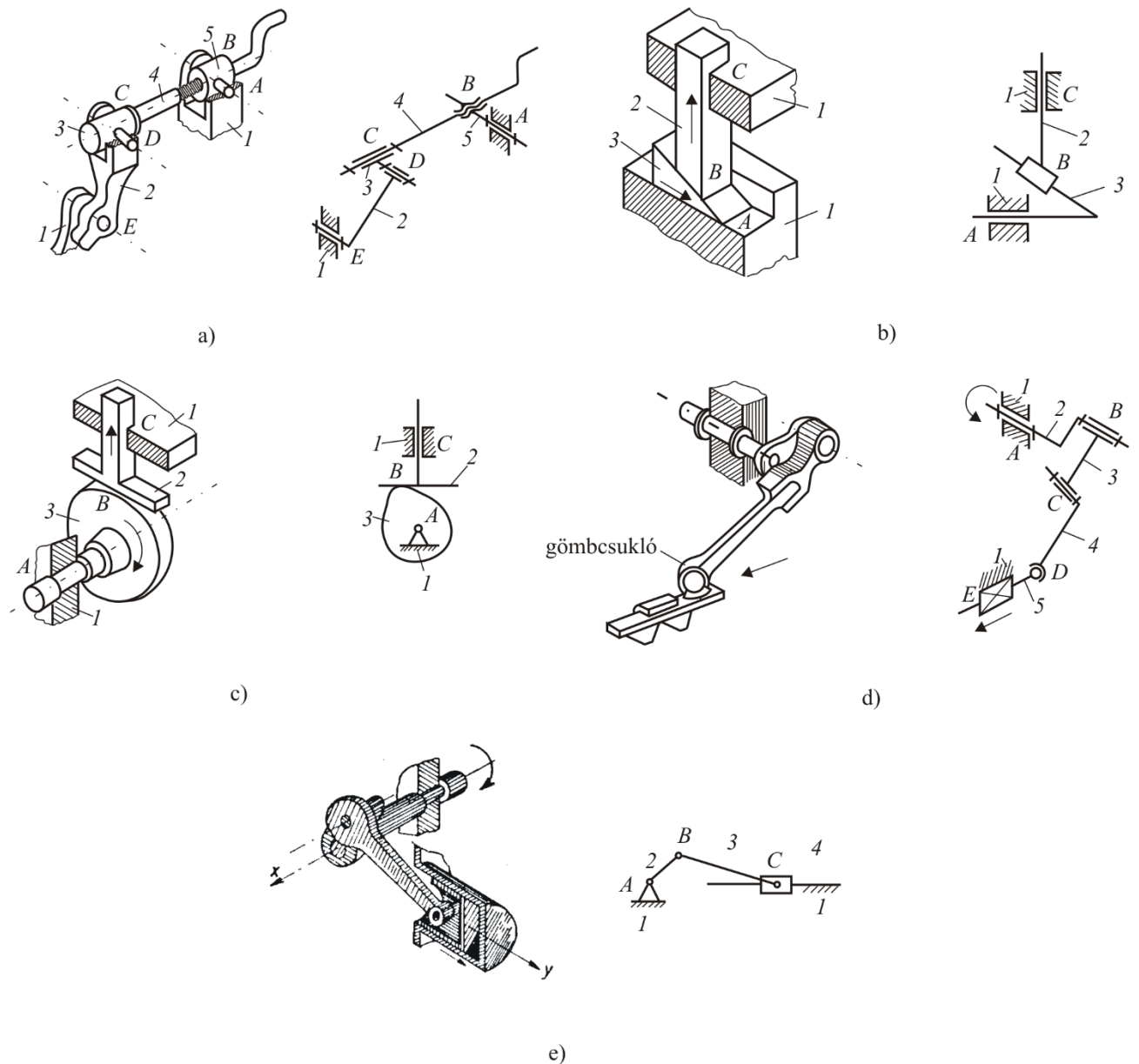
1.3. A kinematikai vázlat felépítése

A kinematikai párokat és mechanizmust alkotó tagokat jelképesen ábrázoljuk. A fontosabb kinematikai párok jelképes ábrázolását a fejezetben már ismertettük (1.2. ábra). A mechanizmus tagjai a valóságban különböző alakúak. Mivel a mechanizmus tagjait merev testnek tekintjük, azaz a tag bármely két pontjának távolsága a tag elmozdulása és terhelése alatt állandó marad, ezért a tagot egyszerűen egyenes vonallal ábrázoljuk, amelyet bonyolultabb esetben háromszöggé, négyszöggé, stb. egészíthetünk ki.

A mechanizmus jelképes rajzát *kinematikai vázlatnak* nevezzük. A kinematikai vázlat teljes képet ad a mechanizmus szerkezeti felépítéséről, és egyértelműen meghatározza annak kinematikai tulajdonságait. A kinematikai vázlat tulajdonképpen a mechanizmus mérethelyes vonalas rajza, amely tartalmazza a tagok és a kinematikai párok egységes, egyértelmű jelölését. A mechanizmus tagjait szisztematikusan arab számokkal, a kinematikai párokat pedig az ABC nagybetűivel jelöljük. A felsőrendű kinematikai párokat olyan görbékkel ábrázoljuk, amilyeneknek a valóságban megfelelnek. A kinematikai vázlaton az állványt vonalkázás jelzi.



1.7. ábra



1.8. ábra

A kinematikai vázlat felépítésénél az első lépés az állványhoz (mozdulatlan taghoz) tartozó kinematikai pár elemének felrajzolása. Ezt követi az állványhoz tartozó hajtótág ábrázolása, majd a hajtott tagokból álló kinematikai lánc megrajzolása. A hajtótág mozgási irányát is be kell jelölni a kinematikai vázlaton.

Itt jegyezzük meg, hogy azok a mechanizmusok, amelyeknek tagjai egymással párhuzamos síkokban mozognak egy síkban mozgó mechanizmusként ábrázolhatók a kinematikai vázlaton. Az 1.7. és 1.8. ábrákon a kinematikai vázlat készítését mutatjuk be néhány egyszerű mechanizmus esetén.

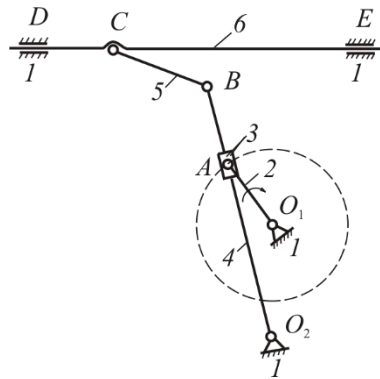
1.4. Néhány fontosabb síkban mozgó mechanizmus

A mechanizmusok síkban vagy térben mozgó mechanizmusok lehetnek. A *síkban mozgó mechanizmusokat* az jellemzi, hogy egyes tagjain lévő pontok pályagörbéi (pontgörbéi) egy síkban, vagy párhuzamos síkokban helyezkednek el. *Térben mozgó mechanizmusoknak* azokat nevezzük, amelyeknél a tagokon lévő pontok pályagörbéi egymást metsző síkokban fekszenek

(a pályagörbe vagy pontgörbe a tag mozgása során valamely pontja által leírt görbe).

A továbbiakban néhány fontosabb, gyakran előforduló, síkban mozgó mechanizmust ismertettünk.

Karos mechanizmusoknak azokat a mechanizmusokat nevezzük, amelyekben csak forgó- és haladó mozgást megengedő kinematikai párok találhatók. Ilyen mechanizmus például a harántgyalu, melynek kinematikai vázlata az 1.9. ábrán látható.

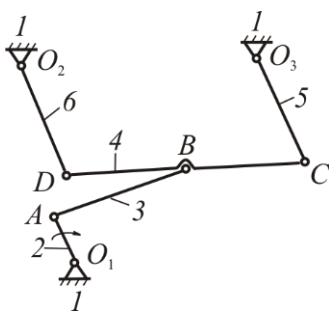


1.9. ábra

Az ábra kapcsán megemlítjük, hogy a kinematikai vázlatokon a kinematikai párokat jelölő betűk száma nem mindig egyezik meg a kinematikai párok számával, mivel néha egy betűvel két kinematikai párt, vagy egy kinematikai párt több betűvel is jelölnek. A 1.9. ábrán például az A betű két kinematikai párt jelöl: a forgó mozgást megengedő kinematikai párt a 2-es és 3-as jelű tag kapcsolódásánál, és a haladó mozgást megengedő kinematikai párt a 3-as és 4-es jelű tag kapcsolatában. Viszont a 6-os jelű tag az állvánnyal egy kinematikai párt képez (két tag kapcsolatában egynél több kinematikai pár nem lehetséges), mégis a kinematikai vázlaton két betű (D és E) jelöli.

Ha a mechanizmusban csak forgó mozgást megengedő kinematikai pár szerepel, akkor *csuklós mechanizmusról* beszélünk.

A lengőrosta csuklós mechanizmusának kinematikai vázlatát az 1.10. ábra ábrázolja.



1.10. ábra

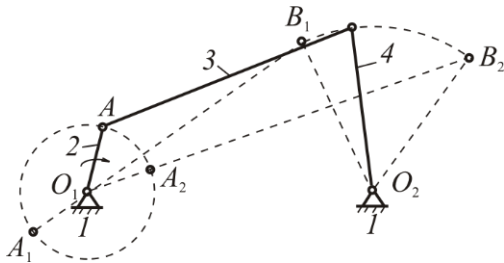
A karos mechanizmusnak azt a tagját, amely a mozdulatlan tag tengelye körül teljesen körbe tud forogni *forgattyúnak* nevezzük (az 1.9. és 1.10. ábrán a 2 jelű tagok). Ha a mozdulatlan tag tengelye körül a hozzákapcsolódó tag nem végezhet teljes körülfordulást, akkor a *lengőtagról* (*himbáról*) beszélünk. Lengőtag az 1.10. ábra mechanizmusának 5 és 6 jelű tagja. A karos mechanizmusnak azt a tagját, amely az állvánnyal nem képez kinematikai párt, *hajtórúdnak* (*hajtókarnak*) nevezzük (az 1.9. ábrán az 5 jelű az 1.10. ábrán pedig a 3 és 4 jelű tagok hajtórudak).

A *csúszótag* (egyenesbe vezetett tag) a karos mechanizmus azon tagja, amely az állvánnyal haladó mozgást megengedő kinematikai párt képez (az 1.9. ábrán a 6 jelű tag). Az állótengely körül forgó és egy másik mozgó taggal haladó mozgást megengedő kinematikai párt képző tag neve: *kulissza* (az 1.9. ábra 4 jelű tagja).

Azokat a karos mechanizmusokat, amelyek kulisszát is tartalmaznak, *kulisszás mechanizmusnak* nevezzük. A harántgyalu ennek megfelelően kulisszás mechanizmus.

A három mozgó és egy álló tagot tartalmazó csuklós mechanizmus a négycsuklós vagy *négy-*

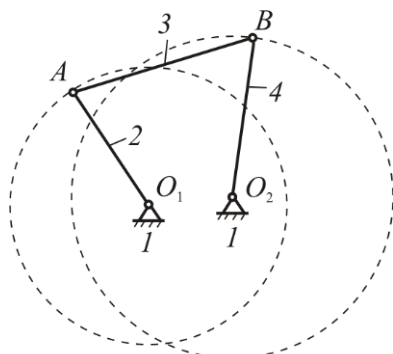
tagú csuklós mechanizmus (1.11. ábra). A négytagú csuklós mechanizmusoknak az állványhoz kapcsolódó tagok mozgásától függően a következő három változatuk különböztethető meg:
 egyforgattyús- lengőtagos,
 kétforgattyús,
 két-lengőtagos mechanizmus.



1.11. ábra

Az 1.11. ábra kinematikai vázlata *egyforgattyús lengőtagos négytagú csuklós mechanizmust* ábrázol. A 2 jelű tag a forgattyú és O_1 körül teljesen körbe tud forogni (ez az A pont pályagörbéjéből is látszik) A 4-es jelű tag B_1O_2 és B_2O_2 szélső helyzetek között lengőmozgást végez az álló O_2 tengely körül. Amikor a lengőtag elfoglalja szélső helyzetét, a forgattyú és a hajtórúd egy egyenesbe esik. A mechanizmus e helyzeteit *holtponthelyzeteknek* nevezzük.

A holtponthelyzetek szerkesztésének módja: O_1 -ből ($\vec{O_1A} + \vec{AB}$), illetve ($\vec{AB} - \vec{O_1A}$) távolsággal kell B pont pályáját kimetszeni. A kapott B_1 és B_2 pontok tulajdonképpen *fordulópontok*, amelyek a műszaki irodalomban szokásos *holtpontoktól* formailag csupán abban különböznek, hogy a fordulópontban, a holtponttól eltérően, a mozgás további iránya határozott.

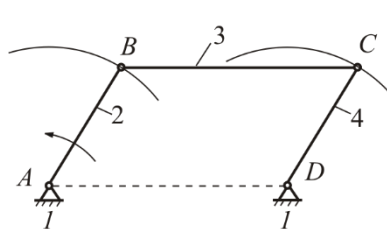


1.12. ábra

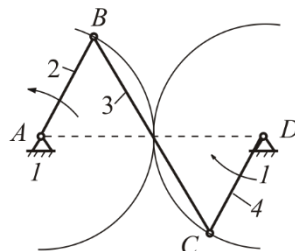
Kétforgattyús négytagú csuklós mechanizmust mutatunk be az 1.12. ábrán. Az A és B pontgörbéiből látható, hogy a 2-es és 4-es jelű tagok (forgattyúk) az álló (O_1 , illetve O_2) tengely körül teljes körülfordulást végezhetnek.

Gyakran alkalmazott kétforgattyús négytagú csuklós mechanizmus az ún. *paralelogram* (1.13. ábra) és az *antiparalelogram mechanizmus* (1.14. ábra). Ezeknek a mechanizmusoknak fő jellemzője $\vec{AB} = \vec{CD}$ és $\vec{BC} = \vec{AD}$ $\vec{BC} = \vec{AD}$. Antiparalelogramnak nevezzük a mechanizmust, ha a 2-es és 4-es jelű tagok forgásiránya ellentétes. *Két lengőtagos négytagú csuklós mechanizmus*

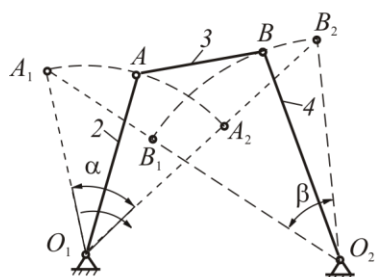
látható az 1.15. ábrán. A 2 jelű lengőtag α , a 4 jelű pedig β szöggel fordulhat csak el. A mechanizmus holtponthelyzeteit szaggatott vonallal rajzoltuk be (jobboldali holtponthelyzet: $O_1 A_2 B_2 O_2$, a baloldali: $O_1 A_1 B_1 O_2$).



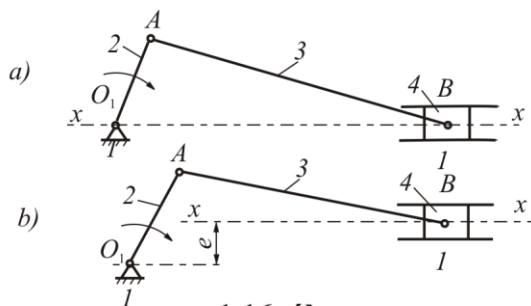
1.13. ábra



1.14. ábra



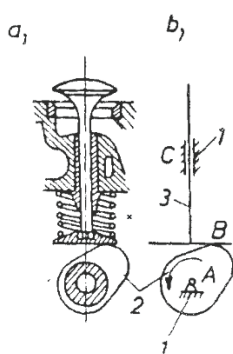
1.15. ábra



1.16. ábra

Az olyan négytagú karos mechanizmust, amelyben forgattyú és csúszótag található, *forgattyús mechanizmusnak* nevezzük (1.16. ábra). Kétfajta forgattyús mechanizmus ismert: a centrikus és az excentrikus, más szóval dezaxiált. Ha a haladó mozgást megengedő kinematikai pár $x-x$

tengelye metszi a forgattyú forgáspontját, akkor a forgattyús hajtómű *centrikus* (1.16/a ábra) különben *dezaxiált* (1.16/b ábra). Az egyenesbe vezetés iránya és a forgattyú forgásközéppontja közötti e távolságot *dezaxialitásnak* nevezzük.



1.17. ábra

A bütökös mechanizmus egy változó görbületű tagot is tartalmazó mechanizmus. Az 1.17/a ábrán egy szelepvezérlő bütökös mechanizmus látható. Az 1.17/b ábra ennek kinematikai vázlatát mutatja be. A 3 jelű szelepszár a 2 számú bütökkel képezi a kinematikai párt.

A gépészetben gyakran alkalmazott fogaskerék is bütökös mechanizmusként fogható fel.

1.5. Síkban mozgó mechanizmusok szerkezeti felépítése

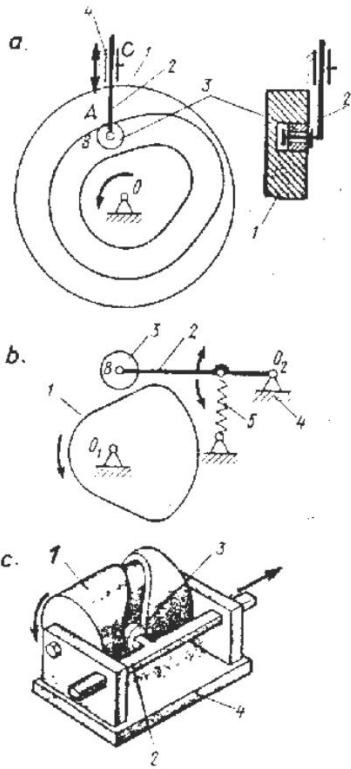
A síkban mozgó mechanizmusok szerkezetének elemzésekor meg kell határozni a tagok számát, a kinematikai párok fajtáját és számát, majd kiszámolni a *mechanizmus szabadságfokát*. A síkban mozgó mechanizmusok szabadságfokát meghatározó *szerkezeti képlet* az alábbi gondolatmenetből vezethető le. Legyen valamely síkban mozgó mechanizmus tagjainak száma n , az ötkötöttségű (egy szabadságfokú) kinematikai párok száma p_5 , a négykötöttségűeké (két szabadságfokú) pedig p_4 . A kinematikai párokkal történő összekapcsolás előtt minden tag -az állvány kivételével, amelynek szabadságfoka nulla- három *mozgáslehetőséggel*, azaz *szabadságfokkal* rendelkezik, vagyis a mechanizmus tagjai összesen $3(n-1)$ -el. Ebből minden egy szabadságfokú kinematikai pár két mozgáslehetőséget, és minden két szabadságfokú kinematikai pár egy mozgáslehetőséget megszüntet. Ennek megfelelően a síkban mozgó mechanizmus szabadságfoka (s):

$$s = 3(n-1) - 2p_5 - p_4$$

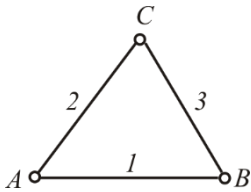
Mechanizmusról csak akkor beszélünk, ha a szabadságfok legalább egy vagy ennél több. A nulla szabadságfokú rendszert statikailag határozott szerkezetnek, az -1 szabadságfokút statikailag egyszeresen, a $-z$ szabadságfokút statikailag z szeresen határozatlan szerkezetnek nevezük.

A továbbiakban néhány példát mutatunk be a síkban mozgó mechanizmusok szabadságfokának meghatározására.

Elemezzük az 1.17. ábrán látható bütökös mechanizmust. Mozgó tagok száma: $2(n-1)$, a 2 jelű bütök forgó, a 3 jelű szelepszár haladó mozgást végez. A három kinematikai pár közül kettő alsórendű (az A csukló és a C haladó mozgást megengedő kinematikai pár) és egy felsőrendű (a B bütökös kapcsolat). Így az ötkötöttségű kinematikai párok száma $p_5 = 2$ (A és C), a négykö-



1.18. ábra



1.19. ábra

Az 1.20. ábrán bemutatott belsőégésű motor kinematikai vázlatán a tagok száma hat. A 2-es jelű forgattyú a rajta levő fogaskerékkal egy tagnak számít, mivel egymáshoz képest nem tudnak elfordulni. A 3-as jelű hajtórúd összetett, a 4-es jelű dugattyú egyenes vonalú alternáló mozgást végez. A 6-os jelű bütyök a tengelyére erősített fogaskerékkal szintén egy tagnak számít. Az 5-ös jelű szelepszár haladó mozgást végez. Az 1-es jelű tag az állvány. A kinematikai párok száma nyolc. Ebből hat alsórendű (négy csukló és két haladó mozgást megengedő kinematikai pár), és kettő felsőrendű (a fogaskerékpár és a bütyök kapcsolat) kinematikai pár. A felsőrendű kinematikai párok négykötöttségűek, mivel elemeik relatív elmozdulása nem csúszásmentes gördüléssel megy végbe. Az elmondottaknak megfelelően $p_5=6$ és $p_4=2$. A mechanizmus szabadságfoka:

$$s = 3(n-1) - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot (6-1) - 2 \cdot 6 - 2 = 1.$$

töttségű pedig $p_4=1$. Ennek megfelelően a mechanizmus szabadságfoka:

$$s = 3(n-1) - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot (3-1) - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Az 1.18/a ábra bütykös mechanizmusánál a mozgó tagok száma $(n-1) = 3$ (a bütyök, a görgő és a tolórúd). A négy kinematikai pár közül három alsórendű (az O és a B pontokban egy-egy csukló, a C pontban pedig egy haladó mozgást megengedő kinematikai pár), egy pedig felsőrendű (az A jelű kinematikai pár). A felsőrendű kinematikai pár is egy szabadságfokú, mivel a görgő és a bütyök kapcsolódásánál csúszásmentes gördülés jön létre. A mechanizmusban tehát csak ötkötöttségű kinematikai párok szerepelnek, vagyis $p_5 = 4$ és $p_4 = 0$, és így a szabadságfoka:

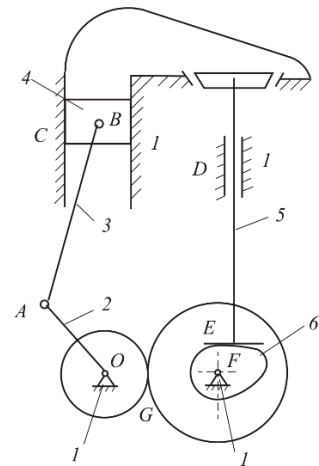
$$s = 3(n-1) - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Hasonló módon határozható meg az 1.18/b és c. ábrákon bemutatott bütykös mechanizmusok szabadságfoka is, amelyek szabadságfoka szintén egy.

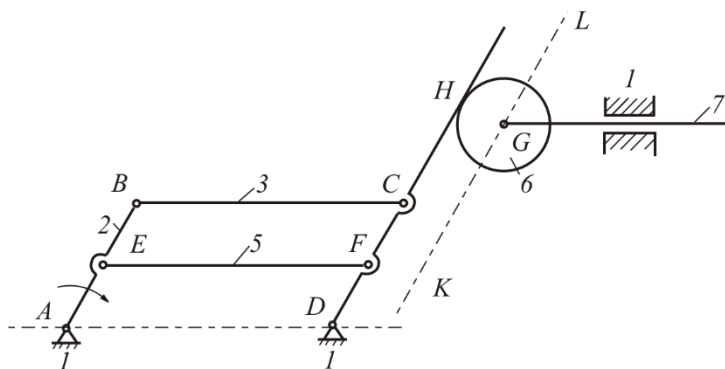
Az 1.19. ábrán látható csuklós háromszögnél a tagok száma $n = 3$, $p_5=3$ és $p_4=0$. A szabadságfoka pedig:

$$s = 3(n-1) - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot (3-1) - 2 \cdot 3 = 0.$$

Csuklós háromszögnél a tagok egymáshoz képest nem tudnak elmozdulni. A csuklós háromszög nem mechanizmus, egy tagként kell kezelni.



1.20. ábra



1.21. ábra

A mechanizmusok némelyikénél felesleges szabadságfokkal és passzív kötöttséggel is találkozhatunk. A felesleges szabadságfok és a passzív kötöttség egy példán tekinthető át a legegyszerűbben. Az 1.21. ábrán bemutatott mechanizmus az alábbi követelményeket elégíti ki:

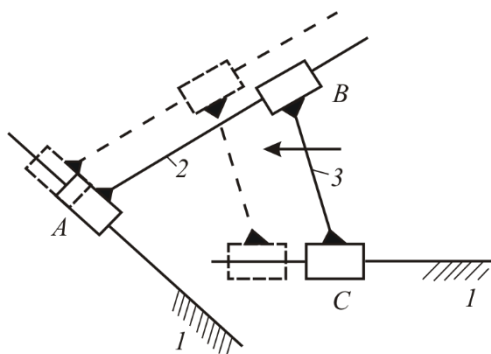
$$\overline{AB} = \overline{CD}, \quad \overline{AD} = \overline{EF} = \overline{BC}, \\ \overline{AE} = \overline{BE} \quad \text{és} \quad \overline{DF} = \overline{FC}.$$

Ennek megfelelően az ABCD paralelogrammát képez és ezért az F és E pontok közötti távolság mindig állandó marad, és egyenlő nagyságú AD illetve BC távolsággal. A mechanizmus szabadságfoka a szerkezeti képlettel számolva nullára adódik ($n-1=6$; $p_5=9$; $p_4=0$);

$$s = 3(n-1) - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 9 = 0$$

A valóságban ez a mechanizmus egy szabadságfokú, ugyanis mozgásának jellege nem változik meg, ha a két passzív kötöttséggel (E és F) rendelkező 5 jelű tagot eltávolítjuk. A továbbiakban vizsgáljuk meg a 6-os jelű görgőt. Könnyű észrevenni, hogy a görgő középpontja körüli szabad elfordulása a mechanizmus egészének mozgására semmilyen befolyással nincs. A szabadon elforduló görgő felesleges szabadságfokot eredményez.

A mechanizmusok szabadságfokának meghatározásakor a passzív kötöttséget és felesleges szabadságfokot mindig el kell hanyagolni.



1.22. ábra

Ritkán alkalmazott síkbeli mechanizmust mutat az 1.22. ábra. A mechanizmus csak haladó mozgást megengedő kinematikai párokat tartalmaz, vagyis megszüntettünk a síkra merőleges tengely körüli forgás lehetőségét is. Ezért a szabadságfokot meghatározó szerkezeti képlet:

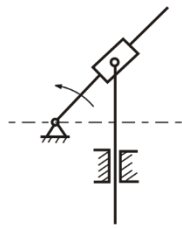
$$s = 2(n-1) - p_5 = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Síkban mozgó mechanizmusok szabadságfokának meghatározására gyakorlásként oldjuk meg az 1.23.-1.29. ábrákon bemutatott példákat.

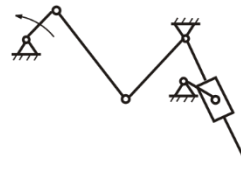
A példák megoldásánál nagy gondot kell fordítani a kinematikai párok számának helyes megállapítására. Például kettőnél több tag kapcsolódásánál annyi kinematikai párral kell számolni, ahány a "csomópontba" befutó tagok relatív elmozdulását lehetővé teszi, így három tag csuklóval történő összekapcsolását a közös csomópontban két ötkötöttségű kinematikai párral kell megvalósítani. *Általánosítva: ha egy csomópontban z számú tag fut össze, akkor ott z-1 számú kinematikai párt kell figyelembe venni.* A példákhoz tartozó adatok:

1. példa (1.23. ábra)	$n = 4$	$p_5 = 4$	
2. példa (1.24. ábra)	$n = 6$	$p_5 = 7$	
3. példa (1.25. ábra)	$n = 6$	$p_5 = 7$	
4. példa (1.26. ábra)	$n = 8$	$p_5 = 10$	
5. példa (1.27. ábra)	$n = 3$	$p_5 = 2$	$p_4 = 1$
6. példa (1.28. ábra)	$n = 10$	$p_5 = 13$	
7. példa (1.29. ábra)	$n = 4$	$p_5 = 3$	$p_4 = 2$

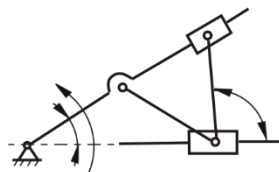
A szerkezeti képletet használva valamennyi mechanizmus szabadságfoka egyre adódik.



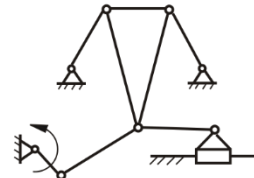
1.23. ábra



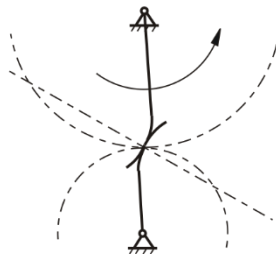
1.24. ábra



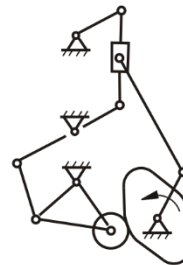
1.25. ábra



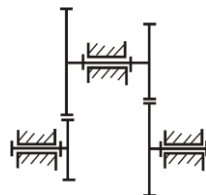
1.26. ábra



1.27. ábra



1.28. ábra



1.29. ábra

A szerkezeti képletek alkalmazása helyett az egyszerűbb síkban mozgó mechanizmusok szabadságfokát úgy is megállapíthatjuk, hogy a hajtótagot (tagokat) lefogjuk és így ezek is állvánnyá válnak. Mivel a mechanizmus szabadságfoka megegyezik a kívülről hajtott tagok szabadságfokával, ezért a hajtott tagok lefogása után a hajtott kinematikai lánc önálló mozgást már nem végezhet. Ha tehát a vezető tag(-ok) lefogása után a hajtott kinematikai lánc elmozdulni nem tud, úgy a mechanizmus szabadságfokát a vezető tag, több vezető tag esetében azok szabadságfokainak összege adja.

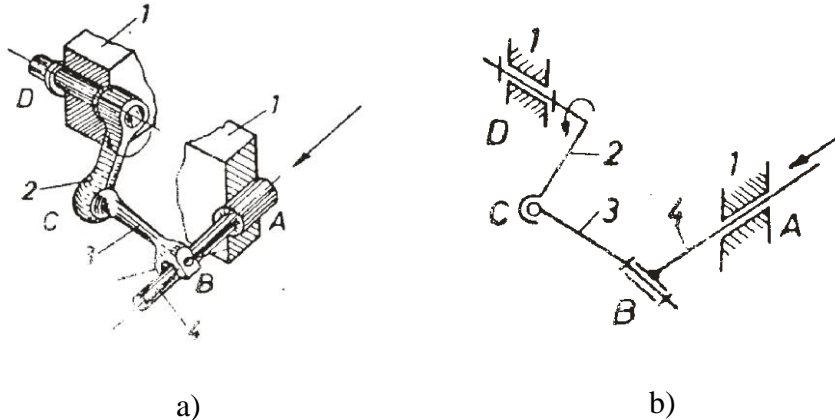
1.6. Térbeli mechanizmusok szerkezeti felépítése

A síkban mozgó mechanizmusok szabadságfokát meghatározó szerkezeti képlet levezetésének gondolatmenetével analóg, a térbeli mechanizmusra is felírhatjuk szabadságfokuk kiszámítására szolgáló szerkezeti képletet. A térbeli mechanizmusok szabadságfokát úgy számíthatjuk ki, hogy $n-1$ mozgó tag összesen $6(n-1)$ mozgáslehetőségéből levonjuk a tagokat egymáshoz kapcsoló kinematikai párok kötöttségeinek számát, vagyis

$$s = 6(n-1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1$$

Állapítsuk meg az 1.30. ábrán látható térbeli mechanizmus szabadságfokát. A mechanizmusban a *B* és a *D* ötkötöttségű, az *A* négykötöttségű (csukló) a *C* pedig háromkötöttségű (gömbcsukló) kinematikai pár. A tagok száma (*n*) négy, $p_5=2$, $p_4=1$ és $p_3=1$, így mechanizmus szabadságfoka:

$$s = 6(n-1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 = 6(4-1) - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1.$$



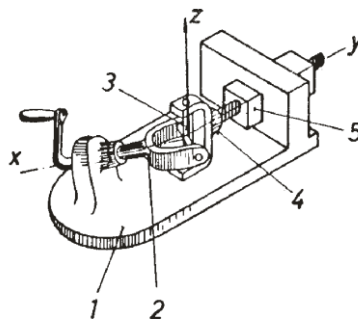
1.30. ábra

A térbeli mechanizmusra felírt fenti szerkezeti képlet azonban csak akkor érvényes, ha további, úgynevezett *kiegészítő kötöttségek* (*K*) nem befolyásolják a mechanizmus működését. A kiegészítő kötöttség nagyságát azoknak a kizárt mozgáslehetőségeknek a száma határozza meg, amelyekkel a mechanizmus egyetlen tagja sem rendelkezik. A *kiegészítő-kötöttség mind a tagok, mind a kinematikai párok* mozgására nézve közös kötöttséget jelent, így a térbeli mechanizmusok szabadságfokára felírt előző képlet átalakul:

$$s = (6-K)(n-1) - (5-K)p_5 - (4-K)p_4 - (3-K)p_3 - (2-K)p_2$$

képletté.

A kiegészítő kötöttség többféle lehet. Ilyen, az egész mechanizmusra vonatkozó kötöttség lehet pl. az, hogy a mechanizmusban csak olyan ötkötöttségű kinematikai párok lehetnek, amelyek tengelyei párhuzamosak. A tengelyek párhuzamosságának előírása azt jelenti, hogy a mechanizmus tagjai csak egymással párhuzamos síkokban mozdulhatnak el, vagyis a térbeli mozgáshoz képest három kötöttséget jelent a mechanizmusra előírt közös kötöttség, így $K = 3$.



1.31. ábra

Vizsgáljuk meg az 1.31. ábrán látható kardáncsuklóval kombinált csavarorsós állítószerkezetet. A mechanizmus térbeli, annak ellenére, hogy csak ötkötöttségű kinematikai párokat tartalmaz.

Az ötkötöttségű kinematikai párok száma $p_5 = 5$, a tagok száma szintén öt ($n = 5$). A tagok mozgását vizsgálva megállapítható, hogy egyetlen tag sem mozoghat az x és z tengely irányába. Ennek megfelelően a mechanizmus kiegészítő kötöttsége $K = 2$, szabadságfoka:

$$s = (6-K)(n-1) - (5-K)p_5 = (6-2)(5-1) - (5-2)5 = 1.$$

Az 1.8/b ábra olyan síkban mozgó mechanizmust ábrázol, amelynél a síkra merőleges tengely körüli elfordulás lehetőségét is kizártuk, vagyis $K=4$. Mivel a tagok és az ötkötöttségű kinematikai párok száma itt is három ($n = 3$, $p_5 = 3$), a mechanizmus szabadságfoka: $s = 1$.

A kiegészítő kötöttséget is figyelembe véve a mechanizmusok szabadságfokát az alábbi:

$$s = 6(n-1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 + q$$

képlettel is meghatározhatjuk, ahol q a kiegészítő kötöttségek számát is számításba vevő tag.

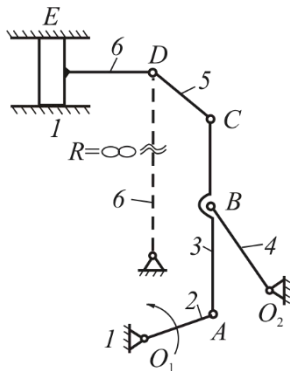
A kiegészítő kötöttségeket figyelembevevő q nagyságának meghatározását megkönnyíti, ha tudjuk, hogy ha két ötkötöttségű kinematikai pár tengelye párhuzamos, vagy metsződik, akkor $q=1$. Ha a tengelyek kitérőek, akkor $q=0$. A kinematikai párok kölcsönös elhelyezkedésének vizsgálatánál azonban csak az azonos jellegűeket szabad figyelembe venni (például külön kell vizsgálni a csuklókat és külön a csavarmentes kapcsolatokat, stb.) Tekintettel arra, hogy két párhuzamos egyenes is metsződik (a végtelenben), megállapíthatjuk, hogy az ötkötöttségű kinematikai párok tengelyeinek metszéspontjai q értékét adják. Két párhuzamos tengely egy, három párhuzamos tengely kettő, négy párhuzamos tengely három (és így tovább) metszéspontot hoz létre. Ennek megfelelően a q értéke egy, kettő, három, stb. lesz.

Az alábbiakban néhány példa segítségével megmutatjuk q értékének és a mechanizmus szabadságfokának meghatározását. Az 1.8. ábrán bemutatott, ekéknél alkalmazott tarlókerék állító mechanizmusánál a tagok száma $n = 5$. A $p_5 = 5$ darab ötkötöttségű kinematikai pár közül négy csukló egy pedig csavarmentes kapcsolatú kinematikai pár. Három csukló tengelye párhuzamos, tehát két metszéspontot ad, így $q=2$. A mechanizmus szabadságfoka:

$$s = 6(n-1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 + q = 6(5-1) - 5 \cdot 5 + 2 = 1.$$

Számítsuk ki a kardáncsukló (1.7/c ábra) szabadságfokát. Tagok száma $n=4$. A tagokat négy ötkötöttségű csukló kapcsolja össze ($p_5=4$). A csuklók tengelyei egy pontban metsződnek (négy tengely fut össze, ami három metszéspontnak felel meg), vagyis $q=3$ és így a kardáncsukló szabadságfoka:

$$s = 6(n-1) - 5p_5 + q = 6(4-1) - 5 \cdot 4 + 3 = 1.$$



1.32. ábra

A térbeli mechanizmusok szerkezeti képlete síkban mozgó mechanizmusokra is alkalmazható. Az 1.32. ábrán látható szénaprés kinematikai vázlatán a tagok száma $n = 6$. A mechanizmus hét ötkötöttségű párt tartalmaz ($p_5 = 7$, hat csukló és egy haladó mozgást megengedő kinematikai pár). A mechanizmus síkban mozgó, mert a kinematikai párok tengelyei párhuzamosak (a haladó mozgást végző kinematikai pár is felfogható forgó párnak, ha a D pontot egy végtelen hosszú taggal kapcsoljuk az alaphoz. Ezt az ábrán szaggatott vonallal jeleztük). Az elmondottakból következik, hogy a $q=6$, így:

$$s = 6(n-1) - 5p_5 + q = 6(6-1) - 5 \cdot 7 + 6 = 1.$$

A mechanizmusokat a kiegészítő kötöttségek alapján *családokba* soroljuk. Ezen az alapon a mechanizmusok öt családját különböztetjük meg. A család sorszámát a kiegészítő kötöttségek

száma (K) határozza meg.

Ha a mechanizmusnál semmilyen kiegészítő kötöttséget nem írunk elő, akkor a mechanizmus a zérus jelzésű családba tartozik. Az első családnál $K=1$, a másodiknál $K=2$, stb., és végül az ötödik családnál $K=5$. Minden ötkötöttségű kinematikai pár a mechanizmus ötödik családjába tartozik. A zérus és az első családba tartozó mechanizmusok igen bonyolultak, főleg nyomda- és szövőipari gépeken, vagy egyéb területeken alkalmazott automata gépsorokon találkozunk velük. A legelterjedtebb mechanizmusok a harmadik családba tartoznak.

1.7. A síkban mozgó mechanizmusok osztályozása

Artobolevszkij osztályozása alapján azt a legegyszerűbb mechanizmust, amely mindössze egy mozgó tagból áll, és ötkötöttségű kinematikai párral kapcsolódik az állványhoz (1.33. ábra) *I. osztályú mechanizmusnak* nevezzük. Az ilyen mechanizmus szabadságfoka egy.



1.33. ábra

Bármely más, kettőnél több tagból álló bonyolultabb mechanizmus úgy alakítható ki, hogy a hajtótaghoz (tagokhoz) és az állványhoz, vagyis I. osztályú mechanizmushoz valamely több tagból és kinematikai párból álló csoportot kapcsolunk. Ahhoz, hogy a hajtótag (tagok) által meghatározott szabadságfok ne változzon meg, az I. osztályú mechanizmushoz csak nulla szabadságfokú csoport kapcsolható. Ebben az esetben a k tagból és p_5 ötkötöttségű kinematikai párból álló csoport szabadságfoka:

$$s = 3k - 2p_5 = 0,$$

és a kinematikai párok száma, valamint a csoportot képező tagok száma között a következő összefüggés áll fenn:

$$p_5 = \frac{3}{2}k = 1,5k$$

Mivel a kinematikai párok száma csak egész szám lehet, ezért a csoport tagjainak száma mindig páros szám, és a kinematikai párok száma a tagok számának másfélszerese. A fenti egyenletnek végtelen sok kinematikai láncot magában foglaló megoldása van. Ezeket a nulla szabadságfokú kinematikai láncokat *Asszur csoportnak* nevezik, és ezek képezik a síkban mozgó mechanizmusok *Asszur-féle* osztályozásának alapelvét.

Asszur csoportokban a képletnek megfelelően a következő számú tagok és ötkötöttségű kinematikai párok szerepelhetnek:




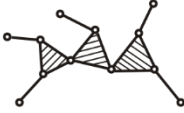

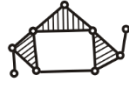
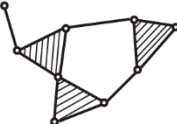

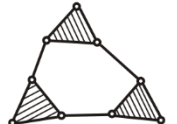
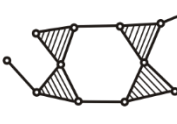
k	2	4	6	8	...	stb.
p_5	3	6	9	12	...	stb.

Az *Asszur* csoportok osztályokra, az osztályok rendekre bonthatók (1.34. ábra). Ha az I. osztályú mechanizmushoz több *Asszur* csoport kapcsolódik, akkor az így kialakított mechanizmus osztályát és rendjét a benne található legmagasabb osztályú és rendű csoport határozza meg.

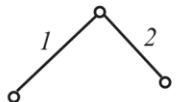
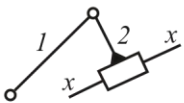
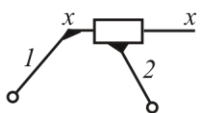
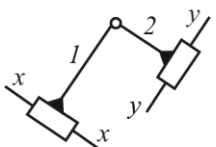
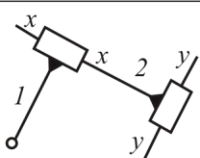
Azokat a kinematikai párokat, amelyek a csoport tagjait egymáshoz kapcsolják *belső kinematikai pároknak*, azokat pedig, amelyek a csoportot a mechanizmushoz kapcsolják, *külső kinematikai pároknak* nevezzük. Az úgynevezett szabad csuklót nem tartalmazó tagnak *központi tag* a neve.

Asszur a nulla szabadságfokú csoportokat II., III., IV., V., stb. *osztályokba* sorolta. A legegyszerűbb II. osztályú csoport két tagból és három (egy belső és két külső) kinematikai párból áll (1.34. ábra). Az egyes osztályok a belső kinematikai párok által kialakított zárt kontúr (alakzat) alapján különböztethetők meg egymástól.

Az Asszur féle csoportok osztályozása

Osz- tály	Rend			
	2	3	4	5
II				
III				
IV				
V				
VI				

1.34. ábra

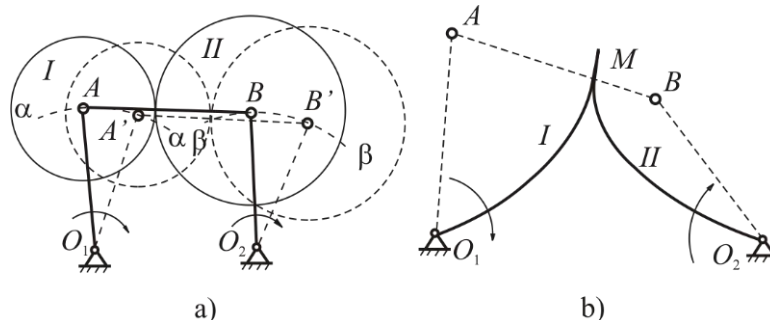
	Három forgó pár
	Két forgó pár és egy külső haladó pár
	Két külső forgó pár és egy belső haladó pár
	Két külső haladó pár és egy belső forgó pár
	Egy külső forgó pár és két haladó pár

1.35. ábra

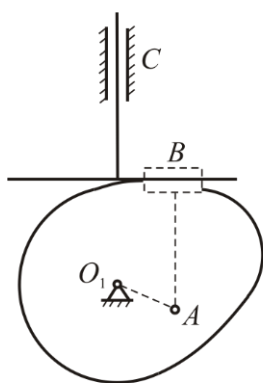
A belső kinematikai párok ennek megfelelően a III. osztályban háromszöget (háromszögeket), IV. osztályban négyszöget, az V. osztályban ötszöget, stb. zárnak körül. Az egyes osztályokon belül a csoportok a szabad karok, illetve a szabad kinematikai párok száma szerint *rendekre* oszlanak. A mechanizmusok legtöbbje II. osztályú, vagyis I. osztályú mechanizmus (hajtótág és állvány) mellett II. osztályú Asszur csoportokat tartalmaz. Jóval kisebb számban találhatóak III. és IV. osztályú mechanizmusok, és bonyolultáguk miatt szinte csak elvétve találkozunk V. és VI. osztályúakkal. A leggyakrabban előforduló II. osztályú, másodrendű csoport néhány vázlatát az 1.35. ábrán mutatjuk be.

A felsőrendű kinematikai párokat tartalmazó mechanizmusokat a szerkezeti és kinematikai vizsgálat egyszerűsítése és szemléletesebbé tétele érdekében célszerű alsórendű ötkötöttségű kinematikai párokat tartalmazó mechanizmusokká átalakítani. Az így átalakított mechanizmus az eredetivel akkor egyenértékű, ha kinematikája és szabadságfoka az előzővel azonos.

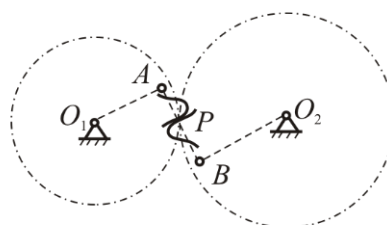
Szerkesszük meg két körtárcsából (*I* és *II*) álló mechanizmus (1.36/a ábra) egyenértékű változatát. Ha az *I* tárcsát O_1 körül elfordítjuk, az mozgását átadja a *II* tárcsának, amely O_2 forgáspontja körül elfordul. Forgáskor az *I* tárcsa *A* geometriai középpontja α - α íven mozog. Az O_1 és az *A* pontok távolsága a mozgás folyamán változatlan marad. Hasonló a helyzet a *B* és O_2 pontoknál is. Az *A* és a *B* pontok távolsága szintén állandó, nagysága a két tárcsa görbületi sugarainak összege. Az \overline{AB} rúd a mechanizmus működésekor az $\overline{AO_1}$ és a $\overline{BO_2}$ tagokhoz képest elfordul. Ez azt jelenti, hogy az *A* és a *B* pontokba csukló helyezhető. Az elmondottnak megfelelően az adott mechanizmus tehát O_1ABO_2 négytagú csuklós mechanizmussal helyettesíthető.



1.36. ábra



1.37. ábra



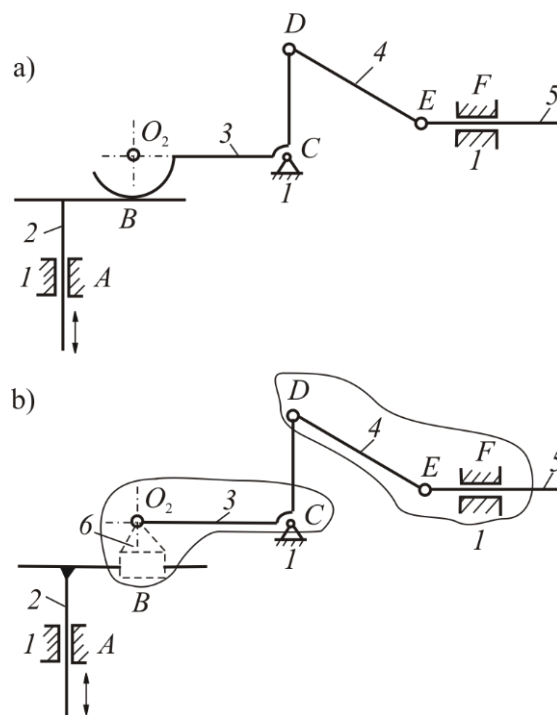
1.38. ábra

Az 1.36/b ábrán az *I* és *II* ívelt karok az *M* pontban érintkeznek. Az említett tagok forgáspontja O_1 , illetve O_2 . Helyettesítsük a felsőrendű kinematikai párokat alsórendűekkel. A megoldás a következő. Meg kell rajzolni az *M* érintkezési pontban az ívek közös profilnormálisát, majd ezen, a görbületi középpontokban (*A* és *B*) el kell helyezni a csuklókat. Ezeket a csuklókat

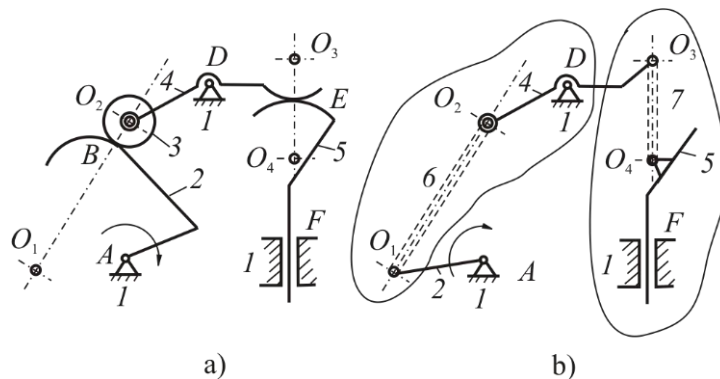
összekapcsolva kialakítjuk az AB tagot. Ha az A és a B csuklókat az O_1 , illetve O_2 forgáspontokkal összekötjük, akkor az eredeti mechanizmust helyettesítő négytagú csuklós mechanizmushoz jutunk, amelyben már nincs felső- rendű kinematikai pár.

Általános szabályként megfogalmazhatjuk, hogy a felsőrendű kinematikai pároknak alsórendűekkel történő helyettesítéskor a profilgörbék érintkezési pontjában meg kell rajzolni a közös profilmormálisát. A közös profilmormálison a görbületi középpontokban el kell helyezni a csuklókat, majd ezeket összekötve kialakítani a feltételezett helyettesítő tagot.

Az 1.37. ábra bütykös mechanizmusának átalakításánál is az első lépés a profilmormális meg-rajzolása a B érintkezési ponton keresztül. A profilmormálison a bütyök A görbületi középpontjában kell elhelyezni a helyettesítő mechanizmus csuklóját. A tolórúd görbületi középpontja a végtelenben van, ezért a másik csukló helyett haladó mozgást megengedő kinematikai párt (B) kell alkalmazni. A helyettesítő mechanizmus az O_1ABC mechanizmus, két haladó és két forgó kinematikai párral.



1.39. ábra



1.40. ábra

Fogaskerekek kapcsolatánál (1.38. ábra) a két kapcsolódó fog közös profilmormálisa a P érintkezési ponton átmenő A és B görbületi középpontokat összekötő egyenes. Az A és a B

pontokba helyezett csuklókat merev taggal összekötve az egyik helyettesítő tagot, majd az A és a B pontokat O_1 illetve O_2 forgáspontokhoz kötve a helyettesítő O_1ABO_2 négytagú csuklós mechanizmust kapjuk. A fogas-kerékpár tehát a II. osztályú, másodrendű mechanizmusokhoz tartozik.

Az elmondottak alapján készítettük el az 1.39/a és az 1.40/a ábrákon látható mechanizmusok helyettesítő egyenértékű mechanizmusait (1.39/b és 1.40/b ábrák).

2. Mechanizmusok kinematikai vizsgálata grafikus módszerrel

A mechanizmusok kinematikai vizsgálata a hajtott tagok mozgásának meghatározásával foglalkozik. Kinematikai vizsgálattal határozzuk meg a mechanizmus tagjainak mozgásállapotára jellemző értékeket: az egyes tagok helyzetét, elmozdulását, szögelfordulását, az egyes tagok pontjainak pontgörbéit, sebességét, gyorsulását, továbbá a tagok szögsebességét és szöggyorsulását.

A vizsgálatokat matematikai módszerrel vagy grafikus úton végezhetjük, esetleg mindkét megoldást alkalmazhatjuk. A matematikai módszerrel végzett vizsgálat pontosabb, mint a szerkesztéses eljárás, az utóbbi viszont gyorsabban eredményre vezet. Ebben a fejezetben a grafikus megoldást mutatjuk be.

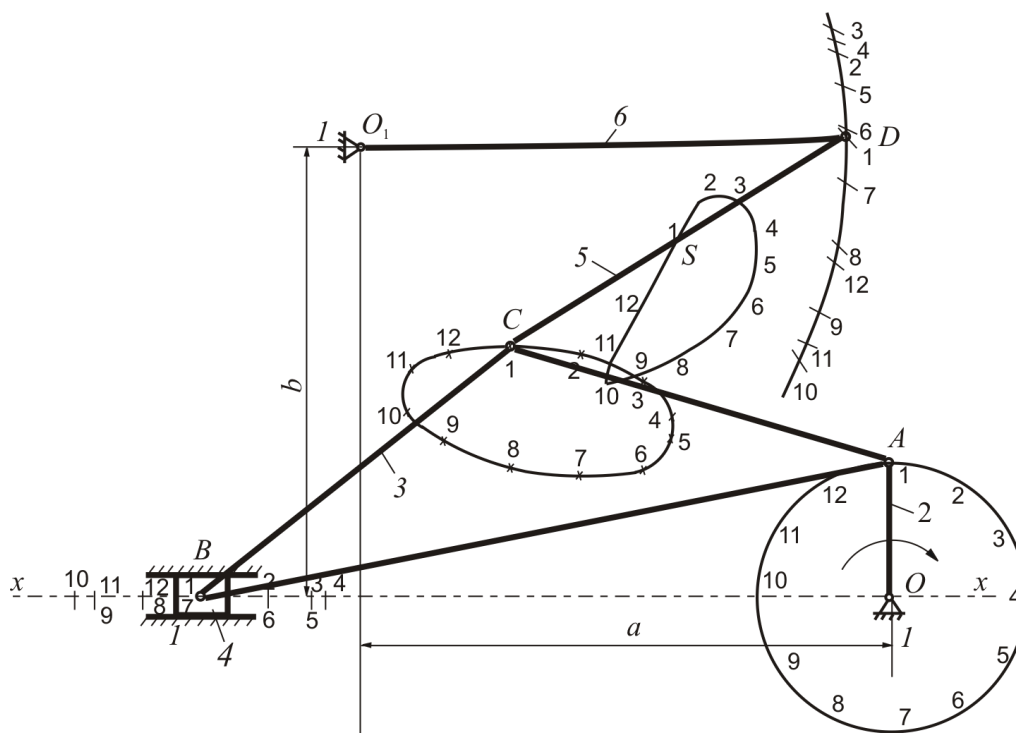
2.1 A tagok helyzetének és az egyes pontok mozgáspályájának meghatározása

Pont görbének (pályagörbének) nevezzük azt a görbét, amely mentén egy tag valamely pontja a mechanizmus működése közben mozog. A pontgörbék megszerkesztése elsősorban két esetben válik szükségessé:

- a munkavégző szerv működésének vizsgálatánál, és
- annak a kérdésnek az eldöntésénél, hogy a vizsgált tag egyáltalán tud-e az előírt mozgáspályán mozogni.

Ahhoz, hogy szerkeszteni tudjuk az egyes pontok pályagörbéit, ismerni kell a mechanizmus mérethelyes rajzát. Ehhez kinematikai vázlatra és a tagok méretére van szükség.

A pontgörbék szerkesztését egy konkrét példán keresztül mutatjuk be (2.1. ábra). A tagok méreteit ismertnek tételezzük fel.



2.1. ábra

A kinematikai vázlat megrajzolásához először a rajzléptéket kell meghatároznunk. A lépték

nagysága a tagok méretétől és a rendelkezésre álló rajzlap nagyságától függ. A rajzléptéket $k_1=(m/mm)$ -ben kell megadni.

A mérethelyes kinematikai vázlat megrajzolása előtt célszerű meghatározni a mechanizmus osztályát és rendjét. Esetünkben a hajtótag (az állvánnyal) I. osztályú mechanizmus, amelyhez két (a 3-4 és az 5-6 jelű tagokból álló) II. osztályú másodrendű csoport kapcsolódik. A mechanizmus tehát ennek megfelelően II. osztályú és 2. rendű. Ezután következhet kinematikai párok középpontjának bejelölése a rajzlapon. Először mindig az állványhoz kapcsolódó kinematikai párok elemeit az O és O_1 csuklók középpontjait, és a haladómozgást megengedő kinematikai pár $x-x$ tengelyét rajzoljuk meg, a és b léptékhelyes felhasználásával. Most már megrajzolhatjuk az \overline{OA} hajtótagot is. Mivel a hajtótag az O középpont körül körbe forog, helyzetét tetszőlegesen vehetjük fel (az ábrán függőleges). A haladómozgást végző B pont helyzetét megkapjuk, ha A -ból \overline{AB} távolsággal metszük az $x-x$ tengelyt. A C pont helyzetét az A pontból \overline{AC} távolsággal, valamint a B pontból \overline{BC} távolsággal húzott körívek metszéspontja adja. Hasonló módon szerkeszthetjük meg a D pont helyét is, és ezzel az említett Asszur csoportból összeállítottuk a mechanizmus mértékhelyes vázlatát a forgattyú első helyzetében. A továbbiakban szerkesszük meg a C és S pontok pontgörbéit (S pont a \overline{CD} tag felezőpontja).

A mechanizmus második helyzetének megszerkesztéséhez a forgattyút 30° -kal elfordítottuk. Ennél a forgattyúállásnál ismét meg kell szerkeszteni a mechanizmus összes pontjainak helyét.

Tizenkét, esetleg ennél is több mechanizmushelyzet megszerkesztése után az azonos jelű pontokat folyamatos görbével összekötve megkapjuk a keresett pontgörbéket.

Magát a mechanizmust általában csak egy helyzetben rajzolják meg. A többi helyzetben csak a pontokat (a kinematikai párok középpontjait) szerkesztik meg, de nem kötik össze őket (azaz nem rajzolják meg a tagokat minden helyzetben), csak a pontgörbéket ábrázolják. A holtponthelyzetek szerkesztéséről az 1.4. fejezetben már érintettük.

2.2. A hajtó (vezető) tag sebesség és gyorsulásterve

Amennyiben a 2.2. ábrán látható 2 jelű hajtótag az A pont körül ω_{21} szögsebességű körmozgást végez, akkor B pontjának sebessége $|\mathbf{v}_B| = l_{AB} \omega_{21} = k_1 \overline{AB} \omega_{21}$, és merőleges az \overline{AB} sugárra. A \mathbf{v}_B vektor ábrázolt nagysága a 2.2/a ábrán: $\overline{Bb} = |\mathbf{v}_B| / k_v$. Az összefüggésekben a

$$k_1 = l_{AB} / \overline{AB} \text{ (m/mm) a rajzlépték,}$$

$$k_v = |\mathbf{v}_B| / \overline{BB'} \text{ (ms}^{-1}\text{/mm) a sebességlépték.}$$

Hasonlóan határozható meg és ábrázolható a 2 jelű hajtótaghoz tartozó C és D pontok sebessége is. Kiszámítjuk a sebességvektorok abszolút értékét, majd a vektorok ábrázolt nagyságát:

$$|\mathbf{v}_C| = l_{AC} \omega_{21} = k_1 \overline{AC} \omega_{21}, \quad \overline{Cc} = |\mathbf{v}_C| / k_v,$$

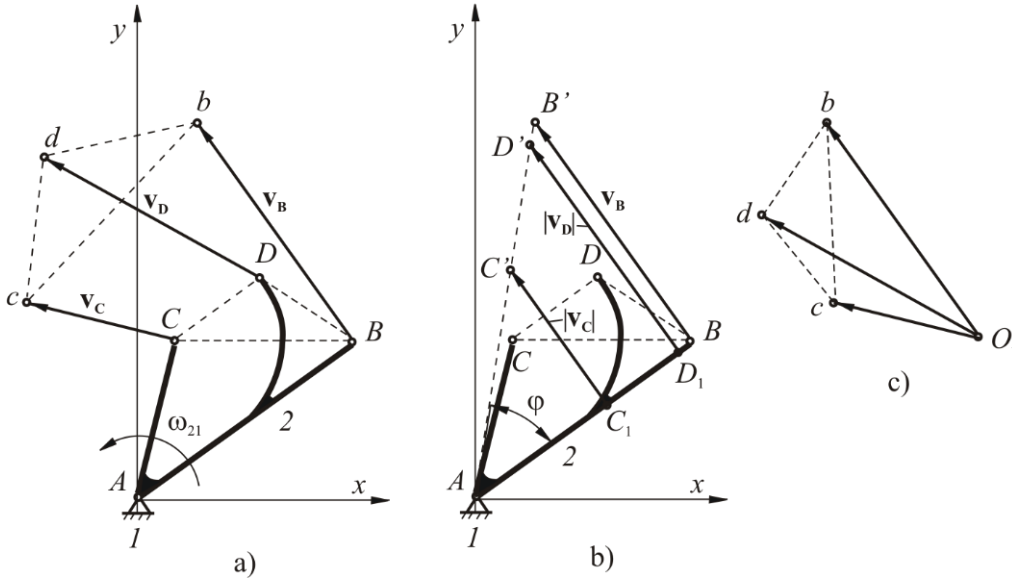
$$|\mathbf{v}_D| = l_{AD} \omega_{21} = k_1 \overline{AD} \omega_{21}, \quad \overline{Dd} = |\mathbf{v}_D| / k_v.$$

Végül az \overline{AC} és az \overline{AD} sugarakra merőlegesen léptékhelyesen rárajzoljuk a sebességvektorokat (2.2/a ábra).

A 2.2/c ábra a 2.2/a ábrán látható mechanizmushoz tartozó sebességtervet mutatja. A sebességtervet úgy kapjuk, hogy a mechanizmus tagjain lévő különböző pontok sebességvektorait

egy közös pontból, a sebességterv O_v pólusából irány és nagyság szerint léptékhelyesen felmérjük. A sebességtervben a sebességeknek megfelelő szakaszok:

$$\overline{O_v b} = |\mathbf{v}_B|/k_v, \quad \overline{O_v c} = |\mathbf{v}_C|/k_v \quad \text{és} \quad \overline{O_v d} = |\mathbf{v}_D|/k_v.$$



2.2. ábra

Ha összekötjük a sebességterv b, d, c és O_v , illetve a hajtó(vezető) tag B, D, C és A pontjait, akkor az így kapott megfelelő háromszögek hasonlóak, vagyis

$$bdc \Delta \approx BDC \Delta, \quad bcO_v \Delta \approx BCA \Delta, \quad \text{stb.}$$

A hasonló háromszögek egymáshoz képest 90 fokkal fordulnak el az ω_{21} szögsebesség irányába.

A hasonló háromszögek egymáshoz viszonyított méretváltozása:

$$\overline{O_v b} / \overline{AB} = (|\mathbf{v}_B|/k_v) / (l_{AB}/k_1) = (|\mathbf{v}_B|k_1) / (l_{AB}k_v) = (k_1/k_v)\omega_{21}.$$

Bármely pont (például a C pont) sebességének nagysága a v_b ismeretében sugararányos szerkesztéssel is meghatározható (2.2/b ábra). Ehhez az \overline{AC} távolságot rá kell körözni az \overline{AB} egyenesre. Az így kapott C_1 pontban az \overline{AB} egyenesre emelt merőlegessel metszeni kell az $\overline{AB'}$ egyenest. A $\overline{C_1C'}$ egyenes a $|\mathbf{v}_C|/k_v$ nagyságát adja, mivel

$$|\mathbf{v}_B|/|\mathbf{v}_C| = (k_1 \overline{AB} \omega_{21}) / (k_1 \overline{AC} \omega_{21}) = \overline{AB} / \overline{AC} = \overline{BB'} / \overline{C_1C'}.$$

A C pont sebességének irányja azonban merőleges az \overline{AC} egyenesre.

A sebességvektorok B', C' és D' végpontjait összekötő egyenes az \overline{AB} rúd sebességeloszlását adja. Az \overline{AB} tag és a sebességeloszlás egyenese közötti φ szög az alábbi összefüggésből határozható meg:

$$\operatorname{tg} \varphi = \overline{BB'} / \overline{AB} = (k_1/k_v)\omega_{21}$$

A 2.2/a ábrán, illetve a 2.3/a ábrán látható mechanizmus gyorsulástervét a 2.3/b ábrán mutatja.

A B , C és D pontok gyorsulásvektorai: \mathbf{a}_B , \mathbf{a}_C és \mathbf{a}_D . Az eredő gyorsulások normális és tangenciális irányú komponensei: \mathbf{a}_B^n , \mathbf{a}_C^n , \mathbf{a}_D^n és \mathbf{a}_B^t , \mathbf{a}_C^t , \mathbf{a}_D^t .

A gyorsulástervben ábrázolt vektorok és vektorkomponensek nagyságai a következő összefüggésekkel határozhatók meg. A B pont normális gyorsulása:

$$|\mathbf{a}_B^n| = l_{AB} \omega_{21}^2 \quad \text{és} \quad \overline{O_a b''} = |\mathbf{a}_B^n| / k_a,$$

ahol $k_a = |\mathbf{a}_B| / \overline{bb_1}$ (ms^{-2}/mm) a gyorsulás léptéke.

A B pont normális gyorsulását szerkesztéssel is meghatározhatjuk. Az A forgásközéppontot kössük össze a \mathbf{v}_B sebességvektor végpontjával (b pont). A b pontban a sebességvektorra állított merőleges, és a B pontból az \overline{Ab} egyenesre állított merőleges metszik ki a b pontból induló \mathbf{a}_B^n gyorsuláskomponens végpontját (2.3/a ábra).

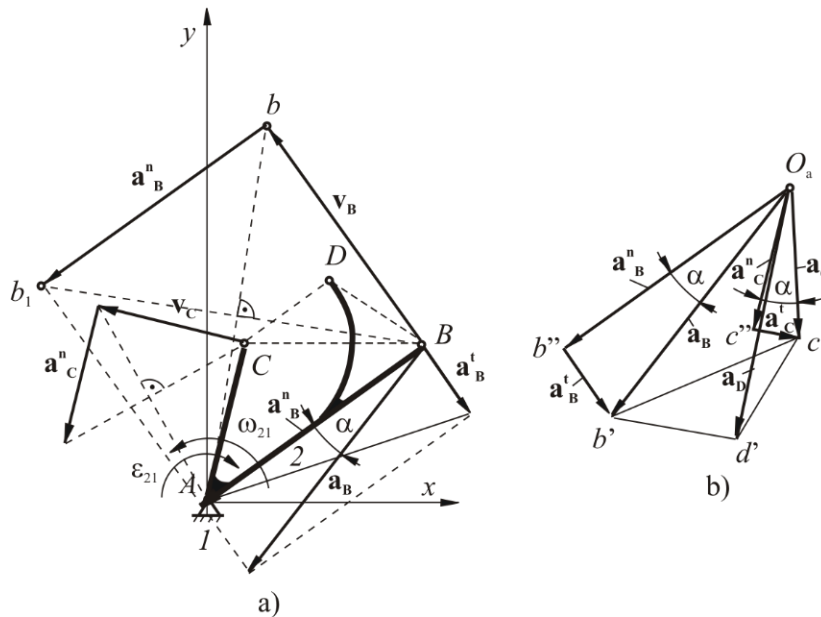
A B pont tangenciális gyorsulása merőleges az \overline{AB} rúdra, és nagysága:

$$|\mathbf{a}_B^t| = l_{AB} \varepsilon_{21} \quad \text{és} \quad \overline{b'' b'} = |\mathbf{a}_B^t| / k_a,$$

ahol ε_{21} a 2 jelű tag szöggyorsulása.

A B pont gyorsulásának nagysága:

$$|\mathbf{a}_B| = \sqrt{|\mathbf{a}_B^n|^2 + |\mathbf{a}_B^t|^2} = l_{AB} \sqrt{\omega_{21}^4 + \varepsilon_{21}^2} \quad \text{és} \quad \overline{O_a b'} = |\mathbf{a}_B| / k_a.$$



2.3. ábra

A B pont eredőgyorsulásának (\mathbf{a}_B) az \overline{AB} rúddal, illetve az \mathbf{a}_B^n -nel bezárt szöge határozza meg a gyorsulás vektor irányát (2.3. ábra). A szög a

$$\text{tg} \alpha = |\mathbf{a}_B^t| / |\mathbf{a}_B^n| = \varepsilon_{21} / \omega_{21}^2$$

kifejezésből számítható.

Szerkesztéssel az \mathbf{a}_B gyorsulásvektor a gyorsuláskomponensek összeadásával határozható meg:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t.$$

Hasonló módon számítható, illetve szerkeszthető a C pont gyorsulásvektora is. A gyorsulások normális komponensei mindig sugárirányúak, a tangenciális komponensek pedig a forgáspontból húzott sugarakra merőlegesek, vagyis:

$$\overline{O_a b''} \perp \overline{AB}, \overline{O_a c''} \perp \overline{AC}, \text{ illetve } \overline{b'' b'} \perp \overline{AB}, \overline{c'' c'} \perp \overline{AC}.$$

A D pont eredőgyorsulását a $CDB \Delta \approx c'd'b'\Delta$ hasonlóság felhasználásával szerkesztéssel is meghatározhatjuk. A $CDB \Delta B$ és C pontjaihoz tartozó szögeket a $\overline{b'c'}$ egyenesre másoljuk a b' és c' pontba, majd a $\overline{b'd'}$ és a $\overline{c'd'}$ irányú szögszárakkal kimetsszük a d' pontot. A szerkesztésnél figyelemmel kell lenni arra, hogy a hasonló háromszögek megfelelő pontjainak körüljárási iránya megegyezzen. Felírható még az $ABC \Delta \approx O_a b'c'\Delta$ hasonlóság is.

2.3. Összetett mozgást végző tagok sebessége és gyorsulása, sebesség- és gyorsulásterve

A mechanizmusok grafikus módszerrel történő vizsgálatához a sebességekre és gyorsulásokra felírható vektoregyenleteket használjuk. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor egy adott tagon a pontok egymástól meghatározott távolságra helyezkednek el.

(2.3.1) Tételezzük fel, hogy ismerjük az ABC tag (3 -as jelű) A és B pontjainak pályagörbéit (α - α és β - β), valamint az A pont \mathbf{v}_A sebességét és \mathbf{a}_A gyorsulását (2.4. ábra). Az adott pillanatban a merev test mozgása az M momentán centrum (pillanatnyi forgáspont) körüli forgásként fogható fel. A momentán centrumot a pályagörbék A és B pontjában megrajzolt normálisok metszéspontja adja. A B pont sebességére felírható, hogy a

$$|\mathbf{v}_A|/|\mathbf{v}_B| = \overline{MA}/\overline{MB}, \text{ amelyből a } |\mathbf{v}_B| = |\mathbf{v}_A| \overline{MB}/\overline{MA}$$

Hasonló összefüggést írhatunk fel a C pont sebességére is, amelynek vektora merőleges a momentán centrumából a C ponthoz húzott sugárra. A C pont sebessége:

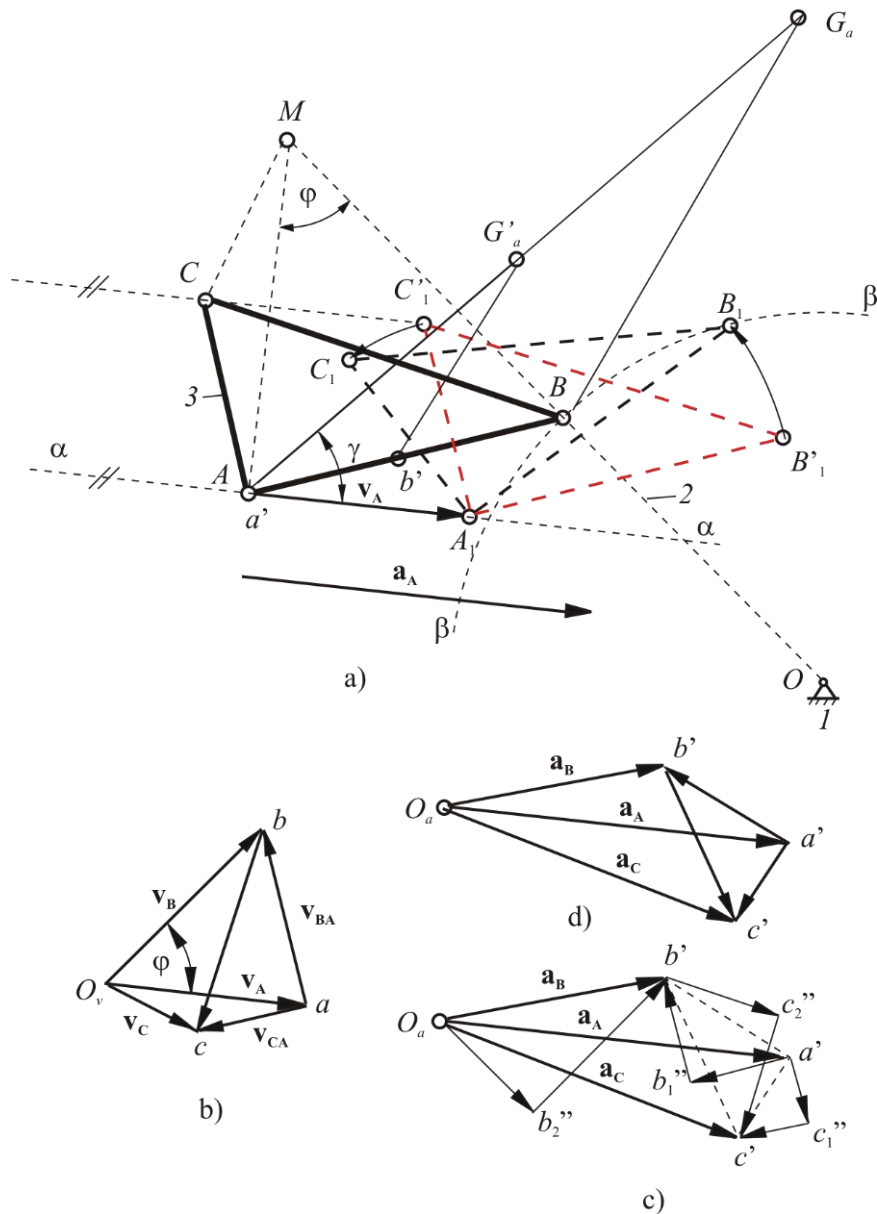
$$|\mathbf{v}_C| = |\mathbf{v}_A| \overline{MC}/\overline{MA}.$$

A tetszőlegesen választott O_v pontból rajzoljuk fel A és B pontok sebességeit (2.4/b ábra). A sebességek végpontjait (a és b) kössük össze. A kapott $aO_v b$ háromszög az AMB háromszöghöz hasonló. Ez a háromszögek megfelelő oldalainak arányából, és az M , valamint az O_v csúcsoknál lévő szögek (φ) azonosságából következik. Az O_v pontból rajzoljuk még fel a C pont sebességét is és végpontját (c) kössük össze az a és b pontokkal. Ekkor az ABC háromszöggel hasonló abc háromszöget kapjuk, mivel

$$\overline{ab}/\overline{AB} = \overline{bc}/\overline{BC} = \overline{ac}/\overline{AC}.$$

Az ABC tag mozgását két mozgás eredőjeként is elképzelhetjük, ugyanis a tag az ABC helyzetből a pályagörbék által előírt $A_1 B_1 C_1$ helyzetbe úgyis elmozdítható, hogy a tagot az A pont pályáján (α - α) önmagával párhuzamosan eltoljuk ($A' B' C'$ helyzetbe), majd a B' pontot A_1 körül ráforgatjuk B pályagörbéjére (β - β). A tag ekkor $A_1 B_1 C_1$ helyzetbe kerül. Ebből következik, hogy B pont eredőmozgása az A pont haladómozgásának, és a B pont A körüli elfordulásából adódó mozgás összegzéseként adódik. Mivel az A pont mozgását ABC tag minden pontja felveszi, ezért azt szállító mozgásnak nevezzük. Az ábrán a könnyebb érthetőség kedvéért az A pont pályagörbéjét egyenesnek adtuk meg (görbületi sugara végtelen nagy). Természetesen a fenti gondolatmenet akkor is érvényes, ha az A pont pályagörbéjének görbületi

sugara véges, ugyanis a vizsgálat nagyon kicsi, elemi időre vonatkozik.



2.4. ábra

Az elmondottakat általánosítva megfogalmazhatjuk, hogy az abszolút merev test valamely pontjának elmozdulásakor a pont eredősebessége a szállítósebesség és a relatívsebesség vektoriális összege.

A vizsgált tagnál az A pont sebessége a szállítósebesség, a B pont A körüli (A-hoz viszonyított) forgómozgásából adódó sebesség pedig a relatív sebesség. Az utóbbit \mathbf{v}_{BA} -val jelölve, a B pont sebessége írható vektoregyenlet:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}.$$

A C pont sebességére két, az előbbivel analóg egyenlet írható fel, mivel a C pont mozgása az A pont mozgásától és A körüli elfordulástól, valamint B pont mozgásától és B körüli elfordulásától is függ. A C sebességének vektoregyenletei:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{CA} \text{ és } \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}.$$

A \mathbf{v}_{BA} , \mathbf{v}_{CA} , \mathbf{v}_{CB} relatívsebességek a sebességsokszög \overline{ab} , \overline{ac} és \overline{bc} oldalai, amelyek az elmozduló tag alakzatához hasonló alakzatot zárnak körül. Az O_vbac sokszöget (2.4/b ábra) sebességtervnek, az O_v pontot a sebességterv pólusának nevezik.

Mivel a relatív mozgások körmozgások, a \mathbf{v}_{BA} , \mathbf{v}_{CA} és \mathbf{v}_{CB} relatívsebességek (a sebességterv \overline{ab} , \overline{ac} és \overline{bc} oldalai) merőlegesen az elmozduló ABC tag megfelelő \overline{AB} , \overline{AC} és \overline{BC} oldalaira, vagyis az abc és az ABC háromszögek hasonló háromszögek.

Az elmondottak összegzéseként megfogalmazhatjuk *Burmester tételét*, amely szerint, valamely test különböző pontjainak egy közös csomópontból (pólusból) felrajzolt sebességvektorai a pontokat (A , B és C) összekötő egyenesek által határolt, elmozduló idomhoz (ABC) hasonló idomban (abc) végződnek.

Az eredősebességek vektorainak végpontjait összekötő egyenesek által határolt sokszög 90° -kal fordul el a tag szögsebességének irányába a mechanizmusban elmozduló megfelelő taghoz képest.

Burmester tételének ismeretében könnyen megszerkeszthetjük valamely tag bármely pontjának sebességét, ha a tag két pontjának sebessége már ismert.

A relatívsebességek és a tag szögsebessége között a $|\mathbf{v}_{BA}| = \overline{AB}\omega_3$, $|\mathbf{v}_{CA}| = \overline{AC}\omega_3$ és $|\mathbf{v}_{CB}| = \overline{BC}\omega_3$ összefüggések állnak fenn. A relatívsebességek irányából (\mathbf{v}_{BA} , \mathbf{v}_{CA} és \mathbf{v}_{CB}) az ω_3 iránya meghatározható. A megállapítás fordítva is igaz.

Fontos annak felismerése, hogy az összetett síkmozgást végző test szögsebessége bármely síkra merőleges tengely körül ω_3 . Azonban olyan tengely, amely körül valamely pont eredősebessége ugyanazt az ω_3 szögsebességet eredményezi, csak egy van, és ez a tag momentán centrumában található. Ennek az a magyarázata, hogy bár a tag a síkra merőleges bármely tengely körül ω_3 szögsebességgel mozog, de a tengelyekkel együtt a szállítómozgás miatt még haladómozgást is végez. Csak a momentán centrumban lévő tengely haladási sebessége nulla (gyorsulása nem!), így a test csak e körül végez tiszta forgómozgást. Mivel a momentán centrum sebessége nulla, így az adott pillanatban az I jelű álló tag (állvány) pontjaként fogható fel, ezért az n -edik tag hozzá viszonyított szögsebességét ω_{n1} -gyel szokták jelölni (a momentán centrum jelölése ekkor M_{n1}).

A 2.4/a ábrán szereplő 3 jelű ABC tag szögsebessége tehát:

$$\omega_3 = \omega_{31} = |\mathbf{v}_{BA}| / \overline{AB} = |\mathbf{v}_{CA}| / \overline{AC} = |\mathbf{v}_{CB}| / \overline{BC} = |\mathbf{v}_A| / \overline{AM} = |\mathbf{v}_B| / \overline{BM} = |\mathbf{v}_C| / \overline{CM}$$

Az összetett mozgás komponenseinek megfelelően a B pont gyorsulására (a 2.4/d ábrán az $\overline{O_a b'}$ szakasz) a sebességegyenlettel analóg módon az alábbi összefüggés írható fel:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}$$

A B pont $\overline{B'_1 B_1}$ íven történő relatívmozgásának \mathbf{a}_{BA} gyorsulása két komponensből áll: az \mathbf{a}_{BA}^n normális összetevőből ($\overline{a' b'_1}$), amely mindig a relatív forgásközéppont felé, vagyis B -ből A -ba mutat, és az \mathbf{a}_{BA}^t tangenciális komponensből ($\overline{b' b'_1}$), amely merőleges \overline{AB} -re.

Az elmondottak alapján a B pont vektoregyenlete:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t$$

Az \mathbf{a}_{BA}^n és az \mathbf{a}_{BA}^t gyorsuláskomponensekre felírható összefüggések a következők:

$$|\mathbf{a}_{BA}^n| = \overline{AB} \omega_{31}^2 = |\mathbf{v}_{BA}^2| / \overline{AB} = |\mathbf{v}_{BA}| \omega_{31},$$

$$|\mathbf{a}_{BA}^t| = \overline{AB} \varepsilon_{31},$$

ahol ε_{31} a 3-as tag szöggyorsulása.

Ugyanakkor a 2 jelű tag B pontja az O körül változó szögsebességű forgómozgást végez, ezért O felől vizsgálva, az \mathbf{a}_B eredőgyorsulás két komponensből áll:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{BO}^n + \mathbf{a}_{BO}^t.$$

Az \mathbf{a}_{BO}^n ($\overline{O_a b_2''}$) és \mathbf{a}_{BO}^t ($\overline{b' b_2''}$) gyorsuláskomponensek a következő összefüggésekből határozhatók meg:

$$|\mathbf{a}_{BO}^n| = \overline{OB} \omega_{21}^2 = |\mathbf{v}_B^2| / \overline{OB} = |\mathbf{v}_B| \omega_{21},$$

$$|\mathbf{a}_{BO}^t| = \overline{OB} \varepsilon_{21},$$

ahol: \overline{OB} a B pont pályájának görbületi sugara; O a görbületi középpont; ω_{21} és ε_{21} a B pont, illetve a 2-es tag) szögsebessége, illetve szöggyorsulása az álló görbületi középponthez képest. A B pont gyorsulására felírt vektoregyenleteket összevetve azt írhatjuk:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t,$$

amelyek egyértelműen meghatározzák a B pont gyorsulását.

A C pont gyorsulására a sebességhez hasonlóan két egyenletet kell felírni:

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CA}^n + \mathbf{a}_{CA}^t,$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t.$$

Az \mathbf{a}_{CA} ($\overline{a' c'}$) és az \mathbf{a}_{CB} ($\overline{b' c'}$) relatív gyorsulások normális és tangenciális komponenseire itt is felírható, hogy

$$|\mathbf{a}_{CA}^n| = \overline{CA} \omega_{31}^2 = |\mathbf{v}_{CA}^2| / \overline{CA} = |\mathbf{v}_{CA}| \omega_{31} = k_a \overline{(a' c_1'')},$$

$$|\mathbf{a}_{CB}^n| = \overline{CB} \omega_{31}^2 = |\mathbf{v}_{CB}^2| / \overline{CB} = |\mathbf{v}_{CB}| \omega_{31} = k_a \overline{(b' c_2'')},$$

$$|\mathbf{a}_{CA}^t| = \overline{AC} \varepsilon_{31} = k_a \overline{(c' c_1'')},$$

$$|\mathbf{a}_{CB}^t| = \overline{BC} \varepsilon_{31} = k_a \overline{(c' c_2'')}.$$

A vektoregyenletek alapján felrajzolt sokszöget (2.4/c és d. ábra) gyorsulástervnek az O_a pontot a gyorsulásterv pólusának nevezzük.

Az egyszerűsítés végett a sebesség- és a gyorsulástervekben a sebesség- és gyorsulásvektorok jelöléseit nem mindig írjuk fel, hanem a vektorok végpontjaira a kinematikai párt jelző nagybetűnek megfelelő kis betűt (a gyorsulásoknál egy vagy több vesszős indexszel megkülönböztetve őket). A sebesség és a gyorsulástervekben az eredő vektorok mindig a pólusból indulnak és végpontjaikat összekötő egyenesek a relatív gyorsulásokat adják.

Az \mathbf{a}_{BA} , \mathbf{a}_{CA} , és \mathbf{a}_{CB} a relatív gyorsulások a következő összefüggésekkel is kifejezhetők:

$$|\mathbf{a}_{BA}| = \overline{AB} \sqrt{\omega_{31}^4 + \varepsilon_{31}^2},$$

$$|\mathbf{a}_{CA}| = \overline{AC} \sqrt{\omega_{31}^4 + \varepsilon_{31}^2},$$

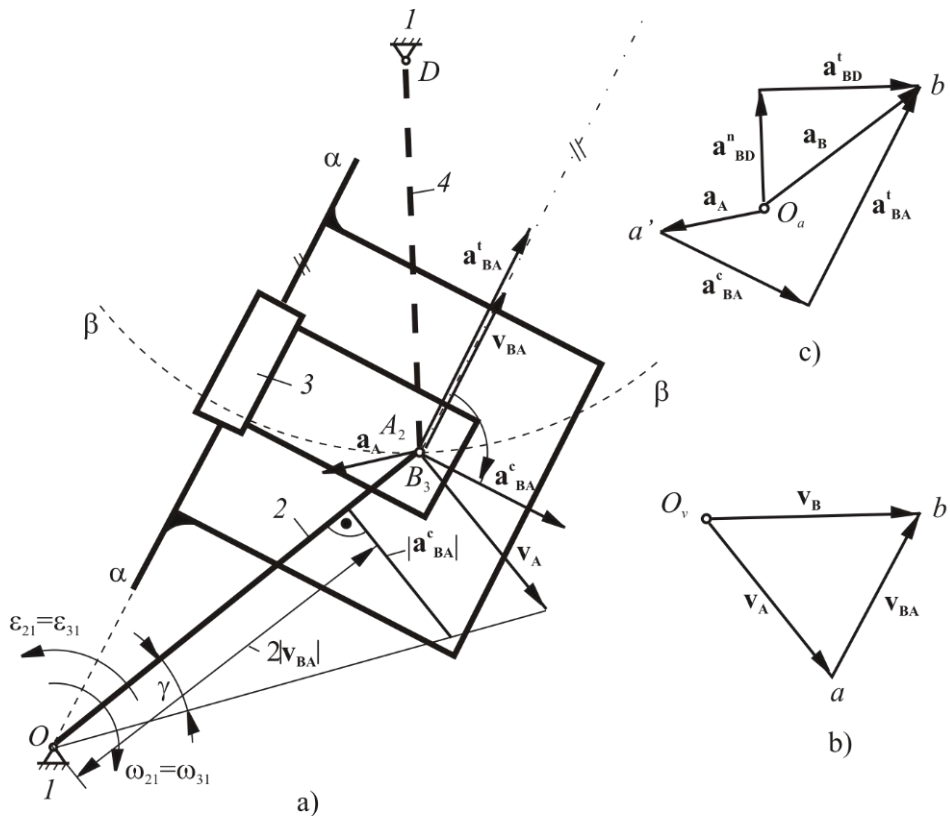
$$|\mathbf{a}_{CB}| = \overline{BC} \sqrt{\omega_{31}^4 + \varepsilon_{31}^2}.$$

Ebből következik, hogy

$$|\mathbf{a}_{BA}| / \overline{AB} = |\mathbf{a}_{CA}| / \overline{AC} = |\mathbf{a}_{BC}| / \overline{BC},$$

$$\overline{a'b'} / \overline{AB} = \overline{a'c'} / \overline{AC} = \overline{b'c'} / \overline{BC}.$$

A kapott egyenlőség arra utal, hogy az $a'b'c'\Delta$ és az $ABC\Delta$ megfelelő oldalai arányosak, tehát a háromszögek hasonlóak (2.4. ábra). Ebből következik, hogy *Burmester-tétel* a gyorsulásokra is érvényes, vagyis a közös pontból (a gyorsulásterv pólusából) felrajzolt eredőgyorsulások a mechanizmusban elmozduló alakzathoz hasonló alakzaton végződnek. A hasonló idomok egymáshoz viszonyított elfordulása azonban itt nem 90 fokos.



2.5. ábra

(2.3.2) Most vizsgáljuk meg a második esetet, amikor két pont két különböző, de egymással haladómozgást megengedő kinematikai párt képző tagon fedőpontként helyezkedik el.

Ennek értelmében adott a 2-es tagon lévő A, és a 3-as tagon elhelyezkedő B pont (2.5. ábra). Az A és B fedőpontok, mivel a B pont az A pont felett helyezkedik el. Az ábrán a pontokat annak a tagnak a számával jelöltük, amelyikhez tartoznak. A 2-es és a 3-as tagok ötkötöttégű haladómozgást megengedő kinematikai párral kapcsolódnak egymáshoz. A könnyebb érthetőség kedvéért a 2-es tag forogjon az álló O pont körül ω_{21} szögsebességgel és ε_{21} szöggyorsulással,

így az A pont sebessége és gyorsulása adott, vagyis:

$$|\mathbf{v}_A| = \omega_{21} \overline{OA} \text{ és } |\mathbf{a}_A| = \overline{OA} \sqrt{\omega_{21}^4 + \varepsilon_{21}^2}$$

A B pont sebessége a most vizsgált esetben is két komponensből: a szállítósebességből és a relatívsebességből áll. Mivel a szállítómozgás itt a 2-es jelű tag mozgása, ezért a szállítósebesség annak a 2-es jelű tagon lévő pontnak a sebessége lesz, amely pont egybeesik B ponttal (vagyis az A pont sebessége). A relatívsebesség (\mathbf{v}_{BA}) a 3-as tag 2-hez viszonyított sebessége, így iránya az α - α vezetékkel párhuzamos.

A B pont sebességének vektoregyenlete tehát:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

Ha ismerjük a B pont \overline{DB} görbületi sugarú β - β pontgörbét, akkor a fenti egyenletnek megfelelően a sebességterv is elkészíthető (2.5/b ábra). A \mathbf{v}_B eredősebesség iránya ugyanis a pontgörbe B pontban húzott érintőjének irányába esik, vagyis merőleges \overline{DB} görbületi sugarára.

A B pont eredőgyorsulása három komponensből tevődik össze: az \mathbf{a}_A szállító-, az \mathbf{a}_{BA} relatív- és az \mathbf{a}_{BA}^c Coriolis gyorsulásból. A relatívmozgás, mint már rámutattunk α - α irányú. A B pont ilyen mozgása esetén a relatívgyorsulás csak tangenciális, vagyis az α - α vetékkel párhuzamos lehet. Ezért a relatívgyorsulást \mathbf{a}_{BA}^t -vel jelöljük.

A Coriolis gyorsulás a mechanizmusoknál akkor jelentkezik, ha egy haladómozgást végző tag egyidejűleg forgómozgást is végez. Esetünkben az \mathbf{a}_{BA}^c Coriolis gyorsulás abszolút értéke az alábbi képlettel számítható:

$$|\mathbf{a}_{BA}^c| = 2|\mathbf{v}_{BA}|\omega_{21},$$

ahol: \mathbf{v}_{BA} a relatívmozgás sebessége,

ω_{21} annak a tagnak a szögsebessége, amelyen a szállítómozgást adó pont (A_2) elhelyezkedik.

A Coriolis gyorsulás egy vektorszorzat eredménye: $\mathbf{a}_{BA}^c = 2\boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{v}_{BA}$, ahol az $\boldsymbol{\omega}_{21}$ szögsebesség vektor merőleges a mechanizmus síkjára. A Coriolis gyorsulás iránya ezért úgy határozható meg, hogy a \mathbf{v}_{BA} relatívsebesség vektort a kezdőpontja körül az ω_{21} szögsebesség irányába 90 fokkal elfordítjuk. Az így elforgatott \mathbf{v}_{BA} relatívsebesség iránya a Coriolis gyorsulás irányát adja.

Az elmondottak alapján a B pont gyorsulásának vektoregyenlete:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^t + \mathbf{a}_{BA}^c.$$

Megemlítjük, hogy mivel a 2-es és 3-as jelű tagok haladómozgást megengedő kinematikai párral kapcsolódnak egymáshoz, ezért egymáshoz képest elfordulni nem tudnak, vagyis ezek a tagok azonos szögsebességgel és szöggyorsulással mozognak:

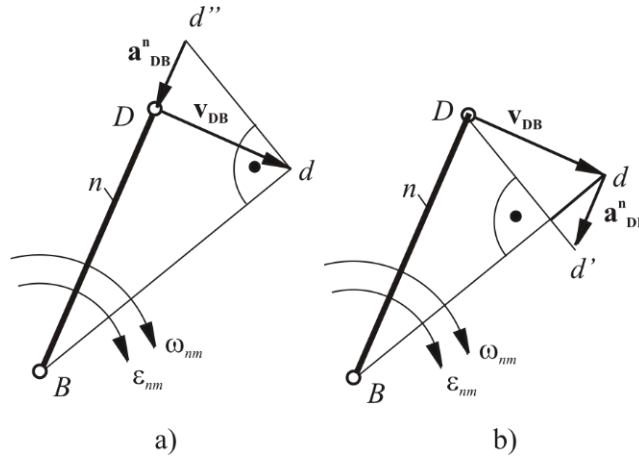
$$\omega_{21} = \omega_{31} \text{ és } \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31}.$$

A gyorsulásterv (2.5/c ábra) elkészítéséhez a B kinematikai párhoz kapcsolódó tag (esetünkben a 4-es) felől is meg kell vizsgálni a B pont mozgását. Ha például a kapcsolat az ábra szerinti, akkor a B pont eredőgyorsulását egyértelműen meghatározó vektoregyenletek az alábbiak:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^t + \mathbf{a}_{BA}^c.$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{BD}^n + \mathbf{a}_{BD}^t$$

A bemutatott két esettel kapcsolatban fontosnak tartjuk még megjegyezni, hogy a normális- és a *Coriolis* gyorsulások számításával, és mint később látni fogjuk szerkesztéssel nagyság és irány szerint egyaránt meghatározhatók. A tangenciális gyorsulásoknak azonban csak az irányát ismerjük, azok mindig egybeesnek a pályagörbe adott pontjához megrajzolt érintővel. A vektoregyenletek alapján megszerkesztett gyorsulástervekben ezért, mint a 2.4. és a 2.5. ábrákon bemutatott esetekben is láttuk, a végső megoldást a tangenciális gyorsulások irányának metszéspontjai adják.



2.6. ábra

A normális irányú gyorsulás szerkesztését a 2.6. ábrán mutatjuk be. Tételezzük fel, hogy valamely mechanizmusból kiemeltük az n jelű \overline{BD} tagot. Általános esetben az n jelű tag B pont körüli forgása változó szögsebességű, egy adott pillanatban tehát ε_{21} szöggyorsulás is fellép. Ennek megfelelően a D pont gyorsulása B -hez viszonyítva két összetevőből áll, mégpedig az \mathbf{a}_{DB}^n normális és az \mathbf{a}_{DB}^t tangenciális összetevőből. Tételezzük fel, hogy a \mathbf{v}_{DB} sebességtervet előzőleg már megszerkesztettük, és így a \mathbf{v}_{DB} relatívsebességet ismerjük. A \mathbf{v}_{DB} relatívsebesség és a \overline{BD} rúd hosszának ismeretében az \mathbf{a}_{DB}^n szerkeszthető. Ha ugyanis a D pontban felrajzolt \mathbf{v}_{DB} végpontjából a \overline{Bd} -re merőlegest állítunk, akkor ez a merőleges \overline{Bd} meghosszabbításán kiemetszi a $\overline{Dd''}$ hosszúságot, azaz az \mathbf{a}_{DB}^n normális gyorsulást. A szerkesztés helytállósága a 2.6/a ábrán látható hasonló háromszögeinek felhasználásával bizonyítható. A $BdD\Delta \approx dDd''\Delta$, amelyből a következő arányosságok írhatók fel:

$$\overline{Dd''} / \overline{Dd} = \overline{Dd} / \overline{BD} = \mathbf{a}_{BD}^n / \mathbf{v}_{DB} = \mathbf{v}_{DB} / \overline{BD}, \text{ és amelyből az } \mathbf{a}_{BD}^n = \mathbf{v}_{DB}^2 / \overline{BD}.$$

Ugyanez az eredmény adódik a 2.6/b ábra szerinti szerkesztésből is, amelynél D -ből a \overline{Bd} -re bocsájtott merőleges, és a d -ből a \overline{BD} -vel párhuzamosan húzott egyenes d' metszéspontja határozza meg a $\overline{dd'} = \mathbf{a}_{DB}^n$ normális gyorsulást.

Ezt követően térjünk át a *Coriolis* gyorsulás szerkesztésére. A 2.5. ábra vizsgálatánál a *Coriolis* gyorsulás meghatározására felírt összefüggés síkban mozgó mechanizmusoknál az alábbiak szerint is felírható:

$$|\mathbf{a}_{BA}^c| = 2|\mathbf{v}_{BA}|\omega_{21} = 2|\mathbf{v}_{BA}|\frac{|\mathbf{v}_A|}{OA}.$$

Az összefüggés alapján \mathbf{a}_{BA}^c gyorsulás megszerkeszthető. A 2.5. ábrából kiolvasható, hogy

$$|\mathbf{v}_A|/OA = \operatorname{tg}\gamma = \omega_{21}.$$

Az utóbbi összefüggést az előzőbe helyettesítve, és rendezve, a *Coriolis* gyorsulás szerkesztésére alkalmas képletet kapjuk:

$$\frac{|\mathbf{v}_A|}{OA} = \frac{|\mathbf{a}_{BA}^c|}{2|\mathbf{v}_{BA}|} = \operatorname{tg}\gamma = \omega_{21}.$$

A képlet alapján, ha az $O A a_1$ háromszög \overline{OA} oldalára, O -ból indulva $2|\mathbf{v}_{BA}|$ -t mérünk fel, akkor ennek a végpontjában a \mathbf{v}_A -val párhuzamosan (\overline{OA} -ra merőlegesen) éppen az \mathbf{a}_{BA}^c nagyságát kapjuk meg.

Az irányát úgy határozzuk meg, hogy a \mathbf{v}_{BA} viszonylagos sebességvektort a B pontba helyezzük, és azt ω_{21} szögsebesség irányába 90 fokkal elforgatjuk. Ne feledjük, hogy a *Coriolis* gyorsulás mindig merőleges a relatívsebességre.

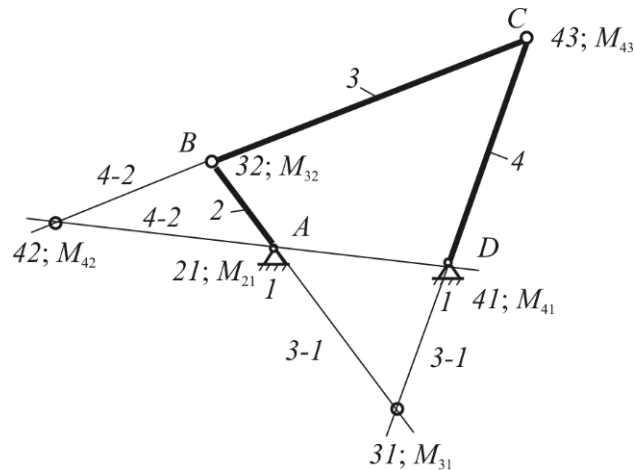
2.4. Momentán centrumok és gyorsuláspólusok meghatározása

A mechanikából ismert, hogy a merevtestek (mechanizmus tagjai) párhuzamos síkokban történő mozgásakor mozgásuk egy adott pillanatban a pillanatnyi forgáspont az ún. momentán centrum körüli forgómozgásként fogható fel.

A mechanizmusoknál a tagok mozgását vizsgálhatjuk a mozdulatlan állványhoz képest, de vizsgálhatjuk a mechanizmus bármely tagjához viszonyítva is. Ennek megfelelően az eredőmozgás és a relatívmozgás momentán centruma különböző.

A momentán centrumok meghatározásának menetét egy négytagú csuklós mechanizmus segítségével mutatjuk be (2.7. ábra). Első lépésként számozzuk be a tagokat növekvő sorrendű arab számokkal, majd azokat a csuklópontokat, ahol a kapcsolódó tagok egymáshoz képest elfordulnak, jelöljük a két kapcsolódó tag csökkenő sorrendben felírt számaival, azaz egy számpárral. Például a B csuklót jelölő számpár 32 lesz, mivel a 2-es és 3-as tagokat kapcsolja össze. Az így beszámozott csuklópontok azonnal megadnak néhány momentán centrumot. Például a 2-es és a 4-es jelű tag állványhoz viszonyított momentán centrumai M_{21} és M_{41} az A és a D pontok lesznek. A hármas tagnak a ketteshez viszonyított pillanatnyi forgáspontja a B , és végül a 4-es tagnak a 3-hoz viszonyított momentán centruma a C pont.

A további momentán centrumok (M_{31} és M_{42}) meghatározásához célszerű a tagokat is új jelöléssel ellátni. Egy-egy tag csuklópontjait jelölő számpárokból hagyjuk el a mindkét számpárban előforduló számot, és a megmaradt nagyság szerint csökkenő sorrendberendezett két számmal jelöljük meg a tagokat. Így például a 3-as tag csuklópontjait jelölő számpárok 32 és 43, amelyekből a 3-t elhagyjuk, és tag új jele 4-2 lesz. Hasonlóan a 4-es tag 3-1, és a 2-es tag 6-1 jelet kap. Végül a két azonos jelölésű tag meghosszabbításának metszéspontja a jelölésben szereplő tagok egymáshoz viszonyított momentán centrumát adja. Ilyen megfontolás alapján kaptuk meg a \overline{CB} (4-2), és az \overline{AD} (4-2) egyenesek metszéspontjában M_{42} -t és az \overline{AB} valamint \overline{CD} tagok metszéspontjában M_{31} -t.



2.7. ábra

Az elmondottak alapján bizonyítás nélkül közöljük, hogy egy egyenesen mindig három olyan pont (momentán centrum) helyezkedik el, amelyeknek számpárjai három számból úgy tevődnek össze, hogy a három szám közül kettő mindig megtalálható valamelyik számpárban. Például M_{32} , M_{21} és az M_{31} momentán centrumok egy egyenesre esnek, és indexeik az 1, 2, 3 számokból tevődnek össze. E számok közül kettőt valamelyik index mindig tartalmazza.

A momentán centrumok meghatározásának ismertetett módja *Kennedy* angol tudóstól származik.

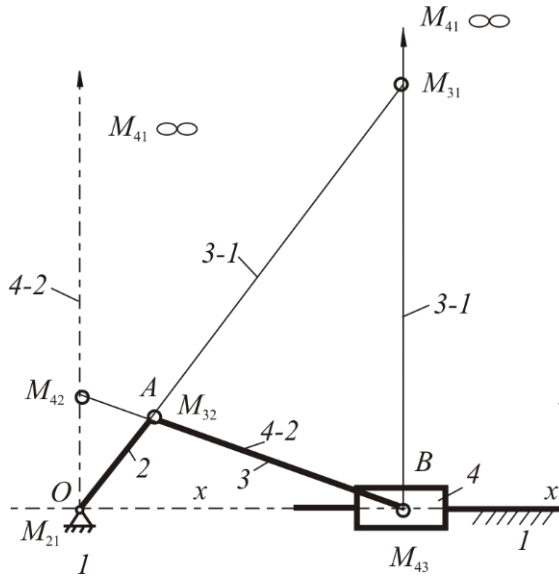
Ismeretes, hogy a momentán centrum a tag pontjaiból a sebességekre merőlegesen rajzolt egyenesek metszéspontjában fekszik. Sok esetben ez a tétel is felhasználható, így példánknál az M_{31} meghatározásánál is. Ugyanis az \overline{AB} és \overline{CD} tagok merőlegesek a B illetve a C pont sebességére, ezért az említett tagok meghosszabbításának metszéspontja közvetlenül M_{31} -t adja.

Legyen adott a 2.8. ábra szerinti OAB forgattyús mechanizmus. A csuklók meghatározzák az M_{21} , M_{32} és az M_{43} momentán centrumokat is. Az M_{41} a B ponton átmenő, az $x-x$ tengelyre merőleges egyenesen, a végtelenben van. Az M_{31} az A és a B pontokban a sebességekre merőleges $3-1$ metszéspontjában adódik. Az M_{42} -t az O pontban az $x-x$ tengelyre merőleges egyenes (ez az egyik, $4-2$ jelű egyenes, mivel M_{41} a végtelenben van), és az AB tag (a másik $4-2$ jelű egyenes) meghosszabbításának metszéspontja adja. A 2.9.- 2.11. ábrákon a módszer további alkalmazását mutatjuk be. A 2.10. ábrán látható kulisszás mechanizmus M_{31} momentán centrumának szerkesztése a következő gondolatmenetből látható be. A B pont sebessége merőleges \overline{AB} -re. Az M_{31} -nek tehát az \overline{AB} tagon vagy annak meghosszabbításán kell lenni. Az M_{31} -be vezető másik sugár helyét úgy kapjuk meg, hogy a 3-as taghoz egy Q síkot erősítünk. Ezen a síkon a C_3 pont legyen a fedőpontja C -nek. Ekkor a C_3 pont sebességének vektor-egyenlete:

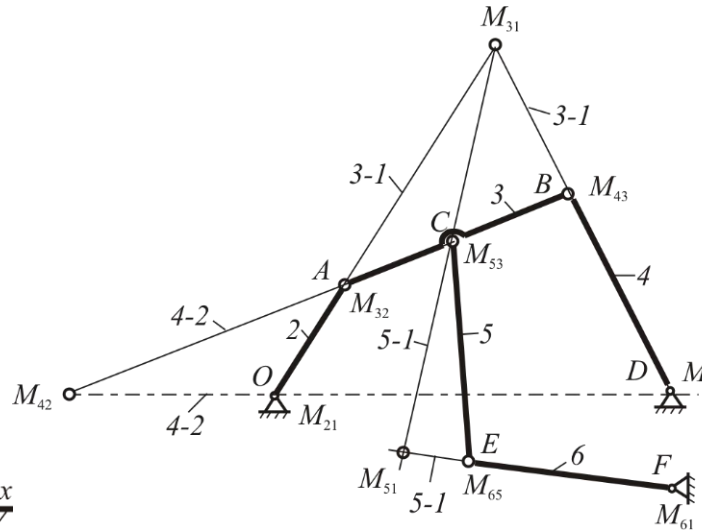
$$\mathbf{v}_{C_3} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{C_3C'}$$

Mivel $\mathbf{v}_C = 0$, ezért $\mathbf{v}_{C_3} = \mathbf{v}_{C_3C'}$, vagyis C_3 pont eredősebessége párhuzamos a 4-es taggal. Ebből következik, hogy az M_{31} -be vezető másik sugár a C pontban a 4-es tagra merőlegesen rajzolt egyenes. A két említett sugár metszéspontja M_{31} . A mozdulatlan taghoz viszonyított momentán centrumok elsősorban akkor használhatók előnyösen, amikor a hajtótagtól távol eső pontoknak csak a sebességét kell meghatároznunk.

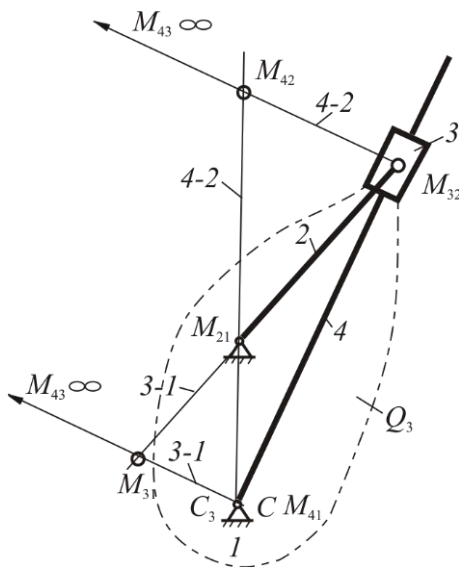
Valamely tag pillanatnyi gyorsuláspólusának azt a pontot nevezzük, amelynek gyorsulása az adott időpillanatban nulla. A gyorsuláspólus tehát a momentán centrummal analóg fogalom (a momentán centrumban ugyanis a sebesség nulla). A gyorsuláspólust G_a -val jelöljük, és nem tévesztendő össze a gyorsulásterv pólusával.



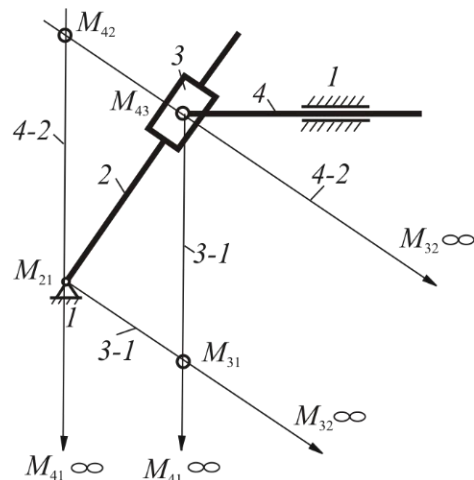
2.8. ábra



2.9. ábra



2.10. ábra



2.11. ábra

A 2.3 fejezetben láttuk, hogy ha valamely tag két pontját összekötjük a momentán centrummal, akkor az így kapott háromszög hasonló a sebességtervben a két pont eredősebessége által alkotott háromszöggel (lásd 2.4. ábrát, ahol $AMB \Delta \approx aO_v b \Delta$). Bizonyítás nélkül közöljük, hogy e megállapítás a gyorsulástervezés esetén is érvényes, vagyis $a'O_{ab}' \Delta \approx AG_a B \Delta$.

Az említett hasonlóságokból következik, hogy a sebességterv, valamint a gyorsulástervezés ismétében a momentán centrum, illetve a gyorsulástervezés megszerkeszthető.

A gyorsulástervezés megszerkesztését a 2.4. ábrán mutatjuk be, ott ugyanis az ABC tag gyorsulásterve már adott. Nyilvánvaló, hogy a gyorsulástervezés O_a pontjának a 3-as jelű tag azon pontja felel meg, amelynek a gyorsulása nulla, vagyis a gyorsulástervezés. Azt is láttuk, hogy a tagon lévő \overline{AB} távolságnak a gyorsulástervezésben az $\overline{a'b'}$ távolság felel meg. Az előbb említett hasonlóságot, vagyis: $a'O_{ab}' \Delta \approx AG_a B \Delta$, is figyelembe véve kézenfekvő, hogy a gyorsulástervezés

tervben az eredő gyorsulásoknak a 3-as tagon a gyorsuláspólusba vezető sugarak felelnek meg. Az elmondottak ismeretében a gyorsuláspólus szerkesztésének a menete a következő.

A 3-as tag A pontjából \overline{AB} -re felmérjük a gyorsulásterv $\overline{a'b'}$ metszékét (aBA), majd erre a metszékére rárajzoljuk az $a'O_{ab}$ három szöggel egybevágó $a'G_{ab}$ háromszöget. Hosszabbítsuk meg az $\overline{a'G_a}$ egyenest, és hozzuk metszésbe a B pontból a $\overline{b'G_a}$ -val párhuzamosan húzott egyenessel. A kapott metszéspont a 3-as tag keresett gyorsuláspólusa. (A szerkesztésből látszik, hogy az $AG_{ab} \Delta \approx a'O_{ab} \Delta$). A gyorsuláspólus ismeretében most már az ABC tag bármely pontjának gyorsulása megszerkeszthető. Az eredő gyorsulások ugyanis arányosak a gyorsuláspólusból a kérdéses pontokhoz húzott sugarakkal- és a sugarakkal mindig azonos (γ) szöveget zárnak be.

2.5. Elemi csoportokból felépített II. osztályú mechanizmusok vizsgálata

Az 1.7. fejezetben láttuk, hogy egy szabadságfokú mechanizmust kapunk, ha a hajtótághoz (I. osztályú mechanizmus) és az állványhoz nulla szabadságfokú Asszur csoportot kapcsolunk.

2.5.1 Két tagból és három forgómozgást megengedő kinematikai párból álló csoport

Négytagú csuklós mechanizmusnál (2.12. ábra) az \overline{OA} tag a hajtótág, az \overline{AB} és \overline{BC} pedig II. osztályú, nulla szabadságfokú csoportot alkot.

Ezen a példán részletesen bemutatjuk az egyes pontok sebességének és gyorsulásának szerkesztését. További példáinknál a jegyzet terjedelmének korlátozott volta miatt csak az ábrák könnyebb megértéséhez legszükségesebb tudnivalókat közöljük.

Tételezzük fel, hogy ismerjük a mechanizmus mérethelyes kinematikai vázlatát (2.12. ábra), valamint az adott helyzetben a hajtótág ω_{21} szögsebességét és ε_{21} szöggyorsulását. Az ábra hosszúság léptéke: k (m/mm). Határozzuk meg az A , B és D pontok sebességét, gyorsulását, a tagok szögsebességét és szöggyorsulását.

Az A pont sebességének nagysága a $|\mathbf{v}_A| = l_{AO}\omega_{21}$ összefüggésből számítható (l_{AO} a 2-es tag valódi hossza). A \mathbf{v}_A merőleges \overline{OA} -ra, és az ω_{21} szögsebesség irányába mutat. Az A és a B pontok egy tagon helyezkednek el, ezért a B pont sebességének vektoregyenlete:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}, \text{ ahol } \mathbf{v}_{BA} \perp \overline{AB} \text{ és } \mathbf{v}_B \perp \overline{BC}.$$

Az egyenletben egy vektor (\mathbf{v}_A) irány és nagyság, kettő pedig (\mathbf{v}_B és \mathbf{v}_{BA}) csak irány szerint ismert. A vektoregyenletben a két ismeretlen nagyságú, de ismert irányú vektor egy ismeretlennek felel meg, ezért az egyenlet határozott megoldást ad.

A \mathbf{v}_B és \mathbf{v}_{BA} sebességek a sebességterv segítségével szerkeszthetők meg. A sebességterv megrajzolásához fel kell venni (tetszőlegesen, de célszerűen vehető fel!) a sebességterv léptékét: k_v (m/smm). A sebességterv léptékének ismeretében \mathbf{v}_A mm-ben ábrázolandó nagysága:

$$\overline{O_v a} = |\mathbf{v}_A| / k_v \quad (\text{mm}).$$

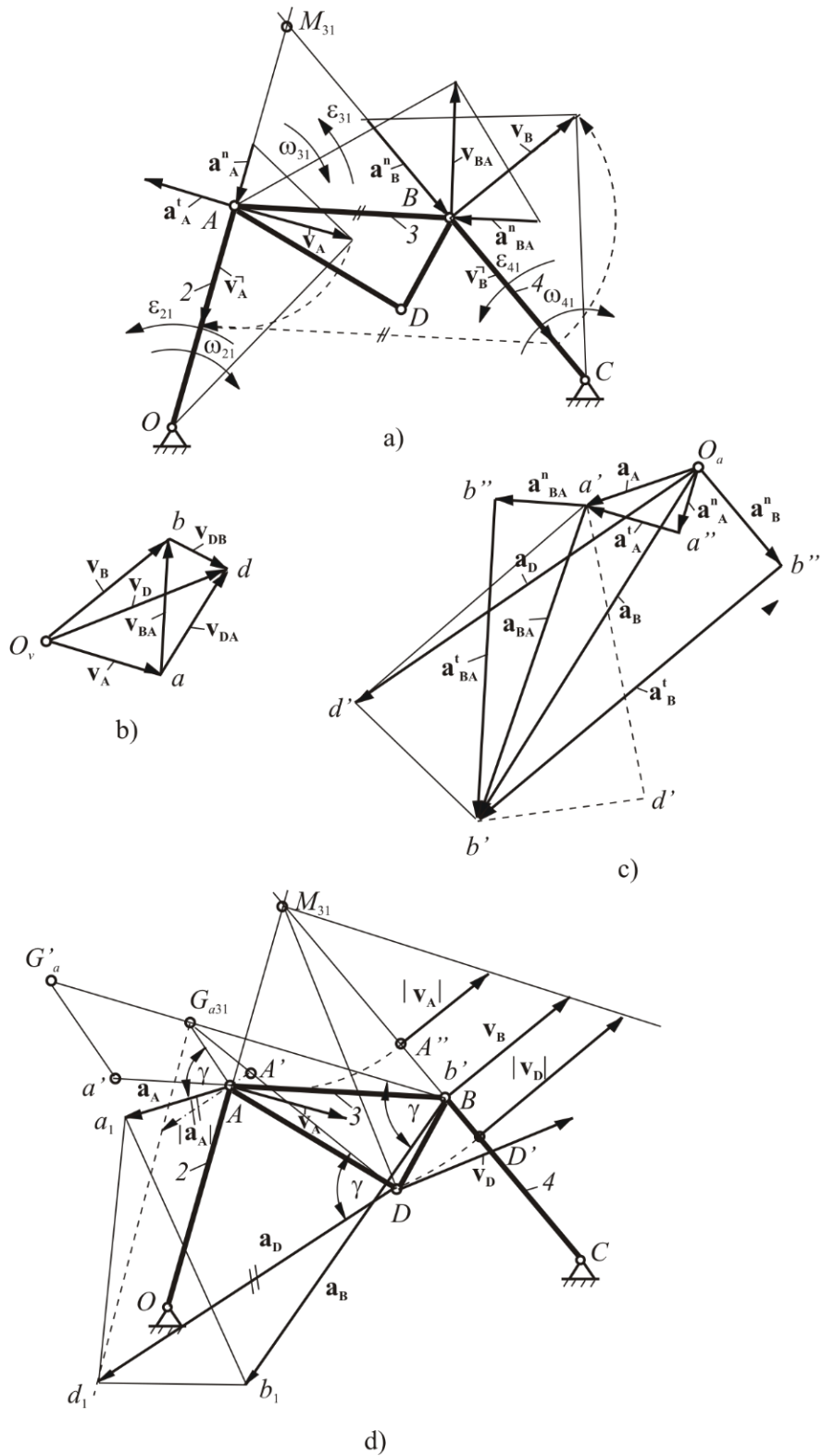
A vektoregyenletnek megfelelően a sebességterv O_v pólusából (2.12. ábra) felrajzoljuk $\overline{O_v a}$ -t, majd a végpontjából merőlegest rajzolunk az \overline{AB} -re, O_v -ből pedig \overline{CB} -re rajzolunk merőlegest. Az említett merőlegesek metszéspontja kimetszi a b pontot. Az $\overline{O_v b}$ a B pont sebességét, \overline{ab} pedig a \mathbf{v}_{BA} sebességét ábrázolja. A sebességek értékei:

$$|\mathbf{v}_B| = k_v \overline{O_v b} \text{ és } |\mathbf{v}_{BA}| = k_v \overline{ab}.$$

A 3-as és a 4-es tagok szögsebességei:

$$\omega_{31} = |\mathbf{v}_{BA}| / l_{AB} \text{ és } \omega_{41} = |\mathbf{v}_B| / l_{BC}.$$

ahol $l_{AB} = k_1 \overline{AB}$ és $l_{BC} = k_1 \overline{AB}$, vagyis a 3-as illetve 4-es tag valódi hossza.



2.12. ábra

Az ω_{31} irányának meghatározásához \mathbf{v}_{BA} -t a B pontba kell helyezni, és meg kell nézni, hogy a B

pont az A ponthoz képest milyen irányba forog. Így példánkánál azt kapjuk, hogy az óramutató járásával ellentétes irányú. Hasonlóan határozható meg ω_{41} iránya is: a B pontba helyezett \mathbf{v}_B az óramutató járásával megegyező irányú ω_{41} szögsebességet eredményez.

Az A , B és D pontok egy tagon (a 3-as tagon) helyezkednek el. A D pont sebességének megszerkesztéséhez *Burmester* hasonlósági tételt használjuk fel. Ennek értelmében az a ponton keresztül merőlegest rajzolunk \overline{AD} -re, a b ponton keresztül pedig \overline{BD} -re. A két egyenes metszéspontja a d pont. Az $\overline{O_v d}$ távolság lemérése után a \mathbf{v}_D nagysága kiszámítható:

$$|\mathbf{v}_D| = k_v \overline{O_v d}.$$

Ha nincs szükségünk a relatívsebességekre (például nem kell a gyorsulásokat megszerkeszteni), akkor a pontok eredősebességeit a momentán centrumok felhasználásával is megszerkeszthetjük.

A továbbiakban két olyan módszert mutatunk be, amelyeknél az eredősebességek megszerkesztéséhez a momentán centrumot használjuk. Ha ismert valamely tag momentán centruma, és egy pontjában az eredősebessége, akkor a tag bármely pontjának eredősebessége az úgynevezett beforgatásos módszerrel megszerkeszthető. A szerkesztést a 2.12/a ábrán a 3-as jelű tagon mutatjuk be. Első lépésként \mathbf{v}_A -t kell elforgatni 90 fokkal (az elfogatott vektort az ábrán \mathbf{v}_A^{\perp} jelöli). Az elforgatás iránya tetszőleges. A \mathbf{v}_A^{\perp} végpontjából húzzunk az \overline{AB} taggal párhuzamos egyenest, és ezzel elmetsszük a $\overline{CM_{31}}$ rádiuszt. A metszéspont és a B pont közötti távolság \mathbf{v}_B^{\perp} , ami a 90 fokkal elforgatott \mathbf{v}_B vektor. Végül \mathbf{v}_B^{\perp} -t a helyére kell forgatni a \overline{BC} tagra merőleges irányba.

A szerkesztés helyességének magyarázata az, hogy az eredősebességek 90 fokos elforgatásakor azok a momentán centrumba vezető rádiuszvektorokba esnek. Az azonos irányú és egyenlő nagyságú rúdirányú komponenseik pedig a tagra merőleges helyzetbe kerülnek, ezért az így elforgatott eredősebességek végpontjai az adott taggal párhuzamos egyenesen fekszenek.

A \mathbf{v}_B sebesség megszerkesztéséhez felhasználhatjuk a $|\mathbf{v}_A|/|\mathbf{v}_B| = \overline{AM_{31}}/\overline{BM_{31}}$ arányosságot is. A \mathbf{v}_B sebesség *arányossággal* történő szerkesztése a 2.12/d ábra szerint végezhető el. Az ábrán M_{31} -ből az $\overline{AM_{31}}$ távolságot átköröztük $\overline{BM_{31}}$ -re, majd az így nyert A'' pontba a $\overline{BM_{31}}$ -re merőlegesen felrajzoltuk \mathbf{v}_A abszolút értékét $|\mathbf{v}_A|$ -t. Ennek végpontját összekötöttük M_{31} -gyel, és az így kapott egyenes, a B pontban az $\overline{BM_{31}}$ -re emelt merőlegesből, kimetszette a \mathbf{v}_B -t.

Hasonlóan megszerkeszthető a D pont eredősebessége is. Az eredősebességek a momentán centrum ismeretében még a *rúdirányú komponensek egyenlősége* alapján is megszerkeszthetők.

Térjünk rá a gyorsulások szerkesztésére. Az A pont gyorsulásának vektoregyenlete:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_A^t,$$

ahol:

$$\mathbf{a}_A^n = l_{OA} \omega_{21}^2 \text{ az } \overline{AO} \text{-val párhuzamos és } A \text{-ból } O \text{-ba mutat,}$$

$$\mathbf{a}_A^t = l_{OA} \varepsilon_{21} \text{ az } \overline{AO} \text{-ra merőleges,}$$

A 2.12/a ábrán \mathbf{a}_A^n mm-ben ábrázolandó nagyságát a \mathbf{v}_A sebességből szerkesztettük meg. Az

\mathbf{a}_A^t -t kiszámítottuk, és a k_a gyorsuláslépték figyelembevételével ábrázoltuk.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy k_a már nem vehető fel tetszőlegesen, ha a normális gyorsulásokat szerkesztéssel határoztuk meg! (A normális gyorsulások szerkesztésének menetét a 2.6. ábrán mutattuk be). A k_a gyorsuláslépték a hosszúság (k_1) és a sebesség (k_v) léptékéből számítható ki a $k_a = k_v^2 / k_1$ (m/s²mm) kifejezésből.

Természetesen ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha \mathbf{a}_A^n számított (valóságos) értékét elosztjuk a \mathbf{v}_A -ból megszerkesztett normális gyorsulás metszéke mm-ben mért értékével.

A gyorsuláslépték ismeretében \mathbf{a}_A^t ábrázolandó nagysága:

$$\overline{a'a''} = |\mathbf{a}_A^t| / k_a \text{ (mm)}.$$

Az A pont eredőgyorsulásának megszerkesztéséhez a gyorsulásterv O_a pólusából (2.12/c ábra) fel kell mérni az \mathbf{a}_A^n -nak megfelelő $\overline{O_a a''}$ metszékét, majd ehhez hozzá kell adni az \mathbf{a}_A^t -nak megfelelő $\overline{a'a''}$ metszékét. A tangenciális komponens irányát az ε_{21} határozza meg. A két komponens eredője az \mathbf{a}_A -nak megfelelő $\overline{O_a a'}$ metszék.

A B pont gyorsulásának vektoregyenlete:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t.$$

Mivel a B pont a \overline{BC} sugarú körön mozog, ezért az \mathbf{a}_B két komponensből, az \mathbf{a}_B^n -ből és az \mathbf{a}_B^t -ből áll. Ennek megfelelően az előbbi egyenlet a következő alakba írható:

$$\mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t, \text{ ahol: } \mathbf{a}_B^t \perp \overline{CB} \text{ és } \mathbf{a}_{BA}^t \perp \overline{AB}.$$

A normális gyorsulások ábrázolandó metszékei a megfelelő sebességekből szerkeszthetők a korábban bemutatott módszerrel.

A normális gyorsulások számíthatók is az

$$|\mathbf{a}_{BA}^n| = |\mathbf{v}_{BA}|^2 / l_{AB} \text{ és az } |\mathbf{a}_B^n| = |\mathbf{v}_B|^2 / l_{BC}$$

összefüggésekből, majd k_a felhasználásával ábrázolhatók. Gyorsabban eredményre vezet azonban a szerkesztő eljárás, ezért a továbbiakban ezt részesítjük előnyben.

Az előbbi vektoregyenletnek megfelelően az A pont gyorsulásának végpontjából (vagyis a' -ből) felrajzoljuk az \mathbf{a}_{BA}^n -nak megfelelő $\overline{a'b''}$ metszékét, majd b'' -ből merőlegest húzunk \overline{AB} -re. A továbbiakban O_a -ból felmérjük $\overline{O_a b''}$ -t és a b'' -ből merőlegest bocsájtunk \overline{BC} -re. Az említett merőlegesek (tangenciális irányúak) metszéspontja b' . Az $\overline{O_a b'}$ a k_a léptékű \mathbf{a}_B gyorsulást adja, amelynek tényleges értéke: $|\mathbf{a}_B| = k_a \overline{O_a b'}$.

A gyorsulástervből az \mathbf{a}_{BA} relatívgyorsulás is meghatározható, mivel azt az $\overline{a'b'}$ metszék ábrázolja. A tagok szöggyorsulásai:

$$\varepsilon_{31} = |\mathbf{a}_{BA}^t| / l_{AB} \text{ és } \varepsilon_{41} = |\mathbf{a}_B^t| / l_{BC}.$$

Irányukat a tangenciális komponensek megfelelő pontba történő áthelyezésével határozhatjuk meg.

A D pont gyorsulásának meghatározásához ismét Burmester tételét használjuk fel, amely szerint \mathbf{ad} végpontjának az $\overline{a'b'}$ metszékére (az \mathbf{a}_{BA} relatív gyorsulásra) rajzolt ABD Δ -gel hasonló $a'b'd'\Delta$ d' pontjára kell esni. Az $\overline{a'b'}$ -re két ilyen háromszög rajzolható. Ezek közül csak a vonalkázott háromszög ad helyes megoldást, mivel annak körüljárási iránya megegyezik az ABD háromszögével. Az $\overline{O_a d'}$ metszék lemerése után az \mathbf{ad} kiszámítható: $|\mathbf{a}_D| = k_a \overline{O_a d'}$.

A 2.12/d ábrán megszerkesztettük a 3-as jelű tag gyorsuláspólusát is. A szerkesztést a 2.4 pontban leírtak alapján végeztük, vagyis a 3-as tag B pontjából az \overline{AB} egyenesre felmértük a gyorsulásterv $\overline{a'b'}$ metszékét, majd erre rárajzoltuk az $a'O_a b'$ háromszöggel egybevágó $a'G_a b'$ háromszöget (az \overline{AB} gyorsulástervét). Az A pontból párhuzamosot húzva $a'G_a'$ -vel, a $b'G_a'$ egyenesen kimetszettük a G_{a31} gyorsuláspólust.

A 3-as tag gyorsuláspólusának ismeretében a D pont gyorsulása megszerkeszthető. A D pont gyorsulásának szerkesztésénél azt a tételt használjuk fel, mely szerint egy tag különböző pontjainak gyorsulásai a gyorsuláspólusba vezető rádiuszvektorok nagyságával arányosak, és a rádiuszvektorokkal azonos szöveget (az ábrán γ -val jelöltük) zárnak be.

A D pont gyorsulásának szerkesztésénél első lépésként a D pontot összekötöttük a G_{a31} -gyel, majd az így kapott rádiuszvektorhoz γ hajlásszögű egyenest rajzoltunk a D pontból (γ értékét az \mathbf{a}_A és a hozzátartozó rádiuszvektor határozza meg). Ez utóbbi \mathbf{ad} irányát adja. Második lépésként $\overline{AG_{a31}}$ AG távolságot G_{a31} -ből ráköroztük a $\overline{DG_{a31}}$ egyenesre, és a kapott A' pontba \mathbf{ad} irányával párhuzamosan felmértük az \mathbf{a}_A abszolút értékét. Ez utóbbi végpontját G_{a31} -gyel összekötve metszettük \mathbf{ad} irányát (d_1). A $\overline{Dd_1}$ metszék az \mathbf{ad} k_a léptékű vektorát adja.

A 3-as jelű tag A , B és D pontjaiba berajzolva azok eredőgyorsulásait, majd végpontjaikat összekötve az $a_1 b_1 d_1$ háromszöget kapjuk, amelyre az alábbi összefüggés érvényes:

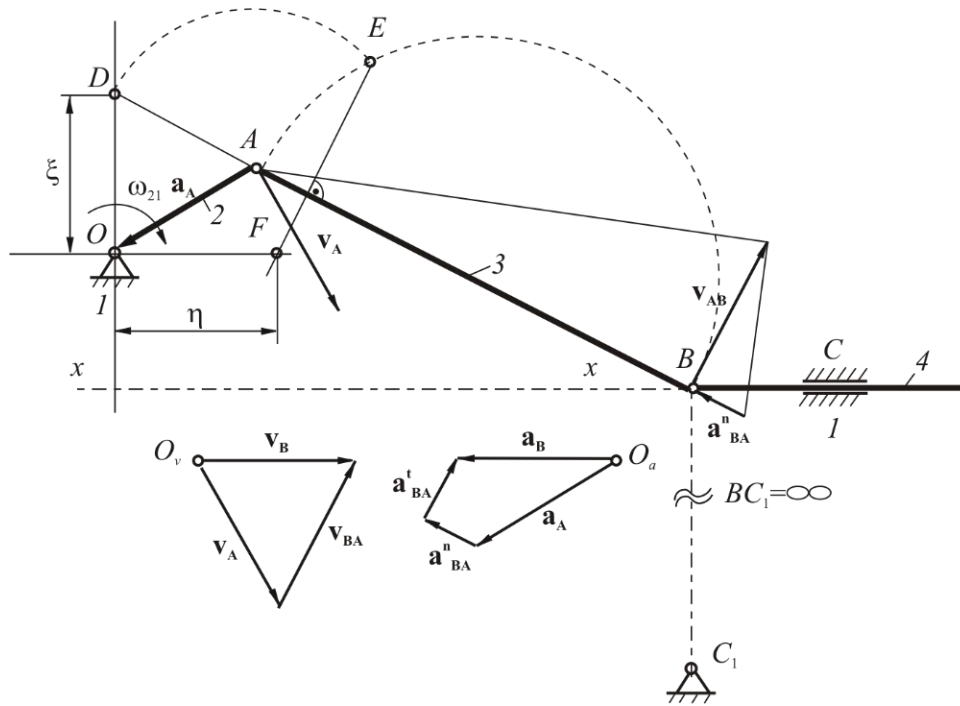
$$a_1 b_1 d_1 \Delta \approx a' b' d' \Delta \approx ABD \Delta.$$

Ha az \mathbf{a}_A mellett ismerjük \mathbf{a}_B -t is, akkor a fenti hasonlósági tétel is felhasználható \mathbf{ad} megszerkesztéséhez. A fenti hasonlósági tétel természetesen a sebességekre is érvényes!

A 2.13. ábrán látható forgattyús mechanizmus is a két tagból és három forgómozgást megengedő kinematikai párból álló mechanizmus-csoportba tartozik, ugyanis a B pontban $\overline{BC_1} = \infty$ sugárral az állványhoz kapcsolt $OABC_1$ négytagú csuklós mechanizmussal helyettesíthető az eredeti mechanizmus. Ha az \overline{OA} forgattyú $\omega_{21} = \text{állandó}$ szögsebességgel forog, akkor $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_A^n$. Az A pont sebességét a forgattyúsugárral azonos nagyságú vektorral ábráztuk. Ebben az esetben az \mathbf{a}_A ábrázolt értéke a \mathbf{v}_A ábrázolt értékével (mm-ben mérve) azonos. Ilyen esetben a sebességlépték $k_v = k_1 \omega_{21}$, a gyorsuláslépték pedig $k_a = k_1 \omega_{21}^2$. Szerkesszük meg a B pont sebességét és gyorsulását. A B pontra írható vektoregyenletek:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}, \\ \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t. \end{aligned}$$

Az egyenletekben szereplő értékek közül a \mathbf{v}_A és az \mathbf{a}_A adott, az \mathbf{a}_{BA}^n megszerkeszthető (lásd az ábrát); a \mathbf{v}_B és az \mathbf{a}_B párhuzamos $(x-x)$ -szel. A \mathbf{v}_{BA} és az \mathbf{a}_{BA}^t pedig merőleges \overline{AB} -re. A B pont sebessége és gyorsulása a 2.13. ábrán, a sebesség- és gyorsulástervben látható módon megszerkeszthető.



2.13. ábra

Az előbb említett léptékek alkalmazása esetében más módon is megszerkeszthető a B pont sebessége és gyorsulása. A szerkesztés menetét a 2.13. ábrán ismertetjük. Az \overline{AB} hajtórúd meghosszabbítása a D pontban metszi az O -n átmenő $x-x$ megvezetésre merőleges egyenest. Az \overline{OD} , ξ hosszúságú metszik a B pont $k_v = k_1 \omega_{21}$ léptékű sebessége (az OAD háromszög ugyanis egybevágó az $O_v ab$ háromszöggel), de ahhoz képest 90 fokkal elfordított helyzetű.

A B pont gyorsulásának megszerkesztéséhez \overline{AB} átmérőjű félkört kell rajzolni a hajtórúdra, és erre az A -ból rá kell körözni az \overline{AD} távolságot (E pont), majd az E pontból merőlegest kell bocsátani a hajtórúdra. Ez utóbbi az F pontban metszi az O ponton átmenő ($x-x$)-szel párhuzamos egyenest. Az \overline{OF} metszék (η hosszúságú) és a B pont $k_a = k_1 \omega_{21}^2$ léptékű gyorsulásvektora. A vektor iránya mindig a forgattyú O középpontja felé mutat.

2.5.2 Két csuklót és egy külső haladómozgást megengedő kinematikai párt tartalmazó csoport

A 2.14. ábrán a címben definiált csoportot a 3-as és 4-es jelű tag képezi. Az A a külső, a B a belső ötkötöttségű csukló, a D pedig a haladómozgást megengedő külső kinematikai pár. E csoportból a 2-es és az 5-jelű hajtótagok segítségével egy két szabadságfokú mechanizmust alakítottunk ki.

Adott tehát a mechanizmus mérethelyes vázolata mellett az ω_{21} , ω_{51} , szögsebesség és az ε_{21} és ε_{51} szöggyorsulás. Az $\omega_{51} = \text{állandó}$ és így $\varepsilon_{51} = 0$.

A sebességterv elkészítését a B pont sebességének meghatározásával kezdjük, ugyanis a csoportot alkotó tagokat ez a csukló kapcsolja össze. A B pontra írható sebességegyenlet a 2-es jelű tag felől:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}, \text{ ahol a } |\mathbf{v}_A| = \overline{OA} \omega_{21}, \mathbf{v}_A \perp \overline{OA}\text{-ra és a } \mathbf{v}_{BA} \perp \overline{AB}\text{-re.}$$

A B pont sebességét meghatározó másik egyenletet abból kiindulva kell felírni, hogy a 4-es jelű

$$\overline{O_v a} + \overline{ba} = \overline{O_v c_5} + \overline{bc_5}.$$

A fenti egyenletnek megfelelően a sebességterv megszerkesztése a következőképpen történik. A sebességterv pólusából felrajzoljuk \mathbf{v}_A -nak megfelelő $\overline{O_v a}$ a metszőkét, majd végpontjából merőlegest rajzolunk \overline{AB} -re (2.14/b ábra).

Ezután ugyancsak az O_v pólusból felrajzoljuk \mathbf{v}_C -nek megfelelő $\overline{O_v c_5}$ -t, és végpontjából párhuzamost rajzolunk $x-x$ -szel. A két ismert irányú egyenes metszéspontja a b , amely meghatározza \mathbf{v}_B , \mathbf{v}_{BA} és \mathbf{v}_{BC} k_v léptékű vektorát ($\overline{O_v b}$, \overline{ba} , $\overline{bc_5}$). A \mathbf{v}_B tényleges nagysága:

$$|\mathbf{v}_B| = k_v \overline{O_v b}.$$

A 3-as jelű tag ω_{31} szögsebességének meghatározására a 2.12. ábrán bemutatott példához hasonlóan történik. $\omega_{31} = |\mathbf{v}_B| = k_v / l_{AB}$. A 4-es jelű és az 5-ös jelű tagok azonos szögsebességgel mozognak, mivel az említett két tag haladó mozgást megengedő kinematikai párral kapcsolódik egymáshoz, tehát: $\omega_{41} = \omega_{51}$. A 4-es jelű tag bármely más pontjának pl. H -nak sebességegyenlete az alábbi alakba írható:

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{HE}.$$

A \mathbf{v}_E vektor ismert, mivel az E pont az 5-ös jelű tagon van. A \mathbf{v}_{HE} szintén ismert, ugyanis $\mathbf{v}_{HE} = \mathbf{v}_{BC}$, és így

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{BC}, \text{ illetve } \overline{O_v h} = \overline{O_v e_5} + \overline{he_5}, \text{ ahol } \overline{he_5} = \overline{bc_5}.$$

Végül a H pont sebességének tényleges nagysága:

$$|\mathbf{v}_H| = k_v \overline{O_v h}.$$

A gyorsulásterv elkészítése a sebességtervhez hasonló gondolatmenet alapján történik. A B pont gyorsulását meghatározó két egyenlet:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t, \text{ ahol az } \mathbf{a}_{BA}^t \perp \overline{AB} \text{-re,}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{BC}^c + \mathbf{a}_{BC}^t, \text{ ahol az } \mathbf{a}_{BC}^t \parallel x-x \text{-szel.}$$

Az egyenletekben az \mathbf{a}_A és az \mathbf{a}_C irány és nagyság szerint ismert. Az \mathbf{a}_{BA}^n és az \mathbf{a}_{BC}^c számítható, illetve szerkeszthető, a vektorok $k_a = k_v^2 / k_1$ léptékű szerkesztése 2.14/a ábrán látható. Az \mathbf{a}_A és az \mathbf{a}_C k_a -val történő osztása után a gyorsulás egyenleteket az

$$\overline{O_a a'} + \overline{b'' a'} + \overline{b' b''} = \overline{O_a c'_5} + \overline{k' c'_{58}} + \overline{b' k'}$$

alakba írva, a gyorsulásterv (2.14/c ábra) megszerkeszthető.

A gyorsulástervben az $\overline{O_a a'}$, $\overline{b'' a'}$, $\overline{O_a c'_5}$ és a $\overline{k' c'_5}$ az \mathbf{a}_A , \mathbf{a}_{BA}^n , \mathbf{a}_C és az \mathbf{a}_{BC}^c k_a léptékű vektorai adottak, a $\overline{b' b''}$ pedig merőleges \overline{AB} -re, továbbá $\overline{b' k'}$ párhuzamos $x-x$ -szel.

Az ismert irányú vektorok metszéspontja adja b' -t, és ezzel az \mathbf{a}_B , \mathbf{a}_{BA}^t és az \mathbf{a}_{BC}^t k_a léptékű gyorsulásokat. A B pont tényleges gyorsulása:

$$|\mathbf{a}_B| = k_a \overline{O_a b'}.$$

A 3-as jelű tag szöggyorsulása:

$$\varepsilon_{31} = |a'_{BA}| / l_{BA} = \frac{k_a \overline{b'b''}}{k_1 \overline{AB}}.$$

A 4-es jelű tag szöggyorsulása a haladó mozgást megengedő D kinematikai pár miatt azonos az 5-ös jelű tagéval, vagyis:

$$\varepsilon_{41} = \varepsilon_{51} = 0, \text{ mivel } \omega_{51} = \text{állandó}.$$

A 4-es jelű tag valamely pontjának, pl. H -nak a gyorsulására felírható az alábbi egyenlet:

$$\mathbf{a}_H = \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_{HE}^c + \mathbf{a}_{HE}^t.$$

Az E pont gyorsulása ismert, mivel az az 5-ös jelű tagon van. Az \mathbf{a}_{HE}^c -re felírhatjuk, hogy

$$|\mathbf{a}_{HE}^c| = |\mathbf{a}_{BC}^c| = 2|\mathbf{v}_{HE}| \omega_{51} = 2|\mathbf{v}_{BC}| \omega_{51}$$

ugyanis $\mathbf{v}_{HE} = \mathbf{v}_{BC}$. A 4-es tag 5-höz viszonyított mozgása haladómozgás, ezért $\mathbf{a}_{HE}^t = \mathbf{a}_{BC}^t$. Ezek után az \mathbf{a}_H vektoregyenlete az alábbi alakban is felírható:

$$\mathbf{a}_H = \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_{BC}^c + \mathbf{a}_{BC}^t.$$

Az \mathbf{a}_H tehát három ismert vektor összegzéseként szerkeszthető meg, vagyis e'_5 pontból felmérjük a $\overline{k'c'_5} = \overline{k''e'_5}$ metszékét, majd ennek végpontjából a $\overline{k'b'} = \overline{k''h'}$ -t. Az $\overline{O_a h'}$ metszék k_a -szorososa az \mathbf{a}_H tényleges értékét adja.

2.5.3 Elemi csoport két külső csuklóval és egy belső haladó mozgást megengedő kinematikai párral

Az elemi csoportot a 2.15/a ábrán a 3-as és a 4-es jelű tagok alkotják az A és a C külső csuklókkal, és a B belső haladó mozgást megengedő kinematikai párral. A 2-es és az 5-ös jelű hajtótagok felhasználásával az elemi csoportból két szabadságfokú mechanizmust alakítottunk ki. Ennek megfelelően adótnak tételezzük fel a \mathbf{v}_A , \mathbf{v}_C , \mathbf{a}_A és az \mathbf{a}_C vektorokat. A C pontnak a 3-as jelű tagon a fedőpontja a G pont. A C pont sebességére felírhatjuk, hogy

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{CG}, \text{ de mivel a}$$

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{GA}, \text{ ezért a}$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{GA} + \mathbf{v}_{CG}.$$

Az utóbbi egyenletben a \mathbf{v}_A és \mathbf{v}_C ismertek, a \mathbf{v}_{GA} -nak és \mathbf{v}_{CG} -nek pedig csak az irányát ismerjük. Az előbbi merőleges \overline{GA} -ra, az utóbbi pedig párhuzamos $(x-x)$ -szel. A sebességtervben (2.15/b ábra) ezek nagysága is megszerkeszthető. Ehhez a sebességterv pólusából rajzoljuk fel a \mathbf{v}_A és a \mathbf{v}_C sebességének megfelelő léptékű $\overline{O_v a}$ és $\overline{O_v c}$ metszékeket. Az a pontból a \overline{GA} irányra bocsátott merőleges, és a c -ből az $(x-x)$ -szel párhuzamosan húzott egyenes a metszéspontja a g_3 . Az $\overline{ag_3}$ és a $\overline{cg_3}$ szakaszok adják a \mathbf{v}_{GA} és \mathbf{v}_{CG} k_v léptékű vektorait. Ezek tényleges nagysága:

$$|\mathbf{v}_{GA}| = k_v \overline{ag_3} \text{ és } |\mathbf{v}_{CG}| = k_v \overline{cg_3}.$$

A 3-as jelű tag szögsebessége:

$$\omega_{31} = |\mathbf{v}_{GA}| / l_{AG} = \frac{k_v \overline{ag_3}}{k_1 \overline{AG}}.$$

A 3-as és a 4-es jelű tag szögsebessége azonos: $\omega_{31} = \omega_{41}$. A 4-es jelű tag valamely tetszőlegesen felvett E pontjának sebességegyenlete:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_{EF}$$

Az F pont a 3-as jelű tagon van, és fedőpontja az E -nek. Az F pont sebessége a *Burmester*-tétellel meghatározható. Az $AGF\Delta \approx ag_3f_3$ Δ -höz, amit felhasználva az f_3 szerkeszthető. Mivel a $\mathbf{v}_{EF} = \mathbf{v}_{CG}$, ezért ha az f_3 pontból felmérjük $\overline{cg_3} = \overline{ef_3}$ távolságot és a kapott e pontot O_v -vel összekötjük, megkapjuk \mathbf{v}_E k_v léptékű vektorát, amelynek tényleges értéke:

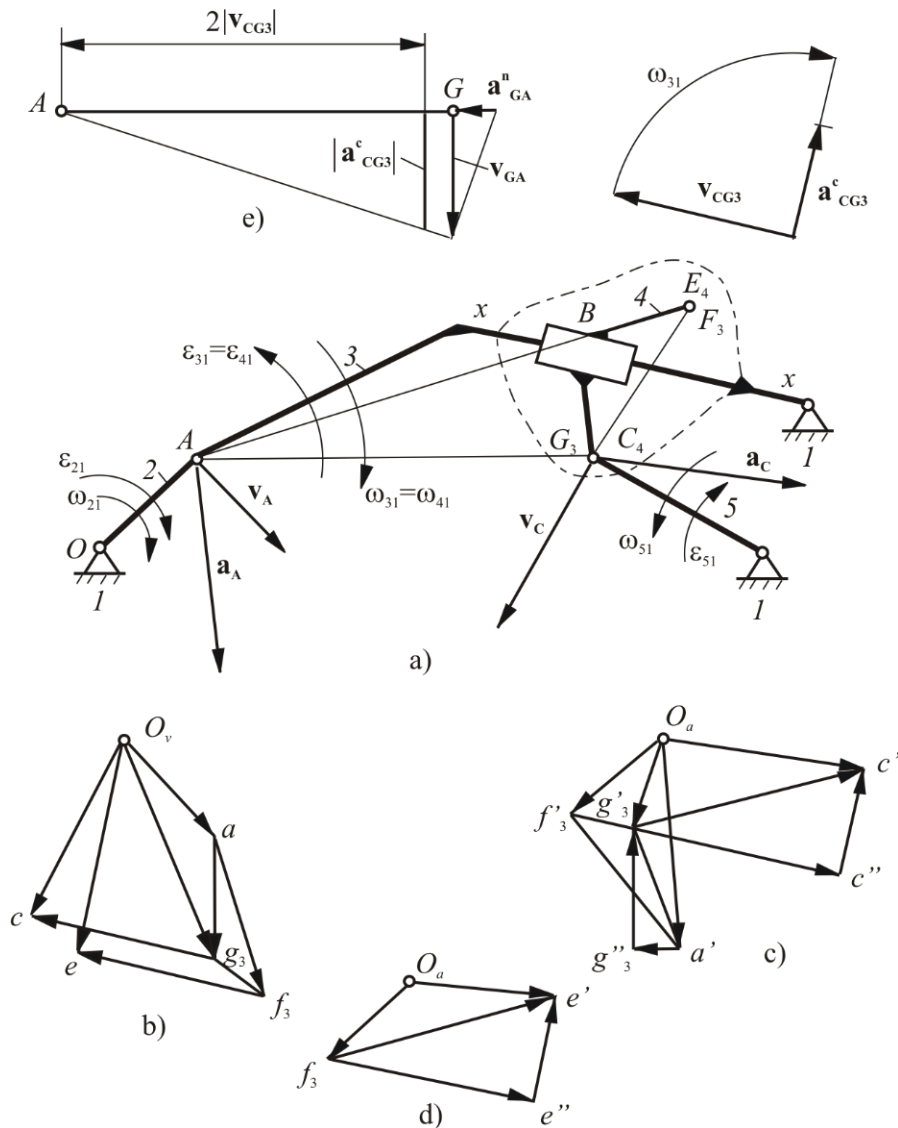
$$|\mathbf{v}_E| = k_v \overline{O_v e}.$$

A sebesség-egyenletekhez hasonlóan a gyorsulásegyenletek a következők:

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_G + \mathbf{a}_{CG}^c + \mathbf{a}_{CG}^t, \text{ amelybe az}$$

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{GA}^n + \mathbf{a}_{GA}^t \text{-t helyettesítve, az}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{GA}^n + \mathbf{a}_{GA}^t + \mathbf{a}_{CG}^c + \mathbf{a}_{CG}^t.$$



2.15. ábra

A 2.15/e ábrán megszerkesztettük az \mathbf{a}_{GA}^n és az \mathbf{a}_{CG}^c k_a léptékű vektorainak abszolút értékeit. A vektoregyenlet alapján megrajzolt gyorsulásterv a 2.15/c ábrán látható. A könnyebb érthetőség kedvéért a gyorsulásterv egyes metszékeihez tartozó gyorsulásokat zárójelben közöljük:

$$\overline{O_a a} \rightarrow (\mathbf{a}_A), \quad \overline{g'' a'} \rightarrow (\mathbf{a}_{GA}^n), \quad \overline{g'_3 g''_3} \rightarrow (\mathbf{a}_{GA}^t), \quad \overline{c'' g'_3} \rightarrow (\mathbf{a}_{CG}^t), \quad \overline{c' c''} \rightarrow (\mathbf{a}_{CG}^c), \quad \overline{O_a c'} \rightarrow (\mathbf{a}_C),$$

$$\text{és } \overline{O_a f'_3} \rightarrow (\mathbf{a}_F)$$

Az \mathbf{a}_C vektoregyenletének következetes felhasználásával a gyorsulásterv szerkesztésénél az adott irányú, de ismeretlen nagyságú vektorok (\mathbf{a}_{GA}^t és \mathbf{a}_{CG}^t metszéspontjaként először a g'_3 pont adódik, majd *Burmester*-tételének felhasználásával f'_3 . Az \mathbf{a}_E gyorsulást az alábbi egyenletekből szerkeszthetjük meg (lásd a 2.15/d ábrát):

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_F + \mathbf{a}_{EF}^c + \mathbf{a}_{EF}^t, \text{ mivel az}$$

$$\mathbf{a}_{EF}^c = \mathbf{a}_{CG}^c \text{ és } \mathbf{a}_{EF}^t = \mathbf{a}_{CG}^t, \text{ ezért az}$$

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_F + \mathbf{a}_{CG}^c + \mathbf{a}_{CG}^t.$$

Az \mathbf{a}_E tényleges értéke:

$$|\mathbf{a}_E| = k_a \overline{O_v e'}.$$

A 3-as és a 4-es jelű tagok szöggyorsulása:

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{41} = |\mathbf{a}_{GA}^t| / l_{AG} = \frac{k_a \overline{g'_3 g''_3}}{k_1 AG}.$$

2.5.4 Elemi csoport egy belső csuklóval és két külső haladó mozgást megengedő kinematikai párral

A 2.16/a ábrán az elemi csoportot a 3-as és a 4-es jelű tagok képzik az A , B és C kinematikai párokkal. A 2-es és 5-ös jelű tagok hajtótagok, tehát ismertek az ω_{21} , ω_{51} szögsebességek, és az ε_{21} , ε_{51} szöggyorsulások. Meg kell határozni a B pont sebességét és gyorsulását. A B pont sebességének egyenlete:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{BE} \text{ és}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_{BF}.$$

ahol \mathbf{v}_E és \mathbf{v}_F ismertek, mivel ismerjük a mechanizmus mérethelyes kinematikai vázlatát és az ω_{21} , valamint az ω_{51} szögsebességeket. A \mathbf{v}_{BE} és a \mathbf{v}_{BF} relatív sebességeknek csak az iránya ismert az előző az y - y , az utóbbi az x - x vezetékkel párhuzamos.

A sebességlépték figyelembevételével az előző két egyenlet az alábbi alakban is írható:

$$\overline{O_v b} = \overline{O_v e_2} + \overline{b e_2},$$

$$\overline{O_v b} = \overline{O_v f_5} + \overline{b f_5}.$$

ahol: $\overline{O_v e_2} = |\mathbf{v}_E| / k_v$, $\overline{O_v f_5} = |\mathbf{v}_F| / k_v$, a $\overline{b e_2}$ az y - y , a $\overline{b f_5}$ az x - x egyenessel párhuzamos.

Az egyenletekből a sebességterv megszerkeszthető. A kapott b metszéspont (2.16/b ábra) kijelöli a \mathbf{v}_B k_v léptékű vektorának a végpontját. A \mathbf{v}_B tényleges értéke: $|\mathbf{v}_B| = k_v \overline{O_v b}$. Az egyes tagok szögsebességei: $\omega_{31} = \omega_{21}$ és $\omega_{41} = \omega_{51}$.

A B pont gyorsulásának egyenletei:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_{BE}^c + \mathbf{a}_{BE}^t, \text{ és}$$

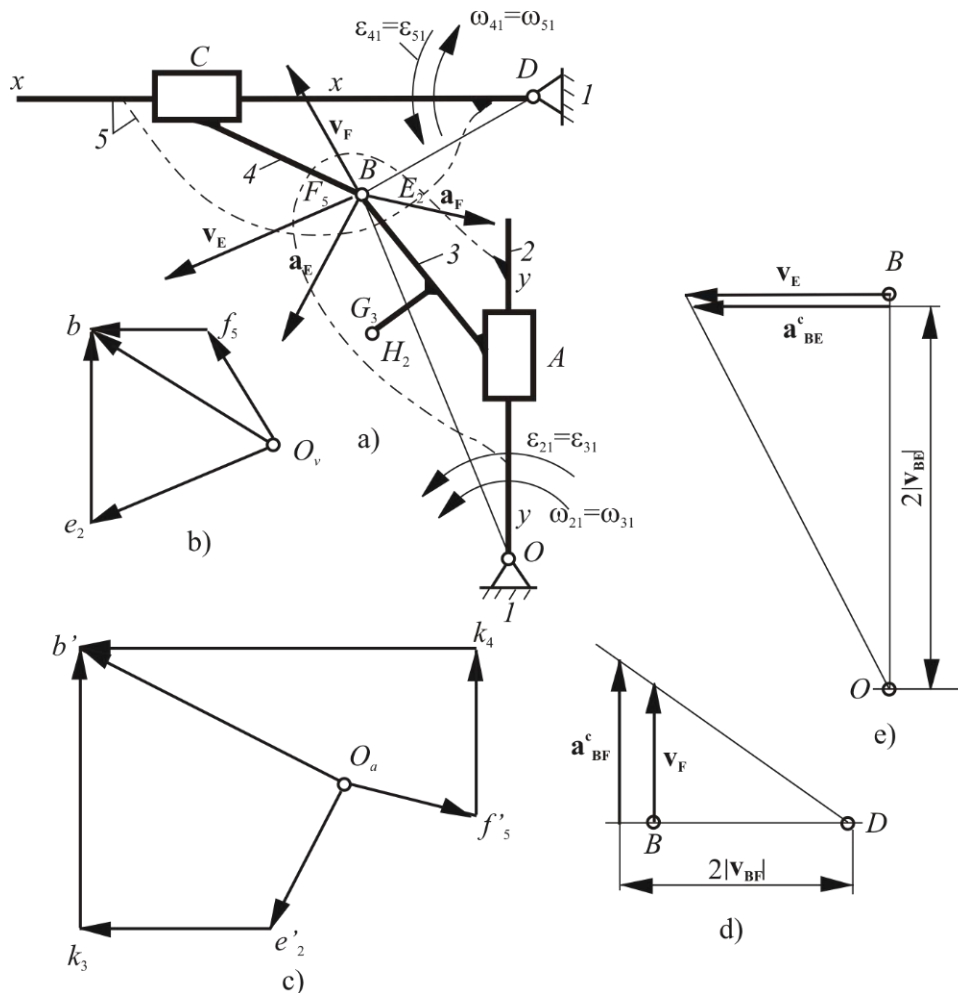
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_F + \mathbf{a}_{BF}^c + \mathbf{a}_{BF}^t.$$

Az egyenletekben \mathbf{a}_E és \mathbf{a}_F ismertek, az \mathbf{a}_{BE}^c és az \mathbf{a}_{BF}^c az $|\mathbf{a}_{BE}^c| = 2\omega_{21}|\mathbf{v}_{BE}|$ és az $|\mathbf{a}_{BF}^c| = 2\omega_{51}|\mathbf{v}_{BF}|$ összefüggések alapján megszerkeszthető (2.16/d és e. ábrák.)

Ismerjük továbbá az \mathbf{a}_{BE}^t és az \mathbf{a}_{BF}^t irányát, az előbbi az y - y , az utóbbi az x - x vezetékkel párhuzamos. Az \mathbf{a}_E és az \mathbf{a}_F gyorsulásoknál is figyelembe véve a gyorsulásléptéket, a B pont gyorsulásának vektoregyenletei az alábbi alakban is írhatók:

$$\overline{O_a b'} = \overline{O_a e'_2} + \overline{k_3 e'_2} + \overline{b' k_3},$$

$$\overline{O_a b'} = \overline{O_a f'_5} + \overline{k_4 f'_5} + \overline{b' k_4}$$



2.16. ábra

Az előző példához hasonlóan itt is, a gyorsulásterv egyes metszékeihez tartozó gyorsulásokat zárójelben közöljük:

$$\overline{O_a b'} \rightarrow (\mathbf{a}_B), \overline{O_a e'_2} \rightarrow (\mathbf{a}_E), \overline{k_3 e'_2} \rightarrow (\mathbf{a}_{BE}^c), \overline{b' k_3} \rightarrow (\mathbf{a}_{BE}^t), \overline{O_a f'_5} \rightarrow (\mathbf{a}_F), \overline{k_4 f'_5} \rightarrow (\mathbf{a}_{BF}^c),$$

$$\text{és } \overline{b' k_4} \rightarrow (\mathbf{a}_{BF}^t).$$

Az \mathbf{a}_B tényleges értéke: $|\mathbf{a}_B| = k_a \overline{O_a b'}$. Az egyes tagok szöggyorsulásai: $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{21}$ és $\varepsilon_{41} = \varepsilon_{51}$.

A 3-as jelű tag tetszőlegesen felvett G pontjának vektoregyenletei:

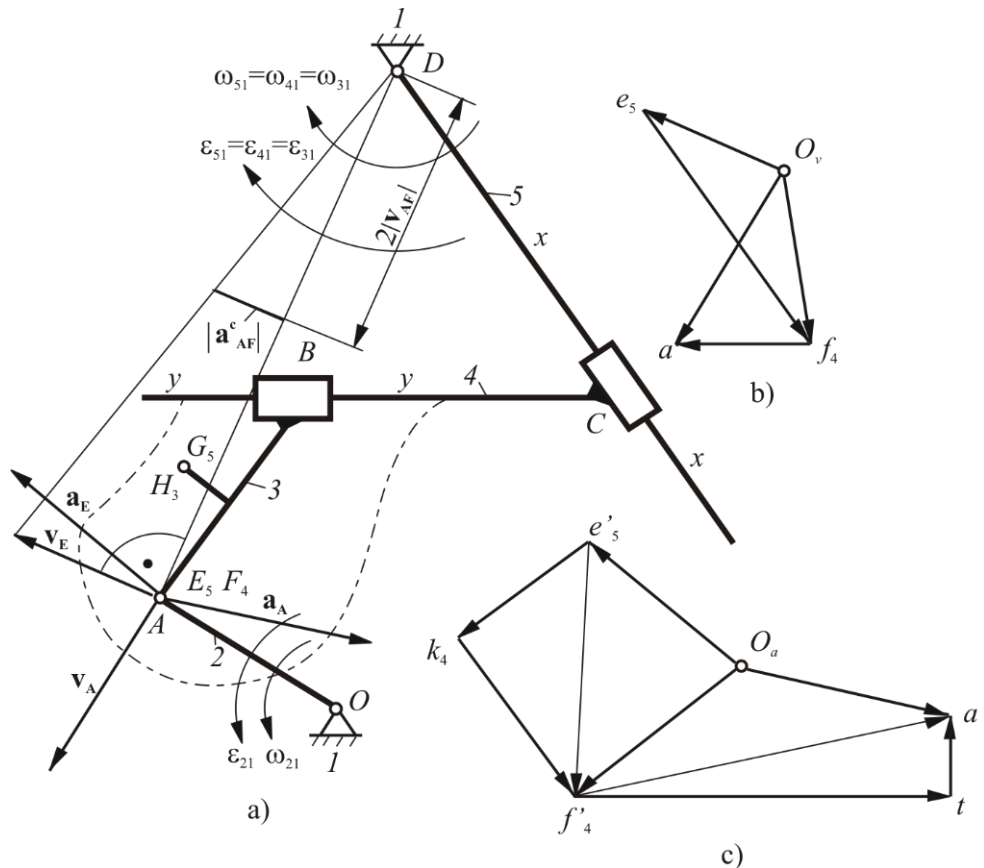
$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{BE}, \text{ és}$$

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_H + \mathbf{a}_{BE}^c + \mathbf{a}_{BE}^t,$$

ahol az egyenletek jobboldali tagjai ismertek, amelyekből a G pont sebessége és gyorsulása megszerkeszthető. A $|\mathbf{v}_H| = l_{OH}\omega_{21}$, és merőleges \overline{OH} -ra, az $|\mathbf{a}_H| = \sqrt{(l_{OH}\omega_{21}^2)^2 + (l_{OH}\varepsilon_{21})^2}$.

2.5.5 Elemi csoport egy külső csuklóval és két haladó mozgást megengedő kinematikai párral

A 2.17 ábrán bemutatott két szabadságfokú csoport tagjai a 3-as és a 4-es tagok, a haladó mozgást megengedő kinematikai párijai a B és C csúszkák. Hajtótagok a 2-es és a 5-ös jelűek. Adott a \mathbf{v}_A , és az 5-ös jelű tag minden pontjának sebessége és gyorsulása. Határozzuk meg a 4-es jelű tag F pontjának sebességét és gyorsulását. Ha az A pontra írunk fel vektoregyenleteket, meghatározhatjuk F pont sebességét és gyorsulását is.



2.17. ábra

Az A pont sebességére felírható, hogy

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_{AF} \text{ és } \mathbf{v}_F = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{FE}.$$

Helyettesítés után a

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{FE} + \mathbf{v}_{AF}.$$

ahol a \mathbf{v}_A és a \mathbf{v}_E adottak, a \mathbf{v}_{FE} -nek és a \mathbf{v}_{AF} -nek pedig ismerjük az irányát, a \mathbf{v}_{FE} az $x-x'$, és a \mathbf{v}_{AF}

az $y-y$ vezetékkel párhuzamos. Figyelembe véve a sebességléptéket az utóbbi egyenlet a sebességterv jelöléseivel (2.17/b ábra)

$$\overline{O_v a} = \overline{O_v e} + \overline{f_4 e_5} + \overline{a f_4}$$

alakban is felírható.

A sebességterv e_5 pontjából az $x-x$ -szel párhuzamos és az a pontjából az $y-y$ -nal párhuzamos egyenesek metszéspontja f_4 meghatározza a \mathbf{v}_{FE} és a \mathbf{v}_{AF} relatív sebességek k_v léptékű nagyságát. Mivel $\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{FE}$, az $\overline{O_v f_4}$ metszék \mathbf{v}_F -fel arányos. A \mathbf{v}_F tényleges nagysága: $|\mathbf{v}_F| = k_v \overline{O_v f_4}$.

Az elmondottak ismeretében a 3-as jelű tag tetszőlegesen választott H pontjának sebességét már az ismert vektorok összegzésként nyerhetjük:

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{FE} + \mathbf{v}_{AF}.$$

A 3-as, 4-es és az 5-ös jelű tagok haladómozgást megengedő kinematikai párokkal kapcsolódnak egymáshoz, ezért szögsebességük azonos, $\omega_{31} = \omega_{41} = \omega_{51}$.

A sebességeknél használt gondolatmenetet a gyorsulásokra is alkalmazva, az A pont gyorsulásának vektoregyenlete:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_F + \mathbf{a}_{AF}^c + \mathbf{a}_{AF}^t \text{ és } \mathbf{a}_F = \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_{FE}^c + \mathbf{a}_{FE}^t.$$

A második egyenletet az elsőbe helyettesítve, az

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_{FE}^c + \mathbf{a}_{FE}^t + \mathbf{a}_{AF}^c + \mathbf{a}_{AF}^t.$$

Az egyenletben az \mathbf{a}_A és az \mathbf{a}_E gyorsulások irány és nagyság szerint ismertek, az \mathbf{a}_{FE}^c és az \mathbf{a}_{AF}^c , az $|\mathbf{a}_{FE}^c| = 2\omega_{51}|\mathbf{v}_{FE}|$, valamint az $|\mathbf{a}_{AF}^c| = 2\omega_{51}|\mathbf{v}_{AF}|$ összefüggésekből megszerkeszthető. A 2.17/a ábrán az $|\mathbf{a}_{AF}^c|$ szerkesztése tanulmányozható. Ugyanitt megszerkeszthető az $|\mathbf{a}_{FE}^c|$ is. A két *Coriolis* gyorsulás irányának meghatározása a korábban ismertetett módon történik.

Ismerjük továbbá az \mathbf{a}_{FE}^t és az \mathbf{a}_{AF}^t irányát, amelyek az $x-x$, illetve az $y-y$ vezetékkel párhuzamosak. Az \mathbf{a}_A -ra felírt vektoregyenletet felhasználva, és a k_a léptéket figyelembe véve a gyorsulásterv megszerkeszthető (2.17/c ábra). A gyorsulástervben, a könnyebb eligazodást segítő, most is zárójelben közöljük az egyes metszékeknek megfelelő gyorsulásokat:

$$\overline{O_a e'_5} \rightarrow (\mathbf{a}_E), \overline{k_4 e'_5} \rightarrow (\mathbf{a}_{FE}^c), \overline{f'_4 k_4} \rightarrow (\mathbf{a}_{FE}^t), \overline{t f'_4} \rightarrow (\mathbf{a}_{AF}^t), \overline{a' t} \rightarrow (\mathbf{a}_{AF}^c), \text{ és } \overline{O_a a'} \rightarrow (\mathbf{a}_A)$$

Az egyenlet megoldásaként az f'_4 metszéspontban megkapjuk az \mathbf{a}_F vektort, amelynek az értéke $|\mathbf{a}_F| = k_a \overline{O_a f'_4}$.

A H pont gyorsulása az A pont gyorsulásához hasonlóan írható fel:

$$\mathbf{a}_H = \mathbf{a}_G + \mathbf{a}_{FE}^c + \mathbf{a}_{FE}^t + \mathbf{a}_{AF}^c + \mathbf{a}_{AF}^t,$$

ahol az egyenlet jobboldalán valamennyi vektor ismert nagyságú és irányú.

A 3-as, 4-es és 5-ös tagok szöggyorsulásai azonosak: $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{41} = \varepsilon_{51}$.

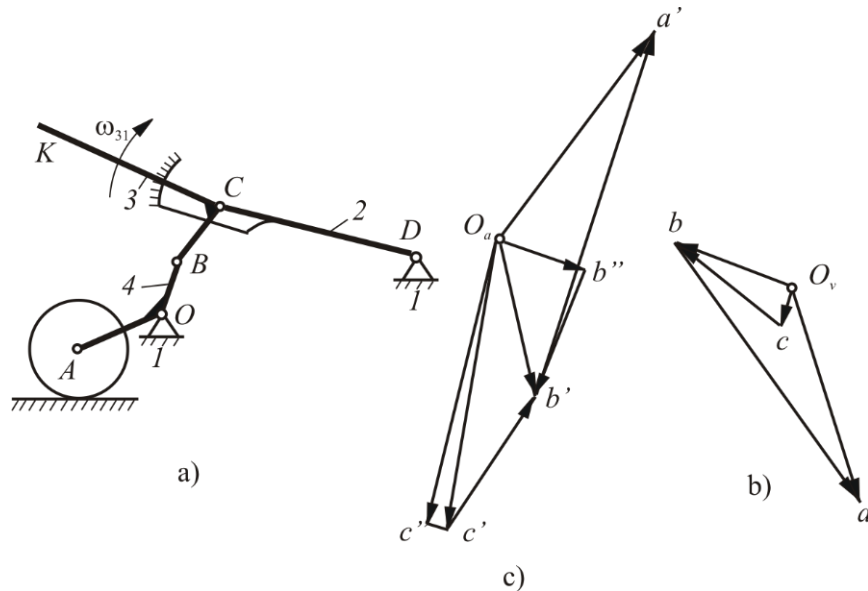
2.5.6 Sebességek és gyorsulások meghatározása, ha a vezető tag a hajtórúd vagy egy relatív mozgást végző tag.

A 2.18. ábrán egy karos állító szerkezet mechanizmusa látható. Ez egy olyan $DCBOA$ négytagú csuklós mechanizmusból áll, amelynek mozgató (hajtó) tagja a \overline{BC} hajtórúd a mereven hozzáerősített K jelű karral. Szerkesszük meg a mechanizmus sebesség és a gyorsulástervét, ha a K jelű kart $\omega_{31} = \text{állandó}$ szögsebességgel elfordítjuk a C körül.

A sebességterv szerkesztését a \overline{BC} -re merőleges irányú és $|\mathbf{v}_{BC}| = \omega_{31} l_{BC}$ nagyságú sebesség felrajzolásával kezdjük, amelynek a léptékhelyes metszéke a sebességtervben \overline{bc} (2.18/b ábra). A B pontra írható vektoregyenlet:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{BC},$$

amelyben a \mathbf{v}_{BC} irány és nagyság szerint ismert, a \mathbf{v}_B merőleges \overline{BO} -ra, a \mathbf{v}_C pedig merőleges \overline{CD} -re. A \mathbf{v}_B -vel és a \mathbf{v}_C -vel húzott párhuzamos egyenesek ezért kimetszik az O_v pontot, a sebességterv pólusát, és meghatározzák a \mathbf{v}_B és a \mathbf{v}_C léptékhelyes nagyságát.



2.18. ábra

Az A pont sebessége:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{AB},$$

ahol $\mathbf{v}_A \perp \overline{AO}$ -ra, és $\mathbf{v}_{AB} \perp \overline{AB}$ -re. A két ismert irány kimetszi az a pontot, az O_v pólusból induló \mathbf{v}_A végpontját. A \mathbf{v}_A sebességet a *Burmester* tétel felhasználásával is megszerkeszthetjük. Az $OBA\Delta \approx O_vba$ Δ -höz. A sebességek tényleges nagyságai: $|\mathbf{v}_B| = k_v \overline{O_v b}$ és $|\mathbf{v}_A| = k_v \overline{O_v a}$.

Az előző gondolatmenethez hasonlóan a gyorsulásterv szerkesztésekor az \mathbf{a}_{BC} relatív gyorsulásból kell kiindulni. Mivel az $\omega_{31} = \text{állandó}$, ezért az $\mathbf{a}_{BC} = \mathbf{a}_{BC}^n$, amely a \mathbf{v}_{BC} -ből számítással vagy szerkesztéssel meghatározható. A B pont gyorsulása pedig az

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_{BO}^n + \mathbf{a}_{BO}^t, \\ \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{BC} = \mathbf{a}_{CD}^n + \mathbf{a}_{CD}^t + \mathbf{a}_{BC} \end{aligned}$$

egyenletek felhasználásával szerkeszthető. Az egyenletekben az $\mathbf{a}_{BC} = \mathbf{a}_{BC}^n$, az \mathbf{a}_{BO}^n és az \mathbf{a}_{CD}^n gyorsuláskomponensek a \mathbf{v}_{BC} , a \mathbf{v}_B és a \mathbf{v}_C sebességekből szerkeszthetők, vagyis ismertnek tekinthetők. A tangenciális gyorsuláskomponensek iránya pedig: $\mathbf{a}_{BO}^t \perp \overline{BO}$ -ra és $\mathbf{a}_{CD}^t \perp \overline{CD}$ -re. Az elmondottak alapján az egyenletek szerkesztéssel megoldhatók. A megoldás első lépéseként rajzoljuk meg az $|\mathbf{a}_{BC}| = k_a |\mathbf{a}_{BC}^n|$ léptékhelyes $\overline{b'c'}$ metszékét, majd mérjük fel a b' pontba az \mathbf{a}_{BO}^n , a c' pontba pedig az \mathbf{a}_{CD}^n k_a léptékű metszőkét ($\overline{b'b''}$, illetve $\overline{c'c''}$). Ezután b'' -ből húzzunk merőlegest a \overline{BO} -ra, a c'' -ből a \overline{CD} -re. Ezek az egyenesek kimetszik az O_a gyorsuláspólust.

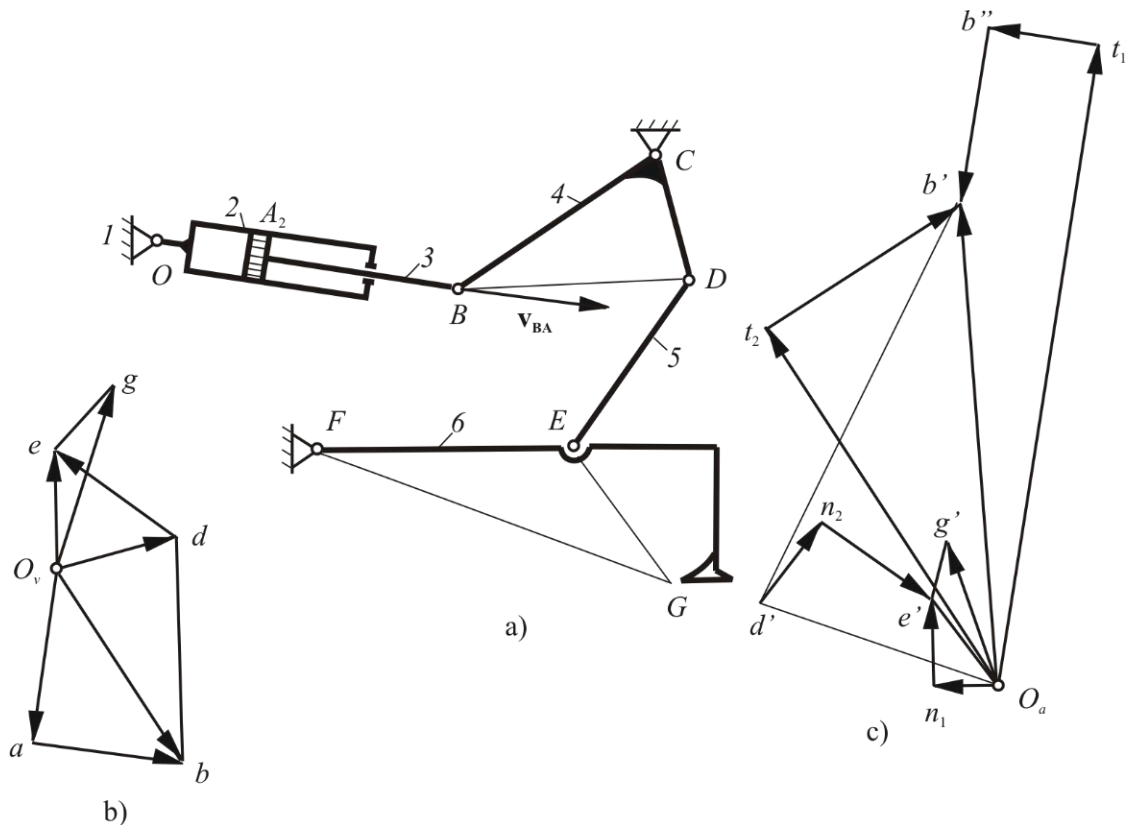
Az A pont gyorsulását *Burmester-tételének* felhasználásával szerkeszthetjük meg: ($AOB \Delta \approx a'O_a b' \Delta$). Járható út az A pont gyorsulás egyenleteinek a használata is, az

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{AO}^n + \mathbf{a}_{AO}^t,$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{AB}^n + \mathbf{a}_{AB}^t,$$

amelyekben az \mathbf{a}_B , az \mathbf{a}_{AO}^n és az \mathbf{a}_{AB}^n gyorsuláskomponensek ismertek, és a tangenciális gyorsuláskomponensek irányai: $\mathbf{a}_{AO}^t \perp \overline{AO}$ -ra és $\mathbf{a}_{AB}^t \perp \overline{AB}$ -re. Az A pont gyorsulásának tényleges értéke: $|\mathbf{a}_A| = k_a \overline{O_a a'}$.

Határozzuk meg a 2.19/a ábrán látható hidraulikus kiemelő szerkezet G pontjának sebességét és gyorsulását. A szerkezetben az I. osztályú mechanizmus (2-es tag) mellett két II. osztályú csoport (3-as valamint 5-ös és 6-os) található. Kiemeléskor a 2-es hengerbe áramló olaj nyomása a hengerhez képest állandó \mathbf{v}_{BA} sebességgel mozgatja a 3-as dugattyút, amely működésbe hozza a mechanizmust.



2.19. ábra

A sebességterv megszerkesztéséhez írjuk fel a B pont sebességének egyenleteit:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{BA} + \mathbf{v}_{BO}, \text{ vagy } \overline{O_v b} = \overline{ab} + \overline{O_v a},$$

ahol: $\mathbf{v}_B \perp \overline{BC}$ és $\mathbf{v}_{BO} \perp \overline{BO}$.

Az egyenlet alapján megkapjuk a sebességterv pólusát, ha \mathbf{v}_{BA} , (a sebességtervben \overline{ab}) a kezdőpontjából \overline{BO} -ra, b végpontjából pedig \overline{BC} -re húzunk merőlegest. A metszéspont ki jelöli az O_v helyét (2.19/b ábra).

A B pont sebességének abszolút értéke $|\mathbf{v}_B| = k_v \overline{O_v b}$. A D pont sebessége a *Burmester* hasonlósági tétel alkalmazásával szerkesztő meg $|\mathbf{v}_D| = k_v \overline{O_v d}$.

A E pontra írható sebességegyenletek:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{ED}, \text{ vagy } \overline{O_v e} = \overline{O_v d} + \overline{ed},$$

ahol: $\mathbf{v}_E \perp \overline{EF}$ és $\mathbf{v}_{ED} \perp \overline{ED}$.

A G pont sebességét szintén a *Burmester* tétel felhasználásával kaptuk $|\mathbf{v}_G| = k_v \overline{O_v g}$.

A gyorsulásterv szerkesztésére, a B pont gyorsulásának vektoregyenletei:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{BC}^n + \mathbf{a}_{BC}^t,$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{BA}^t + \mathbf{a}_{BA}^c + \mathbf{a}_{BO}^n + \mathbf{a}_{BO}^t.$$

A két egyenletből az

$$\mathbf{a}_{BC}^n + \mathbf{a}_{BC}^t = \mathbf{a}_{BA}^t + \mathbf{a}_{BA}^c + \mathbf{a}_{BO}^n + \mathbf{a}_{BO}^t,$$

ahol az \mathbf{a}_{BC}^n , \mathbf{a}_{BA}^t , \mathbf{a}_{BA}^c és az \mathbf{a}_{BO}^n gyorsuláskomponensek ismertek, illetve a megfelelő sebesség komponensekből határozhatók meg. Az $\mathbf{a}_{BA}^t = 0$, mivel a dugattyú a hengerhez képest állandó sebességgel mozog. Az \mathbf{a}_{BC}^t merőleges \overline{BC} -re, és az \mathbf{a}_{BO}^t merőleges \overline{BO} -ra.

A gyorsulásléptéket is figyelembe véve, az utolsó egyenlet az alábbi alakban írható:

$$\overline{b't_2} + \overline{t_2 O_a} = \overline{b'b''} + \overline{b''t_1} + \overline{t_1 O_a}$$

Az egyenletek alapján a gyorsulásterv pólusát a következőképpen szerkeszthetjük meg (2.19/c ábra):

Tetszőleges helyre rajzoljuk fel az \mathbf{a}_{BA}^c -t ($\overline{b'b''}$), majd a kezdőpontjához adjuk hozzá az \mathbf{a}_{BO}^n -t ($\overline{b''t_1}$). A b' végpontjába pedig ütköztessük az \mathbf{a}_{BC}^n -t ($\overline{b't_2}$). Ezután t_1 pontban húzzunk merőlegest az \overline{OB} -re (\mathbf{a}_{BO}^t iránya), a t_2 pontban pedig a \overline{BC} -re (\mathbf{a}_{BC}^t iránya). A két utóbbi egyenes metszéspontja O_a . A B pont gyorsulása tehát: $|\mathbf{a}_B| = k_a \overline{O_a b'}$.

A D pont gyorsulásának megszerkesztésére itt is *Burmester*-tételét használjuk fel ($BCDA \approx b'O_a d'\Delta$) és az $|\mathbf{a}_D| = k_a \overline{O_a d'}$.

Az E pont gyorsulásának egyenlete:

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_{EF}^n + \mathbf{a}_{EF}^t = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_{ED}^n + \mathbf{a}_{ED}^t$$

vagy a k_a léptéket is figyelembe véve:

$$\overline{e'O_a} = \overline{n_1 O_a} + \overline{e'n_1} = \overline{d'O_a} + \overline{n_2 d'} + \overline{e'n_2}$$

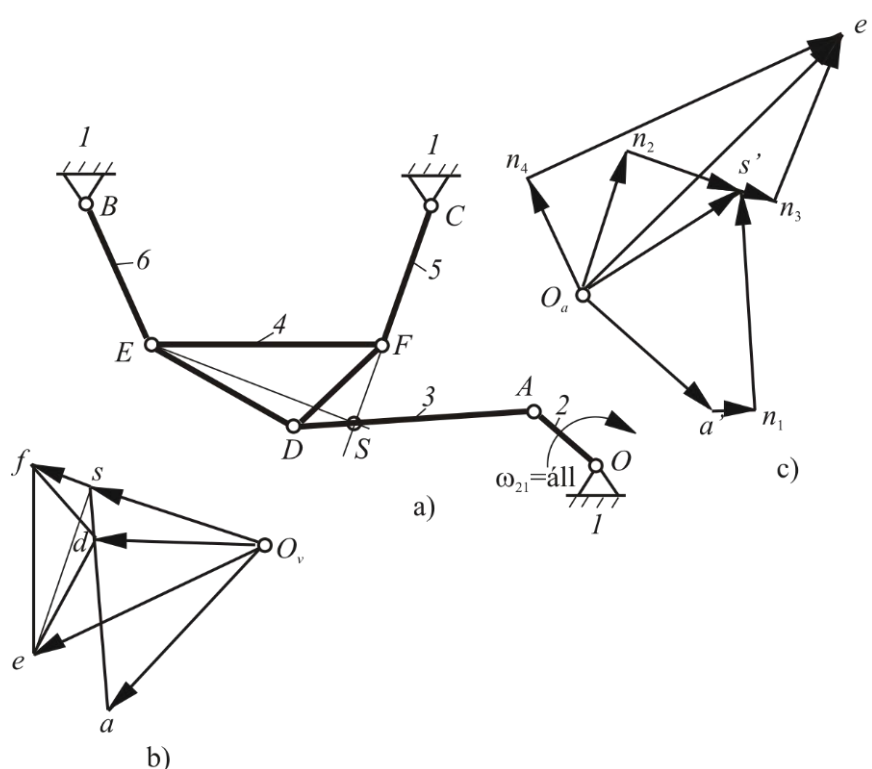
A G pont gyorsulásának megszerkesztésére *Burmester*-tételét alkalmaztuk. A keresett gyorsulás: $|\mathbf{a}_G| = k_a \overline{O_a g'}$.

2.5.7 III. osztályú csoportot tartalmazó mechanizmusok sebességének és gyorsulásának meghatározása

A III. osztályú csoportok kinematikai vizsgálatánál a sebesség és a gyorsulástervek felépítésekor az eddig követett módszer nem vezet eredményre. A korábban ismertetett szerkesztőeljárás bizonyos kiegészítésre szorul.

Vizsgáljuk meg a 2.20. ábrán látható mechanizmust. A mechanizmusban a III. osztályú csoportot a 3-as, 4-es, 5-ös és 6-os jelű tagok képezik. A hajtótag a 2-es jelű tag. A mechanizmus szabadságfoka egy, ennek ellenére a III. osztályú csoport belső kinematikai párojaira (D, E, F) felírható vektoregyenletek nem vezetnek gyors megoldáshoz.

A III. osztályú csoportok kinematikai vizsgálatánál célszerű az ún. *Asszur* pontokat felhasználni. Az *Asszur* pontok a központi taghoz ($DEF \Delta$) kapcsolódó tagok (a 3-as, 5-ös és a 6-os) irányának metszéspontjai. A III. osztályú csoportoknál három *Asszur* pont szerkeszthető meg, mivel a központi taghoz három tag kapcsolódik és ezek három metszéspontot eredményeznek. Hangsúlyozzuk, hogy az *Asszur* pontokat mindig a központi taghoz mereven rögzített pontként kell figyelembe venni!



2.20. ábra

Vizsgáljuk meg, hogy pl. az 5-ös és a 3-as jelű tagok metszéseként kapott S Asszur pont segítségével hogyan építhető fel a sebesség és a gyorsulásterv. Az *Asszur* pontok felhasználásával történő szerkesztésnél először mindig ezek valamelyikének (példánkban az S pontnak) a se-

bességét és gyorsulását kell meghatározni, ugyanis ezek ismeretében már könnyen megszerkeszthető a központi tag többi pontjának a sebessége és gyorsulása.

Az S pont sebességére a következő vektoregyenletek írhatók fel:

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{SD} \text{ és } \mathbf{v}_S = \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_{SF}.$$

Az *Asszur* pont vektoregyenleteinek mindig tartalmazniuk kell a központi tag megfelelő pontjainak sebességét (gyorsulását). Ezután az *Asszur* pontot kimetsző tagoknak (\overline{AD} és \overline{CF}) a központi taggal egybeeső pontjaira (D és F) kell egyenletet felírni, a tag másik végpontja (A és C) felől megközelítve azokat:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{DA} \text{ és } \mathbf{v}_F = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{FC}.$$

Ez utóbbiakat az előző egyenletekbe helyettesítve:

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{DA} + \mathbf{v}_{SD} \text{ és } \mathbf{v}_S = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{FC} + \mathbf{v}_{SF}.$$

Az egyenletek alapján \mathbf{v}_S megszerkeszthető, mivel \mathbf{v}_A és \mathbf{v}_C adott, ($\mathbf{v}_C = 0$), a \mathbf{v}_{DA} és \mathbf{v}_{SD} vektorok merőlegesek \overline{AD} -re, a \mathbf{v}_{FC} és a \mathbf{v}_{SF} vektorok pedig \overline{CF} -re, ezért ezek páronként egy adott irányú vektorral helyettesíthetők.

A sebességterv (2.20/b ábra) most már a korábban ismertett módszerrel felépíthető. Az O_v pólusból fel kell mérni \mathbf{v}_A k_v léptékű $\overline{O_v a}$ metszékét, majd az a pontból \overline{AD} -re, az O_v -ből pedig \overline{CF} -re kell merőlegest bocsájtani. Metszéspontjuk: s és így $|\mathbf{v}_s| = k_v \overline{O_v s}$. A \mathbf{v}_s ismeretében az E pont sebessége már könnyen meghatározható. Ehhez kössük össze az E pontot az S -sel és írjuk fel \mathbf{v}_E vektoregyenletét:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_S + \mathbf{v}_{ES} = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{EB}$$

ahol $\mathbf{v}_B = 0$, $\mathbf{v}_{ES} \perp \overline{ES}$ és $\mathbf{v}_{EB} \perp \overline{EB}$.

Ismerve a \mathbf{v}_E -t a D és F pontok sebessége is szerkeszthető (lásd a 2.20/b ábrát).

A gyorsulásterv szintén az S *Asszur* pont segítségével szerkeszthető meg. Először az S pont gyorsulásának vektoregyenleteit írjuk fel:

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_{SD}^n + \mathbf{a}_{SD}^t \text{ és } \mathbf{a}_S = \mathbf{a}_F + \mathbf{a}_{SF}^n + \mathbf{a}_{SF}^t.$$

A D és F pontok gyorsulásainak vektoregyenletei:

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{DA}^n + \mathbf{a}_{DA}^t \text{ és } \mathbf{a}_F = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{FC}^n + \mathbf{a}_{FC}^t.$$

Az utóbbiakat az előzőekbe helyettesítve az

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{DA}^n + \mathbf{a}_{DA}^t + \mathbf{a}_{SD}^n + \mathbf{a}_{SD}^t \text{ és}$$

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{FC}^n + \mathbf{a}_{FC}^t + \mathbf{a}_{SF}^n + \mathbf{a}_{SF}^t.$$

A normális gyorsulások a sebességterv ismeretében megszerkeszthetők. Az egyenletekben szereplő tangenciális gyorsuláspárok egyirányúak, vagyis \mathbf{a}_{DA}^t és \mathbf{a}_{SD}^t merőleges \overline{AD} -re, hasonlóan \mathbf{a}_{FC}^t és \mathbf{a}_{SF}^t merőleges \overline{CF} -re. A példánkban $\mathbf{a}_C = 0$. Az \mathbf{a}_S -re kapott két egyenlet alapján végzett szerkesztés a 2.20/c ábrán követhető.

Az E pont gyorsulása az alábbi egyenletekből szerkeszthető meg:

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_S + \mathbf{a}_{ES}^n + \mathbf{a}_{ES}^t \text{ és}$$

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{EB}^n + \mathbf{a}_{EB}^t, \text{ ahol } \mathbf{a}_B=0.$$

Az \mathbf{a}_E ismeretében a D és az F pontok gyorsulása a 2.5.1 fejezetben ismertetettek alapján már könnyen meghatározható. A 2.20/c ábrán az \mathbf{a}_D -t és az \mathbf{a}_F -t nem szerkesztettük meg. A gyorsulásterv metszékeinek megfelelő gyorsulások (zárójelben) a következők:

$$\overline{O_a a'} \rightarrow (\mathbf{a}_A), \overline{a' n_1} \rightarrow (\mathbf{a}_{DA}^n + \mathbf{a}_{SD}^n), \overline{s' n_1} \rightarrow (\mathbf{a}_{DA}^t + \mathbf{a}_{SD}^t), \overline{n_2 O_a} \rightarrow (\mathbf{a}_{FC}^n + \mathbf{a}_{SF}^n),$$

$$\overline{s' n_2} \rightarrow (\mathbf{a}_{FC}^t + \mathbf{a}_{SF}^t),$$

$$\overline{O_a s'} \rightarrow (\mathbf{a}_S), \overline{s' n_3} \rightarrow (\mathbf{a}_{ES}^n), \overline{e' n_3} \rightarrow (\mathbf{a}_{ES}^t), \overline{O_a n_4} \rightarrow (\mathbf{a}_{BE}^n) \text{ és } \overline{e' n_4} \rightarrow (\mathbf{a}_{EB}^t).$$

III. osztályú csoportot tartalmaz a 2.21. ábrán látható harántgyalu mechanizmusa is. Ennél a mechanizmusnál a III. osztályú csoportot a 3-as, 4-es, 5-ös és 6-os jelű tagok alkotják. A csoport központi tagja a 4-es jelű tag. Ehhez kapcsolódnak csuklóval a 6-os és az 5-ös jelű, és haladómozgást megengedő kinematikai párral a 3-as jelű tagok. A mechanizmusban a 2-es jelű a hajtótag.

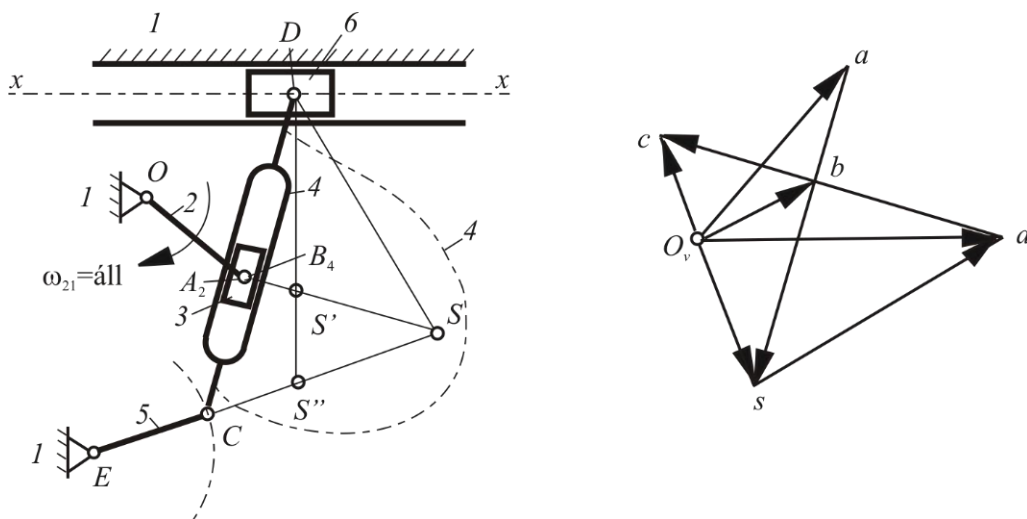
A kinematikai vizsgálatnál itt is *Asszur* pontot használunk fel. A három *Asszur* pont (S, S' és S'') közül az S látszik a legalkalmasabbnak a sebesség és a gyorsulásterv felépítéséhez. A megoldás gondolatmenetét a 2.21. ábra alapján felírható alábbi vektoregyenletek adják:

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{SC},$$

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{SB},$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{CE} \text{ és}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA},$$



2.21. ábra

amelyekből a \mathbf{v}_S -t meghatározó két vektoregyenlet a következő:

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_{CE} + \mathbf{v}_{SC} \text{ és}$$

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} + \mathbf{v}_{SB},$$

ahol: \mathbf{v}_{CE} és \mathbf{v}_{SC} merőleges \overline{CE} -re, továbbá, \mathbf{v}_{BA} és \mathbf{v}_{SB} merőleges \overline{BS} -re.

A \mathbf{v}_S ismeretében, mivel az S pont a központi tag (4) pontjaként fogható fel, a B , C és a D pontok sebessége a további egyenletekből már meghatározható (2.21. ábra):

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_S + \mathbf{v}_{DS} \text{ és } \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{CD}.$$

A B pont sebessége a $\overline{cd}/\overline{CD} = \overline{db}/\overline{DB}$ aránypárból számítható, és a $|\mathbf{v}_B| = k_v \overline{O_v b}$.

A gyorsulásterv felépítése a sebességtervnél alkalmazott gondolamenettel azonos módon történik. A 2.21. ábrán a gyorsulástervet nem szerkesztettük meg. Gyakorlásként azonban célszerű azt megszerkeszteni. Ehhez segítségül megadjuk az \mathbf{a}_S két vektoregyenletét:

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_{CE}^n + \mathbf{a}_{CE}^t + \mathbf{a}_{SC}^n + \mathbf{a}_{SC}^t \text{ és}$$

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^c + \mathbf{a}_{BA}^t + \mathbf{a}_{SB}^n + \mathbf{a}_{SB}^t.$$

3. Mechanizmusok kinematikai vizsgálata matematikai módszerrel

A síkbeli mechanizmusok vizsgálatának legismertebb, és még ma is legelterjedtebb módszere az előző fejezetben megismert grafikus analízis. A matematikai analízis eddigi háttérbe szorulásának alapvető oka abban kereshető, hogy a feladatok megoldására szolgáló összefüggések még egyszerűbb esetekben is áttekinthetetlen formát öltenek. Ezekkel a számolás rendkívül munkaigényes és kényelmetlen. Az elmondottak különösen érvényesek a tagok helyzetének a meghatározására. A megoldáshoz ugyanis több ismeretlenes trigonometrikus, vagy másodfokú egyenletrendszerek vezetnek. Az egyenletek gyökeinek meghatározása ezért kézi számolással, vagy számológéppel valóban hosszadalmas. Ma azonban, amikor szinte minden intézményben, és egyre több háztartásban található számítógép, semmi sem indokolja a korábban kialakult felfogás fenntartását.

A numerikus analízis más ellenzői sokszor arra hivatkoznak, hogy a számszerű eredmények kevésbé szemléletesek és nehezen tekinthetők át. Ez valóban igaz, de nem szabad megfeledkezni arról a korlátlan lehetőségről, amit a számítógépes grafika nyújt az eredmények megjelenítésére.

A fentiek előrebocsájtása után a továbbiakban egy olyan fejlesztés alatt álló matematikai módszert mutatunk be, amelynek alkalmazása nem kíván különösebb számítástechnikai ismeretet, ugyanakkor a síkbeli mechanizmusok analízisében is csak annyi jártasságot feltételez, hogy az alkalmazó a vizsgálandó mechanizmust elemi nulla szabadságfokú csoportokra tudja bontani [8], [9].

A szerkezeti analízisből ismeretes, hogy a síkban mozgó mechanizmusok szabadságfokát az

$$s=3(n-1) - 2p_5 - p_4$$

összefüggéssel határozhatjuk meg, ahol:

- n - a mechanizmus tagjainak a száma,
- p_5 - az ötkötöttségű kinematikai párok száma,
- p_4 - a négykötöttségű kinematikai párok száma.

Szorítkozzunk ötkötöttségű kinematikai párokat tartalmazó mechanizmusokra, azaz legyen $p_4=0$, és az előző képletben vezessük be a $k = n-1$ jelölést, vagyis jelöljük k -val a mozgó tagok számát, így

$$s=3k - 2p_5$$

Az összefüggés alapján a legegyszerűbb $s=1$ szabadságfokú mechanizmust $k=1$ és $p_5=1$ esetén kapjuk. *Artobolevszkij* után ezt nevezzük I. osztályú mechanizmusnak, amely tehát egy mozgó tagból és egy ötkötöttségű kinematikai párból áll, szabadságfoka pedig $s=1$.

Bonyolultabb 1 szabadságfokú mechanizmusokat úgy alakíthatunk ki, hogy az I. osztályú mechanizmushoz 0 szabadságfokú csoportokat kapcsolunk. A 0 szabadságfokú csoportok szerkezete ugyancsak a szabadságfok meghatározásra felírt képlettel vizsgálható. Ha $s=0$, akkor a

$$p_5= 3/2 k,$$

vagyis a mozgó tagok száma (k) csak páros szám lehet, különben p_5 -re nem kapunk egész számot. A képlet szerint végtelen sokféle nulla szabadságfokú kinematikai lánc alakítható ki, mint azt korábban az 1.7 fejezetben kifejtettük. Ezeket a nulla szabadságfokú csoportokat nevezik *Asszur* csoportoknak, és ezek képezik a síkban mozgó mechanizmusok osztályozásának alapját.

Minden zérus szabadságfokú csoport egy-egy önálló, önmagában megoldható kinematikai és kinetikai feladatot jelent, vagyis az Asszur-féle osztályozás képezheti a számítógépes analízis alapját is. Nem kell mást tenni, mint az egyes zérus szabadságfokú kinematikai láncok megoldását szolgáló összefüggéseket levezetni, majd ezeket szubrutinok formájában a számítógép nyelvére átültetni, amelyek valamely főprogramból tetszés szerinti paraméterekkel meghívhatók.

A továbbiakban az előzőekben vázolt koncepciónak megfelelően járunk el. Először a leggyakrabban előforduló I. és II. osztályú csoportok számítására alkalmas képleteket vezetjük le, majd a BASIC nyelven megírt szubrutinokat közöljük. Végül példákat mutatunk be az alkalmazásra.

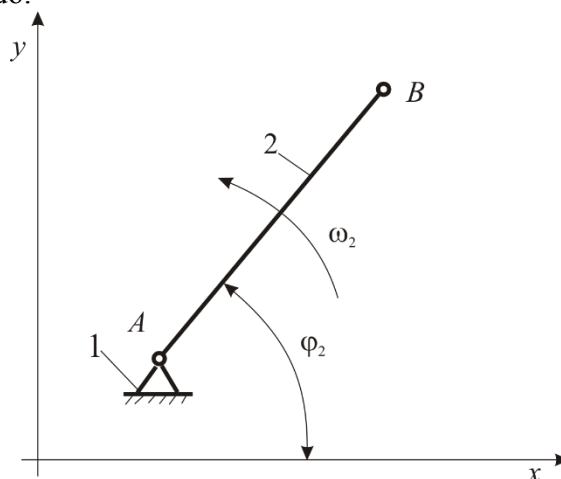
Az egyes csoportok ismertetésekor a konvencionális jelöléseket használjuk, vagyis az ABC nagybetűivel a kinematikai párokat, arab számokkal pedig a tagokat jelöljük. Az 1-es tagnak mindig az állványt tekintjük. A geometriai és a kinematikai paraméterek azonosítói:

- φ_i i -edik tag helyzetét meghatározó szög,
- ω_i i -edik tag szögsebessége,
- ε_i i -edik tag szöggyorsulása,
- x_j, y_j j -edik pont vagy kinematikai pár koordinátái, ahol $j=A, B, C, \dots$,
- v_{xj}, v_{yj} j -edik pont vagy kinematikai pár x és y irányú sebessége,
- a_{xj}, a_{yj} j -edik pont vagy kinematikai pár x és y irányú gyorsulása.

A φ_1 szöget mindig az x tengelytől mérjük az óramutató járásával ellentétes irányban. Ennek megfelelően az óramutató járásával ellentétes irányú szögsebesség és szöggyorsulás pozitív.

3.1. Egy szabadságfokú I. osztályú mechanizmus

Artobolevszkij osztályozása alapján az I. osztályú mechanizmus egy mozgó tagból áll, és ötkötöttességű kinematikai párral kapcsolódik az állványhoz (3.1. ábra). A tag valamint a B pont pillanatnyi helyzetét és mozgásállapotát az A pont helyzete, valamint a φ_2 és ω_2 egyértelműen meghatározzák. Mivel az A pont az állványhoz kapcsolódik, értelemszerűen a $v_{xA}=0$ és $v_{yA}=0$. Az $\varepsilon_2=0$, ha az ω_2 =állandó.



3.1. ábra

A B pont helyzete

$$(3.1) \quad x_B = \overline{AB} \cos \varphi_2 + x_A,$$

$$(3.2) \quad y_B = \overline{AB} \sin \varphi_2 + y_A.$$

A B pont sebessége

$$(3.3) \quad v_{x_B} = -\overline{AB} \omega_2 \sin \varphi_2,$$

$$(3.4) \quad v_{y_B} = -\overline{AB} \omega_2 \cos \varphi_2.$$

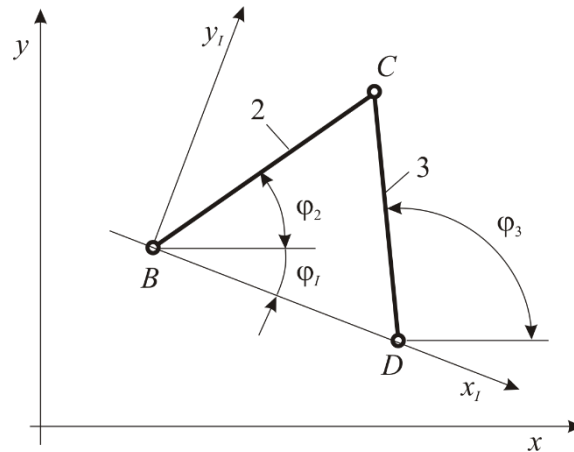
A B pont gyorsulása

$$(3.5) \quad a_{x_B} = -\overline{AB} \omega_2^2 \cos \varphi_2,$$

$$(3.6) \quad a_{y_B} = -\overline{AB} \omega_2^2 \sin \varphi_2.$$

3.2. Zérus szabadságfokú csoport belső forgó és külső forgó kinematikai párokkal

Az egyik leggyakrabban előforduló zérus szabadságfokú csoport (3.2. ábra) a B és D jelű kinematikai párokkal kapcsolható az állványhoz, vagy más csoportokhoz. A megoldás során a pontok helyzetét és mozgás jellemzőit mindig ismertnek tekintjük, vagyis számítástechnikai terminológiával élve az input adatok: $x_B, y_B, v_{x_B}, v_{y_B}, a_{x_B}, a_{y_B}, x_D, y_D, v_{x_D}, v_{y_D}, a_{x_D}, a_{y_D}$. Ezekon kívül ismert a 2-es és 3-as tagok hossza \overline{BC} és \overline{CD} is.



3.2. ábra

A feladat: meghatározni a C pont helyzetét és mozgásjellemzőit, továbbá a 2-es és 3-as tagok helyzetét, szögsebességét, szöggyorsulását. A leírás egyszerűsítése érdekében két koordináta-rendszert használunk.

A C pont koordinátái

A C pont koordinátái az x_I, y_I rendszerben

$$\begin{aligned} x_{IC}^2 + y_{IC}^2 &= \overline{BC}^2, \\ (x_{IC} - \overline{BD})^2 + y_{IC}^2 &= \overline{CD}^2, \end{aligned}$$

ahol a

$$(3.7) \quad \overline{BD} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}$$

A \overline{BD} -t behelyettesítve:

$$(3.8) \quad x_{IC} = \frac{(\overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2)}{2\overline{BD}},$$

$$(3.9) \quad y_{IC} = \pm \sqrt{BC^2 - x_{IC}^2}.$$

Transzformáljuk az x_{IC} -t és az y_{IC} -t az x, y rendszerbe. Ehhez határozzuk meg a két rendszer közötti φ_I szöveget:

$$(3.10) \quad \sin \varphi_I = \frac{y_D - y_B}{BD},$$

$$(3.11) \quad \cos \varphi_I = \frac{x_D - x_B}{BD}.$$

Felhasználva a transzformációs összefüggéseket az

$$(3.12) \quad x_C = x_{IC} \cos \varphi_I - y_{IC} \sin \varphi_I + x_B,$$

$$(3.13) \quad y_C = x_{IC} \sin \varphi_I - y_{IC} \cos \varphi_I + y_B.$$

A tagok helyzete

A 3.2. ábra alapján a 2-es és 3-as tagok helyzetét meghatározó φ_2 és φ_3 szögek számítására több lehetőség is kínálkozik:

$$(3.14) \quad \sin \varphi_3 = \frac{y_C - y_D}{CD},$$

$$(3.15) \quad \cos \varphi_3 = \frac{x_C - x_D}{CD},$$

illetve

$$(3.16) \quad \sin \varphi_2 = \frac{y_C - y_B}{BC},$$

$$(3.17) \quad \cos \varphi_2 = \frac{x_C - x_B}{BC}.$$

A (3.9) összefüggésben a négyzetgyök miatt külön meg kell vizsgálni a C pont helyzetét. Ha C pont az x_I tengely felett, vagy magán a tengelyen fekszik, akkor a gyök pozitív, különben a negatív értékét kell figyelembe venni.

A C pont sebessége

Írjuk fel a C pont koordinátáit meghatározó két kör egyenletét az x, y rendszerben:

$$(3.18) \quad (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = \overline{BC}^2,$$

$$(3.19) \quad (x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = \overline{CD}^2.$$

Elvégezve a négyzetre emelést, majd az idő szerint deriválva, és felhasználva a (3.14)-(3.17) összefüggéseket:

$$(3.20) \quad (v_{xC} - v_{xB}) \cos \varphi_2 + (v_{yC} - v_{yB}) \sin \varphi_2 = 0,$$

$$(3.21) \quad (v_{xC} - v_{xD}) \cos \varphi_3 + (v_{yC} - v_{yD}) \sin \varphi_3 = 0.$$

A (3.20) és (3.21) egyenletekből az v_{xC} és v_{yC} már számítható. A (3.21)-ből a v_{yC} -t kifejezve, majd a (3.20)-ba helyettesítve:

$$(3.22) \quad v_{xC} = - \frac{v_{xB} \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 - v_{xD} \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 - (v_{yD} - v_{yB}) \sin \varphi_2 \sin \varphi_3}{\sin(\varphi_2 - \varphi_3)},$$

$$(3.23) \quad v_{yC} = v_{yD} - \frac{(v_{xC} - v_{xD}) \cos \varphi_3}{\sin \varphi_3}.$$

Külön vizsgálatot igényel a $\sin\varphi_3=0$ eset, mivel ekkor a (3.23) kifejezés határozatlan. A 3.2. ábra alapján egyszerűen belátható, ha a $\sin\varphi_3=0$, akkor a \overline{DC} rúd párhuzamos az x tengellyel, és a $v_{xC} = v_{xD}$. (Ha az egyenlőség nem állna fenn, akkor a \overline{DC} rúd elszakadna, ami lehetetlen.) Az egyenlőséget (3.20)-ba helyettesítve:

$$(v_{xD} - v_{xB}) \cos \varphi_2 + (v_{yC} - v_{yB}) \sin \varphi_2 = 0,$$

amelyből

$$(3.24) \quad v_{yC} = \frac{v_{yB} - (v_{xD} - v_{xB}) \cos \varphi_2}{\sin \varphi_2},$$

illetve az

$$(3.25) \quad v_{xC} = v_{xD}.$$

További speciális eset, amikor a $\sin\varphi_2 = \sin\varphi_3 = 0$. Ilyenkor mindkét rúd párhuzamos az x tengellyel, és a

$$(3.26) \quad v_{xC} = v_{xB} = v_{xD}, \quad v_{yC} = v_{yD}, \quad \text{és} \quad \omega_3 = 0,$$

a további mozgás iránya pedig határozatlan.

A tagok szögsebessége

A tagok szögsebessége a (3.14) és a (3.16) képletekből deriválással nyerhető.

A $\overline{BC} \sin \varphi_2 = y_C - y_B$ kifejezést az idő szerint deriválva, majd rendezve, az

$$(3.27) \quad \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{v_{yC} - v_{yB}}{BC \cos \varphi_2},$$

$$(3.28) \quad \omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{v_{yC} - v_{yD}}{CD \cos \varphi_3}.$$

Ha a $\cos\varphi_2=0$, vagy a $\cos\varphi_3=0$, akkor a (3.15) illetve a (3.17) képletekből az

$$(3.29) \quad \omega_2 = -\frac{v_{xC} - v_{xB}}{BC},$$

$$(3.30) \quad \omega_3 = -\frac{v_{xC} - v_{xD}}{CD}.$$

A C pont gyorsulása

A (3.20) és (3.21) egyenletekből az idő szerinti. deriválással kapjuk a C pont gyorsulását leíró egyenleteket:

$$(3.31) \quad (a_{xC} - a_{xB}) \cos \varphi_2 - (v_{xC} - v_{xB}) \omega_2 \sin \varphi_2 + (a_{yC} - a_{yB}) \sin \varphi_2 + (v_{yC} - v_{yB}) \omega_2 \cos \varphi_2 = 0$$

,

$$(3.32)$$

$$(a_{xC} - a_{xD}) \cos \varphi_3 - (v_{xC} - v_{xD}) \omega_3 \sin \varphi_3 + (a_{yC} - a_{yD}) \sin \varphi_3 + (v_{yC} - v_{yD}) \omega_3 \cos \varphi_3 = 0.$$

A (3.32)-ből az a_{yC} -t kifejezve, majd helyettesítve a (3.31)-be, a C pont gyorsulásának komponensei:

$$(3.33) \quad a_{xC} = \{ \sin \varphi_2 (a_{xD} \cos \varphi_3 - a_{yD} \sin \varphi_3) - \sin \varphi_3 (a_{xB} \cos \varphi_2 - a_{yB} \sin \varphi_2) - \\ - \omega_2 \sin \varphi_3 [(v_{xC} - v_{xB}) \sin \varphi_2 - (v_{yC} - v_{yB}) \cos \varphi_2] +$$

$$(3.34) \quad a_{yC} = \frac{+ \omega_3 \sin \varphi_2 [(v_{xC} - v_{xD}) \sin \varphi_3 - (v_{yC} - v_{yD}) \cos \varphi_3] / \sin(\varphi_2 - \varphi_3),}{\sin \varphi_3} \cdot \frac{a_{yD} - (a_{xC} - a_{xD}) \cos \varphi_3 + \omega_3 [(v_{xC} - v_{xD}) \sin \varphi_3 - (v_{yC} - v_{yD}) \cos \varphi_3]}{\sin \varphi_3}.$$

A $\sin \varphi_3=0$ különleges esetben, a (3.32)-ből a $\sin \varphi_3=0$ és $\cos \varphi_3=1$ helyettesítés után:

$$a_{xC} - a_{xD} + (v_{yC} - v_{yD}) \omega_3 = 0,$$

amelyből az

$$(3.35) \quad a_{xC} = a_{xD} - (v_{yC} - v_{yD}) \omega_3.$$

Ezt helyettesítve a (3.31)-be, az a_{yC} kifejezhető:

$$(3.36) \quad a_{yC} = \frac{a_{yB} + (v_{xC} - v_{xD}) \omega_2 - [a_{xD} - a_{xB} - (v_{yC} - v_{yD}) \omega_3 + (v_{yC} - v_{yB}) \omega_2] \cos \varphi_2}{\sin \varphi_2}$$

Ha a $\sin \varphi_2 = \sin \varphi_3 = 0$, akkor

$$(3.37) \quad a_{xC} = a_{xD}, \quad a_{yC} = \infty, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \infty.$$

A tagok szöggyorsulása

A tagok szöggyorsulását a (3.27) és (3.28)-ből az idő szerinti deriválással kapjuk:

$$(3.38) \quad \varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{a_{yC} - a_{yB} + \overline{BC} \omega_2^2 \sin \varphi_2}{\overline{BC} \cos \varphi_2},$$

$$(3.39) \quad \varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{a_{yC} - a_{yD} + \overline{CD} \omega_3^2 \sin \varphi_3}{\overline{CD} \cos \varphi_3}.$$

Ha a $\cos \varphi_2=0$ vagy $\cos \varphi_3=0$, akkor a (3.29) és a (3.30)-ból nyerhető összefüggéseket használjuk:

$$(3.40) \quad \varepsilon_2 = - \frac{(a_{xC} - a_{xB})}{\overline{BC}},$$

$$(3.41) \quad \varepsilon_3 = - \frac{(a_{xC} - a_{xD})}{\overline{CD}}.$$

Megjegyezzük, hogy a sebesség és gyorsulás komponensekre levezetett explicit kifejezések helyett a következő eljárással meghatározható lineáris egyenletrendszereket is használhatjuk.

A C pontra írható vektoregyenletek (3.2. ábra):

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB} = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{r}_{CB}$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{CD} = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega}_{31} \times \mathbf{r}_{CD}$$

A vektori szorzatok átalakításához tekintsük a következő azonosságot:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = |\boldsymbol{\omega}| \mathbf{k} \times |\mathbf{r}| (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) = |\mathbf{r}| |\boldsymbol{\omega}| [\cos \varphi (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + \sin \varphi (\mathbf{k} \times \mathbf{j})].$$

Mivel $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ és $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, az

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = |\mathbf{r}| |\boldsymbol{\omega}| (\sin \varphi \mathbf{i} - \cos \varphi \mathbf{j}),$$

ahol \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} az egységvektorokat, φ pedig az \mathbf{r} vektor és az x tengely közötti szöget jelöli.

A fenti azonosságot felhasználva a C pont sebességére felírható komponensegyenletek:

$$v_{xC} = v_{xB} + r_{CB}\omega_{21} \sin \varphi_2,$$

$$v_{yC} = v_{yB} + r_{CB}\omega_{21} \cos \varphi_2,$$

$$v_{xC} = v_{xD} + r_{CD}\omega_{31} \sin \varphi_3,$$

$$v_{yC} = v_{yD} + r_{CD}\omega_{31} \cos \varphi_3.$$

Az egyenletrendszer $\mathbf{A}\mathbf{v}=\mathbf{b}_1$ alakba rendezhető, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{CB} \sin \varphi_2 & 0 \\ 0 & 1 & -r_{CB} \cos \varphi_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & r_{CD} \sin \varphi_3 \\ 0 & 1 & 0 & -r_{CD} \cos \varphi_3 \end{vmatrix}$$

az egyenletrendszer kvadratikus mátrixa. A

$$\mathbf{b}_1 = \begin{vmatrix} v_{xB} \\ v_{yB} \\ v_{xD} \\ v_{yD} \end{vmatrix}$$

az egyenletrendszer szabad tagjainak oszlopvektora, és a

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} v_{xC} \\ v_{yC} \\ \omega_{21} \\ \omega_{31} \end{vmatrix}$$

az ismeretlenek oszlopvektora.

A C pont gyorsulásának vektoregyenletei:

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t = \mathbf{a}_B + \omega_{21} \times \omega_{21} \times \mathbf{r}_{CB} + \varepsilon_{21} \times \mathbf{r}_{CB}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_{CD}^n + \mathbf{a}_{CD}^t = \mathbf{a}_D + \omega_{31} \times \omega_{31} \times \mathbf{r}_{CD} + \varepsilon_{31} \times \mathbf{r}_{CD}$$

Az előző azonosságot felhasználva az

$$\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = |\omega| \mathbf{k} [-|\mathbf{r}| |\omega| (\sin \varphi \mathbf{i} - \cos \varphi \mathbf{j})] = -|\mathbf{r}| |\omega|^2 [\sin \varphi (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) - \cos \varphi (\mathbf{k} \times \mathbf{j})],$$

így az

$$\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = -|\mathbf{r}| |\omega|^2 (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}).$$

Az első azonossággal analóg módon felírható az

$$\varepsilon \times \mathbf{r} = -|\mathbf{r}| |\omega|^2 (\sin \varphi \mathbf{i} - \cos \varphi \mathbf{j}).$$

Az azonosságokkal átalakított vektoregyenletekből nyert lineáris egyenletrendszer $\mathbf{A}\mathbf{a}=\mathbf{b}_2$ alakra hozható, ahol az együtthatók kvadratikus mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{CB} \sin \varphi_2 & 0 \\ 0 & 1 & -r_{CB} \cos \varphi_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & r_{CD} \sin \varphi_3 \\ 0 & 1 & 0 & -r_{CD} \cos \varphi_3 \end{vmatrix}.$$

A szabadtagok oszlopvektora:

$$\mathbf{b}_2 = \begin{vmatrix} a_{xB} - r_{CB} \omega_{21}^2 \cos \varphi_2 \\ a_{yB} - r_{CB} \omega_{21}^2 \sin \varphi_2 \\ a_{xD} - r_{CD} \omega_{31}^2 \cos \varphi_3 \\ a_{yD} - r_{CD} \omega_{31}^2 \sin \varphi_3 \end{vmatrix},$$

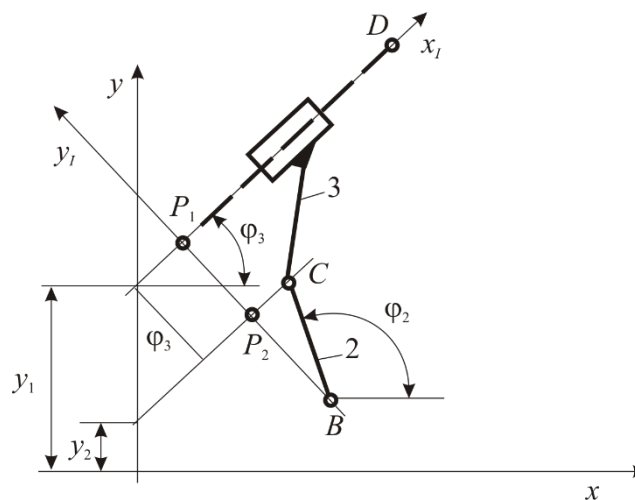
és az ismeretlenek oszlopvektora:

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_{xC} \\ a_{yC} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{vmatrix}.$$

3.3. Zérus szabadságfokú csoport egy külső haladó és forgó kinematikai párokkal

A 3.3. ábra szerinti zérus szabadságfokú csoport esetén az input adatok $x_B, y_B, v_{xB}, v_{yB}, a_{xB}, a_{yB}, x_D, y_D, v_{xD}, v_{yD}, a_{xD}, a_{yD}, \varphi_3, \omega_3, \varepsilon_3, \overline{BC}, \overline{P_1P_2}$. A $\overline{P_1P_2}$ távolságot előjelhelyesen adjuk meg az x_I, y_I koordinátarendszerben, amelyet úgy veszünk fel, hogy abban az x_{IC} értéke pozitív. Ha a 3-as tag az állványhoz kapcsolódik, akkor $\varphi_3 =$ állandó, és ekkor a D pontot az x_I tengelyen bárhol felvehetjük.

Határozzuk meg a C pont helyzetét és mozgásjellemzőit, valamint a 2-es tag helyzetét, szögsebességét és szöggyorsulását!



3.3. ábra

A C pont koordinátái

Először írjuk fel a P_1, D és a P_1, B pontokon átmenő egyenesek egyenleteit:

$$y_{P_1} - y_D = \operatorname{tg}\varphi_3(x_{P_1} - x_D),$$
$$y_{P_1} - y_B = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_3(x_{P_1} - x_B)},$$

Ezekből a P_1 pont koordinátái:

$$(3.42) \quad x_{P_1} = x_B \cos^2 \varphi_3 + x_D \sin^2 \varphi_3 + (y_B - y_D) \sin \varphi_3 \cos \varphi_3$$

$$(3.43) \quad y_{P_1} = -\operatorname{tg}\varphi_3(x_{P_1} - x_D) + y_D$$

A $\overline{P_1B}$ távolság:

$$(3.44) \quad \overline{P_1B} = \sqrt{(x_{P_1} - x_B)^2 + (y_{P_1} - y_B)^2}$$

Ha $\sin\varphi_3=0$, akkor a (3.42)-(3.44) helyett a következő képletek használhatók:

$$(3.45) \quad x_{P_1} = x_B$$

$$(3.46) \quad y_{P_1} = y_D$$

$$(3.47) \quad \overline{P_1B} = y_{P_1} - y_B$$

Ha a $\cos\varphi_3=0$, akkor az

$$(3.48) \quad x_{P_1} = x_D$$

$$(3.49) \quad y_{P_1} = y_B$$

$$(3.50) \quad \overline{P_1B} = x_{P_1} - x_B$$

A 3.3. ábrából az

$$(3.51) \quad x_{IC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BP_2}^2},$$

$$(3.52) \quad y_{IC} = \overline{P_1P_2},$$

ahol a

$$(3.53) \quad \overline{BP_2} = \left| \overline{P_1P_2} \right| - \overline{P_1B}, \text{ ha a } \left| \overline{P_1P_2} \right| \leq \overline{P_1B},$$

$$(3.54) \quad \overline{BP_2} = \overline{P_1B} - \left| \overline{P_1P_2} \right|, \text{ ha a } \left| \overline{P_1P_2} \right| > \overline{P_1B}.$$

Végül a keresett koordináták:

$$(3.55) \quad x_C = x_{IC} \cos \varphi_3 - y_{IC} \sin \varphi_3 + x_{P_1},$$

$$(3.56) \quad y_C = x_{IC} \sin \varphi_3 - y_{IC} \cos \varphi_3 + y_{P_1}.$$

A tagok helyzete

A 3.3. ábrából:

$$(3.57) \quad \sin \varphi_2 = \frac{y_C - y_B}{BC},$$

$$(3.58) \quad \cos \varphi_2 = \frac{x_C - x_B}{BC}$$

A C pont sebessége

Írjuk fel a C pont koordinátáit meghatározó összefüggéseket az x, y rendszerben:

$$(3.59) \quad (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = \overline{BC}^2.$$

A 3.3. ábra alapján a D és C pontokon átmenő egyenesek egyenletei:

$$(3.60) \quad y_D = x_D \operatorname{tg} \varphi_3 + y_1,$$

$$(3.61) \quad y_C = x_C \operatorname{tg} \varphi_3 + y_2,$$

Az

$$y_2 = \frac{y_1 - \overline{P_1 P_2}}{\cos \varphi_3} = -x_D \operatorname{tg} \varphi_3 + y_D - \frac{|\overline{P_1 P_2}|}{\cos \varphi_3},$$

ezt helyettesítve és rendezve, az

$$(3.62) \quad (y_C - y_D) \cos \varphi_3 = (x_C - x_D) \sin \varphi_3 - |\overline{P_1 P_2}|$$

Az (3.59)-et és a (3.62)-t az idő szerint deriválva:

$$(3.63) \quad v_{xC} \cos \varphi_2 - v_{xB} \cos \varphi_2 + v_{yC} \sin \varphi_2 - v_{yB} \sin \varphi_2 = 0$$

$$(3.64) \quad (v_{yC} - v_{yD}) \cos \varphi_3 - \omega_3 (y_C - y_D) \sin \varphi_3 = (v_{xC} - v_{xD}) \sin \varphi_3 + \omega_3 (x_C - x_D) \cos \varphi_3$$

Bevezetve az

$$A = x_C - x_D, \quad B = y_C - y_D, \quad C = x_C - x_B, \quad D = y_C - y_B$$

jelöléseket, a

$$(3.65)$$

$$v_{xC} = \frac{v_{xB} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 - \omega_3 \sin \varphi_2 (B \sin \varphi_3 + A \cos \varphi_3) + v_{xD} \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + (v_{yB} - v_{yD}) \sin \varphi_2 \cos \varphi_3}{\cos(\varphi_3 - \varphi_2)}$$

$$(3.66) \quad v_{yC} = \frac{\omega_3 \sin \varphi_2 (B \sin \varphi_3 + A \cos \varphi_3) + (v_{xC} - v_{xD}) \sin \varphi_2 \cos \varphi_3}{\cos \varphi_3}.$$

Ha $\cos \varphi_3 = 0$, akkor a (3.65) és a (3.66) összefüggések helyett a (3.63) és a (3.64)-ből adódó képleteket használjuk:

$$(3.67) \quad v_{xC} = -B \omega_3 + v_{xD}$$

$$(3.68) \quad v_{yC} = (B \omega_3 - v_{xD} + v_{xB}) \frac{\cos \varphi_2}{\sin \varphi_2} + v_{yB}$$

Ha a $\sin \varphi_2 = 0$ és a $\cos \varphi_3 = 0$, akkor a

$$(3.69) \quad v_{xC} = 0 \quad \text{és a} \quad v_{yC} = 0$$

Ha a $\cos \varphi_2 = 0$ és a $\sin \varphi_3 = 0$, akkor ugyancsak a (3.69) érvényes.

A (3.69) gyakorlatilag is belátható, ha nem állna fenn, akkor eltörne a 2-es rúd.

A tagok szögsebessége

Az ω_3 input adat, az ω_2 pedig (3.57)-ből és (3.58)-ből:

$$(3.70) \quad \omega_2 = \frac{v_{yC} - v_{yB}}{\overline{BC} \cos \varphi_2} = -\frac{v_{yC} - v_{yB}}{\overline{BC} \sin \varphi_2}$$

A C pont gyorsulása

Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be az

$$A_1 = v_{xC} - v_{xD}, B_1 = v_{yC} - v_{yD}, C_1 = v_{xC} - v_{xB}, D_1 = v_{yC} - v_{yB}$$

jelöléseket. A deriválások elvégzése után a (3.63)-ból és (3.64)-ből az

$$(3.71) \quad a_{xC} \cos \varphi_2 + a_{yC} \sin \varphi_2 - \omega_2(C_1 \sin \varphi_2 - D_1 \cos \varphi_2) - a_{xB} \cos \varphi_2 - a_{yB} \sin \varphi_2 = 0,$$

$$(3.72) \quad \begin{aligned} & (a_{yC} - a_{yD}) \cos \varphi_3 - 2\omega_3 B_1 \sin \varphi_3 - \omega_3^2 B \cos \varphi_3 - \varepsilon_3 B \sin \varphi_3 = \\ & = (a_{xC} - a_{xD}) \sin \varphi_3 + 2\omega_3 A_1 \cos \varphi_3 - \omega_3^2 A \sin \varphi_3 + \varepsilon_3 A \cos \varphi_3 \end{aligned}$$

amelyekből:

$$(3.73) \quad \begin{aligned} a_{xC} = & \frac{-\sin \varphi_2 [\sin \varphi_3 (-a_{xD} + 2\omega_3 B_1 + \varepsilon_3 B - \omega_3^2 A) + \cos \varphi_3 (a_{yD} + \omega_3^2 B + 2\omega_3 A_1 + \varepsilon_3 A)]}{\cos(\varphi_3 - \varphi_2)} + \\ & + \frac{\cos \varphi_3 [\sin \varphi_2 (\omega_2 C_1 + a_{yB}) + \cos \varphi_2 (-\omega_2 D_1 + a_{xB})]}{\cos(\varphi_3 - \varphi_2)}, \end{aligned}$$

$$(3.74) \quad a_{yC} = \frac{\sin \varphi_3 (2\omega_3 B_1 + \varepsilon_3 B + a_{xC} - a_{xD} - \omega_3^2 A) + \cos \varphi_3 (2\omega_3 A_1 + \varepsilon_3 A + a_{yD} + \omega_3^2 B)}{\cos \varphi_3}.$$

Ha a $\cos \varphi_3 = 0$, akkor a (3.71)-ből és a (3.72)-ből:

$$(3.75) \quad a_{xC} = -2\omega_3 B_1 - \varepsilon_3 B + a_{xD} + \omega_3^2 A,$$

$$(3.76) \quad a_{yC} = \frac{\omega_2 (C_1 \sin \varphi_2 - D_1 \cos \varphi_2) + a_{xB} \cos \varphi_2 + a_{yB} \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 (2\omega_3 B_1 + \varepsilon_3 B - a_{xD} - \omega_3^2 A)}{\sin \varphi_2}.$$

Ha a $\sin \varphi_2 = 0$ és a $\cos \varphi_3 = 0$, akkor az

$$(3.77) \quad a_{xC} = 0, \text{ és az } a_{yC} = \infty$$

Ha a $\cos \varphi_2 = 0$ és a $\sin \varphi_3 = 0$, akkor az

$$(3.78) \quad a_{xC} = \infty, \text{ és az } a_{yC} = 0$$

A tagok szöggyorsulása

Az ε_3 input adat, az ε_2 pedig a (3.70)-ből adódó

$$(3.79) \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{yC} - a_{yB} + \overline{BC} \omega_2^2 \sin \varphi_2}{\overline{BC} \cos \varphi_2} = \frac{a_{xC} - a_{xB} + \overline{BC} \omega_2^2 \cos \varphi_2}{\overline{BC} \sin \varphi_2}$$

képletekből számítható.

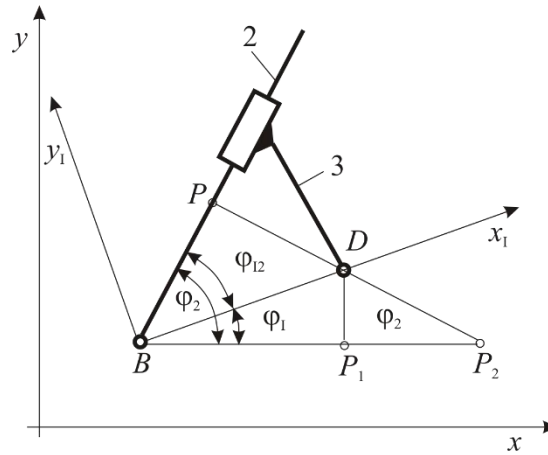
3.4. Zérus szabadságfokú csoport belső haladó és külső forgó kinematikai párokkal

A 3.4. ábrán látható csoportnál az input adatok: $x_B, y_B, v_{xB}, v_{yB}, a_{xB}, a_{yB}, x_D, y_D, v_{xD}, v_{yD}, a_{xD}, a_{yD}, \overline{PD}$. A feladat: meghatározni a 2-es tag helyzetét jellemző φ_2 szöveget, továbbá a tag szögsebességét és szöggyorsulását. A leíráshoz a 3.4. ábra szerinti koordináta-rendszereket használjuk.

A tagok helyzete

A két tag helyzete az x_I, y_I koordináta-rendszerben a BOP háromszögből:

$$(3.80) \quad \sin \varphi_{12} = \frac{\overline{PD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{PD}}{\sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}}$$



3.4. ábra

A két koordináta-rendszer közötti φ_1 szög a BP_1D háromszögből a

$$(3.81) \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B}$$

Végül az ábráról leolvasható a keresett φ_2 szög:

$$(3.82) \quad \text{ha a } \operatorname{tg} \varphi_1 < 0, \text{ akkor a } \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_{12}$$

$$(3.83) \quad \text{ha a } \operatorname{tg} \varphi_1 \geq 0, \text{ akkor a } \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_{12}$$

A tagok szögsebessége

A PP_2B háromszögből a

$$\sin \varphi_2 = \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} = \frac{\overline{PD} + \overline{DP_2}}{\overline{BP_1} + \overline{P_1P_2}}.$$

A DP_2P_1 háromszögből a

$$\overline{DP_2} = \frac{y_D - y_B}{\cos \varphi_2} \quad \text{és a} \quad \overline{P_1P_2} = \frac{y_D - y_B}{\operatorname{tg} \varphi_2}.$$

Ezeket helyettesítve:

$$\sin \varphi_2 = \frac{y_D - y_B + \overline{PD} \cos \varphi_2}{(y_D - y_B) \sin \varphi_2 + (x_D - x_B) \cos \varphi_2}.$$

Ezt rendezve a

$$(3.84) \quad -(y_D - y_B) \cos \varphi_2 + (x_D - x_B) \sin \varphi_2 = \overline{PD}.$$

A (3.84)-et az idő szerint deriválva:

$$(3.85) \quad -(v_{yD} - v_{yB}) \cos \varphi_2 + (x_D - x_B) \omega_2 \sin \varphi_2 + (v_{xD} - v_{xB}) \sin \varphi_2 + (x_D - x_B) \omega_2 \cos \varphi_2 = 0,$$

amelyből az

$$(3.86) \quad \omega_2 = \omega_3 = \frac{(v_{yD} - v_{yB}) \cos \varphi_2 - (v_{xD} - v_{xB}) \sin \varphi_2}{(x_D - x_B) \cos \varphi_2 + (y_D - y_B) \sin \varphi_2}.$$

A tagok szöggyorsulása

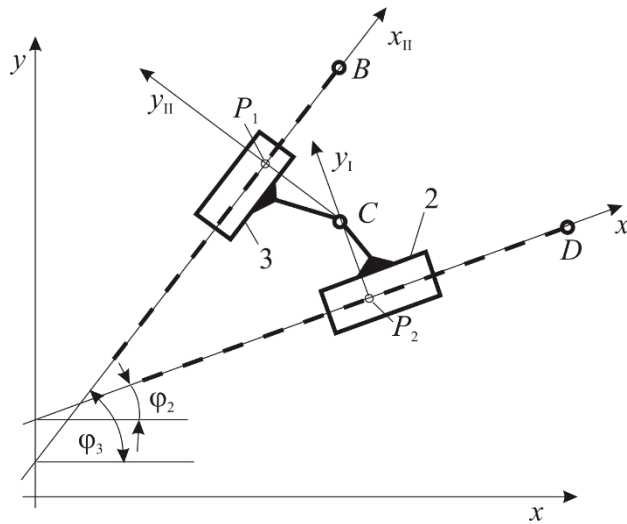
A (3.85)-öt az idő szerint deriválva, majd rendezve az

(3.87)

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{(a_{yD} - a_{yB}) \cos \varphi_2 - (a_{xD} - a_{xB}) \sin \varphi_2 - 2\omega_2(v_{xD} - v_{xB}) \cos \varphi_2 - 2\omega_2(v_{yD} - v_{yB}) \sin \varphi_2}{(x_D - x_B) \cos \varphi_2 + (y_D - y_B) \sin \varphi_2} + \frac{\omega_2^2(x_D - x_B) \cos \varphi_2 - \omega_2^2(y_D - y_B) \sin \varphi_2}{(x_D - x_B) \cos \varphi_2 + (y_D - y_B) \sin \varphi_2}.$$

3.5. Zérus szabadságfokú csoport belső forgó és külső haladó kinematikai párokkal

A gyakorlatban ritkán előforduló csoportot az 3.5. ábra szemlélteti. A számításokhoz az ábra szerint felvett koordináta-rendszereket használjuk. Az input adatok: $x_B, y_B, v_{xB}, v_{yB}, a_{xB}, a_{yB}, \varphi_2, \omega_2, \varepsilon_2, x_D, y_D, v_{xD}, v_{yD}, a_{xD}, a_{yD}, \varphi_3, \omega_3, \varepsilon_3, \overline{P_1C}, \overline{CP_2}$. A $\overline{P_1C}, \overline{CP_2}$ távolságokat előjelhelyesen kell megadni az x_I, y_I , illetve az x_{II}, y_{II} , az koordináta-rendszerekben. A feladat: meghatározni a C pont helyzetét, sebességét és gyorsulását.



3.5. ábra

A C pont koordinátái

Kiindulásként írjuk fel a B és D pontokon átmenő $\text{tg}\varphi_3$ és $\text{tg}\varphi_2$ irányú egyenesekkel párhuzamos, és a C ponton átmenő egyenesek egyenleteit:

$$y_C = \frac{\text{tg}\varphi_3 x_C + y_B - \text{tg}\varphi_3 x_B + \overline{P_1C}}{\cos \varphi_3},$$

$$y_C = \frac{\text{tg}\varphi_2 x_C + y_D - \text{tg}\varphi_2 x_D + \overline{CP_2}}{\cos \varphi_2}.$$

amelyekből

$$(3.88) \quad (y_C - y_B) \cos \varphi_3 - (x_C - x_B) \sin \varphi_3 = \overline{P_1C},$$

$$(3.89) \quad (y_C - y_D) \cos \varphi_2 - (x_C - x_D) \sin \varphi_2 = \overline{CP_2}.$$

A (3.88) és (3.89) egyenletekből az x_C és y_C koordináták számíthatók:

$$(3.90) \quad x_C = \frac{\frac{\overline{CP_2}}{\cos \varphi_2} - \frac{\overline{P_1C}}{\cos \varphi_3} + y_D - y_B + x_B \operatorname{tg} \varphi_3 - x_D \operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_3 - \operatorname{tg} \varphi_2},$$

$$(3.91) \quad y_C = \frac{\overline{P_1C}}{\cos \varphi_3} + (x_C - x_B) \operatorname{tg} \varphi_3 + y_B = \frac{\overline{CP_2}}{\cos \varphi_2} + (x_C - x_D) \operatorname{tg} \varphi_2 + y_D.$$

A C pont sebessége

Bevezetve a

$$A = x_C - x_D, \quad B = y_C - y_D, \quad C = x_C - x_B, \quad D = y_C - y_B,$$

$$A_1 = v_{x_C} - v_{x_D}, \quad B_1 = v_{y_C} - v_{y_D}, \quad C_1 = v_{x_C} - v_{x_B}, \quad D_1 = v_{y_C} - v_{y_B}$$

jelöléseket, (3.88) és (3.89) egyenletekből kapjuk a

$$(3.92) \quad (v_{y_C} - v_{y_B}) \cos \varphi_3 - D \omega_3 \sin \varphi_3 - (v_{x_C} - v_{x_B}) \sin \varphi_3 - C \omega_3 \cos \varphi_3 = 0,$$

$$(3.93) \quad (v_{y_C} - v_{y_D}) \cos \varphi_2 - B \omega_2 \sin \varphi_2 - (v_{x_C} - v_{x_D}) \sin \varphi_2 - A \omega_2 \cos \varphi_2 = 0$$

egyenleteket.

Rendezés után a

$$(3.94) \quad v_{x_C} = \frac{(\omega_2 B - v_{x_D}) \operatorname{tg} \varphi_2 - (\omega_3 D - v_{x_B}) \operatorname{tg} \varphi_3 + \omega_2 A - \omega_3 C - v_{y_B} + v_{y_D}}{\operatorname{tg} \varphi_3 - \operatorname{tg} \varphi_2},$$

$$(3.95) \quad v_{y_C} = \frac{\omega_3 D \sin \varphi_3 + (v_{x_C} - v_{x_B}) \sin \varphi_3 + \omega_3 C \cos \varphi_3}{\cos \varphi_3 + v_{y_B}},$$

vagy

$$v_{y_C} = \frac{\omega_2 B \sin \varphi_2 + (v_{x_C} - v_{x_D}) \sin \varphi_2 + \omega_2 A \cos \varphi_2}{\cos \varphi_2 + v_{y_D}}.$$

A C pont gyorsulása

A (3.92) és a (3.93) egyenletekből a

$$(3.96) \quad (a_{y_C} - a_{y_B}) \cos \varphi_3 - 2D_1 \omega_3 \sin \varphi_3 - D \omega_3^2 \cos \varphi_3 - D \varepsilon_3 \sin \varphi_3 - \\ - (a_{x_C} - a_{x_B}) \sin \varphi_3 - 2C_1 \omega_3 \cos \varphi_3 + C \omega_3^2 \sin \varphi_3 - C \varepsilon_3 \cos \varphi_3 = 0,$$

$$(3.97) \quad (a_{y_C} - a_{y_D}) \cos \varphi_2 - 2B_1 \omega_2 \sin \varphi_2 - B \omega_2^2 \cos \varphi_2 - B \varepsilon_2 \sin \varphi_2 - \\ - (a_{x_C} - a_{x_D}) \sin \varphi_2 - 2A_1 \omega_2 \cos \varphi_2 + A \omega_2^2 \sin \varphi_2 - A \varepsilon_2 \cos \varphi_2 = 0.$$

Az előző egyenletekből a C pont gyorsulásának komponensei:

$$(3.98) \quad a_{x_C} = \frac{\omega_2 (B_1 \operatorname{tg} \varphi_2 + 2A_1 + B \omega_2 - A \omega_2 \operatorname{tg} \varphi_2) + \varepsilon_2 (B \operatorname{tg} \varphi_2 + A) - \omega_3 (2D_1 \operatorname{tg} \varphi_3 + 2C_1 + D \omega_3 - C \omega_3 \operatorname{tg} \varphi_3)}{\operatorname{tg} \varphi_3 - \operatorname{tg} \varphi_2} + \\ + \frac{-\varepsilon_3 (D \operatorname{tg} \varphi_3 + C) + a_{y_D} - a_{y_B} + a_{x_B} \operatorname{tg} \varphi_3 - a_{x_D} \operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_3 - \operatorname{tg} \varphi_2},$$

$$(3.99) \quad a_{y_C} = \omega_3 (2D_1 \operatorname{tg} \varphi_3 + 2C_1 + D \omega_3 - C \omega_3 \operatorname{tg} \varphi_3) + \varepsilon_3 (D \operatorname{tg} \varphi_3 + C) + (a_{x_C} - a_{x_B}) \operatorname{tg} \varphi_3 + a_{y_B},$$

vagy

$$a_{y_C} = \omega_2 (2B_1 \operatorname{tg} \varphi_2 + 2A_1 + B \omega_2 - A \omega_2 \operatorname{tg} \varphi_2) + \varepsilon_2 (B \operatorname{tg} \varphi_2 + A) + (a_{x_C} - a_{x_D}) \operatorname{tg} \varphi_2 + a_{y_D}.$$

3.6. Zérus szabadságfokú csoport belső haladó, külső forgó és haladó kinematikai párokkal

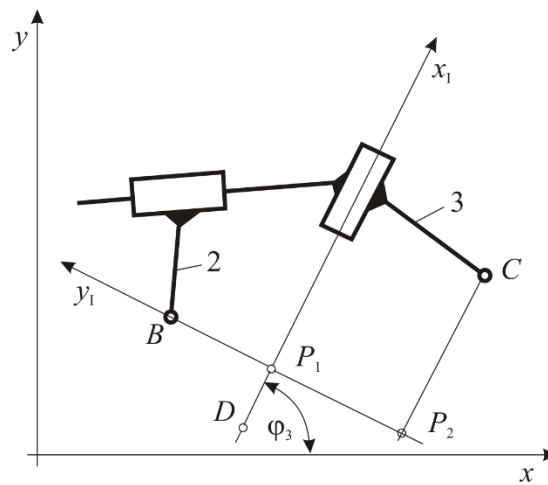
A csoportot a 3.6. ábrán mutatjuk be. Az input adatok: $x_B, y_B, v_{xB}, v_{yB}, a_{xB}, a_{yB}, x_D, y_D, v_{xD}, v_{yD}, a_{xD}, a_{yD}, \varphi_3, \omega_3, \varepsilon_3, \overline{P_1P_2}, \overline{P_2C}$. A $\overline{P_1P_2}$ és $\overline{P_2C}$ távolságokat előjelhelyesen adjuk meg az x_I, y_I koordinátarendszerben, amelyet az ábra szerint veszünk fel. Határozzuk meg a C pont helyzetét és mozgásjellemzőit.

A C pont koordinátái

A B és D pontokon átmenő egyenesek egyenleteiből:

$$(3.100) \quad y_{P_1} - y_D = \operatorname{tg}\varphi_3(x_{P_1} - x_D),$$

$$(3.101) \quad y_{P_1} - y_B = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_3}(x_{P_1} - x_B).$$



3.6. ábra

A P_1 pont koordinátái:

$$(3.102) \quad x_{P_1} = x_B \cos^2 \varphi_3 + x_D \sin^2 \varphi_3 + (y_B - y_D) \sin \varphi_3 \cos \varphi_3,$$

$$(3.103) \quad y_{P_1} = \operatorname{tg}\varphi_3(x_{P_1} - x_D) + y_D.$$

Ha a $\cos\varphi_3=0$, akkor az

$$(3.104) \quad x_{P_1} = x_D, \quad y_{P_1} = y_B.$$

Ha a $\sin\varphi_3=0$, akkor az

$$(3.105) \quad x_{P_1} = x_B, \quad y_{P_1} = y_D.$$

A 3.6. ábrából

$$(3.106) \quad x_{IC} = \overline{P_2C}, \quad y_{IC} = \overline{P_1P_2}.$$

A transzformációs összefüggésekből:

$$(3.107) \quad x_C = x_{IC} \cos \varphi_3 - y_{IC} \sin \varphi_3 + x_{P_1}$$

$$(3.108) \quad y_C = x_{IC} \sin \varphi_3 - y_{IC} \cos \varphi_3 + y_{P_1}$$

A C pont sebessége

Írjuk fel a B és D pontokon átmenő $-\text{ctg}\varphi_3$ és $\text{tg}\varphi_3$ irányú egyenesekkel párhuzamos, és a C ponton átmenő egyenesek egyenleteit:

$$y_C = x_C \text{tg}\varphi_3 + y_D - x_D \text{tg}\varphi_3 + \frac{\overline{P_1 P_2}}{\cos \varphi_3},$$

$$y_C = -x_C \text{ctg}\varphi_3 + y_B + x_B \text{ctg}\varphi_3 + \frac{\overline{P_2 C}}{\sin \varphi_3}.$$

amelyekből az

$$(3.109) \quad (y_C - y_D) \cos \varphi_3 - (x_C - x_D) \sin \varphi_3 = \overline{P_1 P_2},$$

$$(3.110) \quad (y_C - y_B) \sin \varphi_3 - (x_C - x_B) \cos \varphi_3 = \overline{P_2 C}.$$

A (3.109) és a (3.110) egyenleteket deriválva, és bevezetve az

$$A = x_C - x_D, \quad B = y_C - y_D, \quad C = x_C - x_B, \quad D = y_C - y_B,$$

$$A_1 = v_{x_C} - v_{x_D}, \quad B_1 = v_{y_C} - v_{y_D}, \quad C_1 = v_{x_C} - v_{x_B}, \quad D_1 = v_{y_C} - v_{y_B}$$

jelöléseket, a

$$(3.111) \quad (v_{y_C} - v_{y_D}) \cos \varphi_3 - B \omega_3 \sin \varphi_3 - (v_{x_C} - v_{x_D}) \sin \varphi_3 - A \omega_3 \cos \varphi_3 = 0,$$

$$(3.112) \quad (v_{y_C} - v_{y_B}) \sin \varphi_3 + D \omega_3 \cos \varphi_3 + (v_{x_C} - v_{x_B}) \cos \varphi_3 - C \omega_3 \sin \varphi_3 = 0$$

Rendezés és helyettesítés után a

$$(3.113) \quad v_{x_C} = -\omega_3 [\sin \varphi_3 (B \sin \varphi_3 + A \cos \varphi_3) + \cos \varphi_3 (D \cos \varphi_3 - C \sin \varphi_3)] + (v_{y_B} - v_{y_D}) \sin \varphi_3 \cos \varphi_3 + v_{x_D} \sin^2 \varphi_3 + x_B \cos^2 \varphi_3,$$

$$(3.114) \quad v_{y_C} = \frac{(v_{x_C} - v_{x_D}) \sin \varphi_3 + \omega_3 (B \sin \varphi_3 + A \cos \varphi_3)}{\cos \varphi_3} + v_{x_D}.$$

Ha a $\cos \varphi_3 = 0$, akkor a

$$(3.115) \quad v_{y_C} = C \omega_3 + v_{x_D}.$$

Ha a $\sin \varphi_3 = 0$, akkor a

$$(3.116) \quad v_{x_C} = -D \omega_3 + v_{x_B}.$$

A C pont gyorsulása

Deriváljuk az idő szerint a (3.111) és a (3.112) egyenleteket:

$$(3.117) \quad (a_{y_C} - a_{y_D}) \cos \varphi_3 - 2B_1 \omega_3 \sin \varphi_3 - B(\omega_3^2 \cos \varphi_3 + \varepsilon_3 \sin \varphi_3) - (a_{x_C} - a_{x_D}) \sin \varphi_3 - 2A_1 \omega_3 \cos \varphi_3 + A(\omega_3^2 \sin \varphi_3 + \varepsilon_3 \cos \varphi_3) = 0,$$

$$(3.118) \quad (a_{y_C} - a_{y_B}) \sin \varphi_3 + 2D_1 \omega_3 \cos \varphi_3 - D(\omega_3^2 \sin \varphi_3 + \varepsilon_3 \cos \varphi_3) + (a_{x_C} - a_{x_B}) \cos \varphi_3 - 2C_1 \omega_3 \sin \varphi_3 - C(\omega_3^2 \cos \varphi_3 + \varepsilon_3 \sin \varphi_3) = 0$$

Az előző egyenletekből:

$$(3.119)$$

$$\begin{aligned}
a_{xC} &= 2\omega_3[\sin\varphi_3(B_1 \sin\varphi_3 + A_1 \cos\varphi_3) + \cos\varphi_3(D_1 \cos\varphi_3 - C_1 \sin\varphi_3)] - \\
&- \varepsilon_3[\sin\varphi_3(B \sin\varphi_3 + A \cos\varphi_3) - \cos\varphi_3(C \sin\varphi_3 - D \cos\varphi_3)] - \\
&- \omega_3^2[\sin\varphi_3(B \cos\varphi_3 + A \sin\varphi_3) - \cos\varphi_3(D \sin\varphi_3 + C \cos\varphi_3)] + \\
&+ (a_{yB} - a_{yD}) \sin\varphi_3 \cos\varphi_3 + a_{xD} \sin^2\varphi_3 + a_{xB} \cos^2\varphi_3
\end{aligned}$$

(3.120)

$$a_{yC} = \frac{2\omega_3(B_1 \sin\varphi_3 + A_1 \cos\varphi_3) + (a_{xC} - a_{xD}) \sin\varphi_3 + (\varepsilon_3 + \omega_3^2)(B \sin\varphi_3 + A \cos\varphi_3)}{\cos\varphi_3} + a_{yD}$$

Ha a $\cos\varphi_3=0$, akkor az

(3.121)

$$a_{yC} = 2C_1\omega_3 + C\varepsilon_3 + D\omega_3^2 + a_{yD}$$

Ha a $\sin\varphi_3=0$, akkor az

(3.122)

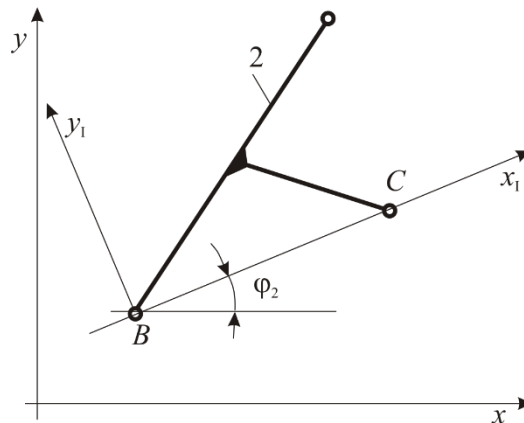
$$a_{xC} = -2D_1\omega_3 + D\varepsilon_3 + C\omega_3^2 + a_{xD}$$

3.7. Ismert mozgásállapotú forgó és haladó tag tetszőleges pontjának sebessége és gyorsulása

Az eddig tárgyalt zérus szabadságfokú csoportoknál a vizsgálatok a belső kinematikai párok, illetve a csoportot alkotó tagok helyzetének és mozgásállapotának meghatározására irányultak. A gyakorlati alkalmazás során ezen túlmenően kívánalom lehet, hogy a tagokhoz mereven kapcsolódó tetszőleges pontok helyét, sebességét és gyorsulását is számítani tudjuk. Ezen belül két eset különböztethető meg. A szóban forgó pont forgó, vagy haladó mozgást végző taghoz kapcsolódhat.

3.7.1 Ismert mozgásállapotú forgó tag tetszőleges pontja

A 3.7. ábra szerinti 2-es tag input adatai: $x_B, y_B, v_{xB}, v_{yB}, a_{xB}, a_{yB}, \varphi_2, \omega_2, \varepsilon_2$ és \overline{BC} . Határozzuk meg a C pont helyzetét, sebességét és gyorsulását. A mozgás leírásához az ábrán látható x_I, y_I és x, y koordinátarendszereket használjuk. A \overline{BC} -t az x_I, y_I rendszerben előjelhelyesen adjuk meg.



3.7. ábra

A C pont koordinátái

Az x_I, y_I koordinátarendszerben az

(3.123)

$$x_{IC} = \overline{BC},$$

(3.124)

$$y_{IC} = 0.$$

Alkalmazzuk a transzformációs összefüggéseket:

$$(3.125) \quad x_C = \overline{BC} \cos \varphi_2 + x_B,$$

$$(3.126) \quad y_C = \overline{BC} \sin \varphi_2 + y_B.$$

A C pont sebessége

$$(3.127) \quad v_{xC} = -\overline{BC} \omega_2 \sin \varphi_2 + v_{xB},$$

$$(3.128) \quad v_{yC} = \overline{BC} \omega_2 \cos \varphi_2 + v_{yB}.$$

A C pont gyorsulása

$$(3.129) \quad a_{xC} = -\overline{BC} \omega_2^2 \cos \varphi_2 - \overline{BC} \varepsilon_2 \sin \varphi_2 + a_{xB},$$

$$(3.130) \quad a_{yC} = -\overline{BC} \omega_2^2 \sin \varphi_2 - \overline{BC} \varepsilon_2 \cos \varphi_2 + a_{yB}.$$

3.7.2 Ismert mozgásállapotú haladó tag tetszőleges pontja

A 3.8. ábrán szemléltetett haladó tag D pontjának helyzete, sebessége és gyorsulása ismert, határozzuk meg a C pontban a sebességet és a gyorsulást. Az input adatok: $x_D, y_D, v_{xD}, v_{yD}, a_{xD}, a_{yD}, \varphi_3, \omega_3, \varepsilon_3$ \overline{PC} és \overline{DP} . Az utóbbi két adatot előjelhelyesen adjuk meg az x_I, y_I koordináta-rendszerben, amelyet úgy veszünk fel, hogy annak origója a D pontba essen.

Az x_I, y_I koordináta-rendszerben

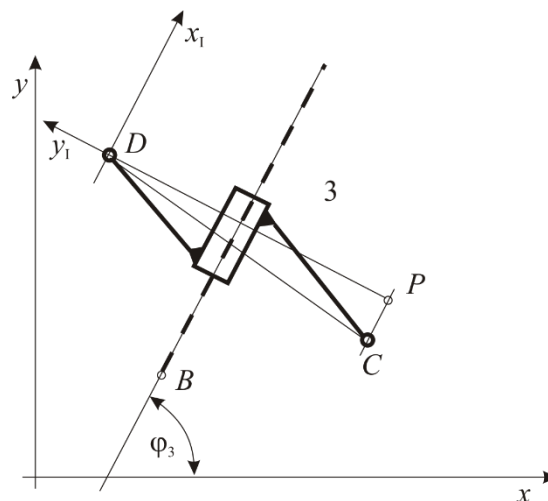
$$(3.131) \quad x_{IC} = \overline{PC},$$

$$(3.132) \quad y_{IC} = \overline{DP}.$$

Transzformáljuk az x_{IC} -t és az y_{IC} -t az x, y rendszerbe:

$$(3.133) \quad x_C = \overline{PC} \cos \varphi_3 - \overline{DP} \sin \varphi_3 + x_D,$$

$$(3.134) \quad y_C = \overline{PC} \sin \varphi_3 + \overline{DP} \cos \varphi_3 + y_D.$$



3.8. ábra

A C pont sebessége

A (3.133)-ból és (3.134)-ből

$$(3.135) \quad v_{xC} = -\overline{PC}\omega_3 \sin \varphi_3 + \overline{DP}\omega_3 \cos \varphi_3 + v_{xD},$$

$$(3.136) \quad v_{yC} = \overline{PC}\omega_3 \cos \varphi_3 - \overline{DP}\omega_3 \sin \varphi_3 + v_{yD}.$$

A C pont gyorsulása

$$(3.137) \quad a_{xC} = -\omega_3^2(\overline{PC} \cos \varphi_3 - \overline{DP} \sin \varphi_3) - \varepsilon_3(\overline{PC} \sin \varphi_3 - \overline{DP} \cos \varphi_3) + a_{xD},$$

$$(3.138) \quad a_{yC} = -\omega_3^2(\overline{PC} \sin \varphi_3 + \overline{DP} \cos \varphi_3) + \varepsilon_3(\overline{PC} \cos \varphi_3 - \overline{DP} \sin \varphi_3) + a_{yD}.$$

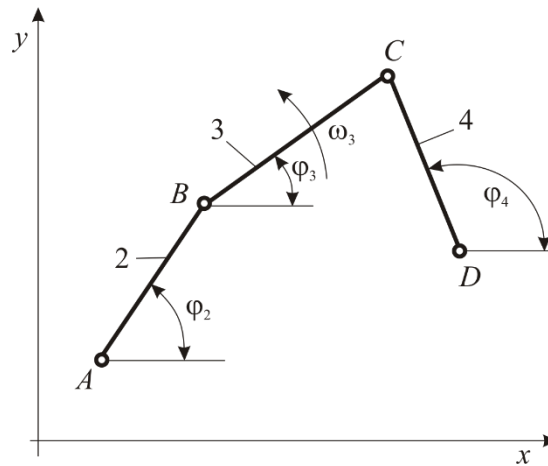
3.8. Összetett mozgást végző hajtótag vizsgálata

Az eddigi vizsgálatok során feltételeztük, hogy az általunk összeállított mechanizmus (kinematikai lánc) egy I. osztályú, egy szabadságfokú mechanizmusból (amely egyben a hajtótag is) és tetszőleges számú zérus szabadságfokú, II. osztályú csoportokból áll. A gyakorlatban azonban előfordulhat, hogy a hajtótag valamelyik II. osztályú csoport egyik összetett mozgást végző tagja. Ilyenkor az eddig ismertetett összefüggések nem alkalmazhatók. Ez pedig szükségessé teszi, hogy a leggyakrabban előforduló eseteket külön tárgyaljuk.

3.8.1 A hajtótag összetett mozgást végző rúd

Tekintsük a 3.9. ábrán látható egy szabadságfokú csoportot, amely egy I. osztályú, egy szabadságfokú és egy II. osztályú, zérus szabadságfokú csoportból áll. A hajtótag a II. osztályú csoport 3-as tagja, amelyet ω_3 szögsebességgel forgatunk. A csoport az A és D pontokkal kapcsolható további zérus szabadságfokú csoportokhoz, vagy az állványhoz.

Ismert a tagok mérete \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , valamint a φ_3 , x_A , y_A , v_{xA} , v_{yA} , a_{xA} , a_{yA} , x_D , y_D , v_{xD} , v_{yD} , a_{xD} , a_{yD} . Határozzuk meg a 2-es és a 4-es tagok helyzetét, szögsebességét, szöggyorsulását, a B, C pontok koordinátáit, sebességét és gyorsulását.



3.9. ábra

A 2-es tag helyzete

A 3.9. ábra alapján felírható geometriai egyenletek:

$$(3.139) \quad x_B = \overline{AB} \cos \varphi_2 + x_A,$$

$$(3.140) \quad y_B = \overline{AB} \sin \varphi_2 + y_A,$$

$$(3.141) \quad x_C = \overline{AB} \cos \varphi_2 + \overline{BC} \cos \varphi_3 + x_A,$$

$$(3.142) \quad y_C = \overline{AB} \sin \varphi_2 + \overline{BC} \sin \varphi_3 + y_A,$$

$$(3.143) \quad x_C = \overline{CD} \cos \varphi_4 + x_D,$$

$$(3.144) \quad y_C = \overline{CD} \sin \varphi_4 + y_D.$$

A (3.141)-(3.144) egyenletekből

$$\overline{CD} \cos \varphi_4 = \overline{AB} \cos \varphi_2 + \overline{BC} \cos \varphi_3 + x_A - x_D$$

$$\overline{CD} \sin \varphi_4 = \overline{AB} \sin \varphi_2 + \overline{BC} \sin \varphi_3 + y_A - y_D$$

Vezessük be az

$$a = \overline{BC} \cos \varphi_3 + x_A - x_D, \text{ és a } b = \overline{BC} \sin \varphi_3 + y_A - y_D$$

jelöléseket, így a

$$(3.145) \quad \overline{CD} \cos \varphi_4 = \overline{AB} \cos \varphi_2 + a,$$

$$(3.146) \quad \overline{CD} \sin \varphi_4 = \overline{AB} \sin \varphi_2 + b.$$

A (3.145), (3.146) egyenleteket négyzetre emelve, és összevonva, a

$$(3.147) \quad \overline{CD}^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{AB}(a \cos \varphi_2 + b \sin \varphi_2) + a^2 + b^2.$$

A (3.147) $\cos \varphi_2$ -re nézve egy másodfokú egyenlet:

$$4\overline{AB}^2(a^2 + b^2) \cos^2 \varphi_2 + 4\overline{AB}a(\overline{AB}^2 - \overline{CD}^2 + a^2 + b^2) \cos \varphi_2 + (\overline{AB}^2 - \overline{CD}^2 + a^2 + b^2)^2 - 4\overline{AB}^2 b^2 = 0$$

amelyből φ_2 kiszámítható. A megoldás során három eset fordulhat elő:

- (1) Az egyenletnek nincs megoldása, mert az \overline{AB} és a \overline{BC} sugarú körök nem metszik egymást. Az adott méretek mellett és az adott helyzetben a mechanizmus megvalósíthatatlan.
- (2) Ha az egyenletnek két valós gyöke van, akkor az \overline{AB} és \overline{BC} sugarú köröknek két metszéspontja van. Ilyenkor geometriai megfontolások alapján kell választani.
- (3) Ha az egyenletnek egy valós gyöke van, akkor az \overline{AB} és \overline{BC} sugarú körök érintik egymást, és a mechanizmus helyzete egyértelmű.

A B és C pontok koordinátái

A φ_2 meghatározása után a (3.139)-(3.142) egyenletekből a B és C pontok koordinátái számíthatók.

A 4-es tag helyzete

A (3.143) és (3.144)-ből a

$$(3.148) \quad \cos \varphi_4 = \frac{x_C - x_D}{\overline{CD}},$$

$$(3.149) \quad \sin \varphi_4 = \frac{y_C - y_D}{\overline{CD}}.$$

A 2-es tag szögsebessége

A (3.147)-et az idő szerint deriválva, és rendezve, a

$$(3.150) \quad \omega_2 = \frac{\overline{AB}(a' \cos \varphi_2 + b' \sin \varphi_2) + aa' + bb'}{\overline{AB}(a \sin \varphi_2 - b \cos \varphi_2)},$$

ahol az

$$a' = -\overline{BC}\omega_3 \sin \varphi_3 + v_{xA} - v_{xD}, \text{ és a}$$

$$b' = \overline{BC}\omega_3 \cos \varphi_3 + v_{yA} - v_{yD}.$$

A B és C pontok sebessége

A (3.139)-(3.142) egyenleteket deriválva, a

$$(3.151) \quad v_{xB} = -\overline{AB}\omega_2 \sin \varphi_2 + v_{xA},$$

$$(3.152) \quad v_{yB} = \overline{AB}\omega_2 \cos \varphi_2 + v_{yA},$$

$$(3.153) \quad v_{xC} = -\overline{BC}\omega_3 \sin \varphi_3 + v_{xB},$$

$$(3.154) \quad v_{yC} = \overline{BC}\omega_3 \cos \varphi_3 + v_{yB}.$$

A 4-es tag szögsebessége

A (3.143) és a (3.144)-ből

$$v_{xC} = \overline{CD}\omega_4 \sin \varphi_4 + v_{xD},$$

$$v_{yC} = \overline{CD}\omega_4 \cos \varphi_4 + v_{yD}.$$

Rendezés után

$$(3.155) \quad \omega_4 = -\frac{v_{xC} - v_{xD}}{\overline{CD} \sin \varphi_4} = \frac{v_{yC} - v_{yD}}{\overline{CD} \cos \varphi_4}.$$

A 2-es tag szöggyorsulása

A (3.147) második deriváltjából:

$$(3.156) \quad \varepsilon_2 = \frac{\overline{AB}(a'' \cos \varphi_2 - 2a'\omega_2 \sin \varphi_2 - a\omega_2^2 \cos \varphi_2 + b'' \sin \varphi_2 + 2b'\omega_2 \cos \varphi_2 - b\omega_2^2 \sin \varphi_2)}{\overline{AB}(a \sin \varphi_2 - b \cos \varphi_2)} +$$

$$+ \frac{(a')^2 + (b')^2 + aa'' + bb''}{\overline{AB}(a \sin \varphi_2 - b \cos \varphi_2)},$$

ahol az

$$a'' = -\overline{BC}\omega_3^2 \cos \varphi_3 - \overline{BC}\varepsilon_3 \sin \varphi_3 + a_{xA} - a_{xD}, \text{ és a}$$

$$b'' = -\overline{BC}\omega_3^2 \sin \varphi_3 - \overline{BC}\varepsilon_3 \cos \varphi_3 + a_{yA} - a_{yD}.$$

A B és C pontok gyorsulása

$$(3.157) \quad a_{xB} = -\overline{AB}\omega_2^2 \cos \varphi_2 - \overline{AB}\varepsilon_2 \sin \varphi_2 + a_{xA},$$

$$(3.158) \quad a_{yB} = -\overline{AB}\omega_2^2 \sin \varphi_2 + \overline{AB}\varepsilon_2 \cos \varphi_2 + a_{yA},$$

$$(3.159) \quad a_{xC} = -\overline{BC}\omega_3^2 \cos \varphi_3 - \overline{BC}\varepsilon_3 \sin \varphi_3 + a_{xB},$$

$$(3.160) \quad a_{yC} = -\overline{BC}\omega_3^2 \sin \varphi_3 + \overline{BC}\varepsilon_3 \cos \varphi_3 + a_{yB}.$$

A 4-es tag szöggyorsulása

$$(3.161) \quad \varepsilon_4 = -\frac{\overline{CD}\omega_4^2 \cos \varphi_4 + a_{xC} - a_{xD}}{\overline{CD} \sin \varphi_4} = \frac{\overline{CD}\omega_4^2 \sin \varphi_4 + a_{yC} - a_{yD}}{\overline{CD} \cos \varphi_4}.$$

Végül megvizsgáljuk azt az általánostól eltérő esetet, amikor az A és B pontok y koordinátái

egyenlők, és a 3-as tag vízszintes. Ekkor a $\sin\varphi_3=0$ és $y_A=y_D$, ami miatt a $b=0$. Ezt a (3.147)-be helyettesítve a

$$\overline{CD}^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{AB}a \cos\varphi_2 + a^2,$$

amelyből

$$(3.162) \quad \cos\varphi_2 = \frac{\overline{CD}^2 - \overline{AB}^2 + a^2}{2\overline{AB}a}.$$

A 2-es tag szögsebessége

$$(3.163) \quad \omega_2 = \frac{\overline{AB}(a' \cos\varphi_2 - aa')}{\overline{AB}a \sin\varphi_2}.$$

Ha a $\sin\varphi_2=0$, akkor $\omega_2=0$.

A 2-es tag szöggyorsulása

$$(3.164) \quad \varepsilon_2 = \frac{\overline{AB}(a'' \cos\varphi_2 - 2a'\omega_2 \sin\varphi_2 - a\omega_2^2 \cos\varphi_2) + (a')^2 - aa''}{\overline{AB}a \sin\varphi_2}$$

Ha a $\sin\varphi_2=0$, akkor $\varepsilon_2=\infty$.

3.8.2 A hajtótag összetett mozgást végző munkahenger

A gyakorlatban nagyon gyakran találkozhatunk olyan mechanizmusokkal, amelyeket hidraulikus vagy pneumatikus munkahengerrel hajtanak meg (3.10. ábra). Az ábrán bemutatott mechanizmus is egy I. osztályú, egy szabadságfokú (4-es tag), és egy II. osztályú, zérus szabadságfokú csoportból (2-es és 3-as tagok) áll. Mozgáskor a 4-es hengerbe áramló közeg v_{CD} állandó nagyságú, de változó irányú sebességgel mozgatja az E dugattyút. Határozzuk meg a 2-es és 3-as tagok helyzetét, kinematikai jellemzőit, a C pont koordinátáit, sebességét, gyorsulását, ha adottak a B és D pontok koordinátái, sebességei, gyorsulásai, a \overline{BC} rúd hossza, valamint az E dugattyú v_{CD} sebessége.

A C pont koordinátái

A C pont koordinátáit a 3.2 pontban ismertetett módszerrel határozhatjuk meg:

$$(3.165) \quad x_{IC} = \frac{(\overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2)}{2\overline{BD}},$$

$$(3.166) \quad y_{IC} = \pm\sqrt{\overline{BC}^2 - x_{IC}^2},$$

ahol a

$$\overline{BD} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}.$$

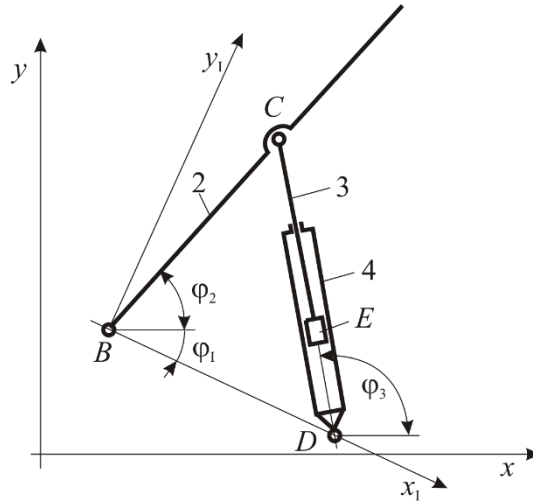
A C pont koordinátáit transzformálva:

$$(3.167) \quad x_C = x_{IC} \cos\varphi_I - y_{IC} \sin\varphi_I + x_B,$$

$$(3.168) \quad y_C = x_{IC} \sin\varphi_I - y_{IC} \cos\varphi_I + y_B,$$

ahol a

$$\sin\varphi_I = \frac{y_D - y_B}{\overline{BD}}, \text{ és a } \cos\varphi_I = \frac{x_D - x_B}{\overline{BD}}.$$



3.10. ábra

A tagok helyzete

$$(3.169) \quad \sin \varphi_2 = \frac{y_C - y_B}{\overline{BC}},$$

$$(3.170) \quad \cos \varphi_2 = \frac{x_C - x_B}{\overline{BC}},$$

illetve

$$(3.171) \quad \sin \varphi_3 = \frac{y_C - y_D}{\overline{CD}},$$

$$(3.172) \quad \cos \varphi_3 = \frac{x_C - x_D}{\overline{CD}}.$$

A C pont sebessége

A 3.10. ábra alapján

$$(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = \overline{BC}^2,$$

$$(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = \overline{CD}^2.$$

A két egyenletet deriválva, és felhasználva a (3.169)-(3.172) összefüggéseket, az

$$(3.173) \quad (v_{x_C} - v_{x_B}) \cos \varphi_2 + (v_{y_C} - v_{y_B}) \sin \varphi_2 = 0,$$

$$(3.174) \quad (v_{x_C} - v_{x_D}) \cos \varphi_3 + (v_{y_C} - v_{y_D}) \sin \varphi_3 = \overline{CD} v_{CD}.$$

A (3.173) és a (3.174)-ből a v_{x_C} és v_{y_C} számítható:

$$(3.175) \quad v_{x_C} = - \frac{v_{x_B} \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 - v_{x_D} \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 - (v_{y_D} - v_{y_B}) \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 - \overline{CD} v_{CD} \sin \varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_3)},$$

$$(3.176) \quad v_{y_C} = v_{y_D} + \frac{\overline{CD} v_{CD} - (v_{x_C} - v_{x_D}) \cos \varphi_3}{\sin \varphi_3}.$$

Ha a $\sin \varphi_3 = 0$, akkor a $v_{x_C} = v_{x_D} + v_{CD}$, ezt a (3.173)-ba helyettesítve a

$$(v_{x_D} + v_{CD} - v_{x_B}) \cos \varphi_2 + (v_{y_C} - v_{y_B}) \sin \varphi_2 = 0,$$

amelyből

$$(3.177) \quad v_{yC} = v_{yB} - \frac{(v_{xD} + v_{CD} - v_{xB}) \cos \varphi_2}{\sin \varphi_2}$$

A $\sin \varphi_2 = \sin \varphi_3 = 0$ esetet kizárjuk, mivel az a szerkezet szakadását eredményezné.

A tagok szögsebessége

A (3.169)-(3.172) egyenletekből az

$$(3.178) \quad \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{v_{yC} - v_{yB}}{BC \cos \varphi_2},$$

$$(3.179) \quad \omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{v_{yC} - v_{yD} - v_{CD} \sin \varphi_3}{CD \cos \varphi_3}.$$

Ha a $\cos \varphi_2 = 0$, vagy a $\cos \varphi_3 = 0$, akkor a (3.178) illetve a (3.179) képletekből az

$$(3.180) \quad \omega_2 = -\frac{v_{xC} - v_{xB}}{BC},$$

$$(3.181) \quad \omega_3 = -\frac{v_{xC} - v_{xD}}{CD}.$$

A C pont gyorsulása

A (3.173) és (3.174) egyenletekből az idő szerinti deriválva, és bevezetve a

$$A = x_C - x_D, \quad B = y_C - y_D, \quad C = x_C - x_B, \quad D = y_C - y_B,$$

$$A_1 = v_{xC} - v_{xD}, \quad B_1 = v_{yC} - v_{yD}, \quad C_1 = v_{xC} - v_{xB}, \quad D_1 = v_{yC} - v_{yB}$$

jelöléseket, az

$$(3.182) \quad (a_{xC} - a_{xB}) \cos \varphi_2 - C_1 \omega_2 \sin \varphi_2 + (a_{yC} - a_{yB}) \sin \varphi_2 + D_1 \omega_2 \cos \varphi_2 = 0,$$

$$(3.183) \quad (a_{xC} - a_{xD}) \cos \varphi_3 - A_1 \omega_3 \sin \varphi_3 + (a_{yC} - a_{yD}) \sin \varphi_3 + B_1 \omega_3 \cos \varphi_3 = v_{CD}^2.$$

Az utóbbi egyenletben a v_{CD} állandó. Az ismeretlen gyorsulás komponenseket kifejezve:

$$(3.184) \quad a_{xC} = [a_{xD} \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 - a_{xB} \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 - \omega_2 \sin \varphi_3 (C_1 \sin \varphi_2 - D_1 \cos \varphi_2) + \\ + \omega_3 \sin \varphi_2 (A_1 \sin \varphi_3 - B_1 \cos \varphi_3) + \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 (a_{yD} - a_{yB}) + v_{CD}^2 \sin \varphi_2] / \sin(\varphi_2 - \varphi_3),$$

$$(3.185) \quad a_{yC} = a_{yD} - \frac{(a_{xC} - a_{xD}) \cos \varphi_3 - \omega_3 (A_1 \sin \varphi_3 - B_1 \cos \varphi_3) - v_{CD}^2}{\sin \varphi_3}.$$

Ha a $\sin \varphi_3 = 0$, akkor a (3.183)-ból $a_{xC} = v_{CD}^2 - B_1 \omega_3 + a_{xD}$, ezt a (3.182)-be behelyettesítve és rendezve:

$$(3.186) \quad a_{yC} = a_{yD} - \frac{(v_{CD}^2 - B_1 \omega_3 + a_{xD} - a_{xB}) \cos \varphi_2 - \omega_2 (C_1 \sin \varphi_2 - D_1 \cos \varphi_2)}{\sin \varphi_2}.$$

A tagok szöggyorsulása

A (3.169)-(3.172) egyenletek kétszeri deriválása után a 2-es tag szöggyorsulása:

$$(3.187) \quad \varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{a_{yC} - a_{yB} + \overline{BC} \omega_2^2 \sin \varphi_2}{\overline{BC} \cos \varphi_2}.$$

Ha a $\cos\varphi_2=0$, akkor

$$(3.188) \quad \varepsilon_2 = -\frac{(a_{xC} - a_{xB})}{BC}.$$

A 3-as tag szöggyorsulása:

$$(3.189) \quad \varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{a_{yC} - a_{yD} + \overline{CD}\omega_3^2 \sin\varphi_3}{\overline{CD}\cos\varphi_3}.$$

Ha a $\cos\varphi_3=0$, akkor a

$$(3.190) \quad \varepsilon_3 = -\frac{(a_{xC} - a_{xD} + 2v_{CD}\omega_3)}{CD}.$$

3.9. Az elemi csoportok BASIC programjai és alkalmazásuk

A BASIC rutinok (mech01-mech10 modulok) szerkezete értelemszerűen követi az előző pontokban, az elméleti alapoknál alkalmazott felépítést, vagyis először mindig a vizsgált pont koordinátáit, a tag vagy tagok helyzetét, majd a pontok, illetve a tagok sebességét, gyorsulását, illetve szögsebességét és szöggyorsulását határozzuk meg. A rutinok megértése a BASIC nyelvet ismerők számára feltételezhetően nem okoz problémát, mivel azok egyszerűen a levezetett képleteket tartalmazzák.

A rutinokat az IBM PC, és a velük kompatibilis számítógépeken futó Microsoft Quick Basic nyelven alatt írtuk meg, amely sokkal rugalmasabb rutinkezelést tesz lehetővé, mint a korábbi Basic változatok. A programsorokat nem kell sorszámozni, a sorokra való hivatkozásokat címkékkel valósíthatjuk meg, használhatók a strukturált programozást jellemző DO-LOOP, SELECT CASE stb. szerkezetek. A Basic nyelv egyszerűségét megőrző Quick Basic további előnyeként említhető a programok szerkesztéséhez, a hibakereséshez, a fordításhoz stb. szükséges parancsokat magában foglaló, egyszerűen kezelhető menürendszer. A nyelvhez magyar nyelvű leírás sajnos még jelenleg nem áll rendelkezésre, de jól használható az LSI gondozásában megjelent „Geszt P.- Kápolnai A.: BASIC fejlesztő-rendszer IBM PC” című LSI kiadvány.

Az input és output paramétereket, azok azonosítóit az 3.1. táblázatban foglaltuk össze. A táblázatban az eligazodást az elemi csoportok ábrái hivatottak elősegíteni, amelyeken az alkalmazáshoz szükséges legfontosabb információk megtalálhatók.

A rutinokat meghívó főprogram megírása a felhasználó feladata. Ebben az alkalmazó gondoskodik az adatok beviteléről és kijelzéséről, a rutinok meghívásáról és a paraméterek átadásáról. Nagyobb figyelmet igényel a szögek és az előjelhelyesen megadandó szakaszok értelmezése. Ehhez az 1. táblázat ábrái nyújtanak segítséget.

A szögeket a rutinoknak radiánban kell átadni, a szögsebesség és a szöggyorsulás akkor pozitív, ha az óramutató járásával ellentétes irányú. A többi input paraméter mértékegységére nézve nincs korlátozás, de természetesen a választott egységeket következetesen kell használni.

A továbbiakban egy példán, a közismert harántgyalu mechanizmuson mutatjuk be az eddig ismert rutinok alkalmazási lehetőségeit, illetve azt, miként készíthető el a rutinokat meghívó főprogram, miként jeleníthetők meg az eredmények.

BASIC rutinok (mech01-mech10 modulok)

```

' *****
' *      mech01.bas      *
' *  EGY SZABADSÁGFOKU  *
' *  I. OSZTÁLYU MECHANIZMUS  *
' *****

```

```

'
SUB mech01 (xa, ya, f2, o2, ab, xb, yb, Vxb, Vyb, Axb, Ayb)
' *** KOORDINÁTA ***

xb = ab * COS(f2) + xa: yb = ab * SIN(f2) + ya

' *** SEBESSÉG ***

Vxb = -ab * o2 * SIN(f2): Vyb = ab * o2 * COS(f2)

' *** GYORSULÁS ***

Axb = -ab * o2 * o2 * COS(f2): Ayb = -ab * o2 * o2 * SIN(f2)

END SUB

' *****
' *      mech02.bas      *
' * BELSŐ FORGÓ ÉS KÜLSŐ FORGÓ *
' * KINEMATIKAI PÁROK   *
' *****
'
SUB mech02 (xb, yb, Vxb, Vyb, Axb, Ayb, xd, yd, Vxd, Vyd, Axd, Ayd, bc, cd, cc, xc, yc, Vxc, Vyc, Axc, Ayc, f2, o2, e2, f3, o3, e3
AS SINGLE)
'
' *** KOORDINÁTÁK ***
'
bd = SQR((xd - xb) ^ 2 + (yd - yb) ^ 2)
IF bc + cd < bd THEN PRINT "ELLENTMONDÁSOS ADATOK !": END
cx = (bc ^ 2 + bd ^ 2 - cd ^ 2) / (2 * bd)
IF ABS(cx) > ABS(bc) THEN
  cy = 0
ELSE
  cy = cc * SQR(bc ^ 2 - cx ^ 2)
END IF
sf = (yd - yb) / bd: cf = (xd - xb) / bd
xc = cx * cf - cy * sf + xb
yc = cx * sf + cy * cf + yb
'
' *** SZÖGEK ***
'
s2 = (yc - yb) / bc: c2 = (xc - xb) / bc
s3 = (yc - yd) / cd: c3 = (xc - xd) / cd
CALL SZÖGEK(s2, c2, f2)
CALL SZÖGEK(s3, c3, f3)
'
' *** SEBESSÉG ***
'
IF s2 * c3 - c2 * s3 = 0 THEN
  Vxc = Vxd: Vyc = Vyd
ELSEIF s3 = 0 THEN
  Vxc = Vxd
  Vyc = Vyb - (Vxd - Vxb) * c2 / s2
ELSE
  Vxc = (Vxd * s2 * c3 - Vxb * s3 * c2 + s2 * s3 * (Vyd - Vyb))
  Vxc = Vxc / (s2 * c3 - c2 * s3)
  Vyc = c3 * (Vxd - Vxc) / s3 + Vyd
END IF
'
' *** SZÓGSEBESSÉG ***
'
IF c2 = 0 THEN
  o2 = -(Vxc - Vxb) / bc
ELSE
  o2 = (Vyc - Vyb) / bc / c2
END IF
IF c3 = 0 THEN
  o3 = -(Vxc - Vxd) / cd
ELSE
  o3 = (Vyc - Vyd) / cd / c3
END IF
'
' *** GYORSULÁS ***

```

```

'
IF s2 * c3 - c2 * s3 = 0 THEN
  Axc = Axd: Ayc = 1E+10
  GOTO CIM22
END IF
Axc = s2 * (Axd * c3 + Ayc * s3) - s3 * (Axb * c2 + ay(b) * s2)
Axc = Axc - o2 * s3 * ((Vxc - Vxb) * s2 - (Vyc - Vyb) * c2)
Axc = Axc + o3 * s2 * ((Vxc - Vxd) * s3 - (Vyc - Vyd) * c3)
Axc = Axc / (c3 * s2 - c2 * s3)
IF s3 <> 0 THEN
  Ayc = Ayc * s3 - ((Axc - Axd) * c3)
  Ayc = Ayc + o3 * ((Vxc - Vxd) * s3 - (Vyc - Vyd) * c3)
  Ayc = Ayc / s3
ELSE
  Ayc = Ayc + (Vxc - Vxb) * o2
  Ayc = Ayc - (Ayd - Ayc - (Vyc - Vyd) * o3 + (Vyc - Vyb) * o2) * c2 / s2
END IF
'
' *** SZŐGGYORSULÁS ***
'
CIM22:
IF c2 = 0 THEN
  e2 = -(Axc - Axb) / bc
ELSE
  e2 = (Ayc - Ayc + bc * o2 * o2 * s2) / bc / c2
END IF
IF c3 = 0 THEN
  e3 = -(Axc - Axd) / cd
  EXIT SUB
ELSE
  e3 = (Ayc - Ayc + cd * o3 * o3 * s3) / cd / c3
END IF

END SUB
' *****
' *      mech03.bas      *
' * BELSŐ FORGÓ, KÜLSŐ HALADÓ *
' * ÉS FORGÓ KINEMATIKAI PÁROK *
' *****
'
SUB mech03 (xb, yb, Vxb, Vyb, Axb, Ayc, xd, yd, Vxd, Vyd, Axd, Ayc, f3, o3, e3, bc, pp, xc, yc, Vxc, Vyc, Axc, Ayc, f2, o2, e2)
'
' *** KOORDINÁTA ***
'
s3 = SIN(f3): c3 = COS(f3)
IF s3 = 0 THEN
  xp = xb: yp = yd: pb = yd - yb
ELSEIF c3 = 0 THEN
  xp = xd: yp = yb: pb = xd - xb
ELSE
  xp = (yb - yd) * s3 * c3 + xd * s3 * s3 + xb * c3 * c3
  yp = TAN(f3) * (xp - xd) + yd
  pb = SQR((xp - xb) * (xp - xb) + (yp - yb) * (yp - yb))
END IF
IF ABS(pp) <= pb THEN
  bp = ABS(pp) - pb
ELSE
  bp = pb - ABS(pp)
END IF
sf = bp / bc
cy = pp: cx = SQR(bc * bc - bp * bp)
xc = cx * c3 - cy * s3 + xp
yc = cx * s3 + cy * c3 + yp
'
' *** SZŐG ***
s2 = (yc - yb) / bc: c2 = (xc - xb) / bc
CALL SZOGEK(s2, c2, f2)
'
' *** SEBESSÉG ***
'
a = xd - xc: b = yc - yd: c = xc - xb: d = yc - yb
IF s2 = 0 AND c3 = 0 THEN
  Vxc = 0: Vyc = 0
ELSEIF c2 = 0 AND s3 = 0 THEN
  Vxc = 0: Vyc = 0
ELSEIF c3 = 0 THEN

```

```

Vxc = -b * o3 + Vxd
Vyc = (b * o3 - Vxd + Vxb) * c2 / s2 + Vyb
ELSE
Vxc = Vxb * c2 * c3 - o3 * s2 * (b * s3 + a * c3)
Vxc = Vxc + Vxd * s3 * s2 + (Vyb - Vyd) * s2 * c3
Vxc = Vxc / (c2 * c3 + s2 * s3)
Vyc = (o3 * (b * s3 + a * c3) + aa * s3) / c3 + Vyd
END IF
aa = Vxc - Vxd: bb = Vyc - Vyd: cc = Vxc - Vxb: dd = Vyc - Vyb
'
' *** SZÖGSEBESSÉG ***
'
IF c2 = 0 THEN
o2 = -(Vxc - Vxb) / bc
ELSE
o2 = (Vyc - Vyb) / bc / c2
END IF
'
' *** GYORSULÁS ***
'
IF s2 = 0 AND c3 = 0 THEN
Axc = 0: Ayc = 1000000!
ELSEIF c2 = 0 AND s3 = 0 THEN
Axc = 1000000!: Ayc = 0
ELSEIF c3 = 0 THEN
Axc = -2 * o3 * bb - e3 * b + Axd + o3 * o3 * a
Ayc = o2 * (cc * s2 - dd * c2) + Axb * c2 + Ayb * s2
Ayc = Ayc + c2 * (2 * o3 * bb + e3 * b + Axd + o3 * o3 * a)
Ayc = Ayc / s2
ELSE
Axc = -s2 * (s3 * (-Axd + 2 * o3 * bb + e3 * b - o3 * o3 * a))
Axc = Axc - s2 * (c3 * (Ayd + o3 * o3 * b + 2 * o3 * aa + e3 * a))
Axc = Axc + c3 * (s2 * (o2 * cc + Ayb) + c2 * (-o2 * dd + Axb))
Axc = Axc / (c2 * c3 + s2 * s3)
Ayc = s3 * (2 * o3 * bb + e3 * b + Axc - Axd - o3 * o3 * a)
Ayc = Ayc + c3 * (o3 * o3 * b + 2 * o3 * aa + e3 * a + Ayd)
Ayc = Ayc / c3
END IF
'
' *** SZÖGGYORSULÁS ***
'
IF c2 = 0 THEN
e2 = -(Axc - Axb) / bc
ELSE
e2 = (Ayc - Ayb + bc * o2 * o2 * s2) / bc / c2
END IF

END SUB

' *****
' *      mech03.bas      *
' * BELSŐ FORGÓ, KÜLSŐ HALADÓ *
' * ÉS FORGÓ KINEMATIKAI PÁROK *
' *****
'
SUB mech03 (xb, yb, Vxb, Vyb, Axb, Ayb, xd, yd, Vxd, Vyd, Axd, Ayd, f3, o3, e3, bc, pp, xc, yc, Vxc, Vyc, Axc, Ayc, f2, o2, e2)
'
' *** KOORDINÁTA ***
'
s3 = SIN(f3): c3 = COS(f3)
IF s3 = 0 THEN
xp = xb: yp = yd: pb = yd - yb
ELSEIF c3 = 0 THEN
xp = xd: yp = yb: pb = xd - xb
ELSE
xp = (yb - yd) * s3 * c3 + xd * s3 * s3 + xb * c3 * c3
yp = TAN(f3) * (xp - xd) + yd
pb = SQR((xp - xb) * (xp - xb) + (yp - yb) * (yp - yb))
END IF
IF ABS(pp) <= pb THEN
bp = ABS(pp) - pb
ELSE
bp = pb - ABS(pp)
END IF
sf = bp / bc
cy = pp: cx = SQR(bc * bc - bp * bp)

```



```

xc = cx * c3 - cy * s3 + xp
yc = cx * s3 + cy * c3 + yp
'
' *** SZÖG ***
'
s2 = (yc - yb) / bc: c2 = (xc - xb) / bc
CALL SZOGEK(s2, c2, f2)
'
' *** SEBESSÉG ***
'
a = xd - xc: b = yc - yd: c = xc - xb: d = yc - yb
IF s2 = 0 AND c3 = 0 THEN
  Vxc = 0: Vyc = 0
ELSEIF c2 = 0 AND s3 = 0 THEN
  Vxc = 0: Vyc = 0
ELSEIF c3 = 0 THEN
  Vxc = -b * o3 + Vxd
  Vyc = (b * o3 - Vxd + Vxb) * c2 / s2 + Vyb
ELSE
  Vxc = Vxb * c2 * c3 - o3 * s2 * (b * s3 + a * c3)
  Vxc = Vxc + Vxd * s3 * s2 + (Vyb - Vyd) * s2 * c3
  Vxc = Vxc / (c2 * c3 + s2 * s3)
  Vyc = (o3 * (b * s3 + a * c3) + aa * s3) / c3 + Vyd
END IF
aa = Vxc - Vxd: bb = Vyc - Vyd: cc = Vxc - Vxb: dd = Vyc - Vyb
'
' *** SZÖGSEBESSÉG ***
'
IF c2 = 0 THEN
  o2 = -(Vxc - Vxb) / bc
ELSE
  o2 = (Vyc - Vyb) / bc / c2
END IF
'
' *** GYORSULÁS ***
'
IF s2 = 0 AND c3 = 0 THEN
  Axc = 0: Ayc = 1000000!
ELSEIF c2 = 0 AND s3 = 0 THEN
  Axc = 1000000!: Ayc = 0
ELSEIF c3 = 0 THEN
  Axc = -2 * o3 * bb - e3 * b + Axd + o3 * o3 * a
  Ayc = o2 * (cc * s2 - dd * c2) + Axb * c2 + Ayb * s2
  Ayc = Ayc + c2 * (2 * o3 * bb + e3 * b + Axd + o3 * o3 * a)
  Ayc = Ayc / s2
ELSE
  Axc = -s2 * (s3 * (-Axd + 2 * o3 * bb + e3 * b - o3 * o3 * a))
  Axc = Axc - s2 * (c3 * (Ayd + o3 * o3 * b + 2 * o3 * aa + e3 * a))
  Axc = Axc + c3 * (s2 * (o2 * cc + Ayb) + c2 * (-o2 * dd + Axb))
  Axc = Axc / (c2 * c3 + s2 * s3)
  Ayc = s3 * (2 * o3 * bb + e3 * b + Axc - Axd - o3 * o3 * a)
  Ayc = Ayc + c3 * (o3 * o3 * b + 2 * o3 * aa + e3 * a + Ayd)
  Ayc = Ayc / c3
END IF
'
' *** SZÖGGYORSULÁS ***
'
IF c2 = 0 THEN
  e2 = -(Axc - Axb) / bc
ELSE
  e2 = (Ayc - Ayb + bc * o2 * o2 * s2) / bc / c2
END IF

END SUB
' *****
' *      mech04.bas      *
' * BELSŐ HALADÓ ÉS KÜLSŐ FORGÓ *
' * KINEMATIKAI PÁROK *
' *****
'
SUB mech04 (xb, yb, Vxb, Vyb, Axb, Ayb, xd, yd, Vxd, Vyd, Axd, Ayd, pd, f2, o2, e2)
'
' *** SZÖG ***
'
bd = SQR((xd - xb) ^ 2 + (yd - yb) ^ 2)
sf = pd / bd

```

```

f1 = ARCSIN(sf)
s2 = (yd - yb) / bd: c2 = (xd - xb) / bd
CALL SZOGEK(s2, c2, f2)
IF s2 < 0 THEN
  f2 = f2 - fi
ELSE
  f2 = f2 + fi
END IF
s2 = SIN(f2): c2 = COS(f2)
'
' *** SZÖGSEBESSÉG ***
'
o2 = -(Vyd - Vyb) * c2 - (Vxd - Vxb) * s2 / (-(yd - yb) * s2 + (xd - xb) * c2)
'
' *** SZÖGGYORSULÁS ***
'
e2 = -(Ayd - Ayb) * c2 - (Axd - Axb) * s2 - 2 * o2 * (Vxd - Vxb) * c2
e2 = e2 + o2 * o2 * (xd - xb) * s2 + o2 * o2 * (yd - yb) * c2
e2 = e2 + 2 * o2 * (Vyd - Vyb) * s2
e2 = e2 / ((xd - xb) * c2 - (yd - yb) * s2)

END SUB
' *****
' *      mech05.bas      *
' * BELSŐ FORGÓ ES KÜLSŐ HALADÓ *
' * KINEMATIKAI PÁROK   *
' *****
'
SUB mech05 (xb, yb, Vxb, Vyb, Axb, Ayb, xd, yd, Vxd, Vyd, Axd, Ayd, f2, o2, e2, f3, o3, e3, pc, cp, xc, yc, Vxc, Vyc, Axc, Ayc)

' *** KOORDINÁTA ***

s2 = SIN(f2): s3 = SIN(f3)
c2 = COS(f2): c3 = COS(f3)
IF f2 = f3 THEN PRINT "ELLENTMONDÁSOS ADATOK": END
xc = (cp * c3 - pc * c2 + c2 * c3 * (yd - yb) + xb * s3 * c2 - xd * s2 * c3)
xc = xc / (s3 * c2 - s2 * c3)
IF c2 = 0 THEN
  t3 = TAN(f3): yc = pc / c3 + (xc - xb) * t3 + yb
ELSE
  t2 = TAN(f2): yc = cp / c2 + (xc - xd) * t2 + yd
END IF

' *** SEBESSÉG ***

a = xc - xd: b = yc - yd: c = xc - xb: d = yc - yb
Vxc = (o2 * b - Vxd) * s2 * c3 - (o3 * d - Vxb) * s3 * c2
Vxc = Vxc + (o2 * a - o3 * c - Vyb + Vyd) * c2 * c3
Vxc = Vxc / (s3 * c2 - s2 * c3)
aa = Vxc - Vxd: cc = Vxc - Vxb
IF c3 <> 0 THEN
  Vyc = t3 * (d * o3 + cc) + c * o3 + Vyb
ELSE
  Vyc = t2 * (b * o2 + aa) + a * o2 + Vyd
END IF
bb = Vyc - Vyd: dd = Vyc - Vyb

' *** GYORSULÁS ***

Axc = o2 * c3 * (2 * bb * s2 + c2 * (2 * aa + b * o2) - a * o2 * s2)
Axc = Axc + e2 * c3 * (b * s2 + aa * c2)
Axc = Axc - o3 * c2 * (2 * dd * s3 + c3 * (2 * cc + d * o3) - c * o3 * s3)
Axc = Axc - e3 * c2 * (d * t3 + c * o3)
Axc = Axc + c2 * c3 * (Ayd - Ayb) + Axb * s3 * c2 - Axd * s2 * c3
Axc = Axc / (s3 * c2 - s2 * c3)
IF c3 <> 0 THEN
  Ayc = o3 * (2 * dd * t3 + d * o3 + 2 * cc - c * o3 * t3)
  Ayc = Ayc + e3 * (d * t3 + c)
  Ayc = Ayc + (Axc - Axb) * t3 + Ayb
ELSE
  Ayc = o2 * (2 * bb * t2 + b * o2 + 2 * aa - a * o2 * t2)
  Ayc = Ayc + e2 * (b * t2 + a)
  Ayc = Ayc + (Axc - Axd) * t2 + Ayd
END IF

END SUB

```

```

: *****
: *      mech06.bas      *
: * BELSO HALADÓ KÜLSŐ FORGÓ *
: * ÉS HALADÓ KINETIKAI PÁR *
: *****
:
SUB mech06 (xb, yb, Vxb, Vyb, Axb, Ayb, xd, yd, Vxd, Vyd, Axd, Ayd, f3, o3, e3, pp, pc, xc, yc, Vxc, Vyc, Axc, Ayc)
:
: *** KOORDINÁTA ***
:
s3 = SIN(f3): c3 = COS(f3)
IF c3 = 0 THEN
  xp = xd: yp = yb
ELSE
  xp = xb * c3 * c3 + xd * s3 * s3 + (yb - yd) * s3 * c3
  yp = TAN(f3) * (xp - xd) + yd
END IF
cx = pc: cy = pp
xc = cx * c3 - cy * s3 + xp
yc = cx * s3 + cy * c3 + yp
:
: *** SEBESSÉG ***
:
a = xc - xd: b = yc - yd: c = xc - xb: d = yc - yb
IF c3 = 0 THEN
  Vyc = c * o3 + Vyb
END IF
IF s3 = 0 THEN
  Vxc = -d * o3 + Vxb
ELSE
  Vxc = -o3 * (s3 * (b * s3 + a * c3) + c3 * (d * c3 - c * s3)) + (Vyb - Vyd) * c3 * s3
  Vxc = Vxc + Vxd * s3 * s3 + Vxb * c3 * c3
END IF
IF c3 <> 0 THEN
  Vyc = ((Vxc - Vxd) * s3 + o3 * (b * s3 + a * c3) + Vyd * c3) / c3
END IF
aa = Vxc - Vxd: bb = Vyc - Vyd: cc = Vxc - Vxb: dd = Vyc - Vyb
:
: *** GYORSULÁS ***
:
IF c3 = 0 THEN
  Ayc = 2 * cc * o3 + c * e3 + d * o3 * o3 + Ayb
END IF
IF s3 = 0 THEN
  Axc = -2 * dd * o3 - d * e3 + c * o3 * o3 + Axb
ELSE
  Axc = -2 * o3 * (s3 * (bb * s3 + aa * c3) + c3 * (dd * c3 - cc * s3))
  Axc = Axc - e3 * (s3 * (b * s3 + a * c3) - c3 * (c * s3 - d * c3))
  Axc = Axc - o3 * o3 * (s3 * (b * c3 - a * s3) - c3 * (d * s3 + c * c3))
  Axc = Axc + (Ayb - Ayd) * s3 * c3 + Axd * s3 * s3 + Axb * c3 * c3
END IF
IF c3=0 THEN EXIT SUB
Ayc = 2 * o3 * (bb * s3 + aa * c3) + (Axc - Axd) * s3 + e3 * (b * s3 + a * c3)
Ayc = Ayc + o3 * o3 * (b * c3 - a * s3) + Ayd * c3
Ayc = Ayc / c3

END SUB

: *****
: *      mech07.bas      *
: *      *
: * ISMERT MOZGÁSÁLLAPOTU FORGÓ TAG *
: *      PONTJA      *
: *****
:
SUB mech07 (xb, yb, Vxb, Vyb, Axb, Ayb, f2, o2, e2, bc, xc, yc, Vxc, Vyc, Axc, Ayc)
:
: *** KOORDINÁTÁK ***
:
s2 = SIN(f2): c2 = COS(f2)
xc = bc * c2 + xb: yc = bc * s2 + yb
:
: *** SEBESSÉG ***
:

```

Vxc = -bc * o2 * s2 + Vxb

Vyc = bc * o2 * c2 + Vyb

' *** GYORSULÁS ***

Axc = -bc * o2 ^ 2 * c2 - bc * e2 * s2 + Axb

Ayc = -bc * o2 ^ 2 * s2 + bc * e2 * c2 + Ayb

END SUB

' *****

' * mech08.bas *

' * ISMERT MOZGÁSÁLLAPOTU *

' * HALADÓ TAG PONTJA *

' *****

SUB mech08 (xd, yd, Vxd, Vyd, Axd, Ayd, f3, o3, e3, dp, pc, xc, yc, Vxc, Vyc, Axc, Ayc)

' *** KOORDINÁTA ***

s3 = SIN(f3): c3 = COS(f3)

xc = pc * o3 - dp * s3 + xd: yc = pc * s3 + dp * c3 + yd

' *** SEBESSÉG ***

Vxc = -pc * o3 * s3 - dp * o3 * c3 + Vxd

Vyc = pc * o3 * c3 - dp * o3 * s3 + Vyd

' *** GYORSULÁS ***

Axc = -o3 * o3 * (pc * c3 - dp * s3) - e3 * (pc * s3 + dp * c3) + Axd

Ayc = -o3 * o3 * (pc * s3 - dp * c3) - e3 * (pc * c3 + dp * s3) + Ayd

END SUB

' *****

' * mech09.bas *

' * A HAJTO TAG ÖSSZETETT *

' * MOZGÁST VÉGZŐ RUD *

' *****

SUB mech09 (xa, ya, Vxa, Vya, Axa, Aya, xd, yd, Vxd, Vyd, Axd, Ayd, f3, o3, e3, ab, bc, cd, xb, yb, Vxb, Vyb, Axb, Ayb, xc, yc, Vxc, Vyc, Axc, Ayc, f2, o2, e2, f4, o4, e4)

' *** 2. TAG SZÖGE ***

s3 = SIN(f3): c3 = COS(f3)

a0 = bc * c3 + xa - xd: a1 = a0 * a0

b0 = bc * s3 + ya - yd: b1 = b0 * b0

IF b0 = 0 THEN

 c2 = (cd * cd - ab * ab - a1) / 2 / ab / a0

 IF ABS(c2) = 1 THEN

 s2 = 0

 ELSE

 f2 = ARCCOS(c2)

 s2 = SIN(f2)

 END IF

 CALL SZOGEK(s2, c2, f2)

 GOTO CIM91

END IF

a = ab * ab * (a1 + b1)

b = (ab * ab - cd * cd + a1 + b1)

c = b * b / 4 - ab * ab * b1

b = ab * a0 * b

d = b * b - 4 * a * c

IF d < -.000001 THEN

 CLS : LOCATE 1, 1: PRINT "NINCS VALOS GYŐK!": END

ELSEIF ABS(d) < .000001 THEN

 d = 0

 c2 = -b / 2 / a

 s2 = -(ab * ab - cd * cd + 2 * ab * a0 * c2 + a1 + b1)

 s2 = s2 / 2 / ab / b0

 CALL SZOGEK(s2, c2, f2)

ELSE

 d = SQR(d)

```

c2(1) = (-b + d) / 2 / a
c2(2) = (-b - d) / 2 / a
IF ABS(c2(1)) > 1 AND ABS(c2(2)) > 1 THEN
  CLS : LOCATE 1, 1: PRINT "NINCS MEGOLDAS !": END
END IF
f2(1) = 0: f2(2) = 0
IF ABS(c2(1)) <= 1 THEN
  s2(1) = -(ab * ab - cd * cd + 2 * ab * a0 * c2(1) + a1 + b1)
  s2(1) = s2(1) / 2 / ab / b0
  CALL SZOGEK(s2(1), c2(1), f2(1))
END IF
IF ABS(c2(2)) <= 1 THEN
  s2(2) = -(ab * ab - cd * cd + 2 * ab * a0 * c2(2) + a1 + b1)
  s2(2) = s2(2) / 2 / ab / b0
  CALL SZOGEK(s2(2), c2(2), f2(2))
END IF
IF c2(1) <> 0 AND f2(1) = 0 THEN
  c2 = c2(2): f2 = f2(2): s2 = s2(2)
  GOTO CIM91
ELSEIF c2(2) <> 0 AND f2(2) = 0 THEN
  c2 = c2(1): f2 = f2(1): s2 = s2(1)
  GOTO CIM91
ELSE
  CLS
  LOCATE 2, 2: PRINT " f2(1)="; FOK(f2(1)); "FOK"
  LOCATE 3, 2: PRINT " f2(2)="; FOK(f2(2)); "FOK"
  LOCATE 5, 2: PRINT " VÁLASSZON GYÖKÖT (1/2) ?"
END IF
DO
  w$ = "": w$ = INKEY$
  IF w$ = "1" THEN
    f2 = f2(1): c2 = c2(1): s2 = s2(1)
    EXIT DO
  ELSEIF w$ = "2" THEN
    f2 = f2(2): c2 = c2(2): s2 = s2(2)
    EXIT DO
  END IF
LOOP
END IF
'
' *** KOORDINÁTÁK ***
'
CIM91:
xb = ab * c2 + xa: yb = ab * s2 + ya
xc = bc * c3 + xb: yc = bc * s3 + yb
'
' *** 4. TAG SZŐGE ***
'
c4 = (xc - xd) / cd: s4 = (yc - yd) / cd
cf = c4: sf = s4
CALL SZOGEK(s4, c4, f4)
'
' *** 2. TAG SZŐGSEBESSÉGE ***
'
IF s2 = 0 AND b0 = 0 THEN
  o2 = 0
ELSE
  a2 = -bc * o3 * s3 + Vxa - Vxd
  b2 = bc * o3 * c3 + Vya - Vyd
  o2 = (ab * (a2 * c2 + b2 * s2) + a0 * a2 + b0 * b2)
  o2 = o2 / ab / (a0 * s2 - b0 * c2)
END IF
'
' *** SEBESSÉG ***
'
Vxb = -ab * o2 * s2 + Vxa
Vyb = ab * o2 * c2 + Vya
Vxc = -bc * o3 * s3 + Vxb
Vyc = bc * o3 * c3 + Vyb
'
' *** 4. TAG SZŐGSEBESSÉGE ***
'
IF s4 = 0 THEN
  o4 = (Vyc - Vyd) / cd / c4
ELSE

```

```

o4 = -(Vxc - Vxd) / cd / s4
END IF
'
' *** 2. TAG SZÓGGYORSULÁSA ***
'
IF s2 = 0 AND b0 = 0 THEN
e2 = 1000000!
ELSE
a3 = -bc * (o3 * o3 * c3 + e3 * s3) + Axa - Axd
b3 = -bc * (o3 * o3 * s3 - e3 * c3) + Aya - Ayd
e2 = a3 * c2 - 2 * a2 * o2 * s2 - a0 * o2 * o2 * c2
e2 = ab * (e2 + (b3 * s2 + 2 * b2 * o2 * c2 - b0 * o2 * o2 * s2))
e2 = (e2 + a2 * a2 + b2 * b2 + a0 * a3 + b0 * b3) / ab / (a0 * s2 - b0 * c2)
END IF
'
' *** GYORSULÁSOK ***
'
Axb = -ab * (o2 * o2 * c2 + e2 * s2) + Axa
Ayb = -ab * (o2 * o2 * s2 - e2 * c2) + Aya
Axc = -bc * (o3 * o3 * c3 + e3 * s3) + Axb
Ayc = -bc * (o3 * o3 * s3 - e3 * c3) + Ayb
'
' *** 4. TAG SZÓGGYORSULÁSA ***
'
IF s4 = 0 THEN
e4 = (Ayc - Ayd) / cd / c4
EXIT SUB
END IF
e4 = -(cd * o4 * o4 * c4 - Axd + Axc) / cd / s4

END SUB

' *****
' *   mech10.bas   *
' * A HAJTOTAG MUNKAHENGER *
' *****
'
SUB mech10 (xb, yb, Vxb, Vyb, Axb, Ayb, xd, yd, Vxd, Vyd, Axd, Ayd, Ve, bc, cd, cc, xc, yc, Vxc, Vyc, Axc, Ayc, f2, o2, e2, f3, o3,
e3)
'
' *** KOORDINÁTA ***
'
bd = SQR((xd - xb) * (xd - xb) + (yd - yb) * (yd - yb))
IF bc + cd < bd THEN PRINT " ELLENTMONDASOS ADATOK ! ": END
cx = (bc * bc + bd * bd - cd * cd) / (2 * bd)
IF ABS(cx) > ABS(bc) THEN
cy = 0
ELSE
cy = cc * SQR(bc * bc - cx * cx)
END IF
sf = (yd - yb) / bd: cf = (xd - xb) / bd
xc = cx * cf - cy * sf + xb
yc = xc * sf + cy * cf + yb
'
' ** SZÓG ***
's2 = (yc - yb) / bc: c2 = (xc - xb) / bc
s3 = (yc - yd) / cd: c3 = (xc - xd) / cd
CALL SZOGEK(s2, c2, f2)
CALL SZOGEK(s3, c3, f3)
'
' *** SEBESSÉG ***
'
IF s2 * c3 - c2 * s3 = 0 THEN
PRINT " ELLENTMONDASOS ADATOK ! ": END
END IF
IF s3 = 0 THEN
Vxc = Vxd: Vyc = Vyb - (Vxd + Ve - Vxb) * c2 / s2
ELSE
Vxc = Vxd * s2 * c3 - Vxb * s3 * c2
Vxc = Vxc + s2 * s3 * (Vyd - Vyb) + cd * Ve * s2
Vxc = Vxc / (s2 * c3 - c2 * s3)
Vyc = c3 * (Vxd - Vxc) / s3 + Vyd + cd * Ve / s3
END IF
'
' *** SZÓGSEBESSÉG ***
IF c2 = 0 THEN

```

```

o2 = -(Vxc - Vxb) / bc
ELSE
o2 = (Vyc - Vyb) / bc / c2
END IF
IF c3 = 0 THEN
o3 = (-Vxc + Vxd) / cd
ELSE
o3 = (Vyc - Vyd - Ve * s3) / cd / c3
END IF
'
' *** GYORSULÁS ***
'
a1 = Vxc - Vxd: b1 = Vyc - Vyd
c1 = Vxc - Vxb: d1 = Vyc - Vyb
Axc = s2 * c3 * Axd - c2 * c3 * Axb + o2 * s3 * (d1 * c2 - c1 * s2)
Axc = Axc + o3 * s2 * (a1 * s3 - b1 * c3)
Axc = Axc + s2 * s3 * (Ayd - Ayb) + Ve * Ve * s2
Axc = Axc / (c3 * s2 - c2 * s3)
IF s3 = 0 THEN
Ayc = Ayb - (Ve * Ve - b1 * o3 + Axd - Axb) * c2 / s2
Ayc = Ayc - o2 * (c1 * s2 - d1 * c2) / s2
ELSE
Ayc = Ayb - (Axc - Axd) * c3 / s3 + o3 * (a1 * s3 - b1 * c3) / s3
Ayc = Ayc + Ve * Ve / s3
END IF
'
' *** SZŐGGYORSULÁS ***
'IF c2 = 0 THEN
e2 = -(Axc - Axb) / bc
ELSE
e2 = (Ayc - Ayb + bc * o2 * o2 * s2) / bc / c2
END IF
IF c3 = 0 THEN
e3 = -(Axc - Axd + 2 * Ve * o3) / cd
ELSE
e3 = (Ayc - Ayb + cd * o3 * o3 * s3) / cd / c3
END IF

END SUB

DECLARE FUNCTION ARCCOS! (x AS SINGLE)

' *****
' * ARCCOS *
' *****
'
FUNCTION ARCCOS (x AS SINGLE)
pi = 3.14159265#
ARCCOS = -ATN(x / SQR(-x * x + 1)) + pi / 2
END FUNCTION

' *****
' * ARCSIN *
' *****
'
FUNCTION ARCSIN (x AS SINGLE)
ARCSIN = (ATN(x / SQR(-x * x + 1)))
END FUNCTION

DECLARE FUNCTION FOK! (x AS SINGLE)

' *****
' * FOK *
' *****
'
FUNCTION FOK (x AS SINGLE)
FOK = x * 180 / 3.14159265#
END FUNCTION

' *****
' * RADIAN *
' *****
'
FUNCTION RADIAN (x AS SINGLE)
RADIAN = 3.14159265# * x / 180
END FUNCTION

```

```

: *****
: * szogek.bas *
: * SZOGEK *
: *****
:
SUB SZOGEK (sinf, cosf, f AS SINGLE)
pi = 3.14159265#
IF ABS(sinf) < .000001 THEN sinf = 0
IF ABS(cosf) < .000001 THEN cosf = 0
IF sinf = 0 AND cosf > 0 THEN f = 0: cosf = 1
IF sinf = 0 AND cosf < 0 THEN f = pi: cosf = -1
IF cosf = 0 AND sinf > 0 THEN f = pi / 2: sinf = 1
IF cosf = 0 AND sinf < 0 THEN f = 3 * pi / 2: sinf = -1
IF sinf > 0 AND cosf > 0 THEN f = ARCSIN(sinf)
IF sinf > 0 AND cosf < 0 THEN f = pi - ABS(ARCSIN(sinf))
IF sinf < 0 AND cosf < 0 THEN f = pi + ABS(ARCSIN(sinf))
IF sinf < 0 AND cosf > 0 THEN f = 2 * pi - ABS(ARCSIN(sinf))

END SUB

```


3.1. táblázat

Az elemi csoportok input és output paraméterei

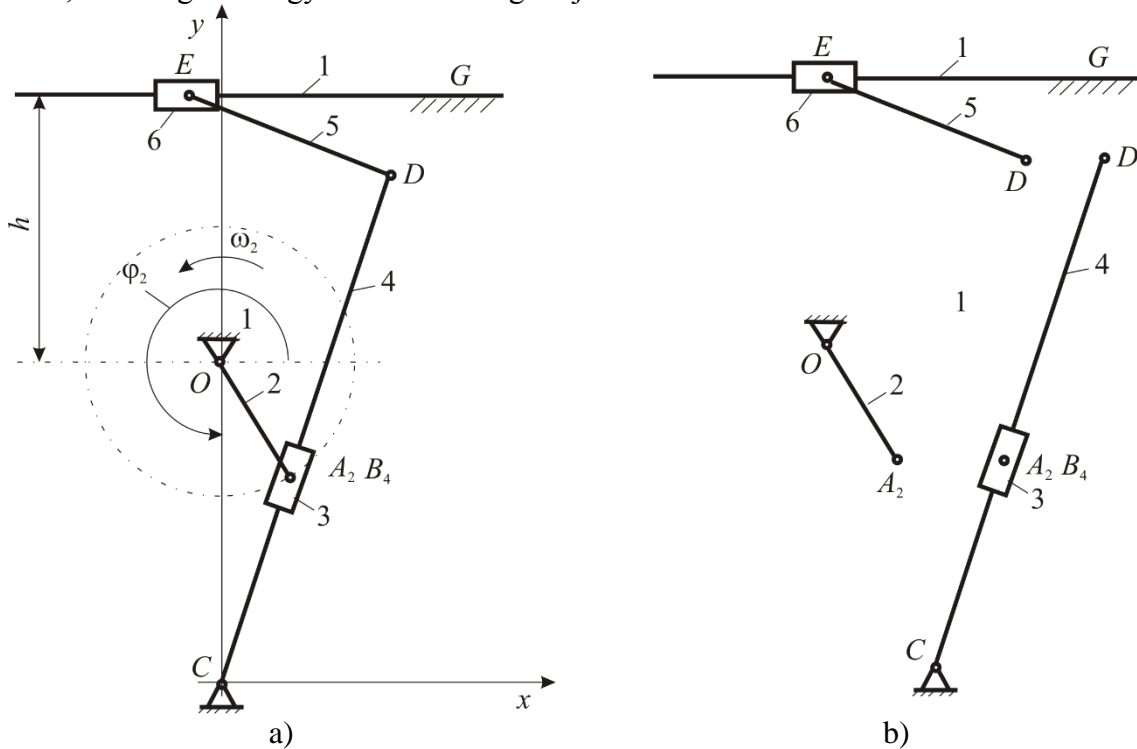
mech01				mech02				mech03				mech04				mech05			
Input		Output		Input		Output		Input		Output		Input		Output		Input		Output	
x_A	x_a	x_B	x_b	x_B	x_b	x_C	x_c	x_B	x_b	x_C	x_c	x_B	x_b	φ_2	f_2	x_B	x_b	x_C	x_c
y_A	y_a	y_B	y_b	y_B	y_b	y_C	y_c	y_B	y_b	y_C	y_c	y_B	y_b	ω_2	o_2	y_B	y_b	y_C	y_c
φ_2	f_2	v_{xB}	V_{xb}	v_{xB}	V_{xb}	v_{xC}	V_{xc}	v_{xB}	V_{xb}	v_{xC}	V_{xc}	v_{xB}	V_{xb}	ε_2	e_2	v_{xB}	V_{xb}	v_{xC}	V_{xc}
ω_2	o_2	v_{yB}	V_{yb}	v_{yB}	V_{yb}	v_{yC}	V_{yc}	v_{yB}	V_{yb}	v_{yC}	V_{yc}	v_{yB}	V_{yb}			v_{yB}	V_{yb}	v_{yC}	V_{yc}
AB	ab	a_{xB}	A_{xb}	a_{xB}	A_{xb}	a_{xC}	A_{xc}	a_{xB}	A_{xb}	a_{xC}	A_{xc}	a_{xB}	A_{xb}			a_{xB}	A_{xb}	a_{xC}	A_{xc}
		a_{yB}	A_{yb}	a_{yB}	A_{yb}	a_{yC}	A_{yc}	a_{yB}	A_{yb}	a_{yC}	A_{yc}	a_{yB}	A_{yb}			a_{yB}	A_{yb}	a_{yC}	A_{yc}
				x_D	x_d	φ_2	f_2	x_D	x_d	φ_2	f_2	x_D	x_d			x_D	x_d		
				y_D	y_d	ω_2	o_2	y_D	y_d	ω_2	o_2	y_D	y_d			y_D	y_d		
				v_{xD}	v_{xd}	ε_2	e_2	v_{xD}	v_{xd}	ε_2	e_2	v_{xD}	v_{xd}			v_{xD}	v_{xd}		
				v_{yD}	v_{yd}	φ_3	f_3	v_{yD}	v_{yd}			v_{yD}	v_{yd}			v_{yD}	v_{yd}		
				a_{xD}	A_{xd}	ω_3	o_3	a_{xD}	A_{xd}			a_{xD}	A_{xd}			a_{xD}	A_{xd}		
				a_{yD}	A_{yd}	ε_3	e_3	a_{yD}	A_{yd}			a_{yD}	A_{yd}			a_{yD}	A_{yd}		
				BC	bc			φ_3	f_3			PD	pd			φ_2	f_2		
				CD	cd			ω_3	o_3							ω_2	o_2		
								ε_3	e_3							ε_2	e_2		
								BC	bc							φ_3	f_3		
								P_1P_2	pp							ω_3	o_3		
																ε_3	e_3		
																P_1C	pc		
																CP_2	cp		

3.1. táblázat folytatása

mech06				mech07				mech08				mech09				mech10			
Input		Output		Input		Output		Input		Output		Input		Output		Input		Output	
x_B	xb	x_C	xc	x_B	xb	x_C	xc	x_D	xd	x_C	xc	x_A	xa	x_B	xb	x_B	xb	x_C	xc
y_B	yb	y_C	yc	y_B	yb	y_C	yc	y_D	yd	y_C	yc	y_A	ya	y_B	yb	y_B	yb	y_C	yc
v_{xB}	Vxb	v_{xC}	Vxc	v_{xB}	Vxb	v_{xC}	Vxc	v_{xD}	vxd	v_{xC}	Vxc	v_{xA}	Vxa	v_{xB}	Vxb	v_{xB}	Vxb	v_{xC}	Vxc
v_{yB}	Vyb	v_{yC}	Vyc	v_{yB}	Vyb	v_{yC}	Vyc	v_{yD}	vyd	v_{yC}	Vyc	v_{yA}	Vya	v_{yB}	Vyb	v_{yB}	Vyb	v_{yC}	Vyc
a_{xB}	Axb	a_{xC}	Axc	a_{xB}	Axb	a_{xC}	Axc	a_{xD}	Axd	a_{xC}	Axc	a_{xA}	Axa	a_{xB}	Axb	a_{xB}	Axb	a_{xC}	Axc
a_{yB}	Ayb	a_{yC}	Ayc	a_{yB}	Ayb	a_{yC}	Ayc	a_{yD}	Ayd	a_{yC}	Ayc	a_{yA}	Aya	a_{yB}	Ayb	a_{yB}	Ayb	a_{yC}	Ayc
x_D	xd			φ_2	f2			φ_3	f3			x_D	xd	x_C	xc	x_D	xd	φ_2	f2
y_D	yd			ω_2	o2			ω_3	o3			y_D	yd	y_C	yc	y_D	yd	ω_2	o2
v_{xD}	vxd			ε_2	e2			ε_3	e3			v_{xD}	vxd	v_{xC}	Vxc	v_{xD}	vxd	ε_2	e2
v_{yD}	vyd			BC	bc			DP	dp			v_{yD}	vyd	v_{yC}	Vyc	v_{yD}	vyd	φ_3	f3
a_{xD}	Axd							PC	pc			a_{xD}	Axd	a_{xC}	Axc	a_{xD}	Axd	ω_3	o3
a_{yD}	Ayd											a_{yD}	Ayd	a_{yC}	Ayc	a_{yD}	Ayd	ε_3	e3
φ_3	f3											φ_3	f3	φ_2	f2	v_E	Ve		
ω_3	o3											ω_3	o3	ω_2	o2	BC	bc		
ε_3	e3											ε_3	e3	ε_2	e2	CD	cd		
P_2C	pc											AB	ab	φ_4	f4	CC	cc		
P_1P_2	pp											BC	bc	ω_4	o4				
												CD	cd	ε_4	e4				

3.1. példa

Határozzuk meg a 3.11. ábra szerinti harántgyalu mechanizmus valamennyi pontjának helyzetét, sebességét és gyorsulását, a tagok szögsebességét és szöggyorsulását 5° -konként a $\varphi_2=0-360^\circ$ intervallumban, ha az $\overline{OA} = 0,05$ m, $\overline{OC} = 0,12$ m, $\overline{CD} = 0,2$ m, $h = 0.1$ m, $\overline{ED} = 0,08$ m, a forgattyú szögsebessége $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$. Rajzoljuk ki a képernyőre a mechanizmus különböző forgattyúsög állásaihoz tartozó ábráit, valamint az E pont sebesség-út, gyorsulás-út, út-idő, sebesség-idő és gyorsulás-idő diagramjait.



3.11. ábra

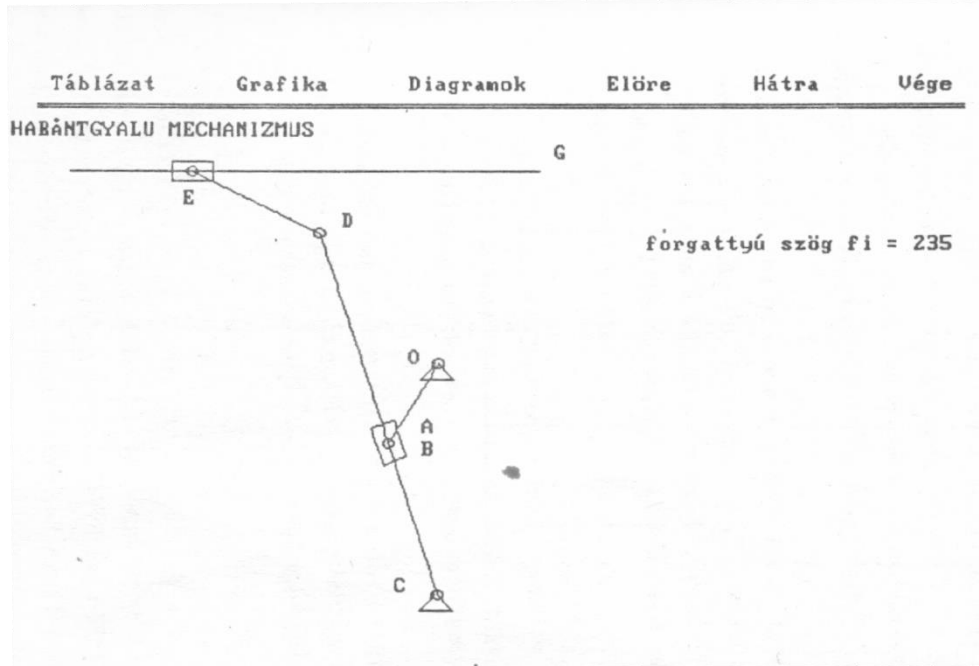
Az x, y koordináta-rendszer origóját, helyezzük a C pontba, majd bontsuk fel a mechanizmust elemi csoportokra. Ennek eredménye a 3.11/b ábrán látható. A mechanizmus az ábra szerint a 2-es hajtótagból, valamint a 3-4 és 5-6 tagokat magában foglaló zérus szabadságfokú csoportokból áll. A számításokhoz a következő rutinokat kell meghívni:

2-es tag	mech01.bas
3-4 tagokból álló csoport	mech04.bas
5-6 tagokból álló csoport	mech03.bas
B és D pontok	mech07.bas

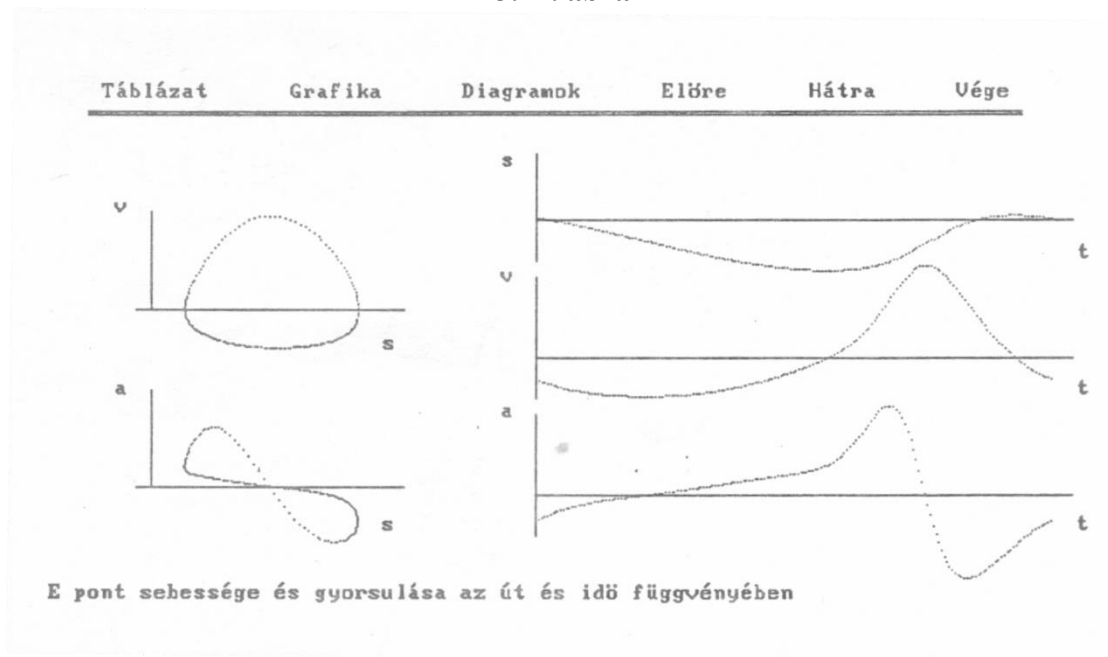
A felsorolt rutinok összefűzése után megírhatjuk a főprogramot. Itt a kinematikai párok azonosítására egész változókat használtunk, amelyeknek a betűjelei megegyeznek a kinematikai párok betűjeleivel, így például az A csukló azonosítója $a\%$. A tagokat célszerűen az eredeti sorszámukkal azonosítottuk. A koordináták, sebességek, gyorsulások, szögek, szögsebességek és szöggyorsulások jelölésére a következő tömböket alkalmaztuk:

$x(j), y(j)$	a pontok koordinátái ($j = a\%, b\%, \dots, g\%$).
$V_x(j), V_y(j)$	a pontok sebességkomponensei,
$A_x(j), A_y(j)$	a pontok gyorsulás komponensei,
$f(i)$	a tag helyzetét meghatározó szög ($i = 1, 2,$
$\omega(i)$	a tag szögsebessége,
$\epsilon(i)$	a tag szöggyorsulása,
$l(i)$	a tag hossza.

A képernyőn megjelenő grafikus ábrákat a 3.12. és 3.13. ábrák mutatják.



3.12. ábra



3.13. ábra

4. Síkban mozgó mechanizmusok dinamikai vizsgálata

4.1 A mechanizmusra ható erők osztályozása

A mechanizmusok dinamikai vizsgálatának legfontosabb feladata a kinematikai párokban ébredő reakcióerők meghatározása. Ezeknek az erőknek az ismerete a szilárdsági számításoknál, a csapágykiválasztásnál, a megfelelő kenési rendszer kialakításánál, a hajtó motor teljesítményének meghatározásánál, stb. egyaránt szükséges.

A mechanizmus működése során annak tagjaira külső erők hatnak. Ezek közé tartoznak a hajtóerő, a hasznos vagy technológiai ellenállások, a tagok súlya, és a tagok mozgásából keletkező tehetetlenségi erő. A belső erők közé tartoznak a kinematikai párok elemein fellépő kapcsolási reakcióerők.

A *hajtóerő* alatt a vezető (hajtó) tagra ható, pozitív munkát végző erőt értjük (pozitív a munkavégzés, ha az erő iránya és támadáspontjában a sebességiránya egybeesik, vagy azzal egyesszöget alkot).

A *hasznos ellenállás* azt az erőt jelenti, amely a hajtott rendszer tagjaira hat, és amelynek legyőzésére a gépet szerkesztették. Ilyen ellenállás jelentkezik például a sajtolás, a fémforgácsolás, stb. közben.

A *káros ellenállások* közé elsősorban a súrlódási erő és a közegellenállás tartozik. A káros ellenállások negatív munkát végeznek. A kinematikai párokban keletkező súrlódó erők a reakcióerő hatására lépnek fel. A súrlódó erők tangenciális (az eredő reakcióerőre merőleges) irányúak, és a kinematikai elemek közti súrlódási tényező, valamint az eredő reakcióerő ismeretében számíthatók.

A tagok *G súlyerőinek* támadáspontja a tagok súlypontjában van. A súlyerők munkája a mechanikai munkaciklusban nullával egyenlő, mivel a tagok súlypontjai a zárt görbepályákon mozognak, és a súlyerő iránya változatlan. A mechanizmus munkaciklusán belül azonban a súlyerők munkája nullától különbözik, ezért a mechanizmusnak adott állásban történő dinamikai vizsgálatánál nem hanyagolhatók el.

A *tehetetlenségi* vagy *inercia* erők a mechanizmus tagjainak egyenlőtlen mozgásából származnak. A tagok tömegének, súlypontjuk helyének és a hajtótag előírt mozgásának ismeretében kiszámíthatók. A tehetetlenségi erők a tag súlypontjának gyorsulásával párhuzamosak, de irányuk azzal mindig ellentétes.

A *reakcióerők* a kinematikai párokban ébredő kapcsolóerők. A reakcióerők alatt a mechanizmus egyik tagjáról a másik tagra átadódó erőhatást értjük. Az egész mechanizmus egyensúlyi helyzetének vizsgálatánál a reakcióerőket olyan belső erőknek tekintjük, amelyek párosan kölcsönösen kiegyensúlyozzák egymást.

4.2. Elemi csoportok erőegyensúlya, a kinematikai párokban ébredő reakcióerők meghatározása

A kinematikai párokban ébredő reakcióerők vizsgálatánál az első lépés mindig a külső erők nagyságának, irányának és támadáspontjának meghatározása. Ha már ismerjük a külső erőket (beleértve a tehetetlenségi erőket is) akkor *D'Alembert-elve* alapján a mechanizmust, illetve az azt alkotó elemi csoportokat és azok minden egyes tagját egyensúlyi állapotban lévőnek tekinthetjük és felhasználhatjuk a statikai egyenleteket.

A reakcióerők meghatározásánál minden ötkötöttségű csuklóban és haladó mozgást megen-

gedő kinematikai párnál két ismeretlennel kell számolni. Az első esetben a reakcióerő nagysága és iránya, a másodikban pedig a reakcióerő nagysága és támadáspontja ismeretlen. Ebből következik, hogy az ötkötöttsgű kinematikai párokat tartalmazó mechanizmusokban az ismeretlenek száma: $2p_5$. Az n tagot tartalmazó mechanizmusra viszont $3n$ számú statikai egyenlet írható fel. A feladat akkor megoldható, ha a $2p_5=3n$, vagy $p_5 = (3/2) n = 1,5 n$.

Mivel ezt a feltételt az *Asszur* csoportok kielégítik, ezért a mechanizmusok erőteni vizsgálatát az őket alkotó *Asszur* csoportok vizsgálatával célszerű végezni.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az *Asszur* csoportok vizsgálatának sorrendje mindig meg kell, hogy egyezzen azzal a sorrenddel, amelyet a szerkezeti analízisnél a csoportok elkülönítésekor kialakítottunk. A különböző II. osztályú elemi csoportok kinematikai párjaiban fellépő ismeretlen reakcióerők meghatározásának módját az alábbiakban mutatjuk be.

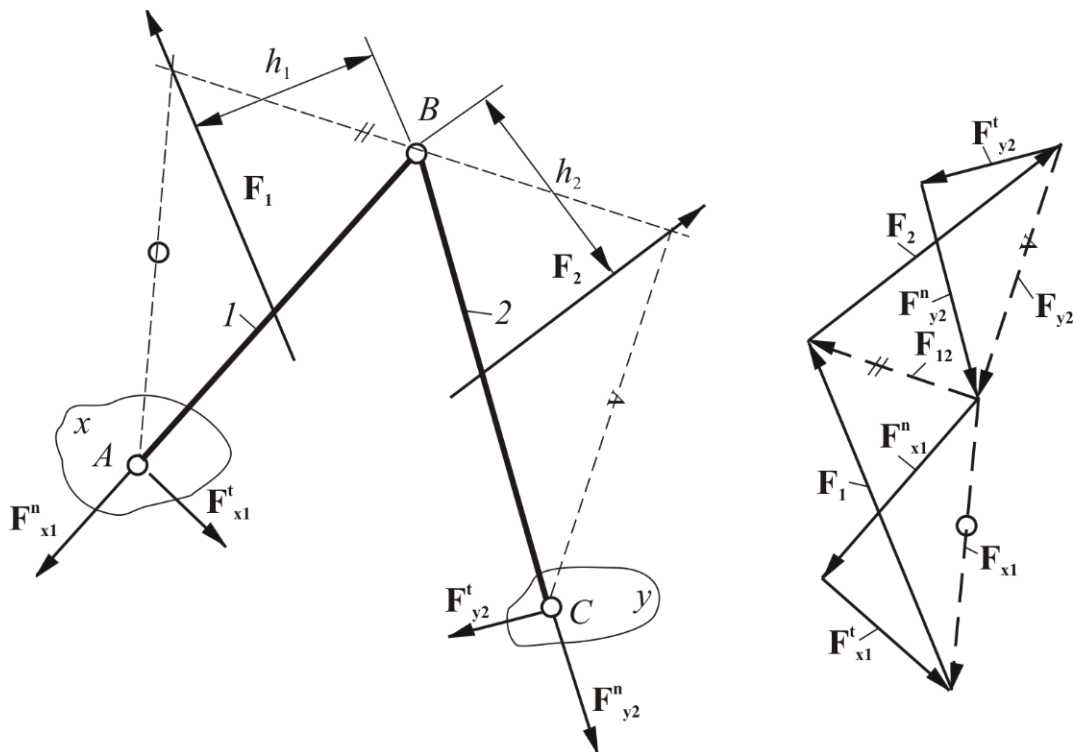
Kéttagú csoport három forgó kinematikai párral. A 4.1. ábrán látható 1-es és 2-es jelű tagokból álló csoportot úgy kell elképzelni, hogy azt a ráható \mathbf{F}_1 és \mathbf{F}_2 külső erőkkel együtt valamely mechanizmusból kiemeltük, és a mechanizmus elhagyott x és y részének a csoportra kifejtett hatását \mathbf{F}_{x1} és \mathbf{F}_{y2} reakcióerőkkel helyettesítettük. Bontsuk fel az ismeretlen \mathbf{F}_{x1} és \mathbf{F}_{y2} reakcióerőket normális (az adott tag csuklóinak középpontjait összekötő egyenesbe eső) és tangenciális (a normálisra merőleges) komponensekre, majd vizsgáljuk az egyes tagok, és az egész csoport erőegyensúlyát.

Az 1-es jelű tag egyensúlyából következik, hogy a tagra ható erők B pontra vonatkoztatott nyomatéka nulla, vagyis $\sum \mathbf{M}_1(B) = 0$, ahonnan a \mathbf{F}_{x1}^t tangenciális komponens számítható:

$$|\mathbf{F}_{x1}^t| = |\mathbf{F}_1| h_1 / \overline{AB}$$

A 2-es jelű tag erőegyensúlyából $\sum \mathbf{M}_2(B) = 0$, és innen

$$|\mathbf{F}_{y2}^t| = |\mathbf{F}_2| h_2 / \overline{BC} .$$



4.1. ábra

A csoport erőegyensúlyi feltétele:

$$\mathbf{F}_{x1}^n + \mathbf{F}_{x1}^t + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{y2}^n + \mathbf{F}_{y2}^t = 0,$$

amelyből a két ismeretlen nagyságú, de ismert irányú vektor, az \mathbf{F}_{x1}^n és az \mathbf{F}_{y2}^n szerkesztéssel kiadódik (4.1. ábra). A vektorsokszögből az A és a C kinematikai párokban ébredő reakcióerők, az $\mathbf{F}_{x1} = \mathbf{F}_{x1}^n + \mathbf{F}_{x1}^t$ és az $\mathbf{F}_{y2} = \mathbf{F}_{y2}^n + \mathbf{F}_{y2}^t$ kiolvashatók. A B pontban ható reakcióerő (\mathbf{F}_{21}) az l -es jelű tag erőegyensúlyából: $\mathbf{F}_{x1} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{21} = 0$, határozható meg.

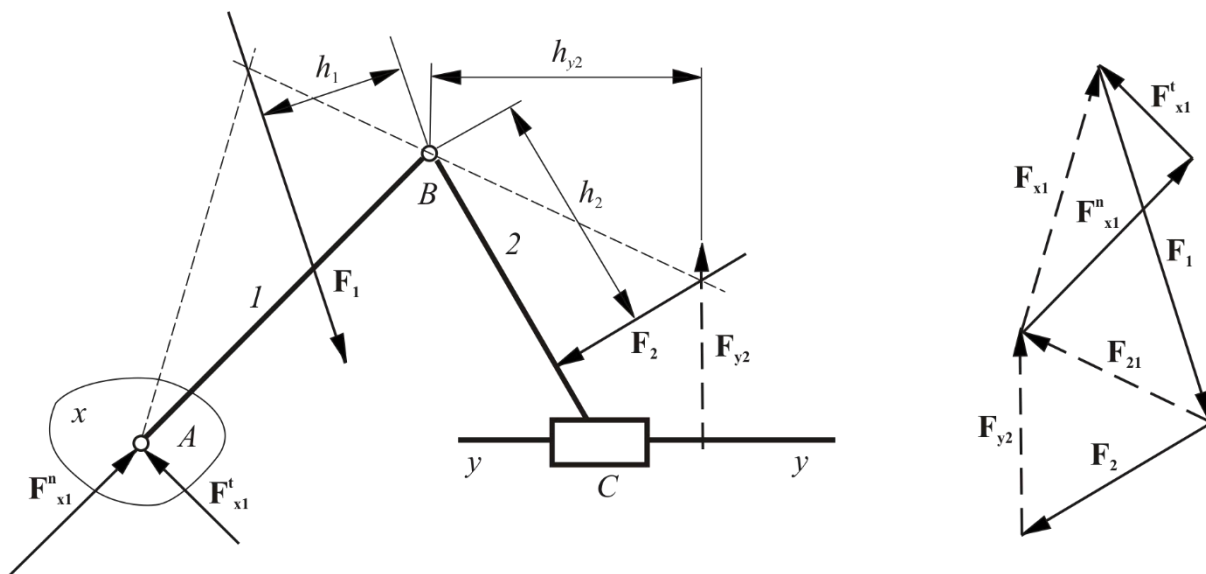
A megoldást ellenőrizhetjük a *Cullmann* szerkesztéssel. Húzzunk párhuzamost az A ponton át \mathbf{F}_{x1} -gyel, a B ponton át \mathbf{F}_{12} -vel és C -én át \mathbf{F}_{y2} -vel. Az A és a B ponton átmenő egyeneseknek az \mathbf{F}_1 -en, a B és a C ponton átmenő egyeneseknek pedig a \mathbf{F}_2 hatásvonalon kell metsződni.

A *Cullmann* szerkesztés a három forgó párt tartalmazó kéttagú csoportnál a reakcióerők meghatározására is felhasználható. Alkalmazásának ismertetésére azonban nem térünk ki, mivel feltételezzük az a „Mechanika” című tantárgyból már ismert.

Elemi csoport két csuklóval és egy külső haladó mozgású kinematikai párral. A megoldás gondolatmenete a 4.2. ábra követhető.

Az l -es jelű tag egyensúlyi feltételéből $\sum \mathbf{M}_1(B) = 0$, ahonnan az

$$|\mathbf{F}_{x1}^t| = |\mathbf{F}_1| h_1 / \overline{AB}.$$



4.2. ábra

A vizsgált csoportban a keresett \mathbf{F}_{y2} erő iránya ismert, merőleges az y - y vezetékre. Az egész csoportra vonatkozó erőegyensúlyi egyenlet:

$$\mathbf{F}_{x1}^n + \mathbf{F}_{x1}^t + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{y2} = 0,$$

amelyből az ismert irányú \mathbf{F}_{x1}^n és \mathbf{F}_{y2} nagysága szerkesztéssel meghatározható.

A csoport tagjaira kölcsönösen ható reakcióerőket ($\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$) a csoport egyik tagjának, például a 2-es tagnak az egyensúlyi feltételéből állapítjuk meg:

$$\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{y2} + \mathbf{F}_{12} = 0.$$

Az \mathbf{F}_{y2} erőnek a helyét, vagyis h_{y2} karját a 2-es jelű tagon működő erők B pontra vonatkoztatott

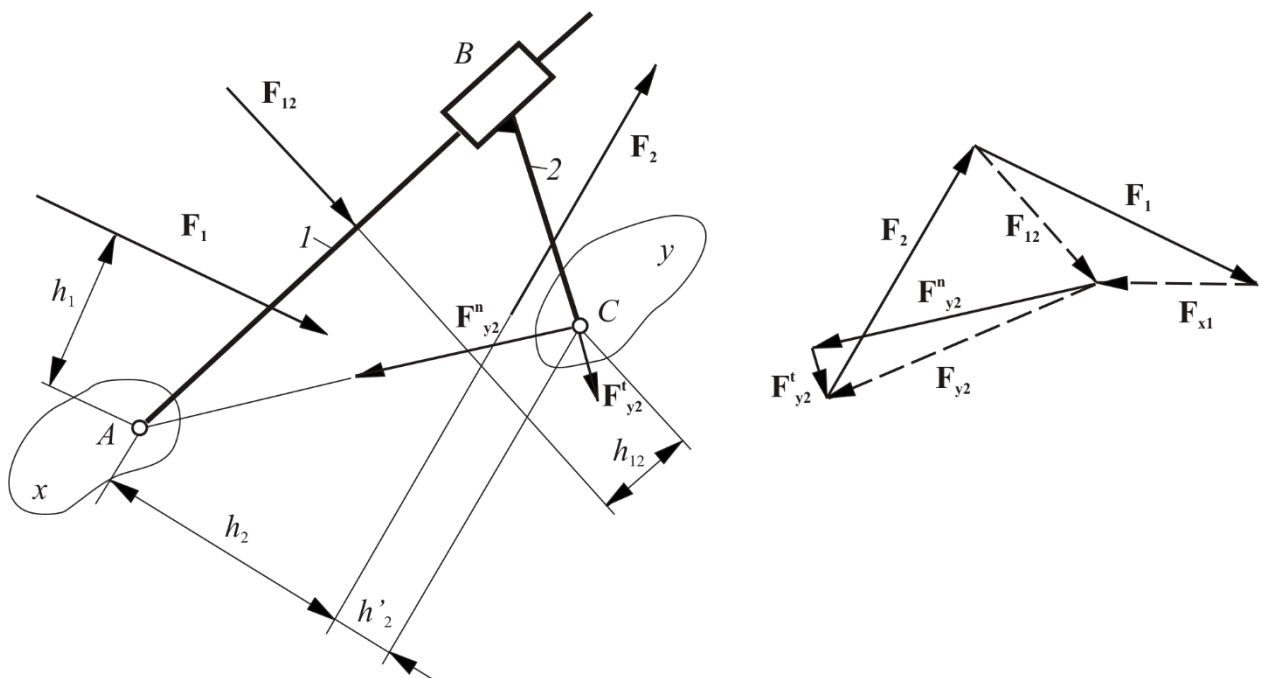
nyomatékainak összegéből számíthatjuk:

$$h_{y2} = \frac{h_2 |\mathbf{F}_2|}{|\mathbf{F}_{y2}|}.$$

Kéttagú csoport haladó mozgást végző belső kinematikai párral. A 4.3. ábrán látható csoport vizsgálatához a C pontban ébredő \mathbf{F}_{y2} reakcióerőt fel kell bontani az \overline{AC} irányba eső \mathbf{F}_{y2}^n , és erre merőleges \mathbf{F}_{y2}^t komponensekre. A feladat megoldása ezután a következő:

A kéttagú csoportra írható $\sum \mathbf{M}_{12}(A) = 0$ nyomatéki egyensúlyi feltételéből az \mathbf{F}_{y2}^t számítható:

$$|\mathbf{F}_{y2}^t| = \frac{|\mathbf{F}_2| h_2 + |F_1| h_1}{AC}.$$



4.3. ábra

A 2-es jelű tag erőegyensúlyából:

$$\mathbf{F}_{y2}^n + \mathbf{F}_{y2}^t + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{12} = 0$$

az \mathbf{F}_{y2}^n , \mathbf{F}_{y2} és az \mathbf{F}_{12} megszerkeszthető.

Az \mathbf{F}_{12} ismeretében, annak a C ponttól mért h_{12} távolságra lévő hatásvonalát a $\sum \mathbf{M}_2(C) = 0$ egyensúlyi feltételéből:

$$h_{12} = \frac{h'_2 |\mathbf{F}_2|}{|\mathbf{F}_{12}|}$$

számíthatjuk ki.

Végül a csoport erőegyensúlyából az ismert irányú \mathbf{F}_{x1} szerkeszthető, ugyanis

$$\mathbf{F}_{y2} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{x1} = 0.$$

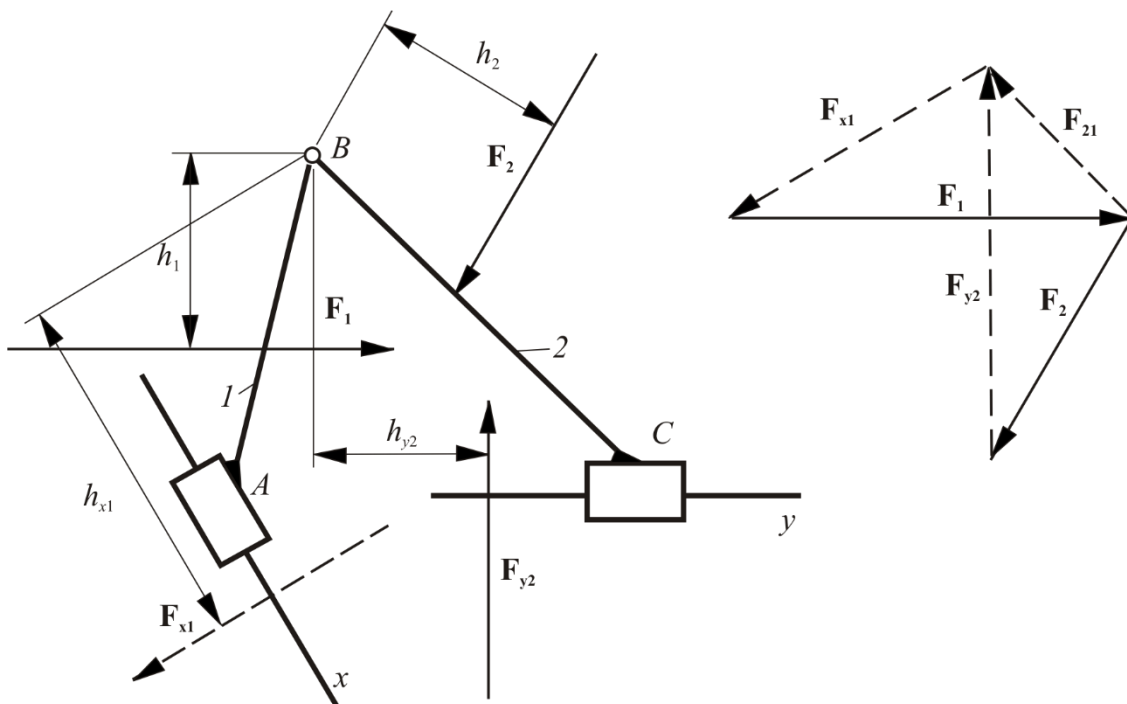
Kéttagú csoport, forgó mozgást végző belső kinematikai párral (4.4. ábra). A csoport erőegyensúlyi feltétele:

$$\mathbf{F}_{x1} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{y2} = 0,$$

amelyből az ismert irányú \mathbf{F}_{x1} és \mathbf{F}_{y2} megszerkeszthető. A vektorsokszögben szaggatott vonallal rajzolt vektorok.

Az 1-es és a 2-es jelű tagokra ható erők B csuklóra vonatkoztatott nyomatékainak összegéből, vagyis a $\sum \mathbf{M}_1(B) = 0$ és $\sum \mathbf{M}_2(B) = 0$ egyensúlyi feltételekből határozhatjuk meg az \mathbf{F}_{x1} és \mathbf{F}_{y2} erők h_{x1} illetve h_{y2} karját:

$$h_{x1} = \frac{h_1 |\mathbf{F}_1|}{|\mathbf{F}_{x1}|} \text{ és } h_{y2} = \frac{h_2 |\mathbf{F}_2|}{|\mathbf{F}_{y2}|}.$$



4.4. ábra

Végül, ha a csoport egyik, például az 1-es jelű tagjának az egyensúlyát vizsgáljuk, akkor az alábbi

$$\mathbf{F}_{x1} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{21} = 0$$

vektoregyenlet szerint megszerkesztett erőszögéből a B csuklóban ébredő reakcióerőt (\mathbf{F}_{21}) is megállapíthatjuk.

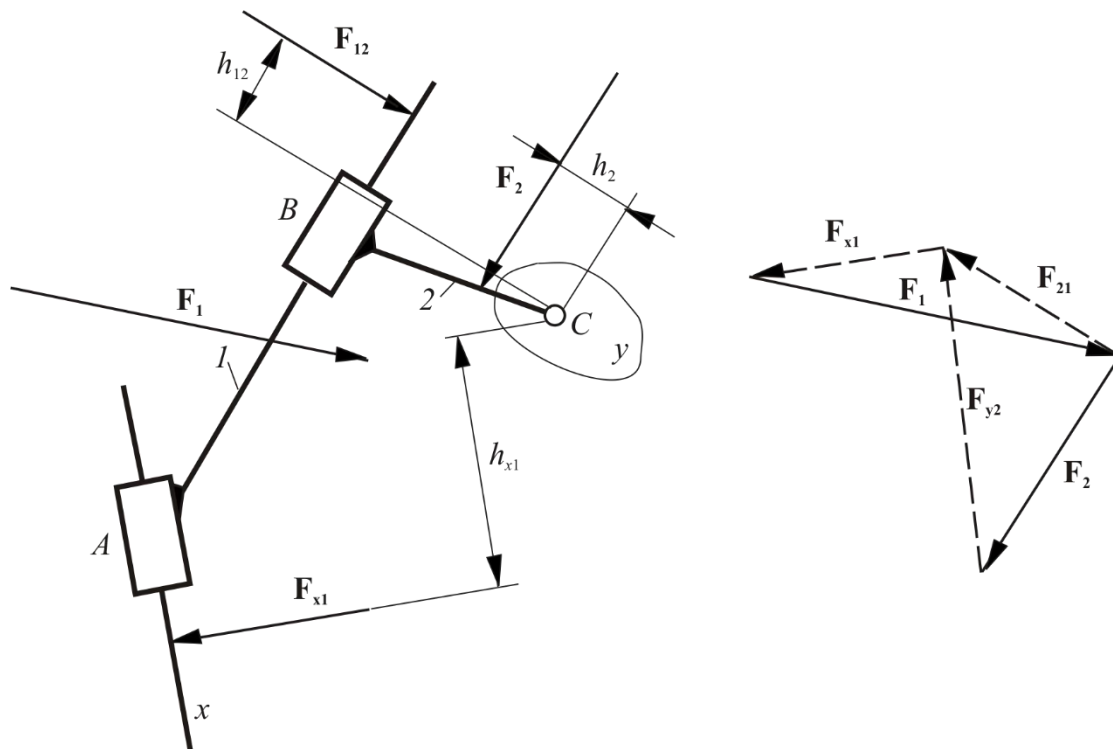
Kéttagú csoport egy forgó mozgást végző külső kinematikai párral (4.5. ábra). Az 1-es jelű tag erőegyensúlyából az ismert irányú \mathbf{F}_{x1} és \mathbf{F}_{21} megszerkeszthetők:

$$\mathbf{F}_{x1} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{21} = 0.$$

A 2-es jelű tagra írható

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{y2} = 0$$

erőegyensúlyi egyenletből \mathbf{F}_{y2} adódik.



4.5. ábra

Az \mathbf{F}_{12} és az \mathbf{F}_{x1} erők helyének meghatározásához először a 2-es jelű tagra ható erők C pontra vonatkoztatott nyomatékainak összegét, $\sum \mathbf{M}_2(C) = 0$, majd pedig a csoportra ható erők C pontra vonatkoztatott nyomatékainak az összegét, $\sum \mathbf{M}_{12}(C) = 0$ kell venni. Ezekből az egyensúlyi feltételekből:

$$h_{12} = \frac{h_2 |\mathbf{F}_1|}{|\mathbf{F}_{12}|} \quad \text{és} \quad h_{x1} = \frac{h_1 |\mathbf{F}_1| + h_2 |\mathbf{F}_2|}{|\mathbf{F}_{x1}|}.$$

A haladó mozgást megvalósító kinematikai párokkal kapcsolatban felhívjuk a figyelmet arra, hogy ha a reakcióerő nem a kinematikai pár felületének a középpontjában halad keresztül, akkor mindig fenn áll a befeszülés veszélye.

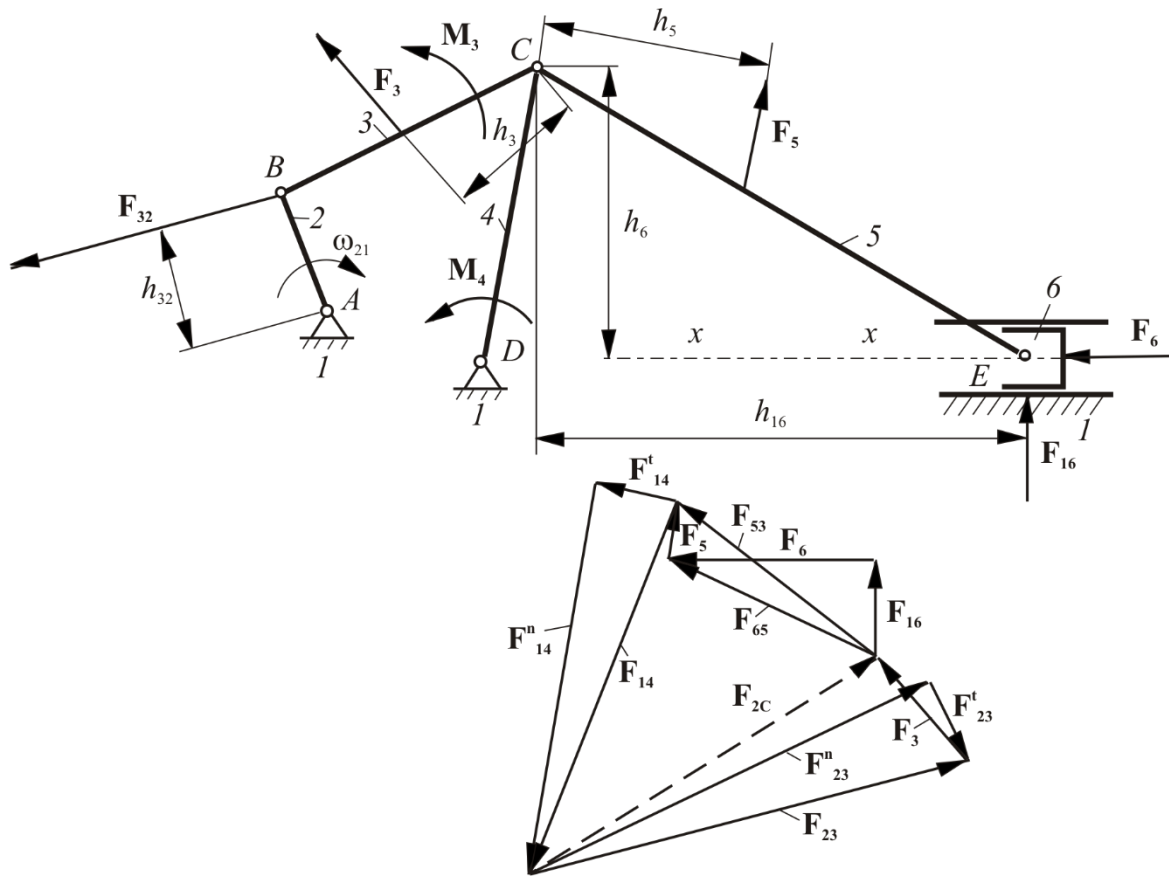
Az eddig elmondottakat felhasználva, határozzuk meg a 4.6. ábrán bemutatott mechanizmus kinematikai párjaiban ébredő reakcióerőket. A mechanizmusra ható külső erők az \mathbf{F}_3 , \mathbf{F}_5 és az \mathbf{F}_6 adottak. A mechanizmus 3-as és 4-es tagjait még az \mathbf{M}_3 és az \mathbf{M}_4 ismert nagyságú nyomatékok is terhelik. A keresett reakcióerők közül csak az \mathbf{F}_{18} iránya és támadáspontja ismert (merőleges az $x-x$ vezetékre és átmegy az E ponton).

A feladat megoldásának a gondolatmenete a következő: először képzeletben elkülönítjük a külső haladó mozgású kinematikai párt tartalmazó 5-ös és a 6-os tagokból álló csoportot, és megvizsgáljuk a csoport, valamint a tagok egyensúlyi feltételeit.

A csoport $\sum \mathbf{M}_{56}(C) = 0$ egyensúlyi feltételéből az F_{16} az alábbi összefüggésből rögtön kiszámítható:

$$|\mathbf{F}_{16}| = \frac{h_6 |\mathbf{F}_6| - h_5 |\mathbf{F}_5|}{h_{16}}$$

A 6-os jelű tag $\mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_{16} + \mathbf{F}_{56} = 0$ egyensúlyi feltételéből \mathbf{F}_{56} szerkesztéssel adódik.



4.6. ábra

Az $\mathbf{F}_{35} = -\mathbf{F}_{53}$ reakcióerő az 5-ös jelű tag erőegyensúlya alapján szerkeszthető, mivel

$$\mathbf{F}_{65} + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_{35} = 0.$$

Most vizsgáljuk a három forgó kinematikai párt tartalmazó 3-as és 4-es jelű tagokból álló csoportot, amelyre a külső \mathbf{F}_3 erőn és az \mathbf{M}_3 , valamint \mathbf{M}_4 nyomatékon kívül az előzőekben ismert már \mathbf{F}_{53} is hat. A B pontban ébredő \mathbf{F}_{23} reakcióerőt \overline{BC} irányú \mathbf{F}_{23}^n normális, és a rá merőleges \mathbf{F}_{23}^t tangenciális komponensekre bontva, a $\sum \mathbf{M}_3(C) = 0$ feltételből az \mathbf{F}_{23}^t számítható:

$$|\mathbf{F}_{23}^t| = \frac{h_3 |\mathbf{F}_3| + |\mathbf{M}_3|}{BC}.$$

A $\sum \mathbf{M}_4(C) = 0$ egyensúlyi feltételből:

$$|\mathbf{F}_{14}^t| = \frac{|\mathbf{M}_4|}{DC}.$$

ahol $|\mathbf{F}_{14}^t|$ merőleges a \overline{DC} -re.

Az \mathbf{F}_{23} és az \mathbf{F}_{14} az egész csoport alábbi erőegyensúlyi feltétele alapján az erőszögből határozható meg:

$$\mathbf{F}_{23}^n + \mathbf{F}_{23}^t + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{53} + \mathbf{F}_{14}^t + \mathbf{F}_{14}^n = 0.$$

A 4-es jelű tagra a C pontban a 3-as jelű tag felől az $\mathbf{F}_{34} = -\mathbf{F}_{54}$ erő adódik át, ami a 4-es jelű tag $\mathbf{F}_{14} + \mathbf{F}_{34} = 0$ erőegyensúlyából következik. Végül a C pontban a 3-as jelű tagra átadódó teljes

F_{2c} erő nagysága:

$$F_{2c} = F_{43} + F_{53} = 0.$$

A mechanizmus tagjaira ható összes erő és nyomaték egyensúlyban tartásához a forgattyún

$$|M_{\text{egy}}| = -h_{32}k_1|F_{32}|$$

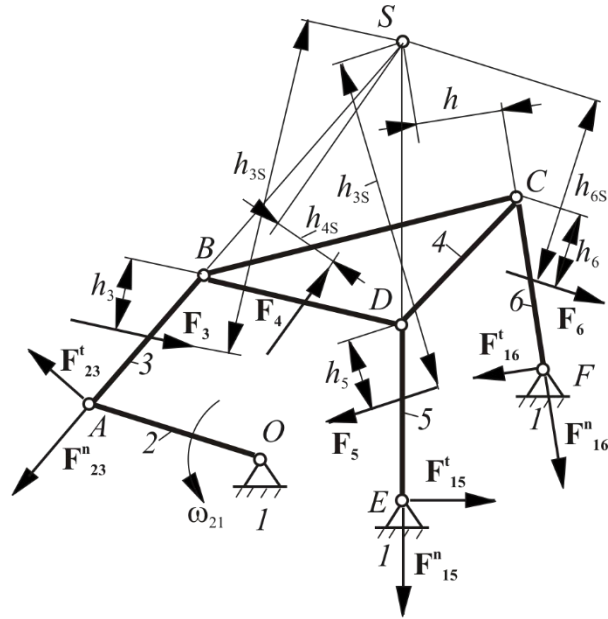
nagyságú nyomatékot kell kifejteni.

A III. osztályú csoportot tartalmazó mechanizmusok kinematikai párjaiban ébredő reakcióerők meghatározása. A kinematikai vizsgálathoz hasonlóan az *Asszur* pontok valamelyikének a felhasználásával történik. A feladat megoldásához csak egyetlen *Asszur* pontra van szükség. Vizsgáljuk meg a 4.7. ábrán látható mechanizmust. A III. osztályú csoportot a 4-es jelű központi tag és a csuklókkal hozzákapcsolt 3-as, 5-ös és 6-os jelű tagok képezik. A csoport minden tagjára egy-egy külső erő hat. A csoport összes kinematikai párjában ismeretlen a reakcióerő. A reakcióerők meghatározásához első lépésként szerkesztjük meg a 3-as és 5-ös jelű tagok meghosszabbításának metszéspontjaként az *Asszur* pontot (*S*).

A II. osztályú csuklós csoportnál alkalmazott módszerhez hasonlóan itt is meghatározhatjuk a külső csuklóban (*A*, *E* és *F*) ébredő reakcióerők tangenciális összetevőjét.

A $\sum M_3(B) = 0$, $\sum M_5(D) = 0$ és a $\sum M_6(C) = 0$ egyensúlyi feltételből $|F_{23}^t|$, $|F_{15}^t|$, $|F_{16}^t|$ kiszámítható:

$$|F_{23}^t| = \frac{h_3|F_3|}{AB}, \quad |F_{15}^t| = \frac{h_5|F_5|}{ED} \quad \text{és} \quad |F_{16}^t| = \frac{h_6|F_6|}{ED}.$$



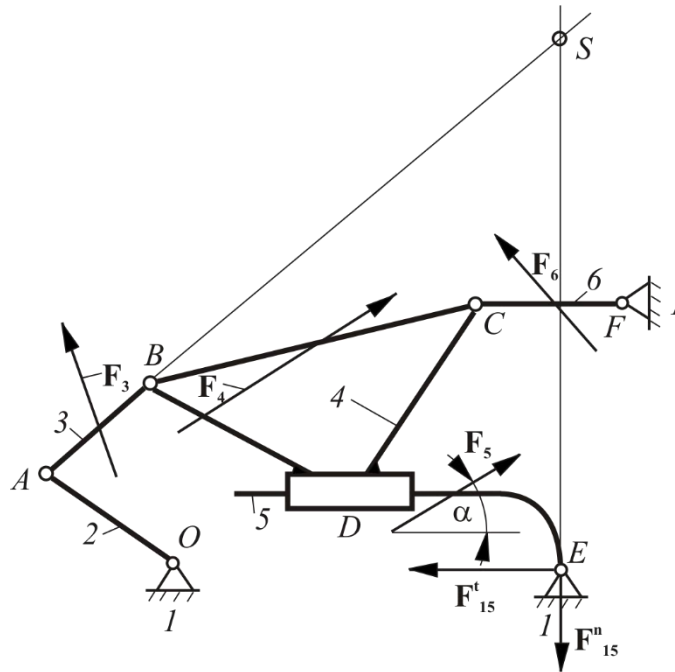
4.7. ábra

Az $|F_{16}^n|$ a csoport *S* pontjára felírt $\sum M(S) = 0$ egyensúlyi feltételből kiszámítható, mivel $|F_{23}^n|$ és $|F_{15}^n|$ komponenseknek nincs nyomatéka az *S* pontra:

$$|F_{16}^n| = \frac{h_{3S}|F_3| + h_{4S}|F_4| + h_{5S}|F_5| + h_{6S}|F_6| - \overline{ES}|F_{15}^t|}{h}$$

Az \mathbf{F}_{23} és az \mathbf{F}_{15} normális irányú reakcióerők a csoport alábbi erőegyensúlyi feltételéből grafikusán határozhatók meg:

$$\mathbf{F}_{23}^n + \mathbf{F}_{23}^t + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_{16}^n + \mathbf{F}_{16}^t + \mathbf{F}_{15}^n + \mathbf{F}_{15}^t = 0.$$



4.8. ábra

A B , D és C belső kinematikai párokban ébredő reakcióerőket a 3-as, 5-ös és a 6-os jelű tagokra felírható erőegyensúlyból határozhatjuk meg. Ezek a következők:

$$\mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{43} = 0,$$

$$\mathbf{F}_{15} + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_{45} = 0,$$

$$\mathbf{F}_{16} + \mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_{46} = 0.$$

Ha a III. osztályú csoport egy belső csuklóját haladó mozgást végző kinematikai párral helyettesítjük (4.8. ábra), akkor a kinematikai párokban működő reakcióerők számítása némileg eltérő lesz. Az E csuklóban ébredő reakcióerőt ugyanis a haladó mozgást végző kinematikai pár vezetőkére merőleges (\mathbf{F}_{15}^n) és a vezetőkével párhuzamos (\mathbf{F}_{15}^t) összetevőkre kell bontani.

Ha a súrlódástól eltekintünk, akkor az $|\mathbf{F}_{15}^t|$ nagysága:

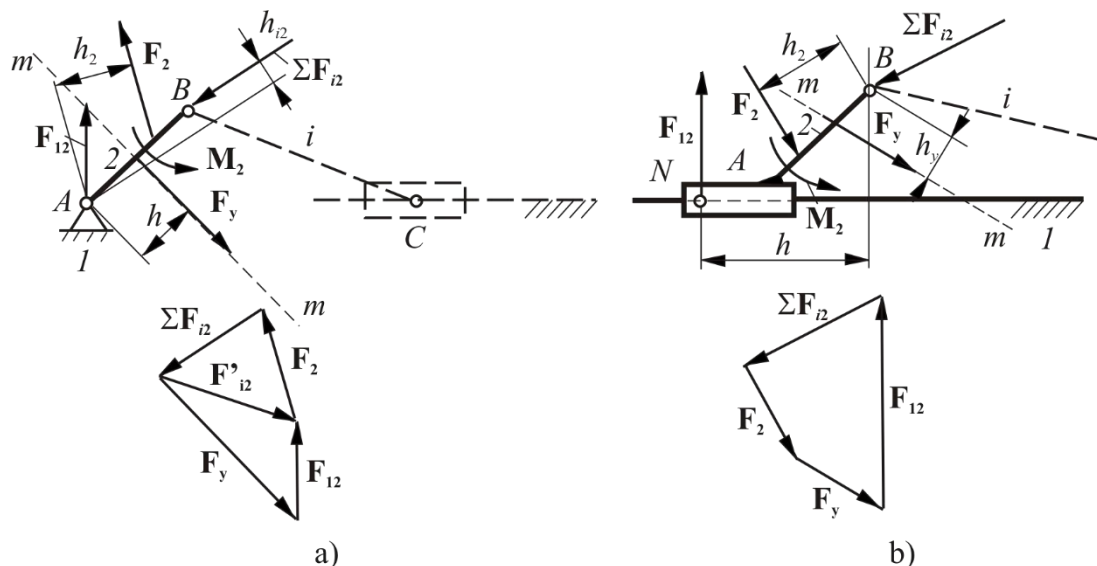
$$|\mathbf{F}_{15}^t| = |\mathbf{F}_5| \cos \alpha,$$

ahol: α az \mathbf{F}_5 külsőerő és a haladó mozgást végző kinematikai pár vezetőke között lévő szög.

A számítás további menete semmiben nem különbözik a III. osztályú csoport kinematikai párjaiban ébredő reakcióerők meghatározásának korábban leírt módjától.

4.3. I. osztályú mechanizmusok (hajtótagok) erőegyensúlya

Az 1-es jelű állványból és az A kinematikai párral hozzákapsolt 2-es jelű mozgó tagból álló I. osztályú mechanizmus két változatát szemlélteti a 4.9. ábra. Az egyiknél forgó, a másikonál haladó mozgást megengedő kinematikai pár kapcsolja a mozgó tagot az állványhoz. A két megoldás közötti különbség miatt, vizsgáljuk őket külön-külön.



4.9. ábra

A forgó kinematikai párt tartalmazó I. osztályú mechanizmus 2-es jelű tagjára ismert nagyságú \mathbf{F}_2 külsőerő és \mathbf{M}_2 külsőnyomaték hat. Ismertnek tételezzük a mechanizmus összes mozgó tagjának a 2-es jelű tagra a B kinematikai páron keresztül áthatódó $\Sigma \mathbf{F}_{i2}$ erőhatását is. Ezzel a $\Sigma \mathbf{F}_{i2}$ belső reakcióerővel helyettesíthető a mechanizmus elhagyott része. Ezek után meg kell határozni a 2-es jelű tagra ható \mathbf{F}_y hajtó- vagy egyensúlyozó erő és az \mathbf{F}_{12} reakcióerő nagyságát. A hajtóerő kiszámításához ki kell jelölni annak hatásvonalát. Ez a szerkezet konstrukciós sajátosságainak ismeretében mindig elvégezhető. Az \mathbf{F}_y hajtóerő hatásvonala legyen az $m-m$ egyenes. A hajtótág $\sum \mathbf{M}(A) = 0$ egyensúlyi feltételből \mathbf{F}_y a következő összefüggés alapján számítható:

$$|\mathbf{F}_y| = \frac{h_2 |\mathbf{F}_2| + h_{i2} |\mathbf{F}_{12}| + |\mathbf{M}_2| / k_1}{h}$$

Az \mathbf{F}_y ismeretében az \mathbf{F}_{12} reakcióerő a 2-es jelű tag erőegyensúlyából az erőszöveg segítségével megszerkeszthető:

$$\mathbf{F}_y + \mathbf{F}_2 + \sum \mathbf{F}_{i2} + \mathbf{F}_{12} = 0.$$

Ha nem a hajtóerőt, hanem az \mathbf{M}_y hajtónyomatékot (vagy egyensúlyozó nyomatékot) kell meghatározni, akkor a fenti gondolatmenethez hasonlóan \mathbf{M}_y -ra a következő összefüggés írható fel:

$$|\mathbf{M}_y| = k_1 (h_2 |\mathbf{F}_2| + h_{i2} |\mathbf{F}_{12}|) + |\mathbf{M}_2|.$$

Az \mathbf{F}'_{12} reakcióerő az

$$\mathbf{F}_2 + \sum \mathbf{F}_{i2} + \mathbf{F}'_{12} = 0$$

vektoregyenletből szerkeszthető.

Most vizsgáljuk második esetet, amikor az I. osztályú mechanizmus haladó mozgású kinematikai párt tartalmaz (4.9/ b ábra). Ekkor az \mathbf{F}_y egyensúlyozó erő hatásvonala az $m-m$ egyenes, nagysága az

$$\mathbf{F}_y + \mathbf{F}_2 + \sum \mathbf{F}_{i2} + \mathbf{F}_{12} = 0$$

vektoregyenlet alapján szerkeszthető. Innen adódik az \mathbf{F}_{12} és az \mathbf{F}_y .

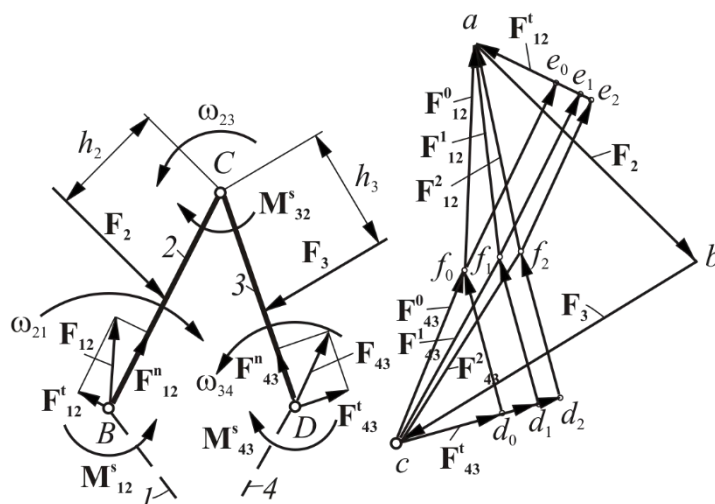
Az F_{12} reakcióerő helyét a $\sum \mathbf{M}(B) = 0$ egyensúlyi feltételből számíthatjuk ki, és ez alapján a reakcióerő B pontra vonatkoztatott karja:

$$h = \frac{h_2 |\mathbf{F}_2| + h_y |\mathbf{F}_y| + |\mathbf{M}_2| / k_1}{|\mathbf{F}_{12}|}$$

A h kar B ponthoz viszonyított helyét (tőle jobbra, vagy balra esik-e) a fenti tört számlálójában lévő nyomatékok nagysága és iránya határozza meg.

4.4. Kinematikai párokban ébredő reakcióerők meghatározása a súrlódás figyelembevételével

Vizsgáljuk meg, hogyan határozhatók meg a II. osztályú másodrendű csoport (4.10. ábra) kinematikai párjaiban ébredő reakcióerők, ha a csapsúrlódásokat is figyelembe vesszük. A csoport tagjait az \mathbf{F}_2 és az \mathbf{F}_3 külső erők terhelik. A súrlódás miatt a három kinematikai párban \mathbf{M}_{12}^s , \mathbf{M}_{23}^s , \mathbf{M}_{32}^s , \mathbf{M}_{43}^s nyomaték is keletkezik.



4.10. ábra

Ezeknek a nyomatékoknak a nagysága a következő:

$$(4.4.1) \quad |\mathbf{M}_{12}^s| = |\mathbf{F}_{12}| \mu r_B,$$

$$(4.4.2) \quad |\mathbf{M}_{23}^s| = |\mathbf{F}_{23}| \mu r_C,$$

$$(4.4.3) \quad |\mathbf{M}_{43}^s| = |\mathbf{F}_{43}| \mu r_D,$$

ahol \mathbf{F}_{12} , \mathbf{F}_{23} és \mathbf{F}_{43} a B , C és a D csapágyakban ébredő reakcióerők, μ a súrlódási tényező a kinematikai párokban, az r_B , r_C és az r_D a csapok sugara. A súrlódási tényezőket az egyszerűség kedvéért azonosnak vettük fel. A súrlódás keltette nyomatékok iránya a megfelelő tagok relatív szögsebességeinek irányától függ, és mindig ellentétes annak a tagnak a relatív szögsebességével, amelyre a nyomaték átadódik. Például ha a 2-es jelű tag l -hez viszonyított ω_{21} szögsebessége az óramutató járásával azonos irányú, akkor az \mathbf{M}_{12}^s nyomaték az óramutató járásával ellentétes értelmű. Ebből az is következik, hogy $\mathbf{M}_{12}^s = -\mathbf{M}_{21}^s$, mivel $\omega_{12} = -\omega_{21}$. A relatív szögsebességek a sebességterv ismeretében a tagok alaphoz viszonyított szögsebességének különbségeként számíthatók ki. Például:

$$\omega_{34} = \omega_{31} - \omega_{41}, \quad \omega_{32} = \omega_{31} - \omega_{21}, \quad \text{stb.}$$

A csoport erőegyensúlya a következő:

$$(4.4.4) \quad \mathbf{F}_{12}^n + \mathbf{F}_{12}^t + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{43}^t + \mathbf{F}_{43}^n = 0.$$

Az \mathbf{F}_{12}^t és az \mathbf{F}_{43}^t komponensekre a $\sum \mathbf{M}_2(C) = 0$ és a $\sum \mathbf{M}_3(C) = 0$ egyensúlyi feltételből az alábbi összefüggés írható fel:

$$(4.4.5) \quad \mathbf{F}_{12}^t = \frac{k_1 h_2 |\mathbf{F}_2| + |\mathbf{M}_{12}^S| + |\mathbf{M}_{32}^S|}{k_1 BC},$$

$$(4.4.6) \quad \mathbf{F}_{43}^t = \frac{k_1 h_3 |\mathbf{F}_3| + |\mathbf{M}_{43}^S| + |\mathbf{M}_{23}^S|}{k_1 CD}.$$

Ezekből az összefüggésekből azonban \mathbf{F}_{12}^t és \mathbf{F}_{43}^t nem számítható ki, mivel a súrlódás keltette nyomatékok az \mathbf{F}_{12} , \mathbf{F}_{23} és az \mathbf{F}_{43} reakcióerők függvényei, ezek pedig ismeretlenek. A feladat az egyensúlyi feltételekre felírható hat egyenlettel matematikai úton ugyan megoldható, ez azonban rendkívül munka- és időigényes módszer. Ezért az alábbiakban egy olyan iterációs (közelítő) eljárást ismertetünk, amely a gyakorlat számára elegendő pontosságot ad.

Első lépésként tételezzük fel, hogy $\mathbf{M}_{12}^S = 0$, $\mathbf{M}_{23}^S = 0$, $\mathbf{M}_{32}^S = 0$ és $\mathbf{M}_{43}^S = 0$. Ebben az esetben a (4.4.5) és a (4.4.6) összefüggésekkel az \mathbf{F}_{12}^t és \mathbf{F}_{43}^t kiszámítható, és az erőterv megszerkeszthető. A súrlódás elhanyagolásával szerkesztett erőtervben ($a, b, c, d_0, f_0, e_0, a$) a B, C és a D csuklóban ébredő reakcióerőket jelöltük \mathbf{F}_{12}^0 , \mathbf{F}_{23}^0 és \mathbf{F}_{43}^0 -mal. Az erősokszögben az $\mathbf{F}_{43}^0 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{23}^0 = 0$ egyensúlyból szerkeszthető az \mathbf{F}_{23}^0 -t nem rajzoltuk meg.

A második iterációban először az \mathbf{F}_{12}^0 , \mathbf{F}_{23}^0 és az \mathbf{F}_{43}^0 reakcióerőket a (4.4.1-4.4.3)-ba helyettesítve számítsuk ki a súrlódás keltette nyomatékokat:

$$|\mathbf{M}_{12}^{S1}| = |\mathbf{F}_{12}^0| \mu r_B,$$

$$|\mathbf{M}_{23}^{S1}| = |\mathbf{F}_{23}^0| \mu r_C,$$

$$|\mathbf{M}_{34}^{S1}| = |\mathbf{F}_{34}^0| \mu r_D.$$

A nyomatékokat helyettesítsük a (4.4.5) és a (4.4.6) összefüggésekbe, majd számítsuk ki a B és D csuklóban ébredő reakcióerők új \mathbf{F}_{12}^{t1} és \mathbf{F}_{43}^{t1} értékeit. Ezekkel szerkesszünk egy új erősokszöget ($a, b, c, d_1, f_1, e_1, a$). Ebből a második erősokszögből a B, C és a D csuklóban ébredő reakcióerők \mathbf{F}_{12}^1 , \mathbf{F}_{23}^1 és \mathbf{F}_{43}^1 új értékei meghatározhatók.

A harmadik iterációban új reakcióerőket felhasználva számítsuk ki a súrlódás keltette nyomatékokat és a B és D csuklóban ébredő reakcióerőket, majd szerkesszünk meg a harmadik erőtervet ($a, b, c, d_2, f_2, e_2, a$). Az eredményként kapott reakcióerők: \mathbf{F}_{12}^2 , \mathbf{F}_{23}^2 és \mathbf{F}_{43}^2 . A közelítő szerkesztés tovább folytatható, a gyakorlat számára azonban a harmadik, sőt esetek többségében már a második erősokszög is kielégítő pontossággal adja a csapsúrlódásokat is figyelembevevő reakcióerőket.

A reakcióerők hasonlóan határozhatók meg akkor is, ha a csoportban egy vagy két külső kinematikai pár haladó mozgást enged meg. A 4.11. ábrán látható II. osztályú csoportra az \mathbf{F}_2 és

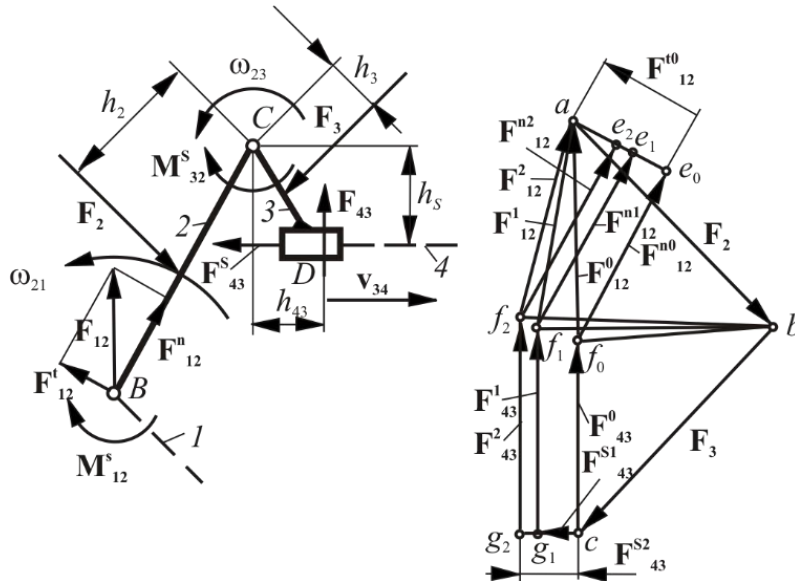
az \mathbf{F}_3 külső erő, továbbá \mathbf{M}_{12}^S , \mathbf{M}_{23}^S , \mathbf{M}_{32}^S hat. A nyomatékok nagysága:

$$(4.4.7) \quad |\mathbf{M}_{12}^S| = |\mathbf{F}_{12}| \mu r_B,$$

$$(4.4.8) \quad |\mathbf{M}_{23}^S| = |\mathbf{F}_{23}| \mu r_C.$$

A D kinematikai páron keresztül azonban nem súrlódó nyomaték, hanem az \mathbf{F}_{43}^S súrlódási erő adódik át a 3-as jelű tagra, amelynek nagysága:

$$(4.4.9) \quad |\mathbf{F}_{43}^S| = |\mathbf{F}_{43}| \mu.$$



4.11. ábra

Az \mathbf{F}_{43}^S súrlódási erő a \mathbf{v}_{34} sebességgel megegyező irányú, de azzal ellentétes értelmű. Az \mathbf{F}_{34} erő merőleges a \mathbf{v}_{34} sebességre, és a hatásvonalát nem ismerjük. A csoport erőegyensúlyának vektoregyenlete:

$$(4.4.10) \quad \mathbf{F}_{12}^n + \mathbf{F}_{12}^t + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{43}^S + \mathbf{F}_{43} = 0.$$

A 2-es és a 3-as jelű tagok a $\sum \mathbf{M}_2(C) = 0$ és a $\sum \mathbf{M}_3(C) = 0$ nyomatéki egyenleteiből meghatározhatjuk az \mathbf{F}_{12}^t tangenciális komponensét és az \mathbf{F}_{43} erő hatásvonalának h_{43} helyét:

$$(4.4.11) \quad \mathbf{F}_{12}^t = \frac{-k_1 h_2 |\mathbf{F}_2| - |\mathbf{M}_{12}^S| + |\mathbf{M}_{32}^S|}{k_1 BC},$$

$$(4.4.12) \quad h_{43} = \frac{k_1 h_3 |\mathbf{F}_3| + k_1 h_s |\mathbf{F}_{43}^S| + |\mathbf{M}_{23}^S|}{k_1 \mathbf{F}_{43}}.$$

Az első közelítésnél itt is tételezzük fel, hogy $\mathbf{M}_{12}^S = 0$, $\mathbf{M}_{23}^S = 0$, $\mathbf{M}_{32}^S = 0$ és $\mathbf{F}_{43}^S = 0$. A (4.4.11) összefüggésből számítsuk ki az \mathbf{F}_{12}^t értékét, majd (4.4.10) alapján, szerkesztéssel az erőtervből határozzuk meg az \mathbf{F}_{12}^n -t és az \mathbf{F}_{43} -t. Az $\mathbf{F}_{12}^0 = \mathbf{F}_{12}^n + \mathbf{F}_{12}^t$ szerkesztésből adódik. Az első közelítés erőterve az $abcf_0e_0a$ sokszög, és a kapott reakcióerők \mathbf{F}_{12}^0 , \mathbf{F}_{23}^0 és \mathbf{F}_{43}^0 .

Ezek ismeretében a második iterációhoz az \mathbf{M}_{12}^{S1} , \mathbf{M}_{23}^{S1} , és az \mathbf{F}_{43}^{S1} számítható:

$$|\mathbf{M}_{12}^{S1}| = |\mathbf{F}_{12}^0| \mu r_B,$$

$$|\mathbf{M}_{23}^{S1}| = |\mathbf{F}_{23}^0| \mu r_C,$$

$$|\mathbf{F}_{43}^{S1}| = |\mathbf{F}_{43}^0| \mu.$$

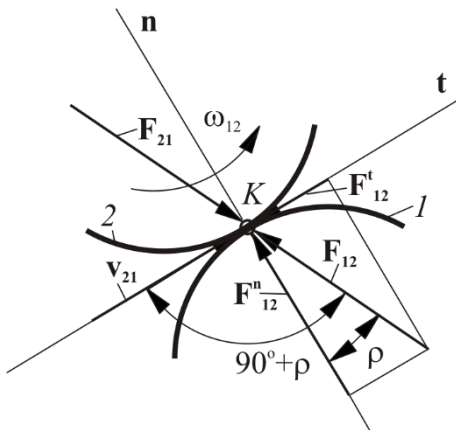
A kapott értékeket a (4.4.10)-(4.4.12) egyenletekbe behelyettesítve, a számításokat és a szerkesztést elvégezve az új erőterv a $abcg_1f_1e_1a$ sokszög, amelyben a reakcióerők új értékei: \mathbf{F}_{12}^1 , \mathbf{F}_{23}^1 és \mathbf{F}_{43}^1 .

A 4.11. ábrán a harmadik erőtervet is megszerkesztettük. Az ebből meghatározott \mathbf{F}_{12}^2 , \mathbf{F}_{23}^2 és \mathbf{F}_{43}^2 reakcióerők a gyakorlat számára már elegendő pontossággal bírnak.

Megemlítjük, hogy a súrlódás figyelembevétele a kinematikai párokban ébredő reakcióerők meghatározása a súrlódási körök, és a súrlódási kúpszögek felhasználásával is lehetséges. Ez a szerkesztési eljárás is a harmadik közelítés után ad elfogadható eredményt.

4.6. Felsőrendű kinematikai párokban ébredő reakcióerők meghatározása

A felsőrendű kinematikai párok legfontosabb jellemzője, hogy az őket alkotó tagok közötti érintkezés (kapcsolat) pont vagy egyenes mentén valósul meg. Az ilyen kapcsolatoknál, ha a felsőrendű kinematikai párt alkotó tagok között fellépő súrlódástól eltekintünk, akkor az egyik tagról a másik tagra átadódó erőhatás (reakcióerő) a profilgörbék érintkezési pontjában megrajzolt közös profilm normálisba esik. Ebből következik, hogy a felsőrendű kinematikai párokban ismert a reakcióerő támadáspontja és iránya, csupán nagysága ismeretlen.



4.12. ábra

Vizsgáljuk meg, hogyan hatnak a reakcióerők, ha a kinematikai elemek között fellépő súrlódást is figyelembe vesszük. A síkban mozgó mechanizmusok felsőrendű kinematikai párjaiban - az alsórendűekkel ellentétben - két relatív mozgás játszódik le: a két kapcsolódó tag csúszik is és gördül is egymáson. Ennek megfelelően két súrlódás a gördülő és a csúszó súrlódás lép fel. Mivel a gördülő súrlódás fékező hatása csekély, számításainknál elhanyagolhatjuk.

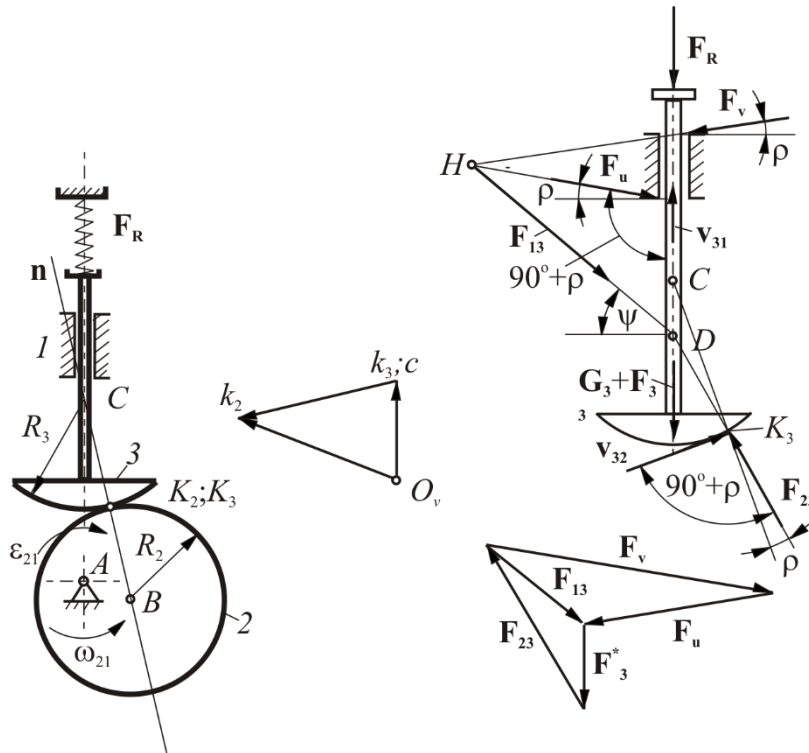
A mechanikából ismert, hogy a csúszósúrlódás hatására a két test között fellépő reakcióerő nem a felületek közös normálisába esik, hanem azzal ρ súrlódási szöget zár be, de

továbbra is átmegey az érintkezési ponton. A reakcióerőnek a relatív sebességgel bezárt szöge $90^\circ + \rho$ (4.12. ábra). Az ábrán a 2-es jelű tag I -hez viszonyított sebessége \mathbf{v}_{21} , az I -es tagról a 2-es tagra átadódó reakcióerő pedig \mathbf{F}_{12} . Ez az erő felbontható normális és tangenciális komponensre. A tangenciális komponens mindig ellentétes a relatív sebességgel (Itt a \mathbf{v}_{21} -gyel). Végül Newton 3. törvénye értelmében $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

A felsőrendű kinematikai párokban ébredő reakcióerő meghatározásának gondolatmenetét a 4.13. ábrán látható büttykös mechanizmus segítségével mutatjuk be. A mechanizmus két részből: a 3-as jelű lökőrúdból és a 2-es büttyköt, valamint az 1-es állványt magába foglaló I. osztályú mechanizmusból áll. Először vizsgáljuk a lökőrúdat. A lökőrúdra ható külső erők a következők: az \mathbf{F}_R rugóerő, a \mathbf{G}_3 súly- és az \mathbf{F}_3 tehetetlenségi erő. Ezeket ismertnek tételezzük fel.

Az ismeretlen belső erők a lökőrúd és a bütők, valamint a lökőrúd és az állvány kapcsolódásánál lévő kinematikai párokban ébredő reakcióerők (\mathbf{F}_{23} és \mathbf{F}_{13}). Az \mathbf{F}_R , a \mathbf{G}_3 és az \mathbf{F}_3 erők egy egyenesbe, a lökőrúd középvonalába esnek. Eredőjüket jelöljük \mathbf{F}_3^* -gal ($\mathbf{F}_3^* = \mathbf{F}_R + \mathbf{G}_3 + \mathbf{F}_3$).

Az \mathbf{F}_{23} reakcióerő támadáspontja a lökőrúd és a bütők érintkezési pontjában van. Iránya is adott, mivel a \mathbf{v}_{32} relatív sebességgel $90^\circ + \rho$ szöget kell bezárnia és tangenciális komponensének ellentétes irányúnak kell lennie \mathbf{v}_{32} irányával (4.13. ábra).



4.13. ábra

Az \mathbf{F}_{13} reakcióerő nagyság és irány szerint is ismeretlen. A 3-as jelű tag erőegyensúlyának vektoregyenlete a következő:

$$\mathbf{F}_R + \mathbf{G}_3 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{13} = 0.$$

Az \mathbf{F}_{13} iránya a következő gondolatmenettel határozható meg. Az \mathbf{F}_R , a \mathbf{G}_3 , az \mathbf{F}_3 és az \mathbf{F}_{23} közös metszéspontja a D pont. Egyensúly esetén \mathbf{F}_{13} -nak is át kell mennie a D ponton. Mivel a D pont a vezetéken kívülre esik, ezért az \mathbf{F}_{23} reakcióerő az óramutató járásával azonos irányba igyekszik elfordítani a lökőrúdat. Ennek eredményeként az állványnak a lökőrúdra gyakorolt erőhatása két reakcióerő komponensként jelentkezik (\mathbf{F}_u és \mathbf{F}_v). Az \mathbf{F}_u és az \mathbf{F}_v erők a vezeték szélén, ellentétes oldalon hatnak a 3-as jelű tagra, és irányuk $90^\circ + \rho$ szöget zár be a \mathbf{v}_{31} relatív sebességgel. Az \mathbf{F}_u és az \mathbf{F}_v eredője \mathbf{F}_{13} , és metszéspontja H , ezért az \mathbf{F}_{13} reakcióerőnek is át kell mennie a H metszésponton.

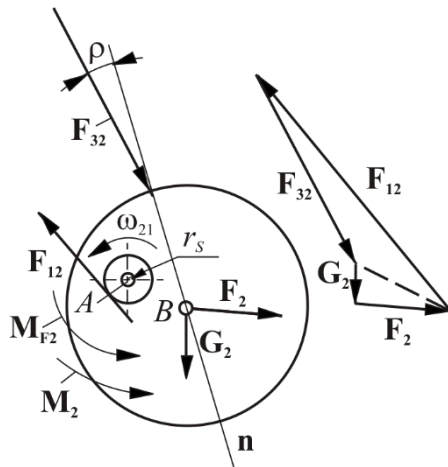
Az elmondottakból következik, hogy \mathbf{F}_{13} a D és a H pontokat összekötő egyenesre esik. Ezzel meghatároztuk az \mathbf{F}_{13} irányát, és most már az előző vektoregyenlet alapján megszerkeszthetjük az erőtervet, ahonnan megkapjuk az \mathbf{F}_{23} és \mathbf{F}_{13} keresett nagyságát. Felhasználva az

$$\mathbf{F}_{13} = \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_v$$

összefüggést az \mathbf{F}_u és az \mathbf{F}_v nagysága is megszerkeszthető.

A lökőrúd felfelé elmozdulva elfoglalhat egy olyan helyzetet, amelynél a D pont a vezeték belsejébe kerül. Ebben a helyzetben az állványról a lökőrúdra csak egy erő hat (\mathbf{F}_{13}), amely

átmegy a D ponton és a v_{31} sebességgel $90^\circ + \rho$ szöget zár be. Ez azt is jelenti, hogy a lökőrúd csak egy oldalról feszül neki a vezetéknek.



4.14. ábra

Ezután térjünk át a büttyök erőteni vizsgálatára. A büttyökre ható ismert külső erők a G_2 és F_2 , és hat rá még az ismert M_{F_2} nyomaték is (4.14. ábra). Ismerjük továbbá a 3-as jelű tag 2-es büttyökre gyakorolt F_{32} erőhatását. Ezek után meg kell határozni az F_{12} reakcióerőt és az M_2 külső nyomatékot.

Az ismeretlen F_{12} reakcióerő a büttyök erőegyensúlyának vektoregyenletéből megszerkesztett erőtervből határozható meg:

$$\mathbf{G}_2 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{12} = 0.$$

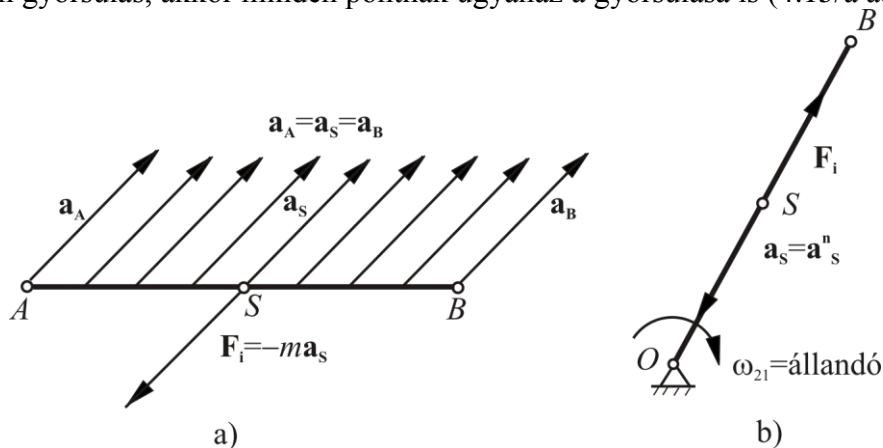
Az ismeretlen M_2 nyomaték a 2-es jelű tagra ható erők A pontra írt nyomatékából számítható:

$$\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_A(\mathbf{G}_2) + \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_2) + \mathbf{M}_{F_2} + \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_{32}) + \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_{12}) = 0.$$

Ha az A kinematikai párban a súrlódást is figyelembe vesszük, akkor az F_{12} reakcióerő helyét a legegyszerűbben úgy határozhatjuk meg, hogy azt az A pontban rajzolt súrlódókör érintőjeként fogjuk fel. Az F_{12} erőt úgy kell érintőlegesen elhelyezni, hogy az ω_{21} -gyel ellentétes értelemben foroghasson. A súrlódási kör sugara: $r_s = (d/2)\mu$, ahol a d az A kinematikai pár hengeres csapjának átmérője.

4.6. A mechanizmus egy tagjára ható tehetetlenségi erő

A mechanizmus síkban mozgó merev tagja haladó-, forgó- vagy általános esetben forogva haladó mozgást végezhet. A haladó és forgó mozgás egymástól elválasztható, ami a vizsgálatot megkönnyíti. Haladó mozgásnál a tag minden pontja azonos pályán mozog, azonos sebességgel, és ha van gyorsulás, akkor minden pontnak ugyanaz a gyorsulása is (4.15/a ábra).



4.15. ábra

A tagra ható tehetetlenségi erő ilyenkor a tömegközéppontban keletkezik, és a tömegközéppont gyorsulásával ellentétes értelmű:

$$\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}_s.$$

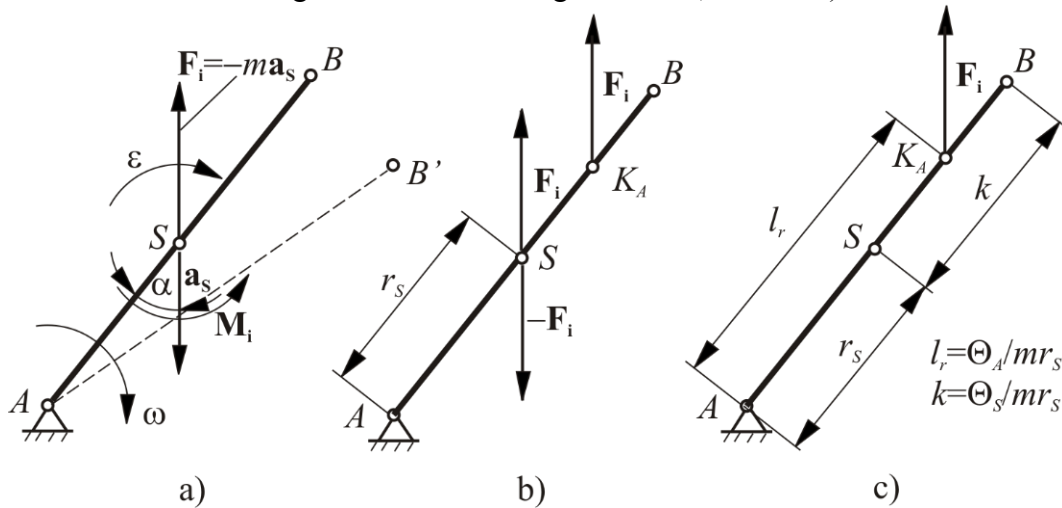
A tag egyenletes forgómozgásánál ($\omega_{21} = \text{állandó}$) a tehetetlenségi erő párhuzamos \overline{OS} -sel, és a tömegközéppont gyorsulásával ellentétes értelmű (4.15/b ábra). A tömegközéppont gyorsulása:

$$|\mathbf{a}_S| = |\mathbf{a}_S^n| = l_{OS} \omega^2.$$

Ennek megfelelően a tehetetlenségi erő:

$$|\mathbf{F}_i| = -m|\mathbf{a}_S^n| = -m \cdot l_{OS} \omega^2.$$

Változó szögsebességű forgómozgást végző merev tagnál a tehetetlenségi erők eredője nem a rúd tömegközéppontján megy keresztül. Az eredő tehetetlenségi erő helyének és nagyságának meghatározása a következő gondolatmenettel végezhető el (4.16. ábra).



4.16. ábra

Az \overline{AB} tagot az A pont körül gyorsulva forgatjuk. A tömegközéppontja a_A gyorsulással mozog. Ha a tag tömegét a tömegközéppontba koncentrálni képzeljük, akkor a tömegközéppontban a gyorsulással ellentétesen fellép egy $\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}_S$ nagyságú tömegerő. Ezen kívül fellép egy \mathbf{M}_i reakciónyomaték is, amely abból származik, hogy a tagot \overline{AB} helyzetből $\overline{AB'}$ helyzetbe gyorsítva forgatjuk, és közben a rúd tömegközéppontja körül is gyorsulva forog.

A gyorsító forgás eredményeként tehát az $\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}_S$ erő és az \mathbf{M}_i nyomaték lép fel. Ha az \mathbf{M}_i nyomatékot $\mathbf{F}_i, -\mathbf{F}_i$ erópárral helyettesítjük, akkor eredőül egy eltolt hatásvonalú erőt kapunk, amelynek nagysága: $\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}_S$ és a K_A pontban lép fel. A K_A pontot lengésközéppontnak nevezik. Az A index azt jelzi, hogy a rúd az A pont körül forog, és az A-ra vonatkoztatott lengésközépponttól van szó. A lengésközéppont részletesebb megvilágítására írjuk fel a nyomatékot az A pontra:

$$|\mathbf{M}_A| = r_S m |\mathbf{a}_S| \sin \alpha + |\mathbf{M}_i|,$$

ahol: $|\mathbf{M}_i| = \Theta_S \varepsilon$ és $\varepsilon = |\mathbf{a}_S| \sin \alpha / r_S$.

Ezeket behelyettesítve, az

$$|\mathbf{M}_A| = r_S m |\mathbf{a}_S| \sin \alpha + \frac{\Theta_S |\mathbf{a}_S| \sin \alpha}{r_S},$$

átrendezve, az

$$|\mathbf{M}_A| = m |\mathbf{a}_S| \sin \alpha \left(r_S + \frac{\Theta_S}{m r_S} \right).$$

Mivel az $|\mathbf{F}_i| = m |\mathbf{a}_S|$, az

$$|\mathbf{M}_A| = |\mathbf{F}_i| \sin \alpha \left(r_S + \frac{\Theta_S}{mr_S} \right).$$

A K_A pont helye ezek szerint a tömegközépponttól $k = \Theta_S / mr_S$ -sel van eltolva. A K_A pont annak a fizikai ingának a lengésközéppontjaként fogható fel, amelynek redukált hossza $l_r = r_S + k$. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha a 4.16. ábrán vázolt \overline{AB} tagot az A pontban felfüggesztett fizikai ingának tekinthetjük, amelynek lengésideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_A}{mgr_S}},$$

amit összevetve a matematikai inga lengésidejével

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}},$$

akkor megállapíthatjuk, hogy a fizikai inga egy $l_r = \Theta_A / mr_S$ hosszúságú matematikai ingával helyettesíthető, vagyis az l_r hosszúságú matematikai inga lengésideje akkor lesz ugyanannyi, mint az A pontban felfüggesztett \overline{AB} rúdé, ha:

$$l_r = \frac{\Theta_A}{mr_S} = r_S + \frac{\Theta_S}{mr_S}.$$

Az egyenletből a Θ_A -t kifejezve azt kapjuk, hogy a

$$\Theta_A = mr_S^2 + \Theta_S,$$

amely megfelel a tömegközépponti tengellyel párhuzamos tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték számítás elvének, amikor a két tengely egymástól r_S távolságra van.

Homogén és állandó keresztmetszetű rúd esetén a K_A pont helye a Θ_A vagy a Θ_S - ismeretében számítható. Állandó keresztmetszetű, de inhomogén, vagy homogén, de változó keresztmetszetű rúdnál a Θ_S elemi részekre való bontással szerkesztés útján határozható meg.

Összetett, azaz forogva haladó síkmozgást végző tagnál a tehetetlenségi erő nagysága változatlanul: $\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}_S$, de sem a tömegközépponton, sem a K_A ponton nem megy át, hanem további eltolódást szenved (4.17. ábra). A mozgást bontsuk fel két részre. Az \overline{AB} tag úgy tekinthető, mintha minden pontja \mathbf{a}_A gyorsulással haladó mozgást végezne, és ezzel egy időben a B pont A körül \mathbf{a}_{BA} gyorsulással keringene.

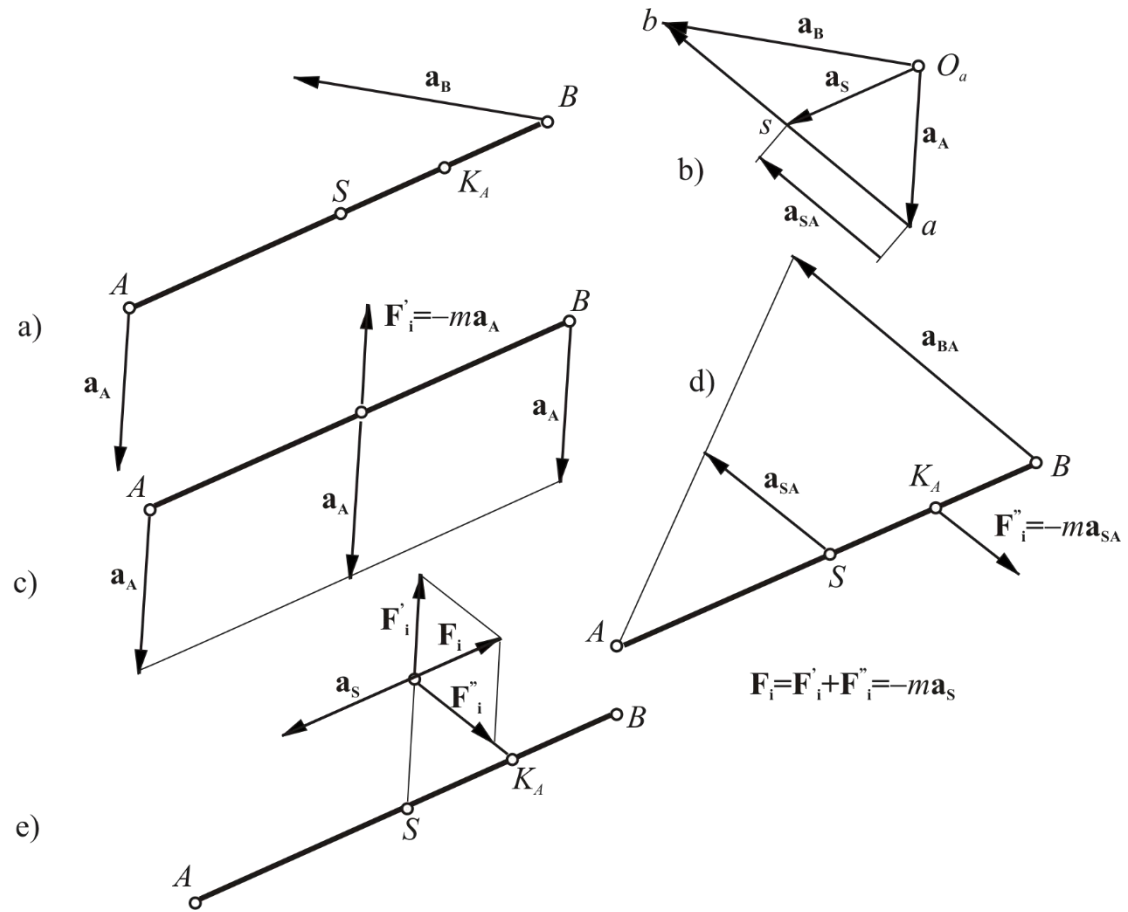
A haladó mozgásból származó tehetetlenségi erő $\mathbf{F}'_i = -m\mathbf{a}_A$ (4.17/c ábra), a forgásból származó tehetetlenségi erő $\mathbf{F}''_i = -m\mathbf{a}_{SA}$. Az \mathbf{a}_{SA} az S tömegközéppontnak az A körüli keringéséből származó gyorsulása, amely a gyorsulástervből (4.17/b ábra) meghatározható.

Az elmondottakból következik, hogy az \mathbf{F}'_i tehetetlenségi erő a tag tömegközéppontjában működik az \overline{AB} tagnak haladó mozgása következtében és párhuzamos \mathbf{a}_A -val. Az \mathbf{F}''_i erő az A pont körüli viszonylagos mozgás következtében ébred, támadáspontja a K_A lengésközéppontban van, és párhuzamos \mathbf{a}_{BA} -val. A két erő eredője: $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}'_i + \mathbf{F}''_i = -(m\mathbf{a}_A + m\mathbf{a}_{SA}) = -m(\mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{SA})$. Mivel az $\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{SA}$, az $\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}_S$.

Az \mathbf{F}_i eredő tehetetlenségi erő meghatározásánál az \mathbf{F}'_i és az \mathbf{F}''_i nagyságára általában nem vagyunk kíváncsiak, a szerkesztéshez csupán azok irányait használjuk fel. Az \mathbf{F}'_i és az \mathbf{F}''_i irányának ismeretében, továbbá ha adva van a K_A lengésközéppont helye, az S tömegközéppont helye, és a rúd két pontjának gyorsulása, akkor a tagra ható eredő tehetetlenségi erő szerkesztése a következő lépésekre egyszerűsödik (2.17/c ábra):

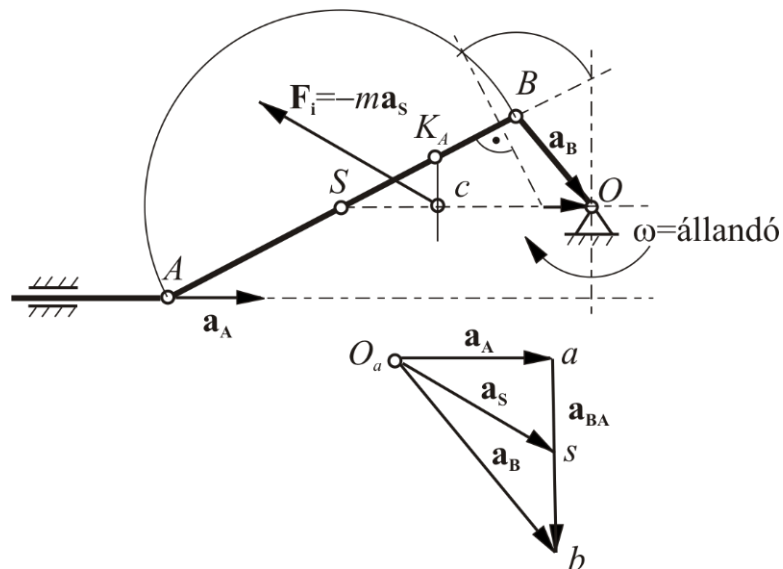
- 1) gyorsulásterv megrajzolása (2.17/b ábra),

- 2) párhuzamost húzunk az S -ből \mathbf{a}_A -val,
- 3) párhuzamost húzunk K_A -ból \mathbf{a}_{BA} -val,
- 4) az előbbi párhuzamosok metszéspontjában lép fel, az \mathbf{a}_S gyorsulással megegyező irányú, és ellentétes értelmű $\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}_S$ tehetetlenségi erő.



4.17. ábra

Határozzuk meg a 4.18. ábrán vázolt forgattyús mechanizmus hajtórúdjára ható tehetetlenségi erő helyét és irányát. Ha az S és a K_A helye ismert, akkor a szerkesztés menete a következő.



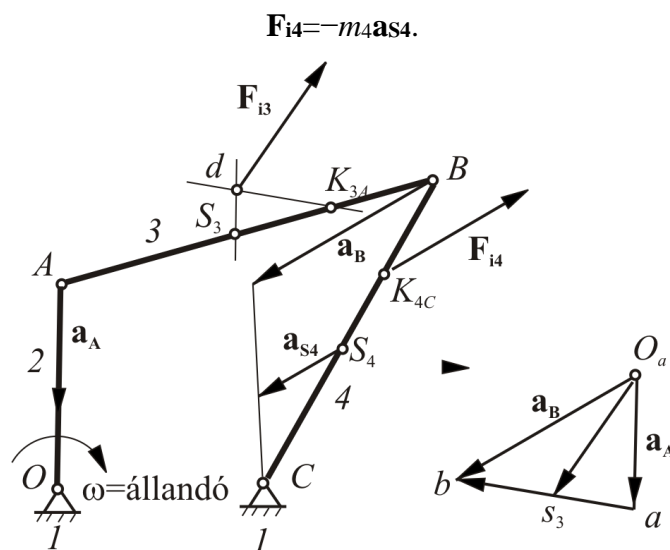
4.18. ábra

Megrajzoljuk a gyorsulástervet, majd az S pontból az \mathbf{a}_A -val, a K_A pontból az \mathbf{a}_{BA} -val húzunk párhuzamost és ezek metszéspontján, c -n át berajzoljuk az $\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}_S$ tehetetlenségi erőt. Az \mathbf{a}_S a gyorsulástervből meghatározható. Értelemszerűen, ugyanezt az \mathbf{F}_i erőt nyernénk eredőül, ha a K_A helyett a K_B -t, vagyis a B pontra vonatkoztatott lengésközéppontot használnánk fel.

Határozzuk meg a 4.19. ábrán vázolt négytagú, csuklós mechanizmus 3-as, 4-es tagjára ható tehetetlenségi erőket is. A K_{3A} és a K_{4C} helyét ismertnek tételezzük fel, az \mathbf{a}_A -t, valamint az \mathbf{a}_B -t pedig a sebességek ismeretében szerkesztettük meg. Ezután megrajoltuk a gyorsulástervet, az S_3 -ból az \mathbf{a}_A -val, a K_{3A} -ból \mathbf{a}_{BA} -val húztunk párhuzamost. A d metszéspontban \mathbf{a}_{S3} -mal párhuzamosan, de azzal ellentétesen berajoltuk a \mathbf{F}_{i3} erőt.

$$\mathbf{F}_{i3} = -m_3 \mathbf{a}_{S3}$$

A 4-es jelű tagra ható tehetetlenségi erő eredője a K_{4C} ponton megy át és párhuzamos az \mathbf{a}_B , illetve az \mathbf{a}_{S4} vektorokkal.



4.19. ábra

4.7. Tehetlenségi erők kiegyensúlyozása

4.7.1 Forgó tömegek kiegyensúlyozása

E fejezetben az álló tengely körül egy síkban, valamint a párhuzamos síkokban forgó tömegek kiegyensúlyozásával foglalkozunk.

A gépek forgó alkatrészeinek fordulatszámja évről-évre növekszik. A belsőégésű motorok fordulatszámja ma már eléri a percnkénti 6000-es, egyes ipari centrifugáké pedig a 30000-es fordulatszámot. A fordulatszám növelésének tendenciája érthető, mivel növelésével nő a gépek teljesítménye. A fordulatszám növelésével azonban együtt jár a forgó gépalkatrészek gyorsulásának, következésképpen a rájuk ható tehetetlenségi erők növekedése. A tehetetlenségi erő az alkatrész tömegének több százszorosára is lehet. A kiegyensúlyozatlan tehetetlenségi erők erős rezgést, a gépalkatrészekben járulékos feszültségeket, idő előtti kopást, sőt sok esetben törést is okozhatnak. Hogy ezeket elkerüljük, a tehetetlenségi erőket gondosan ki kell egyensúlyozni.

A kiegyensúlyozatlan tehetetlenségi erő *statikus* és *dinamikus* lehet. Statikusan kiegyensúlyozatlan tehetetlenségi erő akkor keletkezik, ha a forgó tömegek tömegközéppontja nem esik bele a forgástengelybe. Ha a forgó tömegek tengely menti eloszlása egyenetlen, akkor dinamikus kiegyensúlyozatlan tehetetlenségi erő lép fel, még akkor is, ha a forgó tömegek közös

tömegközéppontja a forgástengelybe esik. A kiegyensúlyozatlan tehetetlenségi erő két változatának megfelelően statikus és dinamikus kiegyensúlyozást különböztetünk meg.

Az egy síkban fekvő forgó tömegek kiegyensúlyozásánál a feladat általános elvi vázlata a 4.20. ábrán látható. Adva vannak az egy síkban fekvő $m_1, m_2, m_3,$ és m_4 tömegek. A tömegrendszer tömegközéppontja (S) nem esik bele az O forgásközéppontba. A tömegek saját tömegközéppontjaiban az ω szögsebesség hatására $\mathbf{F}_{i1}, \mathbf{F}_{i2}, \mathbf{F}_{i3}$ és \mathbf{F}_{i4} tehetetlenségi erők ébrednek. Az adott tömegrendszer eredő tömege:

$$m = m_1 + m_2 + \dots,$$

és a tehetetlenségi erők eredője (4.20. ábra):

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i1} + \mathbf{F}_{i2} + \dots$$

amely eredővektor körben forog. Az egyenleteket az alábbi alakban is írhatjuk:

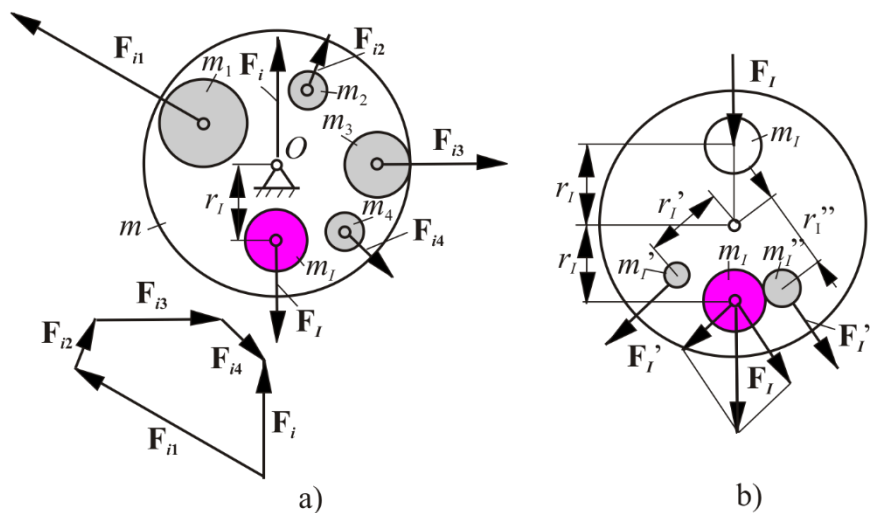
$$\mathbf{F}_i = m\mathbf{r}_S\omega^2 = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots)\omega^2,$$

ahol:

m_1, m_2, \dots a kiegyensúlyozatlan tömegek,

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$ a kiegyensúlyozatlan tömegek tömegközéppontjainak rádiuszvektorai,

\mathbf{r}_S a tömegrendszer tömegközéppontjának rádiuszvektora.



4.20. ábra

A tömegkiegyensúlyozásnak az a feltétele, hogy találjunk olyan m_l tömeget, amelynek tehetetlenségi ereje a forgás minden pillanatában ellensúlyozza az \mathbf{F}_i erőt. Ennek feltétele:

$$m\mathbf{r}_S + m_l\mathbf{r}_l = 0, \quad \mathbf{r}_l = -\frac{m}{m_l}\mathbf{r}_S,$$

vagyis az \mathbf{r}_l és \mathbf{r}_S párhuzamos. Ha mindkét tömeg pozitív, akkor \mathbf{r}_l az \mathbf{r}_S -hez viszonyítva ellenkező előjelű, ha m_l negatív (ami súlyelvételt jelent), akkor \mathbf{r}_l pozitív előjelű, vagyis az iránya megegyezik \mathbf{r}_S irányával.

A kiegyensúlyozás tehát egyetlen tömeggel úgy végezhető el, hogy \mathbf{F}_i hatásvonalában elhelyezzük, vagy elveszük az m_l tömeget, amelynek nagysága adott $m\cdot\mathbf{r}_S$ esetén kizárólag \mathbf{r}_l megválasztásától függ. Az 4.20. ábrán az ellentömeget bíbor színű kör jelzi.

A vizsgált tömegrendszer kiegyensúlyozása még más eljárással is megvalósítható. Előfordulhat

az az eset, hogy az m_I ellentömeget nem lehet elhelyezni, sem pedig eltávolítani a megállapított \mathbf{r}_I irányban, de megosztva \mathbf{r}'_I és \mathbf{r}''_I irányban mindez lehetséges (4.20/b ábra). Ebben az esetben a $m_I \mathbf{r}_I$ vektort \mathbf{r}'_I és \mathbf{r}''_I irányú összetevőkre kell bontani, és meg kell határozni az $m'_I \mathbf{r}'_I$ és $m''_I \mathbf{r}''_I$ szorzatok értékeit. Ha felvesszük az \mathbf{r}'_I és \mathbf{r}''_I értékeit, akkor könnyen kiszámíthatjuk az m'_I és a m''_I ellensúlyozó tömegeket, vagy az ellenkező oldalról eltávolítandó tömegeket.

A mozdulatlan tengely körül párhuzamos síkokban forgó tömegek kiegyensúlyozásának vizsgálatánál tételezzük fel, hogy a test egy álló koordináta rendszer y tengelye körül állandó (ω) szögsebességgel forog (4.21. ábra). Válasszunk ki egy dm elemi tömeget, amely az x, z síkkal párhuzamos síkban forog. Erre a dm elemi tömegre az

$$|\mathbf{F}_i| = dm |\mathbf{r}| \omega^2$$

tehetetlenségi erő hat, amelynek a koordináta-rendszer tengelyeire vonatkoztatott nyomatékai a következők:

$$\begin{aligned} |\mathbf{M}_z| &= |\mathbf{F}_i| l \cos \varphi = dm |\mathbf{r}| \omega^2 l \cos \varphi, \\ |\mathbf{M}_x| &= |\mathbf{F}_i| l \sin \varphi = dm |\mathbf{r}| \omega^2 l \sin \varphi. \end{aligned}$$

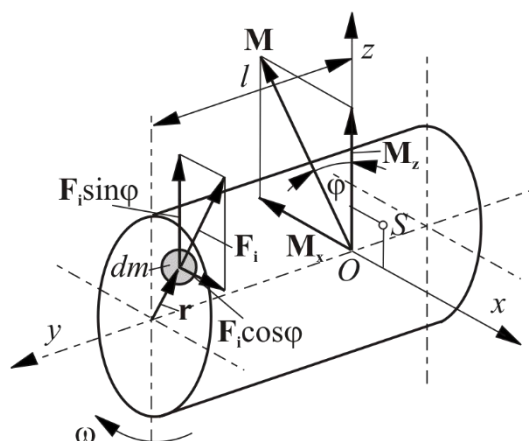
Az elemi tehetetlenségi erőnek az y tengelyre nincs vetülete, így nyomatéka sem. Az eredő nyomaték nagysága:

$$|\mathbf{M}| = \sqrt{|\mathbf{M}_x|^2 + |\mathbf{M}_z|^2} = dm |\mathbf{r}| \omega^2 l.$$

Az \mathbf{F}_i erő és az \mathbf{M} nyomaték egymásra merőlegesek. Az eredő $\sum |\mathbf{F}_i|$ és $\sum |\mathbf{M}|$ az alábbi képletekből számítható ki:

$$\begin{aligned} \sum |\mathbf{F}_i| &= \omega^2 \sum (dm_k |\mathbf{r}_k|) = \omega^2 (m |\mathbf{r}_s|), \\ \sum |\mathbf{M}| &= \omega^2 \sum (dm_k |\mathbf{r}_k| l_k) = \omega^2 \Theta_{xz}, \end{aligned}$$

ahol: $m |\mathbf{r}_s|$ a tömegek statika nyomatéka, és Θ_{xz} a tömegek tehetetlenségi nyomatéka.



4.21. ábra

Az elmondottakból következik, hogy a forgó tömegek keltette tehetetlenségi erők teljesen kiegyensúlyozottak, ha $\mathbf{r}_s = 0$ és $\Theta_{xz} = 0$, vagyis ha a forgástengely átmegy a tömegközépponton és a forgástengely a főtehetlenségi tengely.

Ha $\mathbf{r}_s = 0$ és $\Theta_{xz} \neq 0$, akkor a tag csak statikusan kiegyensúlyozott. Ez azt jelenti, hogy a tag, mivel a tömegközéppontja a forgástengelyben helyezkedik el, bármilyen helyzetben legyen is, önmagára hagyva egyensúlyi helyzetben marad. Ha a másik feltételt ($\Theta_{xz} = 0$) is teljesül, akkor a

tag dinamikusan kiegyensúlyozottá válik.

A mozdulatlan tengely körül párhuzamos síkban forgó tömegek teljes kiegyensúlyozását a következő példán mutatjuk be.

A 4.22. ábra szerint adva vannak az m_1, m_2, m_3, m_4 és m_5 kiegyensúlyozandó tömegek. A tömegek ilyen elhelyezkedésénél a teljesen kiegyensúlyozott rendszernek itt is két feltételt: $\sum \mathbf{F}_i$ és $\sum \mathbf{M}$ -t kell kielégíteni, ezért az ellensúlyok száma legalább kettő. A tehetetlenségi erőket és nyomatékokat egyensúlyozzuk ki az I. és a II. síkban elhelyezett m_I és m_{II} tömegekkel.

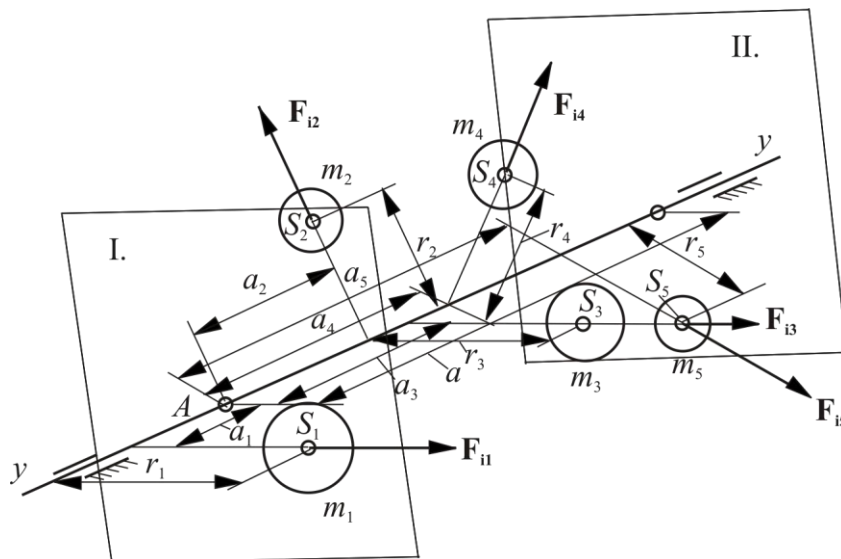
Helyezzük a koordináta rendszer kezdőpontját az I. sík és az y tengely A dőféspontjába, majd írjuk fel az adott tömegű rendszer és a m_I, m_{II} tömegű ellensúlyok egyensúlyi feltételét biztosító egyenleteket. Az erő egyensúlya:

$$(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_I \mathbf{r}_I + m_{II} \mathbf{r}_{II}) \omega^2 = 0,$$

és A pontra felírható nyomatékok:

$$(m_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{a}_2 + \dots + m_{II} \mathbf{r}_{II} \times \mathbf{a}) \omega^2 = 0,$$

ahol az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ és \mathbf{a}_5 az I. sík távolsága azoktól a síkaktól, amelyekben a megfelelő tömegek tömegközéppontjai forognak, és az \mathbf{a} az I. és II. síkok közötti távolság.



4.22. ábra

Rendezés után, az

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_I \mathbf{r}_I + m_{II} \mathbf{r}_{II} = 0,$$

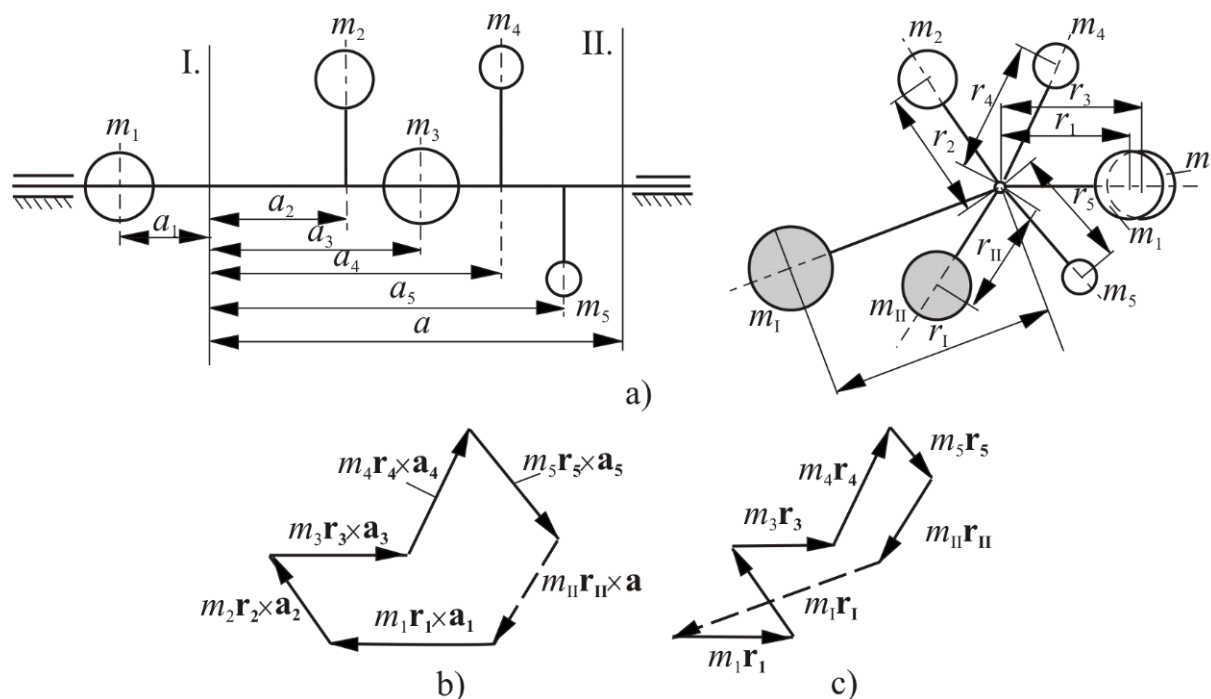
$$m_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{a}_2 + \dots + m_{II} \mathbf{r}_{II} \times \mathbf{a} = 0,$$

A felírt egyensúlyi egyenletek két ismeretlent ($m_I \mathbf{r}_I$ és $m_{II} \mathbf{r}_{II}$) tartalmaznak, amelyek szerkesztéssel meghatározhatók.

A $m_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}_1, m_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{a}_2$ stb. vektoriális szorzatok, a tehetetlenségi nyomatékvektorok, amelyek merőlegesek a megfelelő $\mathbf{r}_1 - \mathbf{a}_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{a}_2$, stb. síkokra, irányuk pedig a jobbsavar-elv szerint határozható meg. Az ellensúlyok \mathbf{r}_I és \mathbf{r}_{II} irányának könnyebb megállapítása céljából azonban általában eltérnek a jobbsavar-elvtől és a nyomatékvektorokat 90° -kal elforgatják.

Az elforgatás eredménye az, hogy a redukálás síkjától jobbra elhelyezett tömegek nyomatékvektorai ugyanolyan irányúak, mint a nekik megfelelő centrifugális erők. A balra elhelyezett

tömegek nyomatókvektorai a tehetetlenségi erővel ellentétes irányba mutatnak. Ennek a szabálynak a betartásával a második egyensúlyi egyenlet alapján az ismeretlen $m_{II}\mathbf{r}_{II} \times \mathbf{a}$ vektorsorzatot úgy határozzuk meg, hogy először kiszámítjuk az összes $m_k\mathbf{r}_k \times \mathbf{a}$ vektorsorzatot, majd az $\mathbf{r}_k\text{-}\mathbf{a}_k$ síkra merőleges síkban egymás után felrajzoljuk (összegezzük) őket (4.23/b ábra). A vektorsokszög záró oldala (szaggatott vonal jelöli) az ismeretlen $m_{II}\mathbf{r}_{II} \times \mathbf{a}$ vektorsorzatot adja.



4.23. ábra

Mivel a kiegyensúlyozási síkok közötti távolság (\mathbf{a}) adott, ezért az m_{II} tömeg $m_{II}\mathbf{r}_{II}$ statikai nyomatéka meghatározható. Ha még \mathbf{r}_{II} értékét is megadjuk, akkor az m_{II} tömeg is kiszámítható. A m_{II} tömeg a redukálás síkjától jobbra helyezkedik el, ezért a fenti szabálynak megfelelően \mathbf{r}_{II} iránya megegyezik $m_{II}\mathbf{r}_{II} \times \mathbf{a}$ -nak a 4.23/b ábrán megszerkesztett irányával.

Ezután az $m_1\mathbf{r}_1, m_2\mathbf{r}_2, \dots, m_{II}\mathbf{r}_{II}$ szorzatokat is kiszámítjuk, és az első egyensúlyi feltétel alapján megszerkesztjük a vektorsokszöget (4.23/c ábra). Az egyensúlyt helyreállító záró oldal a $m_I\mathbf{r}_I$ szorzatot adja. Ha felvesszük az \mathbf{r}_I sugár nagyságát, akkor az m_I tömeg kiszámítható. Ennek súlypontja a $m_I\mathbf{r}_I$ vektorral párhuzamos irányban fekszik.

4.7.2 Síkban mozgó mechanizmusok kiegyensúlyozása

A mechanizmusra ható erők közül a kiegyensúlyozatlan tehetetlenségi erők és nyomatékok gyakorolják a legkárosabb hatást a gépvázra és azon keresztül az alapozásra. A kiegyensúlyozatlan tehetetlenségi erők és nyomatékok ugyanis nagyság és irány szerint állandóan változnak, és ezért igen komoly rázóhatást hozhatnak létre. E káros dinamikai hatások megszüntetése, illetve csökkentése céljából a tehetetlenségi erőket és nyomatékokat *teljesen, vagy részlegesen* kiegyensúlyozzák. Ha csak a tehetetlenségi erők káros hatásait szüntetik meg, akkor *statikus*, ha a nyomatékokét is, akkor *dinamikus* kiegyensúlyozásról beszélünk.

Síkban mozgó mechanizmusok statikus kiegyensúlyozása

Először a *tehetetlenségi erők teljes kiegyensúlyozását* mutatjuk be. A teljes kiegyensúlyozást

ellensúlyok alkalmazásával úgy valósítjuk meg, hogy az összes tag tehetetlenségi erőinek összege (beleértve az ellensúlyok tehetetlenségi erőit is) nulla legyen.

Mivel a mechanizmus mozgó tagjainak eredő tehetetlenségi ereje a mozgó tagok közös tömegközéppontjában hat, ezért a tehetetlenségi erők teljes kiegyensúlyozottsága csak akkor valósul meg, ha a közös tömegközéppont \mathbf{a}_s gyorsulása nulla.

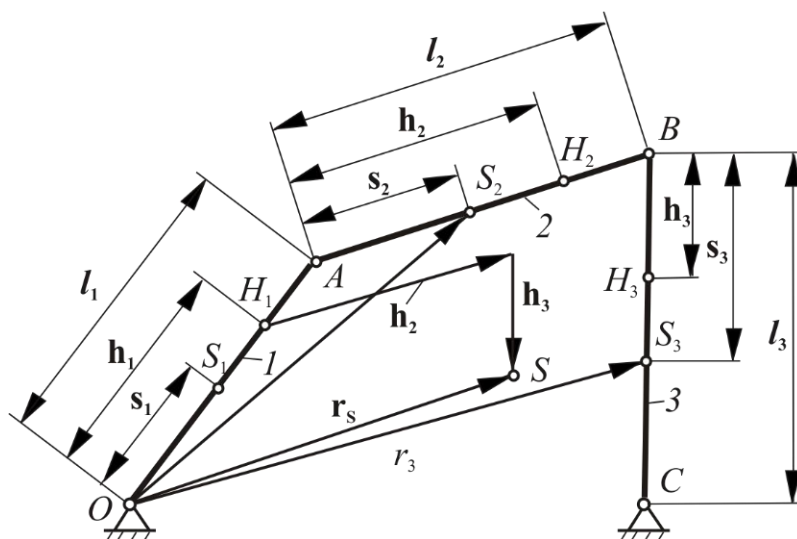
Bármely pont gyorsulása csak két esetben lehet nulla: (1) ha az adott pont mozdulatlan, vagy (2) ha egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A mechanizmusokban azonban egyetlen egy pont sem végezhet folyamatosan egyenes vonalú egyenletes mozgást, ezért a *tehetetlenségi erők kiegyensúlyozásának az a feltétele, hogy a mozgó tagok közös tömegközéppontja mozdulatlan legyen*. A közös tömegközéppont helyének meghatározását, majd az eredő tehetetlenségi erő kiegyensúlyozását legegyszerűbben az úgynevezett *főponti módszer*, (Fischer módszer) segítségével végezhetjük el.

A főponti módszert a hosszadalmas és fásasztó képleteket igénylő n tagú általános mechanizmus helyett a gyakorlatban gyakran előforduló négytagú csuklós mechanizmuson mutatjuk be (4.24. ábra).

Az egyes tagok tömeg középpontjait, S_1 , S_2 és S_3 -mal, ezek O pontra vonatkozó rádiuszvektorait \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , és \mathbf{r}_3 -mal jelöltük. A statikai nyomatékok egyensúlyára az alábbi összefüggés írható:

$$\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2 + \mathbf{r}_3 m_3 = \mathbf{r}_s m,$$

ahol: $m = m_1 + m_2 + m_3$, és \mathbf{r}_s a közös tömegközéppont helyvektora.



4.24. ábra

A 4.24. ábrán az S_1 , S_2 és S_3 tömegközéppontoknak a tag kiinduló csuklójától mért távolságait, \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 és \mathbf{s}_3 -mal, az egyes tagok hosszát l_1 , l_2 és l_3 -mal jelöltük. Az \mathbf{s} és az \mathbf{l} méretek állandó hosszúságú, de változó helyzetű vektorként foghatók fel, ami a közös tömegközéppont meghatározásánál bizonyos egyszerűsítést jelent a számításban. Az \mathbf{s} vektorokat akkor tekintjük pozitívnak, ha a tagok kezdő pontjából a rudak mentén a C felé haladás irányába mutatnak, az \mathbf{l} mindig pozitív. Az \mathbf{r} vektorok az \mathbf{s} és az \mathbf{l} vektorokkal kifejezhetők:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{s}_1, \mathbf{r}_2 = \mathbf{l}_1 + \mathbf{s}_2, \mathbf{r}_3 = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{s}_3.$$

Ezeket behelyettesítve a statikai nyomaték képletébe:

$$\mathbf{s}_1 m_1 + \mathbf{l}_1 m_2 + \mathbf{s}_2 m_2 + \mathbf{l}_1 m_3 + \mathbf{l}_2 m_3 + \mathbf{s}_3 m_3 = \mathbf{r}_s m$$

majd irány szerint rendezve, rs-re az alábbi kifejezést kaptuk:

$$\mathbf{r}_S = \frac{\mathbf{s}_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3)}{m} + \frac{\mathbf{s}_2 m_2 + l_2 m_3}{m} + \frac{\mathbf{s}_3 m_3}{m}.$$

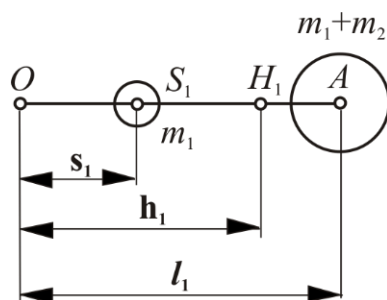
Vezessük be a

$$\mathbf{h}_1 = \frac{\mathbf{s}_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3)}{m}, \quad \mathbf{h}_2 = \frac{\mathbf{s}_2 m_2 + l_2 m_3}{m}, \quad \mathbf{h}_3 = \frac{\mathbf{s}_3 m_3}{m}$$

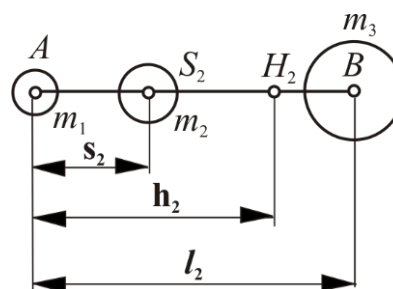
jelöléseket, akkor az

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3.$$

Abban az esetben, ha feltételezzük, hogy \overline{OA} tagot megelőző mozgó tagok tömege az O pontban, az \overline{OA} tagot követő tagok tömege az A pontban van koncentrálnva, és magának a tagnak a tömege pedig az S_1 pontban összpontosul, akkor az O pontra írható statikai nyomatékok egyensúlya alapján, a \mathbf{h}_1 vektor éppen az \overline{OA} tag O ponthoz viszonyított tömegközéppontját határozza meg. A 4.25. ábrán az O előtt mozgó tagok nincsenek, ezért az O pontban összpontosuló tömeg nulla. Az A pontban elhelyezkedő tömeg m_2+m_3 , mivel az \overline{OA} tag után a 2-es és a 3-as tagok következnek. Végül az S_1 pontban az m_1 tömeg helyezkedik el. A \mathbf{h}_1 vektor tehát a tagon egy fiktív H_1 tömegközéppontot határoz meg, figyelembe véve a vizsgált tagot megelőző és követő tagok hatását.



4.25. ábra

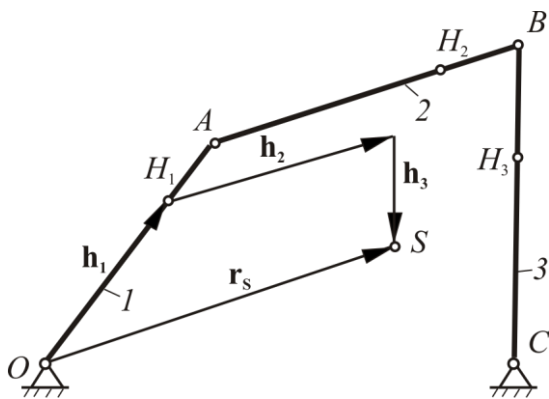


4.26. ábra

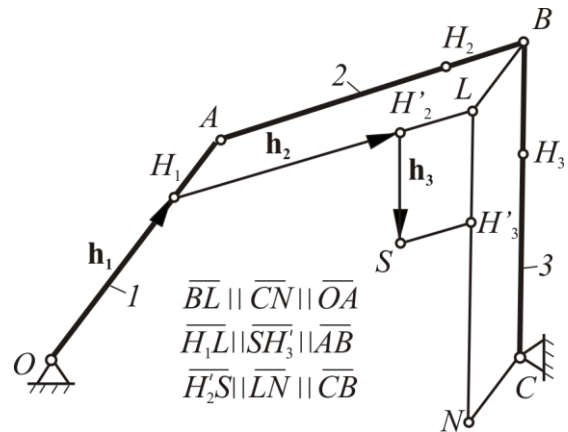
Ha e gondolatmenet szerint, az A pontba helyezzük az m_1 -gyet, S_2 -ben m_2 -t és a B pontban pedig m_3 -mat (4.26. ábra), akkor az így elrendezett modell H_2 fiktív tömegközéppontját kijelölő vektor éppen az előzőleg definiált \mathbf{h}_2 vektor, ugyanis az m_1 tömegnek az A pontra vett statikai nyomatéka nulla. Végül a 3-as tagon a B pontba m_1+m_2 , az S_3 pontba m_3 tömeget koncentrálnunk, akkor a B pontra felírható a statikai nyomatékokból a \mathbf{h}_3 vektort kapjuk meg, amely kijelöli \overline{BC} tag B ponthoz viszonyított tömegközéppontját, a H_3 pontot. A \mathbf{h}_1 , \mathbf{h}_2 és a \mathbf{h}_3 vektorokat, amelyek a megfelelő tagokkal párhuzamosak, fővektoroknak, a H_1 , H_2 és H_3 pontokat főpontoknak nevezzük. A tagok fővektorainak vektoriális összege a közös tömegközéppontot (S) jelöli ki (4.24. ábra). Ezt a tömegközéppont meghatározó eljárást főponti módszernek nevezzük.

Az eljárás előnye, hogy bármilyen bonyolult mechanizmusnál alkalmazható és mivel a H_1 , H_2 és H_3 főpontok a mechanizmus működése közben a tagokhoz képest fix pontnak tekinthetők, ezért a módszer alkalmazásával a közös tömegközéppont gyorsan meghatározható (4.27. ábra).

Az S tömegközéppont pályája, sebessége, gyorsulása és ezzel az S pontban keletkező eredő tehetetlenségi erő az eredeti mechanizmushoz a 4.28. ábra szerint hozzákapcsolt, súlytalannak képelt paralelogramma mechanizmus segítségével határozható meg.

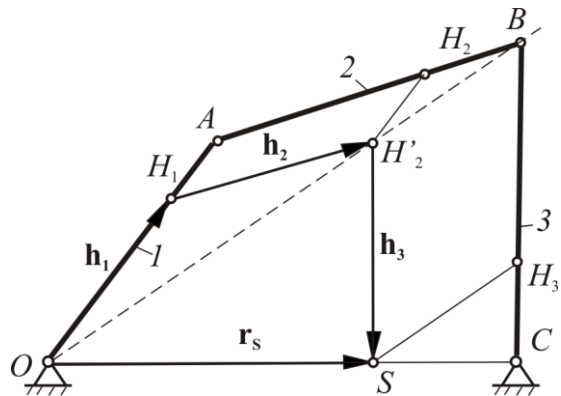


4.27. ábra



4.28. ábra

Mint már említettük az eredő tehetetlenségi erő kiegyensúlyozásának az a feltétele, hogy a tömegközéppont a helyét ne változtassa meg a mechanizmus működése közben, vagyis az $\mathbf{r}_s = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3$ állandó legyen. Ezt akkor érjük el, ha a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ és az \mathbf{r}_s vektorsokszög hasonló a mechanizmus tagjai által meghatározott $OABC$ alakzathoz (4.29. ábra). Ebben az esetben az S pont a C pontnak, \mathbf{r}_s pedig \overline{OC} távolságnak felel meg. Állandó \overline{OC} távolság mellett \mathbf{r}_s -nek is változatlannak kell lennie. A hasonlósági feltételből következik, hogy



4.29. ábra

$$\frac{\mathbf{h}_1}{l_1} + \frac{\mathbf{h}_2}{l_2} + \frac{\mathbf{h}_3}{l_3} = \frac{\mathbf{r}_s}{\overline{OC}}.$$

Ez a feltétel csak akkor jöhet létre, ha a H_2' rajta van az \overline{OB} egyenesen, S pedig az \overline{OC} egyenesre esik. Mivel a \mathbf{h} vektorok mindig párhuzamosak a megfelelő tagokkal, ezért a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ és \mathbf{r}_s vektorsokszög minden pontja a mechanizmusban neki megfelelő pont pályájához hasonló pályán mozog. A C pontnak az S pont felel meg, és mivel a C áll, az S pont is helyben marad. Ha az előzőek alapján meghatározzuk:

$$\mathbf{h}_1 = \frac{\mathbf{s}_1 m_1 + l_1 (m_2 + m_3)}{m}, \quad \mathbf{h}_2 = \frac{\mathbf{s}_2 m_2 + l_2 m_3}{m}, \quad \mathbf{h}_3 = \frac{\mathbf{s}_3 m_3}{m}$$

értékeit behelyettesítjük a hasonlósági feltétel kifejezésébe, akkor átrendezés után kapjuk, hogy:

$$\mathbf{s}_1 m_1 = -\frac{l_1 m_2}{l_2} (l_2 - \mathbf{s}_2),$$

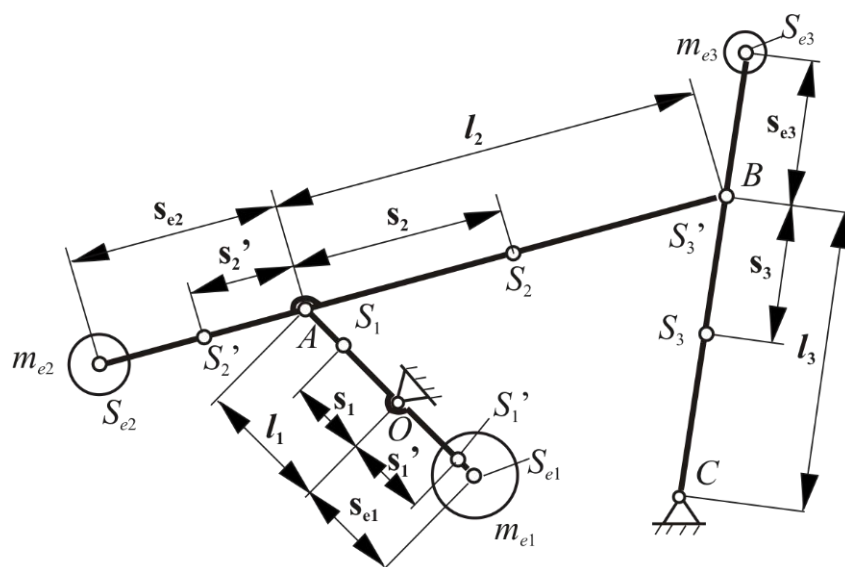
$$\mathbf{s}_2 m_2 = -\frac{l_2 m_3}{l_3} (l_3 - \mathbf{s}_3).$$

Ha az $\overline{OA} = l_1, \overline{AB} = l_2,$ és $\overline{BC} = l_3$ csuklók közötti távolságokat adottnak tekintjük, akkor az előző

két egyenletben hat változó: m_1, m_2, m_3 , valamint s_1, s_2 és s_3 szerepel. Ha ezek közül négyet tetszés szerint felvesszünk, akkor a maradék kettő ismeretlen a két egyenletből meghatározható. A négy változó sok változatban vehető fel, tehát a tehetetlenségi erők teljes kiegyensúlyozásának végtelen sok lehetősége van. Ezek közül a célszerűség, gyorsaság, anyagtakarékosság szempontjainak figyelembevételével kell kiválasztani a megfelelő megoldásokat.

A vizsgált négytagú csuklós mechanizmus tömegközéppontja tehát teljes kiegyensúlyozottság esetén, vagyis amikor a tömegközéppont áll, az \overline{OC} egyenesen bárhová kerülhet. Az O és C közé, az O pont elé, és még a C pont után is, azonban azzal a feltétellel, hogy a \mathbf{h}_2 vektor H_2' végpontja rajta legyen az \overline{OB} egyenesen.

A tehetetlenségi erők kiegyensúlyozásánál gyakran felhasználják az $\mathbf{r}_s = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3 = 0$ feltételt. Ez legegyszerűbben úgy teljesül, ha a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ és \mathbf{h}_3 fővektorok értékei nullák. Ebben az esetben a mechanizmus közös tömegközéppontja az O vagy a C pontba esik.



4.30. ábra

Határozzuk meg a négytagú csuklós mechanizmus (4.30. ábra) eredő tehetetlenségi erejének teljes kiegyensúlyozásához szükséges ellensúlyok, m_{e1}, m_{e2} és m_{e3} tömegeit, ha $\overline{OA}=l_1=120$ mm, $\overline{AB}=l_2=400$ mm, $\overline{BC}=l_3=280$ mm, a tagok S_1, S_2 és S_3 tömegközéppontjának koordinátái: $s_1=75$ mm, $s_2=200$ mm, $s_3=130$ mm. Az egyes tagok tömegei: $m_1=0,1$ kg, $m_2=0,8$ kg és $m_3=0,4$ kg. Az ellensúlyok S_{e1}, S_{e2} és S_{e3} tömegközéppontjainak koordinátái: $s_{e1}=-100$ mm, $s_{e2}=-200$ mm és $s_{e3}=-130$ mm. A feladatot úgy oldjuk meg, hogy a mozgó tagok közös tömegközéppontja az O csuklóba kerüljön. Ebből következik, hogy a koordinátarendszer kezdőpontja az O pont, továbbá az $\mathbf{r}_s = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3 = 0$, $\mathbf{h}_1=0$, $\mathbf{h}_2=0$ és $\mathbf{h}_3=0$. A kiegyensúlyozás után a tagok adott tömegei az ellensúlyok tömegével megnövekszenek, vagyis az l -es jelű tag tömege $m_1'=m_1+m_{e1}$, a 2-es jelűé $m_2'=m_2+m_{e2}$ és a 3-as tagé $m_3'=m_3+m_{e3}$ lesz. A megváltozott tömegű tagok új S_1', S_2' és S_3' tömegközéppontjainak koordinátái s_1', s_2' és s_3' lesznek.

A levezetett

$$\mathbf{h}_3 = \frac{\mathbf{s}'_3 m'_3}{m} = 0$$

kikötésből, továbbá az $m'_3 \neq 0$ feltételből következik, hogy $\mathbf{s}'_3=0$, ami csak úgy lehetséges, ha az S_3' a B pontba esik, és az

$$\mathbf{s}_{e3}m_{e3} + \mathbf{s}_3m_3 = 0.$$

Ahonnán az

$$m_{e3} = -\frac{\mathbf{s}_3m_3}{\mathbf{s}_{e3}} = -\frac{130 \cdot 0,4}{-130} = 0,4 \text{ kg.}$$

A \overline{BC} tag tömege a kiegyensúlyozás után:

$$m'_3 = m_3 + m_{e3} = 0,4 + 0,4 = 0,8 \text{ kg.}$$

A $\mathbf{h}_2=0$ -ból következik, hogy

$$\mathbf{s}'_2m'_2 + \mathbf{l}_2m'_3 = 0.$$

Az

$$\mathbf{s}'_2m'_2 = \mathbf{s}_2m_2 + \mathbf{s}_{e2}m_{e2},$$

összefüggést helyettesítve, az előző képletbe, az

$$\mathbf{s}_2m_2 = \mathbf{s}_{e2}m_{e2} + \mathbf{l}_2m'_3,$$

ahonnán az m_{e2} -t kifejezve, és a változók értékeit beírva, az

$$m_{e2} = -\frac{\mathbf{s}_2m_2 + \mathbf{l}_2m'_3}{\mathbf{s}_{e2}} = -\frac{200 \cdot 0,8 + 400 \cdot 0,8}{-200} = 2,4 \text{ kg.}$$

Az \overline{AB} tag tömege a kiegyensúlyozás után:

$$m'_2 = m_2 + m_{e2} = 0,8 + 2,4 = 3,2 \text{ kg.}$$

Végül a $\mathbf{h}_1=0$ -ból következik, hogy

$$\mathbf{s}_1m_1 + \mathbf{l}_1(m'_2 + m'_3) = 0.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\mathbf{s}'_1m'_1 = \mathbf{s}_1m_1 + \mathbf{s}_{e1}m_{e1},$$

az \overline{OA} tagra felrakandó ellensúly tömege:

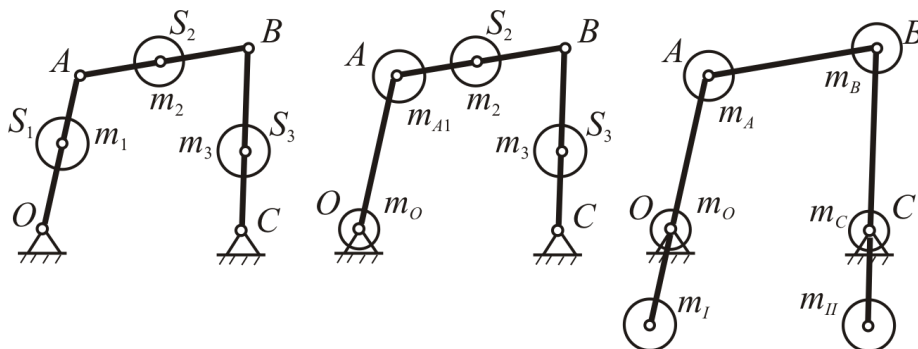
$$m_{e1} = -\frac{\mathbf{s}_1m_1 + \mathbf{l}_1(m'_2 + m'_3)}{\mathbf{s}_{e1}} = -\frac{75 \cdot 0,1 + 120 \cdot (3,2 + 0,8)}{-100} = 4,875 \text{ kg.}$$

A teljes kiegyensúlyozás a főponti módszeren kívül *tömegredukálással* is elvégezhető. A két módszer elvileg nem különbözik egymástól. A módszer lényege a következő (4.31. ábra).

Vizsgáljuk az ábra baloldalán vázolt négytagú csuklós mechanizmust, amelynél adottak: $\mathbf{l}_1 = \overline{OA}$, $\mathbf{l}_2 = \overline{AB}$, $\mathbf{l}_3 = \overline{BC}$, $\mathbf{s}_1 = \overline{OS}_1$, $\mathbf{s}_2 = \overline{AS}_2$, $\mathbf{s}_3 = \overline{BS}_3$ és m_1, m_2, m_3 . Eddigi ismereteink alapján azonnal megállapítható, hogy ez a mechanizmus nincs kiegyensúlyozva.

Osszuk meg az m_1 tömeget az O és az A csuklókba, úgy, hogy S_1 helyben maradjon, az m_2 tömeget az A és a B csuklókba, úgy, hogy S_2 helyben maradjon, és az m_3 tömeget a B és a C csuklókba, úgy, hogy S_3 helyben maradjon. A csuklókba redukált tömegek a statikai nyomatékok felírásával határozhatók meg. Az O pontba redukált tömeg az A pontra felírt nyomatékokból számítható:

$$l_1 m_o = (l_1 - s_1) m_1, \text{ amelyből az } m_o = \frac{(l_1 - s_1) m_1}{l_1}.$$



4.31. ábra

Az m_1 -ből az A pontba redukált tömeg az O pontra felírt nyomatékokból:

$$l_1 m_{A1} = s_1 m_1, \text{ amelyből az } m_{A1} = \frac{s_1 m_1}{l_1}.$$

Az m_2 -ből A pontba redukált tömeg a B pontra felírt nyomatékokból:

$$l_2 m_{A2} = (l_2 - s_2) m_2, \text{ amelyből az } m_{A2} = \frac{(l_2 - s_2) m_2}{l_2}.$$

Az A pontba redukált összes tömeg:

$$m_A = m_{A1} + m_{A2}.$$

Hasonló módszerrel határozható meg a B pontba redukált összes tömeg is. A tömegek átcsoportosítása után, ami a közös tömegközéppont helyét nem változtatja meg, a vizsgált mechanizmuson a tömegek eloszlása olyan, hogy csak a csuklóban vannak tömegek.

Ha az A pontba redukált tömegeket a meghosszabbított l_1 -en elhelyezett m_I tömegű ellensúllyal, a B pontba redukált tömegeket a meghosszabbított l_3 -on elhelyezett m_{II} tömegű ellensúllyal O, illetve C pontra nézve egyensúlyozzuk ki, akkor a mozgó részek tömegközéppontja, beleértve most már az ellensúlyokat is, az \overline{OC} egyenesre kerül az O és a C csuklók közé, ami az előzőek alapján a tömegek teljes kiegyensúlyozásának a feltétele.

Ez a módszer természetesen értelemszerűen abban az esetben is alkalmazható, amikor előírjuk a közös tömegközéppont helyét, nagyságát, és ebből kell az előző gondolatmenet megfordításával a tagok tömegközéppontjait, illetve az ellensúlyokat meghatározni.

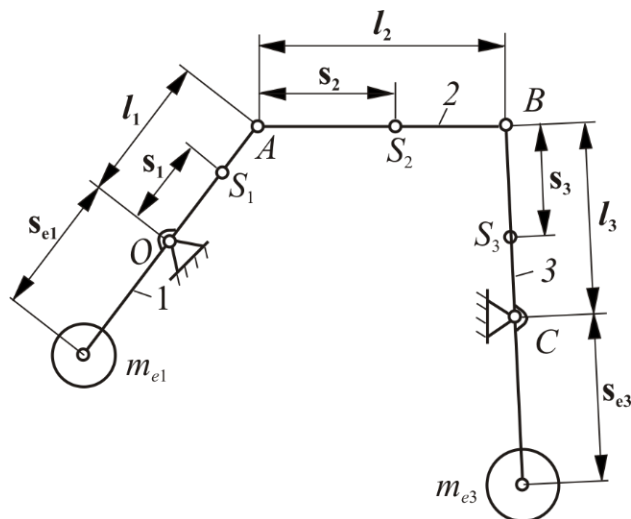
Ezzel a módszerrel abban az esetben érhető el gyorsan eredmény, ha a közös tömegközéppontot O és C közé, vagy éppen O-ba, illetve C-be helyezzük. Ha a tömegközéppont az \overline{OC} egyenesen C mögé vagy O elé kerül, a módszer alkalmazása kissé bonyolult. Ezért mindig a feladat szabja meg, hogy melyik kiegyensúlyozási módszert célszerű alkalmazni.

A gyakorlatban arra kell törekedni, hogy a mechanizmus tömegközéppontja az \overline{OC} -n belül helyezkedjék el, mert így az ellensúlyok nem lesznek túl messze a csuklóktól, ezen kívül az erők eloszlása is egyenletesebb.

A 4.30. ábra adatainak felhasználásával végezzük el a tömegek redukálásának módszerével a 4.32. ábrán látható négytagú csuklós mechanizmus teljes kiegyensúlyozását. A teljes kiegyensúlyozás feltétele:

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3 = \text{állandó}.$$

Itt a fővektoroknak értéke nem nulla.



4.32. ábra

Osszuk meg a hajtórúd m_2 tömegét az A és B csuklókba úgy, hogy S_2 az eredeti helyén maradjon:

$$m_A = \frac{(l_2 - s_2)m_2}{l_2} = \frac{(400 - 200) \cdot 0,8}{400} = 0,4 \text{ kg},$$

$$m_B = \frac{s_2 m_2}{l_2} = \frac{200 \cdot 0,8}{400} = 0,4 \text{ kg}.$$

Az m_{e1} és az m_{e3} tömegű ellensúlyokat helyezük el az 1 -es jelű forgattyú, és a 3 -as jelű lengőtág meghosszabbításában (4.32. ábra). Teljes kiegyensúlyozáskor az m_A , m_1 és az m_{e1} tömegek közös tömegközéppontjának a mozdulatlan O pontba kell kerülni. Ez akkor teljesül, ha a statikai nyomatékok O pontra vonatkoztatott összege nulla, vagyis

$$l_1 m_A + s_1 m_1 - s_{e1} m_{e1} = 0,$$

amelyből az

$$m_{e1} = \frac{l_1 m_A + s_1 m_1}{s_{e1}} = \frac{120 \cdot 0,4 + 75 \cdot 0,1}{100} = 0,555 \text{ kg}.$$

Hasonló megfontolás alapján az m_{e3} ellensúly tömege:

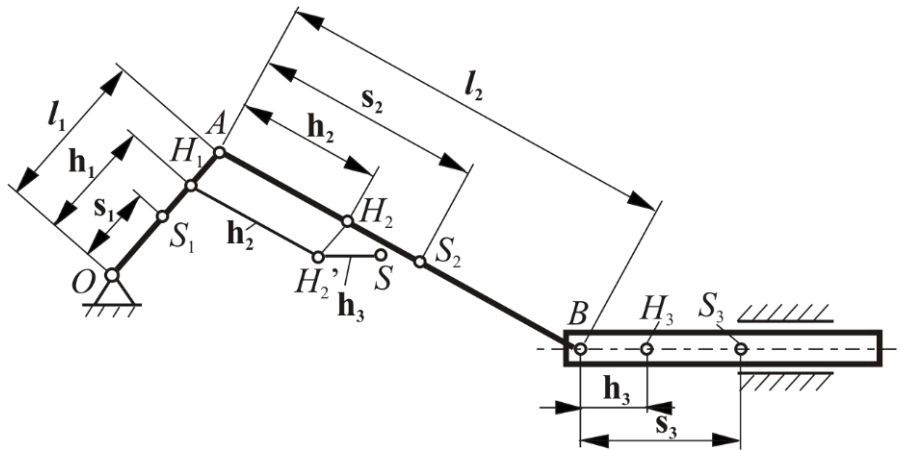
$$m_{e3} = \frac{l_3 m_B + (l_3 - s_3) m_3}{s_{e3}} = \frac{280 \cdot 0,4 + (280 - 130) \cdot 0,4}{130} = 1,32 \text{ kg}.$$

A 4.30. és 4.32. ábrák összehasonlításából megállapítható, hogy a 4.32. ábra szerinti megoldás kedvezőbb, mivel ott a tehetetlenségi erők teljes kiegyensúlyozásához csak két kisebb tömegű ellensúly szükséges.

Az előzőekben megismert kiegyensúlyozási elveket természetesen a forgattyús mechanizmusoknál is alkalmazhatjuk. A forgattyús mechanizmus tömegközéppontja a főponti módszerrel könnyen meghatározható (4.33. ábra). Megemlítjük, hogy van olyan forgattyús mechanizmus is, amelyiknél az S_3 egybeesik a B -vel. Ebben az esetben a közös tömegközéppontot a $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$ jelöli ki, tehát a tömegközéppont a H_2' pontba kerül.

A 4.33. ábra jelöléseivel a fővektorok:

$$\mathbf{h}_1 = \frac{s_1 m_1 + l_1 (m_2 + m_3)}{m}, \quad \mathbf{h}_2 = \frac{s_2 m_2 + l_2 m_3}{m} \quad \text{és} \quad \mathbf{h}_3 = \frac{s_3 m_3}{m}.$$



4.33. ábra

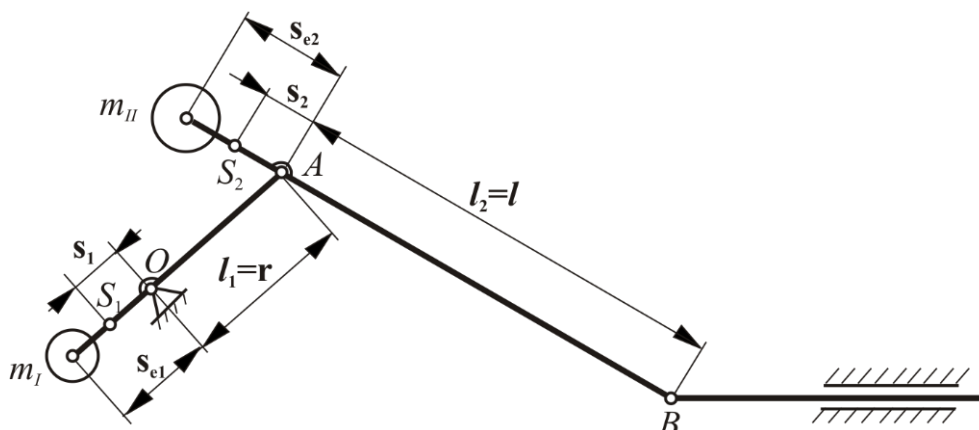
A H_2' pont egyébként az S ponttal azonos, csak $\mathbf{h}_3 = \text{áll.}$ értékkel eltoltt pályát ír le. A H_2' és az S pont pályája az előzőkhöz hasonlóan a mechanizmushoz kapcsolt súlytalannak tekintett $H_1AH_2H_2'$ paralelogramma szerkezet hozzákapcsolásával több pontban gyorsan megszerkeszthető. A pálya egyes pontjaiban a sebesség- és gyorsulásterv elkészítésével a tömegközéppont pillanatnyi sebessége, gyorsulása és a ráható eredő tehetetlenségi erő meghatározható. Ez utóbbi az alagra átadódó ütések szempontjából fontos.

A forgattyús mechanizmusban fellépő tehetetlenségi erők teljes kiegyensúlyozásának a feltétele: $\mathbf{h}_1 = 0$ és $\mathbf{h}_2 = 0$. Ebben az esetben a tömegközéppont:

$$\mathbf{h}_3 = \frac{\mathbf{s}_3 m_3}{m}$$

távolságban helyezkedik el az O forgattyúközponttól, és helyben marad a mechanizmus működése alatt is.

Ez azt jelenti, hogy a tolattyú tömegközéppontjának a tolattyún megszabott helye nem befolyásolja a kiegyensúlyozást, vagyis a *kiegyensúlyozás szempontjából teljesen mindegy, hogy a tolattyú tömegközéppontja a B-ben vagy azon kívül helyezkedik el az egyenesbe vezetésen* (Pl. kaszáknál sem a B-ben van az S).



4.34. ábra

A teljes kiegyensúlyozás a $\mathbf{h}_1 = 0$ és $\mathbf{h}_2 = 0$ előírás miatt, csak akkor valósítható meg, ha:

$$\mathbf{s}_1 m_1 + l_1 (m_2 + m_3) = 0,$$

$$\mathbf{s}_2 m_2 + l_2 m_3 = 0.$$

Ezekből:

$$\mathbf{s}_1 = -\frac{l_1(m_2 + m_3)}{m_1},$$

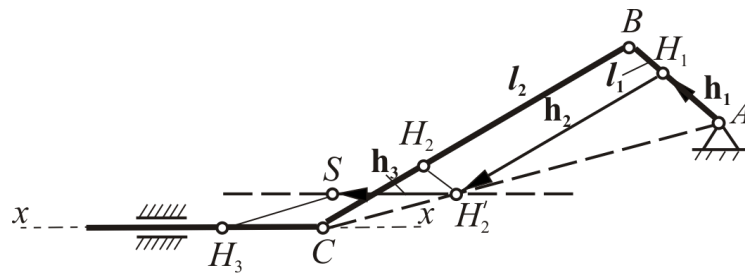
$$\mathbf{s}_2 = -\frac{l_2 m_3}{m_2}.$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy a forgattyú tömegközéppontját az O pont előtt, a hajtórúd tömegközéppontját pedig a B pont előtt kell elhelyezni (4.34. ábra).

Ha a tolattyú tömegközéppontja egybeesik a B ponttal, akkor a $\mathbf{h}_3=0$, mert $\mathbf{s}_3=0$. Ilyenkor a hajtómű tömegközéppontja teljes kiegyensúlyozás esetén az O pontba kerül, és helyben marad.

A tömegek teljes kiegyensúlyozása helyett a tömegek *részleges kiegyensúlyozása* kisebb méretekké válósítható meg. Részleges tömegelő kiegyensúlyozással a közös tömegközéppont pályáját úgy lehet kialakítani, hogy ezzel a szerkezet rázkódása csökkenjen. A közös tömegközéppont pályájának kedvező megválasztása gondos és kissé hosszadalmas szerkesztői munkát igényel.

Forgattyús mechanizmusnál például előírás lehet az, hogy a közös tömegközéppont pályája (4.35. ábra) az $x-x$ vezetékkel párhuzamos legyen. Ennek feltétele: $\mathbf{h}_1/\mathbf{h}_2=l_1/l_2$.



4.35. ábra

Ebben az esetben ugyanis a $\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2$ által kijelölt H_2' pont a szaggatott vízszintes vonalon mozog. Mivel a \mathbf{h}_3 állandó nagyságú és vízszintes irányú vektort jelent, ezért a tömegközéppont a H_2' ponttal együtt vízszintes pályán fog mozogni. Az ilyen mechanizmus függőleges irányban teljesen kiegyensúlyozott és a tehetetlenségi erő csak vízszintes irányban hat. Az elmondottak alapján írható, hogy

$$\frac{\mathbf{s}_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3)}{\mathbf{s}_2 m_2 + l_2 m_3} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Az $\mathbf{s}_2 = \alpha \cdot l_2$ helyettesítéssel az

$$\mathbf{s}_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3) = \frac{l_1}{l_2}(\alpha l_2 m_2 + l_2 m_3) = l_1(\alpha m_2 + m_3),$$

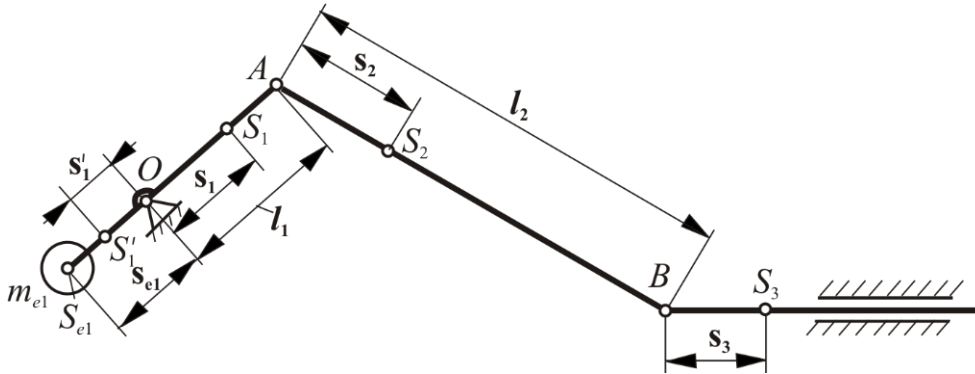
ebből az

$$\mathbf{s}_1 = -l_1(1 - \alpha) \frac{m_2}{m_1}.$$

Amint látjuk, a kifejezésben nem szerepel, a tolattyú m_3 tömege, ami érthető is, hiszen a közös tömegközéppontnak függőleges irányú elmozdulását csak a forgattyú és a hajtórúd idézi elő.

Egy példa segítségével vizsgáljuk meg, hogyan végezhető el a forgattyús mechanizmus részleges kiegyensúlyozása. A 4.36. ábrán látható forgattyús mechanizmusnál a tagok hossza: $l_1=100$ mm, $l_2=500$. A tagok S_1 , S_2 és S_3 tömegközéppontjainak koordinátái: $\mathbf{s}_1=75$ mm, $\mathbf{s}_2=150$

mm és $s_3=100$ mm. A tagok tömegei: $m_1=0.3$ kg, $m_2=1.5$ kg és $m_3=20$ kg. Meg kell határozni annak a forgattyúra felrakandó ellensúlynak az m_{e1} tömegét, amely a tagok eredő tehetetlenségi erejének függőleges komponensét kiegyensúlyozza. Ehhez még megadjuk az ellensúly helyét: $s_{e1}=-60$ mm.



4.36. ábra

Az adott feltételből következik, hogy a mozgó tagok közös tömegközéppontja csak vízszintesen mozoghat, vagyis kopíroznia kell a B pont mozgását. Ez, mint már láttuk, a következő feltétel teljesülése esetén lehetséges: $h_1/h_2=l_1/l_2$. E feltételből írhatjuk, hogy

$$\dot{s}_1 m_1' = l_1 (1 - \alpha) m_2 = -100(1 - 0,3) \cdot 1,5 = -105 \text{ kg mm},$$

ahol: $m_1' = m_1 + m_{e1}$, $\alpha = s_2/l_2 = 150/500 = 0,3$, és s_1 a forgattyú megváltozott tömegközéppontjának koordinátája.

Mivel az

$$\dot{s}_1 m_1' = s_{e1} m_{e1} + s_1 m_1 \text{ kg},$$

így az ellensúly tömege:

$$m_{e1} = -\frac{s_1 m_1 + \dot{s}_1 m_1'}{s_{e1}} = -\frac{75 \cdot 0,3 - 105}{-60} = 2,125 \text{ kg}.$$

A feladat a tömegek redukálásának módszerével is megoldható. Osszuk meg az m_2 tömeget az A és a B csuklóba úgy, hogy S_2 helyben maradjon:

$$m_A = \frac{(l_2 - s_2)}{l_2} m_2 = \frac{500 - 150}{500} 1,5 = 1,05 \text{ kg},$$

$$m_B = \frac{s_2 m_2}{l_2} = \frac{150 \cdot 1,5}{500} = 0,45 \text{ kg},$$

A részleges kiegyensúlyozásnál csak az m_A és az m_1 forgó tömegek keltette tehetetlenségi erőket kell kiegyensúlyozni, mivel m_B vízszintes irányú mozgást végez. Ennek megfelelően az O pontra vonatkoztatott statikai nyomatékok összegének nullát kell adni:

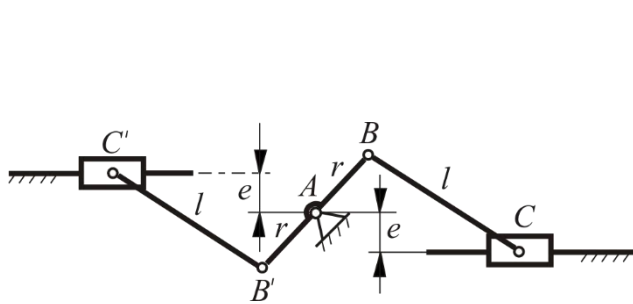
$$l_1 m_A + s_1 m_1 + s_{e1} m_{e1} = 0,$$

amelyből az ellensúly tömege:

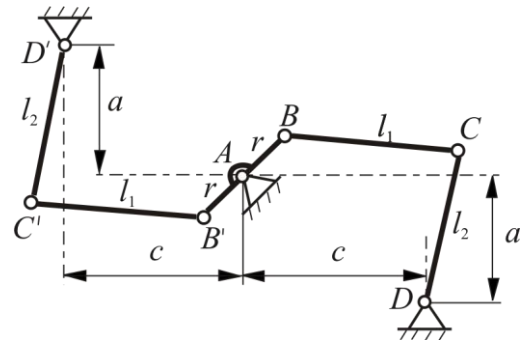
$$m_{e1} = -\frac{l_1 m_A + s_1 m_1}{s_{e1}} = -\frac{100 \cdot 1,05 + 75 \cdot 0,3}{-60} = 2,125 \text{ kg}$$

A gyakorlatban a tehetetlenségi erőket részben vagy egészben úgy egyensúlyozzák ki, hogy két szimmetrikusan elhelyezett tagból összeállított mechanizmust egymással szemben működtetnek. Az A csuklón teljesen kiegyensúlyozott tömeget a 4.37. és a 4.38. ábrán látható elrendezések eredményezik.

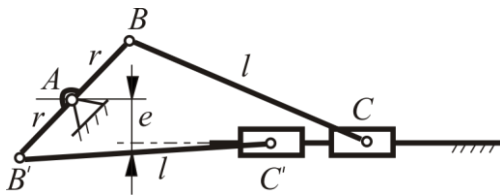
A 4.39. és a 4.40. ábrák szerinti elrendezések a tehetetlenségi erőket az A csuklóban csak részben egyensúlyozzák ki. A 4.41. ábra szerint működnek például a magtisztító gépek egymással szemben mozgó rostaszekrényei, vagy a cséplőgépeknél a nagy gyújtóasztal és a vele ellentétesen mozgó törekrostaszekrény. Mivel az utóbbi tömege a kisebb, ezért a rostaszekrény forgattyúját nagyobbra készítik, mint a nagy gyújtóasztalét, hogy javuljon a szerkezet kiegyensúlyozottsága.



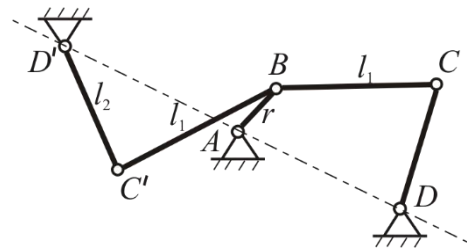
4.37. ábra



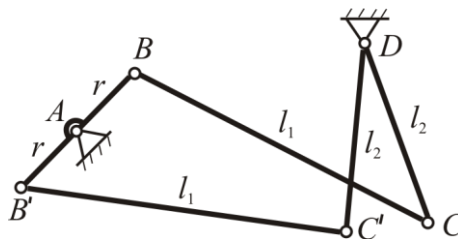
4.38. ábra



4.39. ábra



4.40. ábra

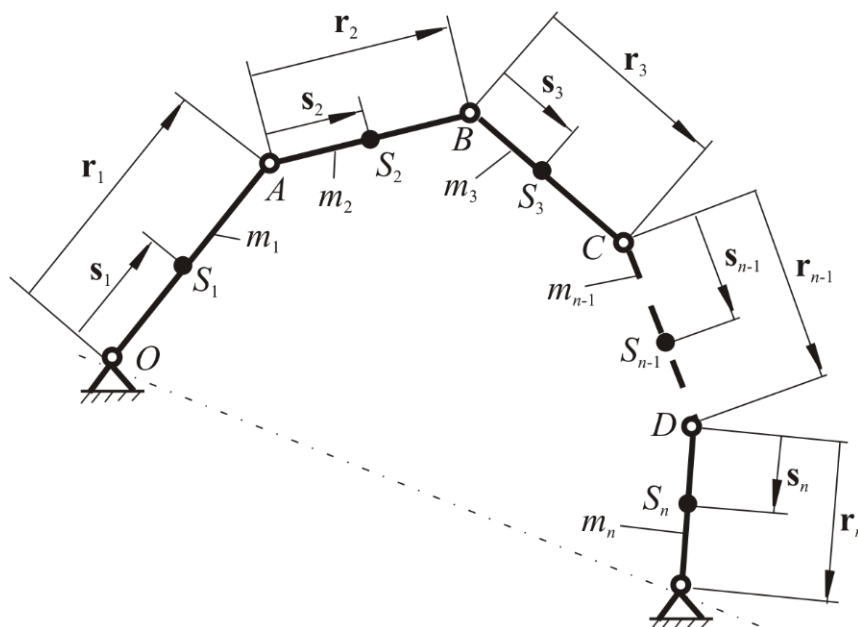


4.41. ábra

Síkban mozgó mechanizmusok dinamikus kiegyensúlyozása

A kiegyensúlyozatlan karos szerkezetek mozgása közben a kinematikai párokat terhelő tehetetlenségi erők és nyomatékok lépnek fel. Ezek a szerkezetet és annak állványát rezgésbe hozzák, amely több szempontból is kedvezőtlen. A rezgések energiát emésztenek fel, ezért romlik a gép hatásfoka. A dinamikus igénybevételek pedig csökkentik a gépelemek élettartamát, vagyis idő előtti elhasználódást idéznek elő. E káros hatások a tehetetlenségi erők és nyomatékok teljes vagy részleges kiegyensúlyozásával kiküszöbölhetők, illetve csökkenthetők. Ha csak a zavaró tehetetlenségi erők eltűnéséről gondoskodunk, akkor *statikus*, ha a nyomatékokéról is, akkor *dinamikus* kiegyensúlyozásról beszélünk.

A statikus kiegyensúlyozás, vagyis a tehetetlenségi erők eltűnésének a feltétele (amint azt az előző pontokban megfogalmaztuk) az, hogy a mechanizmus tömegközéppontjának gyorsulása a mechanizmus minden helyzetében nulla legyen. Ezt a feltételt általában csak a tömegközéppont nyugalma biztosítja. Ezért az ismert statikus kiegyensúlyozási eljárások a tömegközéppont helyzetét meghatározó összefüggésekből indulnak ki. A dinamikus vizsgálatok megalkotására a továbbiakban, a főponti módszerrel (*Fischer-módszer*) azonos eredményre vezetők, de a megközelítés módját tekintve attól eltérő, statikus eljárást mutatunk be [10].



4.42. ábra.

A mechanizmusra ható tömegerek eredője nulla, ha a

$$(4.4.13) \quad \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_{S_i} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \mathbf{a}_S$$

ahol: m_i – az i -dik tag tömege,

\mathbf{a}_{S_i} – az i -dik tag súlypontjának a gyorsulása,

\mathbf{a}_S – a kinematikai lánc közös súlypontjának a gyorsulása,

n – a mozgó tagok száma.

Alkalmazzuk az (4.4.13) összefüggést a 4.42. ábra szerinti csuklós szerkezetre:

$$(4.4.14) \quad m_1 \mathbf{a}_{S_1} + m_2 \mathbf{a}_{S_2} + m_3 \mathbf{a}_{S_3} + \dots + m_{n-1} \mathbf{a}_{S_{n-1}} + m_n \mathbf{a}_{S_n}$$

A súlypontok gyorsulásai kifejezhetők az A, B, C stb. kinematikai párok abszolút és relatív gyorsulásaival:

$$(4.4.15) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_{S_1} &= \frac{\mathbf{s}_1}{r_1} \mathbf{a}_A \\ \mathbf{a}_{S_2} &= \mathbf{a}_A + \frac{\mathbf{s}_2}{r_2} \mathbf{a}_{BA} \\ \mathbf{a}_{S_3} &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} + \frac{\mathbf{s}_3}{r_3} \mathbf{a}_{CB} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_{S_{n-1}} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} + \mathbf{a}_{CB} + \dots + \frac{\mathbf{s}_{n-1}}{\mathbf{r}_{n-1}} \mathbf{a}_{DC},$$

ahol: \mathbf{s}_i – balról jobbra haladva az i -dik tag kezdőpontjából a súlypontjába, \mathbf{r}_i – az i -dik tag kezdőpontjából a végpontjába mutató vektorokat jelöli.

A súlypontok gyorsulásait a (4.4.14)-be behelyettesítve, majd rendezve a következő összefüggést kapjuk:

$$(4.4.16) \quad \begin{aligned} & \mathbf{a}_A \left[m_1 \frac{\mathbf{s}_1}{\mathbf{r}_1} + m_2 + m_3 + \dots + m_{n-1} + m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \right] + \\ & \mathbf{a}_{BA} \left[m_2 \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{r}_2} + m_3 + \dots + m_{n-1} + m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \right] + \\ & \mathbf{a}_{CB} \left[m_3 \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3} + \dots + m_{n-1} + m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \right] + \\ & \mathbf{a}_{DC} \left[m_{n-1} \frac{\mathbf{s}_{n-1}}{\mathbf{r}_{n-1}} + m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

amelynek triviális megoldásából a tömegerők eltűnésének feltételeit kapjuk:

$$(4.4.17) \quad \begin{aligned} m_1 \mathbf{s}_1 &= - \left[m_2 + m_3 + \dots + m_{n-1} + m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \right] \mathbf{r}_1 \\ m_2 \mathbf{s}_2 &= - \left[m_3 + \dots + m_{n-1} + m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \right] \mathbf{r}_2 \\ m_3 \mathbf{s}_3 &= - \left[m_4 + \dots + m_{n-1} + m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \right] \mathbf{r}_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ m_{n-1} \mathbf{s}_{n-1} &= - m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \mathbf{r}_{n-1}, \end{aligned}$$

Mint látható n mozgó tag esetén $n-1$ egyenlet írható fel. A tagok méretei ($\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$) általában a kinematikai feltételek által determináltak, így a $2n$ számú paraméter ($\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n$ és m_1, m_2, \dots, m_n) közül $n-1$ -et számíthatunk, a többit előzetesen kell felvenni. Arra azonban vigyázni kell, hogy az önkényes előírások ne kerüljenek egymással ellentmondásba.

A (4.4.17) egyenletrendszer teljesülése esetén a kinematikai lánc közös súlypontja az állványra, az 1. ábrán \overline{OE} egyenesre kerül, azaz $\mathbf{r}_S = \text{áll}$. Ennek bizonyítására írjuk fel az 4.42. ábrán látható mechanizmusra a főponti módszernél alkalmazott és jól ismert súlypont-meghatározó összefüggést:

$$(4.4.18) \quad \begin{aligned} \mathbf{r}_S = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \dots + \mathbf{h}_n &= \frac{m_1 \mathbf{s}_1 + (m_2 + m_3 + \dots + m_{n-1} + m_n) \mathbf{r}_1}{\sum m_i} + \\ &+ \frac{m_2 \mathbf{s}_2 + (m_3 + \dots + m_{n-1} + m_n) \mathbf{r}_2}{\sum m_i} + \dots + \frac{m_n \mathbf{s}_n}{\sum m_i} \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$ az ún. fővektorok.

Legyen $\mathbf{s}_n = \mathbf{r}_n$, ekkor a (4.4.17) egyenletrendszer alapján az $\mathbf{s}_{n-1} = 0$, mivel $m_{n-1} \neq 0$, továbbá az

$$(4.4.19) \quad \begin{aligned} m_1 \mathbf{s}_1 &= -(m_2 + m_3 + \dots + m_{n-1}) \mathbf{r}_1 \\ m_2 \mathbf{s}_2 &= -(m_3 + \dots + m_{n-1}) \mathbf{r}_2 \\ &\vdots \\ m_n \mathbf{s}_n &= m_n \mathbf{r}_{n-1}, \end{aligned}$$

Ezeket (4.4.18)-ba behelyettesítve, az

$$(4.4.20) \quad \mathbf{r}_s = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \dots + \mathbf{h}_n = \frac{m_n \mathbf{r}_1}{\sum m_i} + \frac{m_n \mathbf{r}_2}{\sum m_i} + \dots + \frac{m_n \mathbf{r}_n}{\sum m_i}.$$

Csuklós mechanizmusoknál a közös súlypont az állványon, illetve esetünkben az \overline{OE} egyenesen helyezkedik el, ha a fővektorok alkotta vektorsokszög hasonló a mechanizmus tagjai által alkotott alakzathoz. Ezt a

$$(4.4.21) \quad \frac{\mathbf{h}_1}{\mathbf{r}_1} = \frac{\mathbf{h}_2}{\mathbf{r}_2} = \dots = \frac{\mathbf{h}_n}{\mathbf{r}_n}$$

feltétel biztosítja, ami esetünkben fennáll, hiszen

$$(4.4.22) \quad \frac{\mathbf{h}_1}{\mathbf{r}_1} = \frac{\mathbf{h}_2}{\mathbf{r}_2} = \dots = \frac{\mathbf{h}_n}{\mathbf{r}_n} = \frac{m_n}{\sum m_i}.$$

A bemutatott eljárás tehát egyenértékű a főponti módszerrel, csak közelítési módjában különbözik attól. Kellemesebb azonban, különösen részleges kiegyensúlyozásnál, hogy itt a tömeg-erőkkel dolgozunk, ami munkánkat szemléletesebbé teszi. A (4.4.17) összefüggésből közvetlen kiolvasható, hogy a tömeg-erőket milyen irányokban ellensúlyoztuk. A szemléletességen túl, mint azt a későbbiekben látni fogjuk, az eljárás legnagyobb előnye abban rejlik, hogy összekapcsolható a dinamikus kiegyensúlyozással, vagyis a tömeg-erők kiküszöbölésével egyidejűleg a tehetetlenségi nyomatékok okozta kedvezőtlen hatásokat is mérsékelhetjük. A továbbiakban az ismertetett módszer felhasználásával vizsgáljuk a négytagú csuklós mechanizmusok kiegyensúlyozásának kérdéseit.

Tekintsük a 4.43. ábrán vázolt négytagú csuklós mechanizmust. A hajtótag szögsebességét a gyakorlati eseteknek megfelelően állandónak választjuk. Az ábrán S_1, S_2, S_3 a súlypontokat, K_1 az O pontra, K_2 az A pontra és K_3 a C pontra vonatkoztatott lengésközéppontokat jelöli.

A tehetetlenségi erők eltűnését biztosító egyenleteket a (4.4.17) felhasználásával közvetlen felírhatjuk:

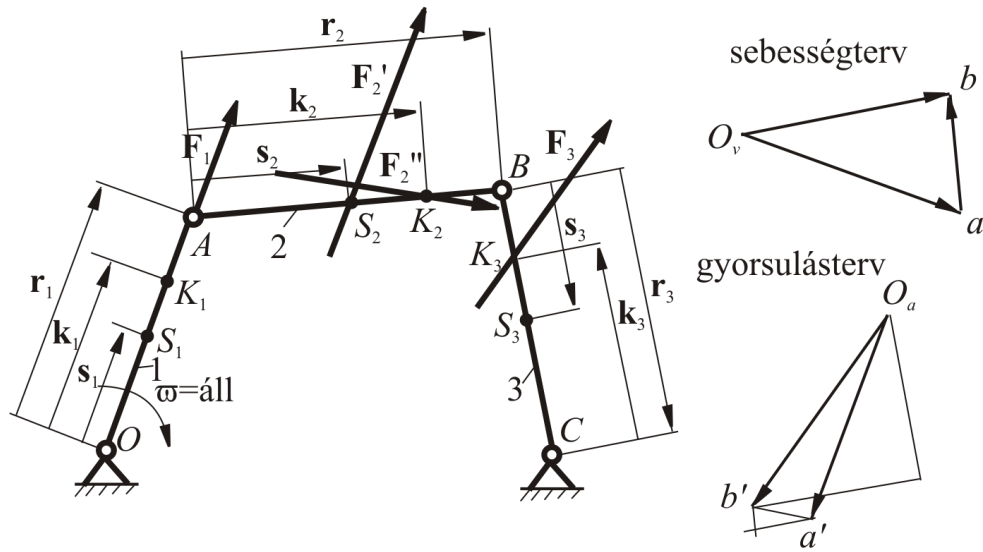
$$(4.4.23) \quad m_1 \mathbf{s}_1 = - \left[m_2 + m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3} \right) \right] \mathbf{r}_1$$

$$(4.4.24) \quad m_2 \mathbf{s}_2 = -m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3} \right) \mathbf{r}_2$$

A dinamikus kiegyensúlyozás a (4.4.23) és (4.4.24) egyenletekben megfogalmazott feltételeken kívül megkívánja a tehetetlenségi nyomatékok eliminálását is, azaz a

$$\sum \mathbf{M}_i = 0$$

feltétel teljesülését.



4.43. ábra.

Az állandó szögsebességgel hajtott forgattyúra a súlypontba (S_1) koncentrálható $F_1 = -m_1 a_{S_1}$ tömegelő hat, ami a centrifugális erővel egyenlő (4.43. ábra). A hajtórúdon a haladó mozgásból adódó és az S_2 tömegközéppontban ható $F_2' = -m_2 a_A$ erő mellett a K_2 lengésközéppontban a forgó mozgásból származó $F_2'' = -m_2 a_{S_2A}$ erő is fellép. A forgó mozgást végző 3-as jelű tagon pedig a K_3 pontban működik az $F_3 = -m_3 a_{S_3}$ nagyságú tehetetlenségi erő. (A 4.43. ábrán megrajzoltuk a mechanizmus vázolt helyzetéhez tartozó sebesség- és gyorsulástervet is. A gyorsulásterv a tehetetlenségi erők irányát és értelmét egyértelműen meghatározza.)

Az erők és azok támadáspontjainak ismeretében az O pontra írható nyomatéki egyenlet:

$$(4.4.25) \quad \sum \mathbf{M}_i = 0 = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{s}_2) \times \mathbf{F}_2' + (\mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2) \times \mathbf{F}_2'' + (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{k}_3) \times \mathbf{F}_3,$$

amelybe az erők értékét beírva a

$$(4.4.26) \quad \sum \mathbf{M}_i = 0 = -m_2 [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{s}_2) \times \mathbf{a}_A] - m_2 [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2) \times \mathbf{a}_{S_2A}] - m_3 [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{k}_3) \times \mathbf{a}_{S_3}].$$

Az $\mathbf{a}_{S_2A} = \frac{\mathbf{s}_2}{r_2} \mathbf{a}_{BA}$ összefüggést, valamint a (4.4.15) utolsó sorát felhasználva, a

$$(4.4.27) \quad \sum \mathbf{M}_i = 0 = -m_2 [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{s}_2) \times \mathbf{a}_A] - m_2 \frac{\mathbf{s}_2}{r_2} [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2) \times \mathbf{a}_{BA}] - m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{r_3}\right) [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{k}_3) \times (\mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA})].$$

Rendezzük az egyenletet

$$(4.4.28) \quad \sum \mathbf{M}_i = 0 = - \left[m_2 \mathbf{s}_2 + m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{r_3}\right) \mathbf{r}_2 \right] \times \mathbf{a}_A - \left[m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{r_3}\right) (\mathbf{r}_3 + \mathbf{k}_3) \right] \times \mathbf{a}_A -$$

$$\begin{aligned}
& - \left[m_2 \frac{\mathbf{s}_2}{r_2} \mathbf{r}_1 + m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{r_3} \right) \mathbf{r}_1 \right] \times \mathbf{a}_{BA} - \\
& - \left[m_2 \frac{\mathbf{s}_2}{r_2} \mathbf{k}_2 + m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{r_3} \right) \mathbf{r}_2 \right] \times \mathbf{a}_{BA} - \\
& - \left[m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{r_3} \right) (\mathbf{r}_3 + \mathbf{k}_3) \right] \times \mathbf{a}_{BA} = 0.
\end{aligned}$$

A (4.4.28) egyenlet triviális megoldását biztosító egyenletrendszer:

$$(4.4.29) \quad m_2 \frac{\mathbf{s}_2}{r_2} + m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{r_3} \right) = 0,$$

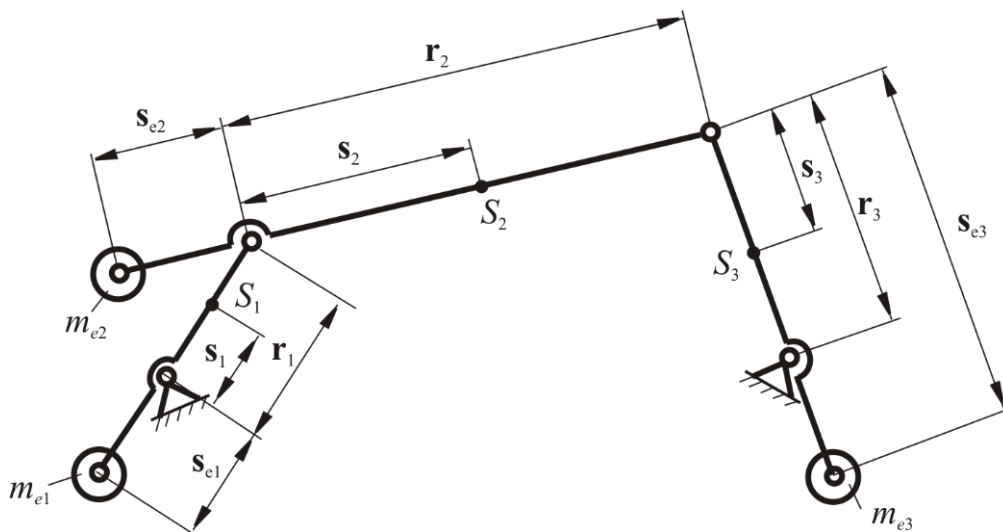
$$(4.4.30) \quad m_2 \frac{\mathbf{s}_2}{r_2} \mathbf{k}_2 + m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{r_3} \right) \mathbf{r}_2 = 0,$$

$$(4.4.31) \quad m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{r_3} \right) (\mathbf{r}_3 + \mathbf{k}_3) = 0.$$

Mint látható a (4.4.29) azonos (4.4.24)-gyel, vagyis a dinamikus kiegyensúlyozáshoz a (4.4.23), (4.4.29), (4.4.30) és (4.4.31) egyenleteket kell kielégíteni.

Kérdés azonban, hogy az egyenletrendszer egyidejűleg kielégíthető-e? Az egyenletrendszer egy lehetséges megoldása, mivel $m_2 \neq 0$ és $m_3 \neq 0$, az $\mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_3$ választással nyerhető. Ez azt jelenti, hogy a 3-as tag súlypontját a C pontba helyezzük. Ekkor ugyanis (4.4.31) feltétel azonnal teljesül, a (4.4.29)-ből és a (4.4.30)-ból pedig $\mathbf{s}_2 = 0$ következik, vagyis a 2-es tag tömegközéppontját az A pontba kell vinni. Végül a (4.4.23)-ból az $m_1 \mathbf{s}_1 + m_2 \mathbf{r}_1 = 0$ egyenletet kapjuk.

Az eljárást alkalmazzuk a 4.44. ábrán látható mechanizmuson. A mechanizmus adatai a következők: $r_1 = 120$ mm, $s_1 = 75$ mm, $m_1 = 0,1$ kg, $s_{e1} = -100$ mm, $r_2 = 400$ mm, $s_2 = 200$ mm, $m_2 = 0,8$ kg, $s_{e2} = -100$ mm, $r_3 = 280$ mm, $s_3 = 180$ mm, $m_3 = 0,4$ kg és $s_{e3} = 350$ mm. Határozzuk meg az m_{e1} , m_{e2} és az m_{e3} ellensúlyok tömegét.



4.44. ábra.

A megoldáshoz a levezetett feltételek mellett felhasználjuk az

$$m'_1 = m_1 + m_{e1}, \quad m'_2 = m_2 + m_{e2}, \quad m'_3 = m_3 + m_{e3},$$

$$m'_1 \mathbf{s}'_1 = m_1 \mathbf{s}_1 + m_{e1} \mathbf{s}_{e1}, \quad m'_2 \mathbf{s}'_2 = m_2 \mathbf{s}_2 + m_{e2} \mathbf{s}_{e2}, \quad m'_3 \mathbf{s}'_3 = m_3 \mathbf{s}_3 + m_{e3} \mathbf{s}_{e3},$$

összefüggéseket is, ahol a vesszővel jelölt mennyiségek a kiegyensúlyozás utáni tömegeket, illetve súlypontok helyeit jelentik.

Az $\mathbf{s}'_3 = \mathbf{r}_3$ választást az $m'_3 \mathbf{s}'_3 = m_3 \mathbf{s}_3 + m_{e3} \mathbf{s}_{e3}$ -ba helyettesítve, az

$$(m_3 + m_{e3}) \mathbf{r}_3 = m_3 \mathbf{s}_3 + m_{e3} \mathbf{s}_{e3},$$

ezt rendezve, az

$$m_{e3} = m_3 \frac{\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3}{\mathbf{r}_3 - \mathbf{s}_{e3}} = 0,4 \frac{180 - 250}{280 - 350} = 0,57 \text{ kg.}$$

Az $\mathbf{s}'_2 = 0$ feltételből, valamint az $m'_2 \mathbf{s}'_2 = m_2 \mathbf{s}_2 + m_{e2} \mathbf{s}_{e2}$ összefüggésből az

$$m_2 \mathbf{s}_2 + m_{e2} \mathbf{s}_{e2} = 0,$$

illetve az

$$m_{e2} = -\frac{m_2 \mathbf{s}_2}{\mathbf{s}_{e2}} = -\frac{0,8 \cdot 200}{-100} = 1,6 \text{ kg.}$$

A 2-es tag új tömege:

$$m'_2 = m_2 + m_{e2} = 0,8 + 1,6 = 2,4 \text{ kg.}$$

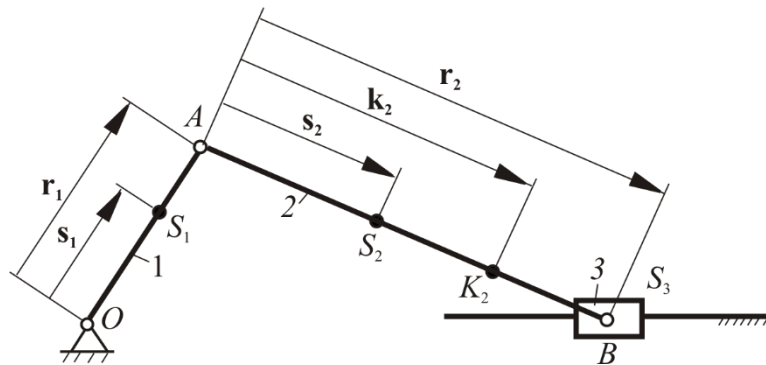
Végül a 1-es tagon elhelyezendő ellensúly tömegét az $m'_1 \mathbf{s}'_1 + m'_2 \mathbf{r}_1 = 0$ egyenletből számíthatjuk ki. Helyettesítés után az

$$m_1 \mathbf{s}_1 + m_{e1} \mathbf{s}_{e1} + m'_2 \mathbf{r}_1 = 0,$$

amelyből az

$$m_{e1} = -\frac{m'_2 \mathbf{r}_1 + m_1 \mathbf{s}_1}{\mathbf{s}_{e1}} = -\frac{2,4 \cdot 120 + 0,1 \cdot 1,75}{-100} = 2,995 \text{ kg.}$$

Mint látható az elméleti eredmények gyakorlati alkalmazása – a statikus kiegyensúlyozáshoz viszonyítva – különösebb problémát nem vet fel, hiszen ugyanazokat az összefüggéseket használjuk fel. Kötöttséget csupán az $\mathbf{s}_2 = 0$, és $\mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_3$ előírások jelentenek, ami a gyakorlati esetek többségénél megvalósítható, sőt gyakran a szerkezetek tömegeloszlása kínálja e lehetőség kiaknázását.



4.45.ábra

Megjegyezzük a módszer forgattyús hajtóműnél is alkalmazható, és az előzőekhez hasonló eredményekre vezet [6]. Ezt azonban itt nem részletezzük, helyette az eljárás alkalmazási lehetőségét egy egyszerű példán (4.45. ábra) mutatjuk be.

A levezetéseket mellőzve a teljes kiegyensúlyozás feltételei a következő egyenletrendszerrel írhatók le:

$$(4.4.32) \quad m_1 \frac{\mathbf{s}_1}{\mathbf{r}_1} + m_2 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{r}_2} \right) = 0,$$

$$(4.4.33) \quad m_2 \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{r}_2} + m_3 = 0,$$

$$(4.4.34) \quad m_2 \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{r}_2} - m_2 \mathbf{s}_2 = 0.$$

$$(4.4.35) \quad m_2 \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{r}_2} \mathbf{k}_2 + m_3 \mathbf{r}_2 = 0.$$

Az $\mathbf{r}_2 = \mathbf{k}_2$ választás esetén teljesül a (4.4.34) egyenlet, és a (4.4.35) az $m_2 \mathbf{s}_2 + m_3 \mathbf{r}_2 = 0$ alakra egyszerűsödik, ami azonos a (4.4.33) feltétellel. A teljes kiegyensúlyozáshoz tehát elegendő a (4.4.32) és (4.4.33) feltételeket kielégíteni, valamint a hajtórúd A pontra vonatkoztatott lengésközéppontját a B pontba vinni.

4.8. A virtuális elmozdulások elvének alkalmazása az egyensúlyt tartó erők és nyomatékok meghatározására

4.8.1 Zsukovszkij segédemelés módszere

Nagyon sok esetben csak a vezetőtagon működő hajtónyomatékot vagy hajtóerőt kell kiszámítani. Ha a hajtóerő vagy a hajtónyomaték meghatározására a kinematikai párokban ébredő reakcióerőket használjuk fel, akkor a számítás sok felesleges munkával jár, mivel a külső erők és nyomatékok hatása alatt álló tagoktól csak lépésről lépésre jutunk el a vezetőtagig, és így a számítás folyamán sok időt kell a kinematikai párokban működő reakcióerők meghatározására fordítanunk, pedig ezeket a további számításainknál már nem is használjuk fel.

A hajtóerő vagy a hajtóerő nyomatékának közvetlen meghatározására felhasználható a virtuális (lehetséges) elmozdulások elve, amely szerint *a rendszerre ható és egyensúlyi állapotban lévő erők elemi munkájának összege a rendszer virtuális elmozdulása alatt nullával egyenlő.*

Amikor az egyensúlyban lévő erők támadáspontjára felírható virtuális elmozdulás elvét a mechanizmusoknál alkalmazzuk, akkor a támadáspontok elmozdulásai a kezdőtagok helyzetének függvényei, és a mechanizmus tagjain lévő pontok elmozdulásait azok a kötöttségi feltételek határozzák meg, amelyeket a tagok összekapcsolásánál a kinematikai párok megvalósítanak.

Ha a mechanizmus tagjaira adott helyeken az $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots, \mathbf{F}_n$ külső erők és $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \dots, \mathbf{M}_n$ külső nyomatékok hatnak, amelyek a tehetetlenségi erőket, nyomatékokat, továbbá az ismeretlen hajtó nyomatékokat, illetve a hajtóerőket is magukba foglalják, akkor a virtuális elmozdulások elve alapján írhatjuk:

$$|\mathbf{F}_1| \delta x_1 \cos \alpha_1 + |\mathbf{F}_2| \delta x_2 \cos \alpha_2 + \dots + |\mathbf{F}_n| \delta x_n \cos \alpha_n + |\mathbf{M}_1| \delta \varphi_1 + |\mathbf{M}_2| \delta \varphi_2 + \dots + |\mathbf{M}_n| \delta \varphi_n = 0,$$

ahol:

- δ_k a mechanizmus kezdőtagjának ismert helyzeténél az \mathbf{F}_k erő támadáspontjának elemi elmozdulása,
- α_k az \mathbf{F}_k erő iránya és a δ_k elemi elmozdulás iránya között lévő szög,
- $\delta\varphi_k$ annak a tagnak az elemi elfordulás szöge, amelyre az \mathbf{M}_k nyomaték hat.

Amikor a fenti egyenlet alapján meghatározzuk a hajtó nyomatékot, figyelembe kell vennünk, hogy az \mathbf{F}_k erő akkor végez pozitív munkát, ha $\alpha_k < 90^\circ$, és akkor negatív munkát, ha $\alpha_k > 90^\circ$.

Az egyenlet gyakorlati felhasználására alkalmatlan és ezért célszerű azt számításra alkalmassabbal felcserélni. Az egyenletet δt elemi idővel elosztva, és áttérve a $\delta t \rightarrow 0$ határértékre, olyan egyenletet kapunk, amelyből a hajtóerőre könnyen kifejezhető:

$$|\mathbf{F}_1||\mathbf{v}_1|\cos\alpha_1 + |\mathbf{F}_2||\mathbf{v}_2|\cos\alpha_2 + \dots + |\mathbf{F}_n||\mathbf{v}_n|\cos\alpha_n + |\mathbf{M}_1||\omega_1| + |\mathbf{M}_2||\omega_2| + \dots + |\mathbf{M}_n||\omega_n| = 0,$$

ahol:

- \mathbf{v}_k a k -adik erő támadáspontjának sebessége,
- ω_k a k -adik tag szögsebessége.

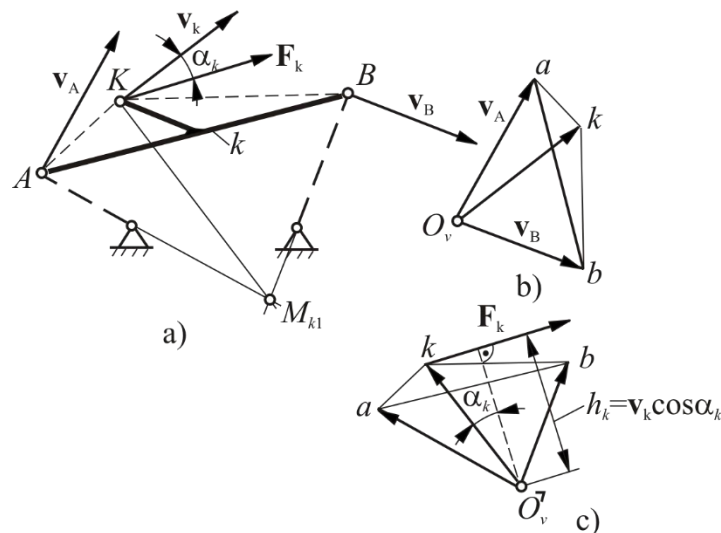
Mivel az utóbbi egyenlet tagjai az egyes erők és nyomatékok teljesítményét jelentik, ezért a virtuális elmozdulások elvét a *virtuális sebességek elvével* helyettesíthetjük, és ennek a mechanizmusoknál történő alkalmazását a következőképpen szövegezzük meg: *ha a mechanizmus egyensúlyban van, akkor a mechanizmus tagjaira ható külső erők és nyomatékok pillanatnyi teljesítményének összege nullával egyenlő.*

Az egyenletet az ismeretlen hajtóerő, vagy nyomaték meghatározásnál közvetlenül alkalmazhatjuk, ha az erők támadáspontjainak \mathbf{v}_k sebességeit vagy a tagok ω_k szögsebességeit a sebességtervek segítségével már kiszámoltuk.

Vizsgáljuk meg a kifejezés k -adik tagra vonatkozó részét, az

$$|\mathbf{F}_k||\mathbf{v}_k|\cos\alpha_k$$

szorzat nem más, mint a k -adik tagot terhelő \mathbf{F}_k erőnek, és támadáspontja sebességének (\mathbf{v}_k) a skaláris szorzata, azaz a k -adik tag P_k teljesítménye.



4.46. ábra

A 4.46. ábrán megrajzoltuk az \mathbf{F}_k erővel terhelt k -adik tagot, és megszerkesztettük a k -adik tag sebességtervét is. Forgassuk el 90° -kal tetszőleges irányba a sebességtervet, és helyezzük az \mathbf{F}_k erőt a 90° -kal elforgatott sebességterv k pontjába (4.46/c ábra), ekkor az ábra jelöléseivel a

merőleges szögek azonosságából:

$$h_k = |\mathbf{v}_k| \cos \alpha_k,$$

amit helyettesítve, a

$$P_k = |\mathbf{F}_k| |\mathbf{v}_k| \cos \alpha_k = h_k \cos \alpha_k$$

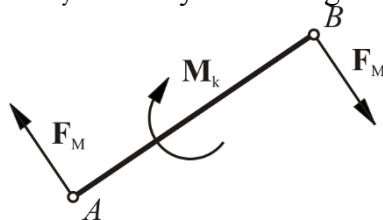
Ez a kifejezés az \mathbf{F}_k erőnek a 90° -kal elforgatott sebességterv pólusára vett nyomatékát jelenti. Ha ezt, az egy tagra vonatkozó megállapítást az egész mechanizmusra kiterjesztjük, akkor a következő eljárással kapjuk meg a keresett hajtóerőt, illetve a hajtónyomatékot:

Megrajzoljuk a mechanizmus 90° -kal elforgatott sebességtervét és a sebességterv megfelelő pontjaira, tetszőleges léptékben rárajzoljuk az erőket.

A sebességterv O_v^- pólusra felírjuk az összes erők nyomatékainak előjelhelyes összegét. Ezzel az összeggel tart egyensúlyt a hajtóerő nyomatéka:

$$h_1 |\mathbf{F}_1| + h_2 |\mathbf{F}_2| + \dots + h_n |\mathbf{F}_n| = h |\mathbf{F}_y|,$$

ahol: h_k a vezetőtag megfelelő sebességhelyére helyezett \mathbf{F}_y egyensúlyozó vagy hajtóerő karja. Az \mathbf{F}_y erő irányát tetszőlegesen vehetjük fel.



4.47. ábra

Ha a tagra nyomaték is hat (4.47. ábra), azt az A és B csuklóban ható erőpárnak kell tekinteni. Az erőpárt alkotó erők nagyságát az

$$|\mathbf{F}_k| = \frac{|\mathbf{M}_k|}{l_{AB}}$$

kifejezés adja. Ezeket az erőket a sebességterv megfelelő pontjaiba kell helyezni (itt az a és a b pontokba).

A feladatot úgy is megoldhatjuk, hogy az \mathbf{M}_k nyomatékot nem erőpárral helyettesítjük, hanem a sebességtervhez felvesszük az alábbi egyenlet által meghatározott $\overline{\mathbf{M}}_k$ nyomatékot:

$$|\overline{\mathbf{M}}_k| = |\mathbf{F}_M| \overline{ab} = \frac{|\mathbf{M}_k| \overline{ab}}{l_{AB}}.$$

Az $\overline{\mathbf{M}}_k$ nyomaték előjele megegyezik az \mathbf{M}_k nyomatékéval, ha a mechanizmus kinematikai vázlatán az \overline{AB} iránya és a 90° -kal elforgatott sebességtervben az \overline{ab} iránya azonos. Ellenkező esetben az $\overline{\mathbf{M}}_k$ és az \mathbf{M}_k nyomatékok különböző előjelűek.

Ha tehát a mechanizmus tagjaira erők és nyomatékok hatnak, akkor az egyensúlyi feltételből az \mathbf{F}_y hajtóerő az alábbi összefüggésből határozható meg:

$$|\mathbf{F}_y| = \frac{\sum_{k=1}^n |\mathbf{F}_k| h_k + \sum_{k=1}^n |\overline{\mathbf{M}}_k|}{h}.$$

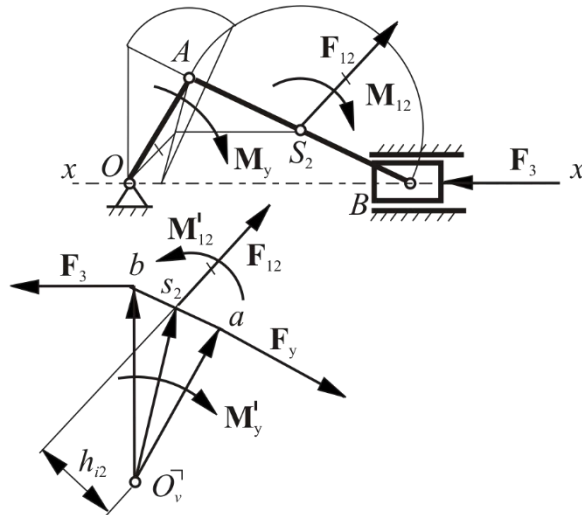
Az elmondottakból világosan kitűnik, hogy a mechanizmus tagjaira ható külső erők és nyomatékok pillanatnyi teljesítménye a 90° -kal elforgatott sebességterv segítségével összegezhető, és az ismeretlen hajtóerő vagy nyomaték meghatározható.

Mivel az elforgatott sebességterv tulajdonképpen az O_v^- körül forgó merev emelőnek tekinthető, a műszaki irodalom e módszert első alkalmazójáról *Zsukovszkij-féle segédemelő módszer*

szernek nevezik.

A sebességterv léptékének a szerkesztésénél nincs jelentősége, a pontosabb eredmények elérése érdekében azonban célszerű a szerkesztési léptéket nagyra választani.

Egy forgattyús mechanizmus (4.48. ábra) segítségével vizsgáljuk meg, hogyan alkalmazható Zsukovszkij segédemelés módszere az \mathbf{M}_y hajtónyomaték meghatározására. A külső erők és nyomatékok a következők: a tolattyúra ható külső erő és a tolattyú tehetetlenségi erejének \mathbf{F}_3 eredője, a hajtórúdra ható \mathbf{F}_{12} tehetetlenségi erő és a tehetetlenségi erő \mathbf{M}_{12} nyomatéka.



4.48. ábra

A feladat megoldásához egy tetszőszerinti O_v^- pólusból tetszőleges méretarányban fel kell mérni az A pontnak 90° -kal elforgatott sebességvektorát (végpontja: a). A B pont 90° -kal elforgatott sebességét az alábbi egyenletből határozzuk meg:

$$\mathbf{v}_B^- = \mathbf{v}_A^- + \mathbf{v}_{BA}^- ,$$

ahol a \mathbf{v}_B^- merőleges $(x-x)$ -re és a \mathbf{v}_{BA}^- párhuzamos \overline{AB} -vel. Ha tehát az a ponton keresztül \overline{AB} -vel párhuzamos, majd az O_v^- póluson keresztül a tolattyú tengelyére merőleges egyenest húzunk, akkor a b metszéspontban megkapjuk a \mathbf{v}_B^- vektor végpontját. Burmester tételének felhasználásával a sebességtervben az S_2 -nek megfelelő s_2 pont is meghatározható. A sebességtervet O_v^- körül forgó merev emelőnek tekintjük. A továbbiakban \mathbf{F}_3 és \mathbf{F}_{12} erőket felvisszük a 90° -kal elforgatott sebességterv megfelelő pontjaiba (b és s_2), majd kiszámítjuk az

$$|\mathbf{M}'_{12}| = \frac{|\mathbf{M}_{12}| \overline{ab}}{l_{AB}}$$

nyomatékot. Mivel \overline{ab} és \overline{AB} ellentétes irányúak, ezért \mathbf{M}'_{12} az \mathbf{M}_{12} -höz viszonyítva ellentétes értelmű.

A sebességterv a pontjában felvisszük az \mathbf{F}_y hajtóerőt (csak az irányát és támadáspontját ismerjük), majd az erők O_v^- -re vonatkoztatott

$$|\mathbf{F}_3| \overline{O_v^- b} - |\mathbf{F}_{12}| h_{12} + |\mathbf{M}'_{12}| + |\mathbf{F}_y| \overline{O_v^- a} = 0$$

nyomatékainak összegéből kiszámítjuk az \mathbf{F}_y hajtóerőt:

$$|\mathbf{F}_y| = -\frac{|\mathbf{F}_3|\overline{O_v b} - |\mathbf{F}_{12}|h_{12} + |\mathbf{M}'_{12}|}{O_v a}.$$

Végül az \mathbf{M}_y hajtónyomaték nagysága:

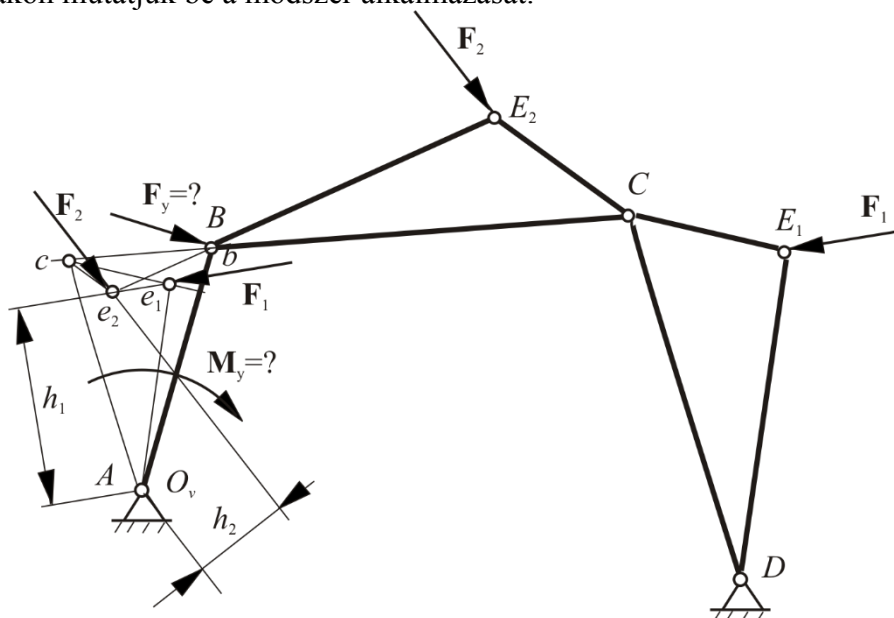
$$|\mathbf{M}_y| = |\mathbf{F}_y|l_{OA}.$$

4.8.2 A mechanizmusok grafoanalitikus vizsgálata

A mechanizmusok grafoanalitikus vizsgálata a mechanizmusokra alkalmazott lehetséges (virtuális) elmozdulások elvét magában foglaló *Zsukovszkij*-féle segédemelés módszer geometriai felhasználásán alapszik.

A grafoanalitikus vizsgálatnál a 90° -kal elforgatott sebességtervet a mechanizmus kinematikai vázlatán rajzoljuk meg. Ennek megfelelően a 90° -kal elforgatott sebességterv pólusát nem tetszőleges helyen, hanem általában a mechanizmus valamelyik tagjának momentán centrumában vesszük fel és az így kijelölt pólushoz közvetlenül csatlakozó tag valamely pontjának 90° -kal elforgatott sebességvektorát a pólustól mért távolsággal azonosnak tekintjük és adott-nak tételezzük fel. Ezt megtehetjük, mivel a sebességterv léptékének, és elforgatás irányának a *Zsukovszkij*-féle segédemelés módszer alkalmazásánál nincs jelentősége.

A mechanizmus többi tagján lévő pontok 90° -kal elforgatott sebességvektorai, a sebességek vektoregyenletei alapján a megfelelő tagokkal történő párhuzamos egyenesek rajzolásával megszerkesztett, 90° -kal elforgatott sebességtervből határozhatók meg. Az így megszerkesztett 90° -kal elforgatott sebességtervet használjuk fel a *Zsukovszkij*-féle segédemelés módszer alkalmazásánál. A grafoanalitikus módszer előnye, hogy alkalmazásakor a külső erőkkel és nyomatékokkal egyensúlyt tartó erő, illetve nyomaték kevesebb munkával határozható meg, mint amikor külön megszerkesztett 90° -kal elforgatott sebességtervet használunk. A továbbiakban példákon mutatjuk be a módszer alkalmazását.



4.49. ábra

(1) Legyen adott például az $ABCD$ négytagú csuklós mechanizmus (4.49. ábra), amelyre az E_1 és E_2 pontokban az \mathbf{F}_1 és \mathbf{F}_2 erők hatnak. Határozzuk meg az \mathbf{F}_1 és \mathbf{F}_2 erőkkel az \overline{AB} karon egyensúlyt tartó nyomaték (\mathbf{M}_y) nagyságát.

A 90° -kal elforgatott sebességterv pólusának válasszuk a mechanizmus mozdulatlan A pontját.

A sebességegyenlet

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$$

alapján a C pont elforgatott sebességét megkapjuk, ha az A pontból a \overline{DC} taggal párhuzamosan rajzolt egyenessel metsszük a \overline{BC} tag meghosszabbítását. Az \overline{Ac} metszék a C pont 90° -kal elforgatott sebességének felel meg. Az \mathbf{F}_1 és \mathbf{F}_2 erők E_1 és E_2 támadáspontjainak sebességét *Burmester* tétele alapján kapjuk, vagyis az

$$Ae_1c \triangle \approx DE_1C \triangle \text{ és a } Be_2c \triangle \approx BE_2C \triangle.$$

Az elforgatott sebességtervből:

$$\vec{v}_{E_1} = k_v \overline{Ae_1} \text{ és } \vec{v}_{E_2} = k_v \overline{Ae_2}$$

Az \mathbf{F}_1 és \mathbf{F}_2 erőket helyezzük át (irány és nagyság szerint) a sebességterv e_1 , illetve e_2 pontjába. Az \mathbf{F}_1 erő karja:

$$h_1 = \overline{Ae_1} \cos \alpha_1.$$

Hasonlóan határozható meg az \mathbf{F}_2 erő karja:

$$h_2 = \overline{Ae_2} \cos \alpha_2,$$

α_1 és α_2 szögek a 4.46/c ábra szerint értelmezendők.

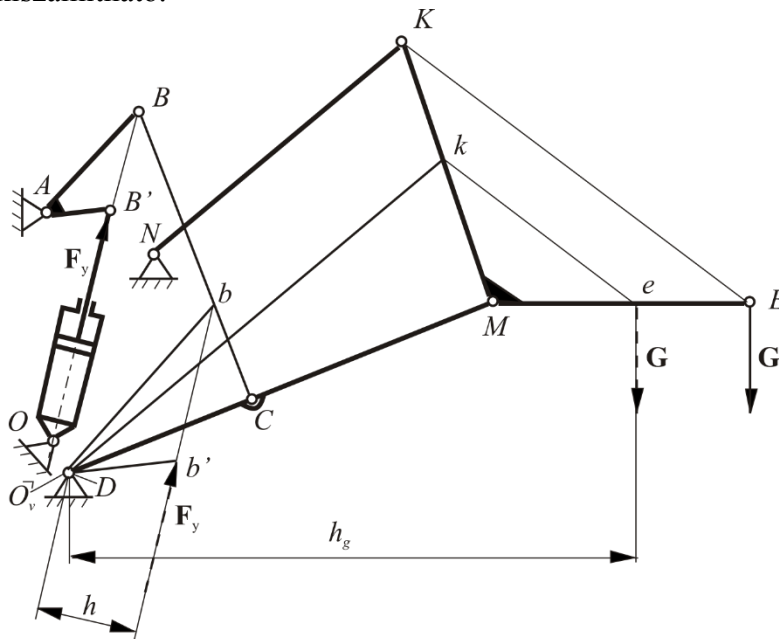
A külső \mathbf{F}_1 és \mathbf{F}_2 erőkkel egyensúlyt tartó \mathbf{F}_y erő az

$$|\mathbf{F}_y| = \frac{|\mathbf{F}_1| h_1 + |\mathbf{F}_2| h_2}{AB}$$

nyomatéki egyenletből meghatározható. Az \mathbf{M}_y nyomaték az

$$|\mathbf{M}_y| = |\mathbf{F}_y| l_{AB}$$

összefüggésből kiszámítható.



4.50. ábra

(2) Határozzuk meg a 4.50. ábrán látható függesztő berendezés hidraulikus munkahengerének

dugattyújában ébredő erő nagyságát, ha a függesztett munkagép kiemelt helyzetben van. Kiemelt helyzetben a munkaeszköz (G) súlyával a munkahengerben lévő olaj nyomása tart egyensúlyt. A dugattyúrúdban ébredő F_y erő a mechanizmus B' pontjában, a munkaeszköz súlya pedig az E pontban hat.

A 90° -kal elforgatott sebességterv pólusának válasszuk a mechanizmus D pontját. Rajzoljuk meg az elforgatott sebességtervet, és szerkesszük meg az F_y és G erők támadáspontjának, az E és B' pontoknak az elforgatott sebességeit.

Mivel a súlyerő támadáspontja a \overline{KM} taghoz tartozik, ezért D -ből az \overline{NK} -val párhuzamosan rajzolt \overline{Dk} egyenes és a \overline{KM} tagnak a metszéspontjában adódó k pont meghatározza az $NKMD$ négytagú mechanizmus elforgatott DkM sebességtervét.

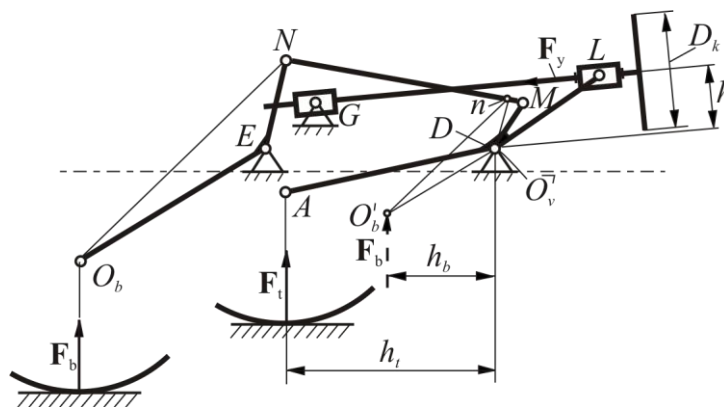
A $KME \Delta \approx kMe \Delta$ alapján megkapjuk a sebességtervben az E pont sebességének végpontját, e -t. Hasonlóan megszerkeszthetjük a mechanizmus B' pontjának a sebességtervben megfelelő b' pontját ($\overline{Db} \parallel \overline{AB}$ és $ABB' \Delta \approx Dbb' \Delta$). Az F_y és G erőket az elforgatott sebességterv e és b' pontjaiba helyezve írhatjuk:

$$|G|h_g = |F_y|h,$$

amelyből a

$$|F_y| = \frac{|G|h_g}{h}.$$

(3) A következő példában számítsuk ki a tarlókerék csavarorsós állítómechanizmusánál a kézi keréken kifejtendő erő nagyságát. A 4.51. ábrán megrajzoltuk egy vontatott eke csavarorsós állítómechanizmusának kinematikai vázlatát. Az elforgatott sebességterv pólusának a D pontot választottuk. Ennek megfelelően az M pont sebességét az elforgatott sebességtervben \overline{DM} ábrázolja. Így a D ponthoz közvetlenül kapcsolódó tagok hossza a végpontjuk 90° -kal elforgatott sebességét is jelenti. Ez azt eredményezi, hogy az elforgatott sebességtervben csak a mechanizmus O_b pontjának megfelelőjét, az O'_b -t kell megszerkeszteni. A 4.51. ábrán a szerkesztés menete nyomon követhető ($\overline{Dn} \parallel \overline{EN}$ és $DnO'_b \Delta \approx ENO_b \Delta$).



4.51. ábra

Ha az erők nyomatékát felírjuk a D pólusra, kiszámíthatjuk a csavarorsó tengelyének irányába ható erőt (F_y):

$$|\mathbf{F}_y| = \frac{|\mathbf{F}_t| h_t + |\mathbf{F}_b| h_b}{h}$$

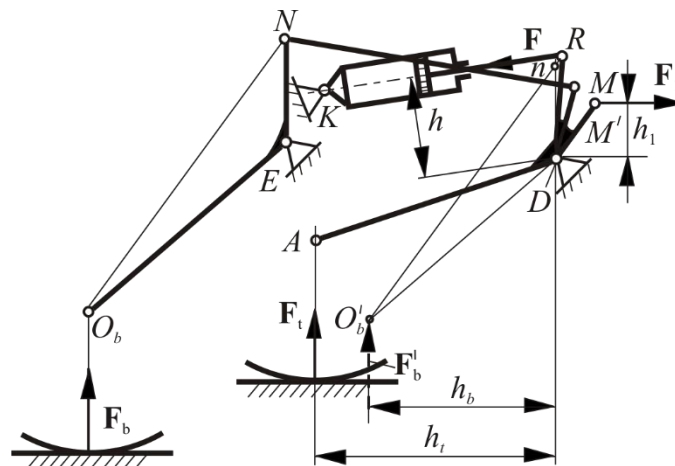
ahol: \mathbf{F}_t - a tarlókerékre ható erő, \mathbf{F}_b - a barázdakerékre ható erő, h_t , h_b és h az erők karjai.

A kézi kerék kerületén kifejtendő erő (\mathbf{F}_k) nagysága:

$$|\mathbf{F}_y| = \frac{|\mathbf{F}_y| (d + d_1) \operatorname{tg}(\varphi + \alpha)}{2D_k},$$

ahol: d - a csavarorsó külső menetátmérője, d_1 - a csavarorsó magátmérője, D_k - a kézi kerék átmérője, φ - a súrlódási fél-kúpszög, ($\operatorname{tg} \varphi = 0,16 \dots 0,20$), α - a menetemelkedés szöge.

(4) A 4.52. ábrán bemutatott példa kapcsán határozzuk meg, hogy a vontatott eke kiemelésekor az eke telepített munkahengerének dugattyúrúdjában milyen nagyságú erő (\mathbf{F}) ébred. Az ábrán feltüntettük a mechanizmusra ható erőket, és megrajzoltuk a D pólusú elforgatott sebesség tervet. Az eke kiemelésekor, miután a tarlókerék és a farkerék mechanizmusát összekapcsoló rúd megfeszül, a $\overline{DM'}$ karra az M' pontban a farkerék mechanizmusról \mathbf{F}_1 erő adódik át. (Az \mathbf{F}_1 nagysága a farkerék mechanizmus külön vizsgálatával határozható meg, amivel itt nem részletezünk.)



4.52. ábra

Az erőknek a pólusra (D) felírt nyomatékából kiszámíthatjuk a dugattyúrúdban ébredő \mathbf{F} erő nagyságát:

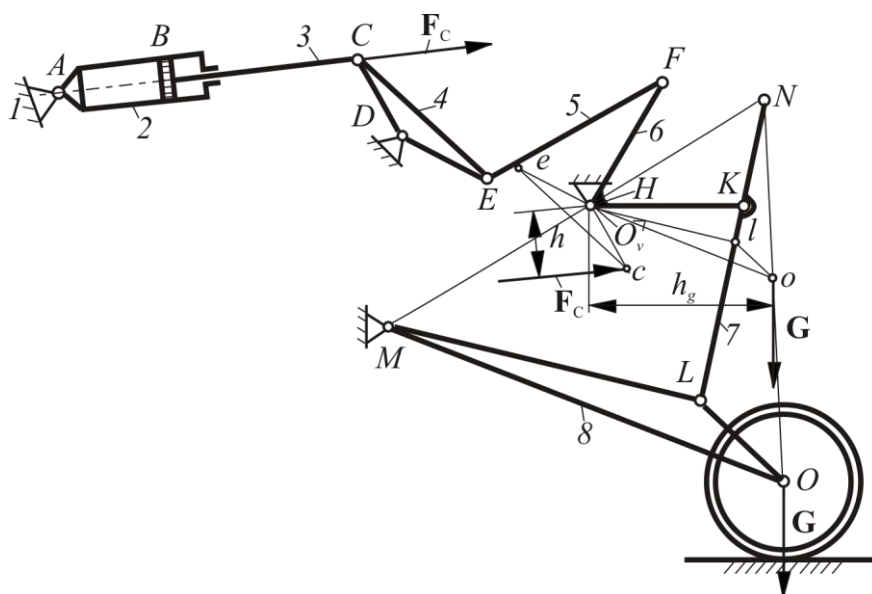
$$|\mathbf{F}| = \frac{|\mathbf{F}_t| h_t + |\mathbf{F}_b| h_b + |\mathbf{F}_1| h_1}{h}$$

Ha a munkahelyzet és a szállítási helyzet között, a mechanizmus több helyzetében kiszámítjuk az \mathbf{F} erő nagyságát, akkor megkapjuk az $\mathbf{F} = f(\Delta h)$ függvényt, amelyből meghatározhatjuk \mathbf{F}_{\max} értékét, következésképpen az eke kiemeléséhez szükséges maximális olajnyomást a munkahengerben.

(5) A 4.53. ábrán egy vetőgép csoroszlyáinak hidraulikus kiemelő mechanizmusát mutatjuk be. A kiemelő szerkezet három négytagú mechanizmusból áll: $A-B-C-D$, a $D-E-F-H$ és a $H-K-L-M$ -ből. Kiemeléskor a hidraulikahenger dugattyúja az olajnyomás hatására jobbra mozdul el, és a kiemelő mechanizmuson keresztül szállítási helyzetbe emeli a csoroszlyákat. Határozzuk meg, hogy kiemeléskor a dugattyúban milyen nagyságú \mathbf{F}_C erő ébred.

Az elforgatott sebességterv pólusának a H pontot célszerű választani. Az ábra alapján könnyen

megszerkeszthető az \mathbf{F}_C erő C támadáspontjának, valamint a \mathbf{G} súlyerő (csoroszlyák súlya) O támadáspontjának az elforgatott sebességtervben megfelelő c , illetve o pont. Ez utóbbi pontokba kell áthelyezni az \mathbf{F}_C , illetve a \mathbf{G} erőket.



4.53. ábra

Az

$$|\mathbf{F}_C| h = |\mathbf{G}| h_g,$$

egyenletből a csoroszlyák kiemelésekor a dugattyúrúdban ébredő erő nagysága kiadódik:

$$|\mathbf{F}_C| = \frac{|\mathbf{G}| h_g}{h}.$$

(6) Az alaphoz közvetlenül kapcsolódó hajtott tagokra (forgattyú, illetve lengőtag) ható külső erőkkel és nyomatékokkal a hajtó tagon egyensúlyt tartó erő, illetve nyomaték speciális esetekben a mechanizmus áttételi viszonyának ismeretében is meghatározható.

Az áttételi viszonyt meghatározó áttételi pont megszerkesztését és alkalmazását a hajtó (egyensúlyozó) erő, valamint nyomaték kiszámítására az egyik legegyszerűbb, mégis leggyakrabban előforduló mechanizmuson a négytagú csuklós mechanizmuson mutatjuk be (4.54. ábra).

Az áttételi viszony alatt az

$$i_{42} = \frac{|\omega_{41}|}{|\omega_{21}|}$$

hányados értendő, ahol ω_{41} a hajtott, ω_{21} pedig vezető, vagy hajtótag pillanatnyi szögsebessége.

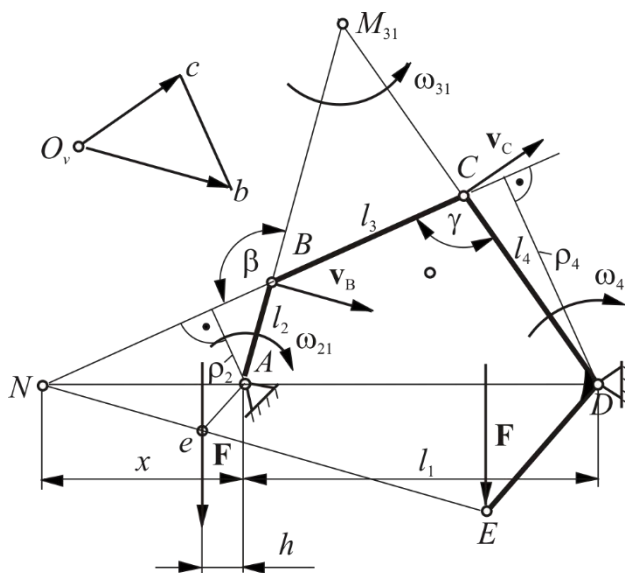
Legyen ω_{21} állandó és ismert, így a $|\mathbf{v}_B| = l_2 |\omega_{21}|$ kiszámítható és a sebességterv megszerkeszthető (4.54. ábra). A sebességtervből pedig a $|\mathbf{v}_C| = l_4 |\omega_{41}|$ meghatározható.

Az l_2 és az l_4 tagok meghosszabbításának metszéspontja (M_{31}) a 3-as jelű tag, vagyis a hajtórúd momentán centruma. A hajtórúd mozgása ezért M_{31} körüli ω_{31} szögsebességű körmozgás, felfogva írható, hogy

$$|\mathbf{v}_B| = l_2 |\boldsymbol{\omega}_{21}| = \overline{M_{31}B} |\boldsymbol{\omega}_{31}| \text{ és } |\mathbf{v}_C| = l_4 |\boldsymbol{\omega}_{41}| = \overline{M_{31}C} |\boldsymbol{\omega}_{31}|,$$

amelyből az

$$\frac{|\boldsymbol{\omega}_{41}|}{|\boldsymbol{\omega}_{21}|} = \frac{l_2 \overline{M_{31}C}}{l_4 \overline{M_{31}B}}.$$



4.54. ábra

Az $M_{31}BC$ Δ -ból a sinustétel felhasználásával az

$$\frac{\overline{M_{31}C}}{\overline{M_{31}B}} = \frac{\sin(\pi - \beta)}{\sin(\pi - \gamma)} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma},$$

amit behelyettesítve az előző kifejezésbe az áttételi viszony:

$$i_{42} = \frac{|\boldsymbol{\omega}_{41}|}{|\boldsymbol{\omega}_{21}|} = \frac{l_2 \sin \beta}{l_4 \sin \gamma}.$$

Az 4.54. ábrából látható, hogy

$$\rho_2 = l_2 \sin \beta \text{ és } \rho_4 = l_4 \sin \gamma,$$

továbbá

$$\frac{\rho_2}{\rho_4} = \frac{x}{x + l_1}.$$

Ezeket felhasználva az áttételi viszonyra az

$$i_{42} = \frac{|\boldsymbol{\omega}_{41}|}{|\boldsymbol{\omega}_{21}|} = \frac{x}{x + l_1}$$

kifejezést kapjuk. A kifejezésből következik, hogy a hajtórúd (3-as tag) hatásvonala az \overline{AD} egyenest olyan N pontban metszi, amelyhez tartozó

$$\frac{x}{x + l_1}$$

arány egyenlő a 4-es jelű (vezetett) és a 2-es jelű (vezető) tag szögsebességeinek arányával. Az N pont ezért a négytagú csuklós mechanizmus áttételi pontjának nevezzük.

Az áttételi viszony a nyomatékokkal is kifejezhető. Tekintettel arra, hogy

$$P_2 = |\mathbf{M}_2| |\boldsymbol{\omega}_{21}| \text{ és } P_4 = |\mathbf{M}_4| |\boldsymbol{\omega}_{41}|,$$

továbbá 100 %-os mechanikai hatásfokot feltételezve, a $P_2 = P_4$, amelyekből az

$$i_{42} = \frac{|\boldsymbol{\omega}_{41}|}{|\boldsymbol{\omega}_{21}|} = \frac{|\mathbf{M}_2|}{|\mathbf{M}_4|} = \frac{x}{x + l_1}.$$

Az elmondottak értelemszerű felhasználásával, a 4-es jelű tagra ható \mathbf{F} erővel a 2-es jelű hajtó tagon egyensúlyt tartó nyomaték meghatározása a következő módon végezhető el.

Kössük össze az \mathbf{F} erő E támadáspontját az N áttételi ponttal, majd a kapott \overline{NE} egyenest metsszük az A -ból a \overline{DE} -vel párhuzamosan húzott egyenessel, ami az e metszéspontot adja. Helyezzük át az \mathbf{F} erőt irány és nagyság szerint az e pontba. Mivel az e pontba áthelyezett \mathbf{F} erő karja (h) az áttételi viszonynak megfelelően módosul, az egyensúlyozó nyomaték nagysága:

$$|\mathbf{M}_y| = |\mathbf{F}| h k_1.$$

Nyomatékosan felhívjuk a figyelmet arra, hogy az ismertetett módszer csak akkor és csak is akkor alkalmazható, ha a külső és az egyensúlyozó erők, illetve a nyomatékok lengőtagon, vagy forgattyún hatnak, azaz ha a hajtórúdra is hatnak igénybevételek, akkor nem.

Felhasznált forrásmunkák

1. **Artobolevszkij, I. I. - Edelstein, B.V.:** Szbornik zadacs po teorii mehanizmov i masin. Nauka, Moszkva, 1973.
2. **Artobolevszkij, I. I.:** Teorija mehanizmov. Nauka, Moszkva, 1965.
3. **Asszur, A. B.:** Iszledovanie szterzsnyevüh mehanizmov. Izd Akad Nauk SzSzsZR, Moszkva 1952.
4. **Baranov, G. G.:** Kursz teorii mehanizmov i masin. Masinosztrojenie, Moszkva, 1975.
5. **Benkő J.:** BASIC szubrutinok a síkban mozgó mechanizmusok kinematikai vizsgálatához. Gödöllő, 1988.
6. **Benkő J.:** Forgattyús mechanizmusok dinamikus kiegyensúlyozása. Kézirat, Gödöllő, 1979.
7. **Benkő J.- Koltay J.:** ON-2 csemegekukorica szemlevágógép hajtómű és vágófej részegységeinek kinematikai és kinetikai vizsgálata. GATE kutatási jelentés, Gödöllő, 1989.
8. **Benkő J.:** Mechanizmusok kinematikai vizsgálata matematikai módszerekkel. Kézirat, Gödöllő, 1987.
9. **Benkő J.:** Síkban mozgó mechanizmusok számítógépes analízise. MTA Agrárműszaki Bizottsága Kutatási Tanácskozása, Gödöllő, 1987.
10. **Benkő J.:** Síkbeli csuklós szerkezetek kiegyensúlyozásának néhány kérdése. Járművek, Mezőgazdasági Gépek, 26. évf. 12. sz., Budapest, 1979.
11. **Búzás L.:** Mechanizmusok és gépek elmélete I-IV. (Jegyzet), Budapest, 1953-1954.
12. **Csudakov, J. A.:** Gépipari enciklopédia. 4. rész, Gépek szerkesztése. 12. kötet, Mezőgazdasági gépek, vízturbinák, szivattyúk, kompresszorok, hűtőgépek. Nehézipari Könyv- és Folyóiratkiadó Vállalat, 1955.
13. **Frolov, K. V.:** Teorija mehanizmov i masin. Vüzsaja Skola, Moszkva, 1987.
14. **Gavrilenko, V. A.:** Teorija mehanizmov. Vüzsaja Skola, Moszkva, 1973.
15. **Geszti P. - Kápolnai A.:** BASIC fejlesztő rendszer IBM PC. LSI Alkalmazástechnikai Tanácsadó Szolgálat, Budapest, 1987.
16. **Koltay J. - Véner I.:** Mechanizmusok (Jegyzet), ATE Mg. Gépészmérnöki Kan, Gödöllő, 1978.
17. **Kozsevnyikov, Sz. N.- Jeszipenko, Ja. I. - Raszkin, Ja. M.:** Mehanizmü. Masinosztrojenie, Moszkva, 1976.
18. **Kozsevnyikov, Sz. N.:** Teorija mehanizmov i masin. Masinosztrojenie, Moszkva, 1973.
19. **Kozsevnyikov, Sz. N.:** Mechanizmusok és gépek elmélete I.—II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.-1953.
20. **Krasznicsenko, A. V.:** Mezőgazdasági gépszerkesztők kézikönyve. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
21. **Levitszkaja, O. N - Levitszkij, N. I.:** Kursz teorii mehanizmov i masin. Vüzsaja Skola, Moszkva, 1985.
22. **Levitszkij, N. I.:** Teorija mehanizmov i masin. Nauka, Moszkva, 1979.
23. **Mabie, H. H. - Ocvirk, F. W.:** Mechanisms and Dynamics of Machinery. John Wiley & Sons Inc., New York, 1957.
24. **Maskov, A. A.:** Teorija mehanizmov i masin. Vüzsaja Skola, Minszk, 1971.
25. **Mutnyánszky Á.:** Kinematika és kinetika. Budapest, 1961.
26. **Popov, Sz. A.:** Kurszovoe projektyirovanyije po teorii mehanizmov i mehanike masin, Vüzsaja Skola, Moszkva, 1986.
27. **ifj. Sályi I.:** Mechanizmusok. Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.
28. **Soós P. - Koltay J. - Fábián L.:** Mechanizmusok. (Jegyzet), ATE Mg. Gépészmérnöki Kar, Budapest, 1968.
29. **Soós P.:** Mezőgazdasági gépek mechanizmusai, (jegyzet), ATE Mg. Gépészmérnöki Kar, Budapest, 1962.

30. **Terplán Z.:** Mechanizmusok. Tankönyvkiadó, Budapest, 1959.
31. **Turbin, B. G. etc:** Szjelszkohozjasztvennüle masinü. Masinosztrojenie, Leningrád, 1967.
32. **Volmer J.:** Getriebetechnik Koppelgetriebe. VEB Verlag Technik, Berlin 1979.