A T 043769-ES OTKA PÁLYÁZAT ZÁRÓJELENTÉSE

A KUTATÁS EREDMÉNYEI

A pályázat támogatásával 23 dolgozatot írtam, amelyek megjelentek vagy megjelenés alatt állnak nemzetközi szakfolyóiratokban, továbbá 6 előadást tartottam külföldi egyetemeken illetve konferenciákon.

Egy integrálható θ függvény segítségével egy általános összegzési eljárást dolgoztam ki ortogonális sorokra. Bizonyos feltételek esetén ez a θ összegzés örökli a Fejér összegzés kedvező tulajdonságait. Többek között igazoltam, hogy a θ közepek maximáloperátora korlátos a H_p Hardy térből az L_p térbe $(1/2 < p \leq \infty)$ és gyengén (1,1) típusú. A $p = 1/2$ végpontban egy gyenge egyenlőtlenséget bizonyítottam. Ebből következik, hogy egy $f \in L_1$ függvény θ közepei m.m. tartanak f-hez. A trigonometrikus Fourier, Walsh-Fourier, Walsh-Kaczmarz-Fourier, Vilenkin-Fourier és Ciesielski-Fourier sorokat és a Fourier transzformáltakat vizsgáltam. A θ összegzés speciális eseteként foglalkoztam a Weierstrass, Picar, Bessel, Riesz, de La Vallée-Poussin, Rogosinski és Riemann összegzésekkel. Ugyanezen eredményeket beláttam többdimenziós Fourier sorokra és Hardy terekre is. Ezt a problémakört megvizsgáltam a Marcinkiewicz-θ összegzésekre is. A Marcinkiewicz összegzés a többváltozós ortogonális sorok részletösszegeinek az átlós összegzését jelenti.

Hans G. Feichtinger bécsi matematikussal közösen is dolgoztunk az egy- és többváltozós Fourier sorok és transzformáltak θ-szummációján, de más megközelítésben. Olyan, a szummációelméletben eddig még nem vizsgált terekkel foglalkoztunk, amelyek a Gábor analízisben nagy szerepet játszanak, pl. a Wiener amalgám terek, Feichtinger algebra, modulációs terek, Herz, Besov és Sobolev terek, illetve ezek súlyozott változatai. Igazoltuk, hogy a θ-szummáció pontosan akkor konvergál L_1 normában (minden integrálható függvényre), egyenletesen vagy minden pontban (minden folytonos függvényre), ha θ Fourier transzformáltja integrálható. Ebben az esetben minden homogén Banach térben is van konvergencia. Ha θ pl. a Feichtinger algebrában van, akkor a feltételek teljesülnek. Több, új elégséges feltételt is találtunk, hogy egy függvény benne legyen a Feichtinger algebrában. Több mint 20 példát adtunk a θ szummációra. A pontonkénti konvergenciára is sikerült szükséges és elégséges feltételt adnunk Wiener amalgám térbeli függvényekre. Ezek a terek speciális esetben megadják az L_p tereket, de bizonyosak közülük jóval tágabbak még az L_1 térnél is. A legnagyobb közülük a $W(L_1, \ell_\infty)$ tér, amely azon függvényeket tartalmazza, amelyek egységnyi hosszú intervallumokon vett integráljainak szuprémuma véges. Tehát, a θ közepek minden Wiener amalgám térbeli (vagy integrálható) függvény minden Lebesgue pontjában konvergálnak akkor és csak akkor, ha θ egy bizonyos Herz térben van. Ez a Fejér közepekre vonatkozó jól ismert Lebesgue tétel nagy méretû általánosítása. Ismeretes, hogy majdnem minden pont Lebesgue pont.

Ezek után megvizsgáltuk a Herz térbeli függvények θ-szummációját. Az előzőekhez hasonlóan a pontonkénti konvergenciára szükséges és elégséges feltételt adtunk. A θ közepek minden (súlyozott) Herz térbeli függvény minden Lebesgue pontjában konvergálnak akkor és csak akkor, ha θ egy bizonyos Herz térnek eleme.

Egy másik cikkben a Fourier transzformáltakra vonatkozó Hausdorff operátor korlátosságát igazoltam a H_p Hardy tereken egy- és többváltozós esetben is.

Ismeretes, hogy Walsh-Fourier sorokra a Cesàro (vagy C, α) és Riesz közepek maximáloperátora korlátos a H_p Hardy térből az L_p térbe, ha $p > 1/(\alpha+1)$. Simon Péterrel közösen igazoltuk, hogy $p \leq 1/(\alpha+1)$ esetén az állítás nem igaz már, de $p = 1/(\alpha+1)$ esetén egy gyenge egyenlőtlenség még teljesül.

A pályázat támogatásával intenzíven foglalkoztam más ortogonális rendszerekkel is, pl. a Ciesielski rendszerekkel. Ciesielski, az egyik legnagyobb lengyel matematikus, a 60-as években vezette be az azóta róla elnevezett biortogonális rendszereket. A Ciesielski rendszerek a Walsh rendszer általánosításai és ugyanolyan úton, tehát ugyanazon mátrixok segítségével nyerhetők az (m, k)-ad rendű spline rendszerekből, ahogyan a Walsh rendszer a Haar rendszerből. Ha $m = -1$ és $k = 0$ akkor a megfelelő spline rendszer megegyezik a Haar rendszerrel, így a Ciesielski rendszer a Walsh rendszert adja. Ha pedig $m = k = 0$, akkor a spline rendszer a jól ismert Franklin rendszerbe megy át. A spline rendszerek kiváló bázis tulajdonságokkal rendelkeznek: ekvivalens és feltétlen bázisok az L_p és Hardy terekben. A Ciesielski rendszer megőrzi a Walsh rendszer néhány kedvező tulajdonságát, ugyanakkor bizonyos szempontból előnyösebb is, hiszen folytonos, sőt, adott esetben differenciálható függvényekbõl áll. Ciesielski mellett olyan híres matematikusok foglalkoztak ezekkel a rendszerekkel, mint Carleson, Woytaszczik, Maurey, Bockariev, Sjölin, Strömberg, Gevorkyan, Schipp.

Több, a trigonometrikus vagy Walsh rendszerre ismert klasszikus tétel még ismeretlen volt Ciesielski-Fourier sorokra. Ezekből bizonyítottam néhányat.

Beláttam az erős összegzési tételt Ciesielski-Fourier sorokra is, azaz igazoltuk, hogy minden integrálható függvény erősen is összegezhető. E tétel bizonyítása nagyságrendileg nehezebb, mint a trigonometrikus vagy Walsh esetben. Ciesielski többször is felvetette ezt a problémát a szakirodalomban. Igazoltam továbbá, hogy az erős maximáloperátor gyengén $(1, 1)$ típusú, de már nem korlátos H_1-ből L_1-be.

Igazoltam az erős szummációs tételt többváltozós Ciesielski-Fourier sorokra is. A Paley egyenlőtlenséget általánosítottam egy- és többváltozós Ciesielski-Fourier együtthatókra és Hardy terekre. Ismeretes, hogy L_p–beli ($p >$1) függvény esetén a Fourier sor részletösszege majdnem mindenütt konvergál a függvényhez (Carleson tétel), mind a trigonometrikus, Walsh és Ciesielski rendszer esetén. E tétel nem igaz már az L_1 térre, sőt a H_1 Hardy térre sem. Ciesielski-Fourier sorokra igazoltam, ha ún. hézagos részletösszegeket veszünk, akkor már igaz marad a konvergencia H_1 függvényekre is.

Ciesielski egy kérdésére válaszolva igazoltam a Littlewood-Paley egyenlőtlenséget és a Marcinkiewicz multiplier tételt egy- és többváltozós Ciesielski-Fourier sorokra is, valamint a multiplier tételt kiterjesztettem Hardy terekre is. A többváltozós Ciesielski rendszerekre vonatkozó Sunouchi operátor korlátosságát is megvizsgáltam az L_p és Hardy terekben és ennek segítségével eddig még nem ismert erős összegzési eredményeket értem el.

Ezenkívül Ciesielski 70. születésnapjára rendezett konferenciára meghívottként írtam egy összefoglaló cikket a Ciesielski-Fourier sorokról.

Továbbá intenzíven foglalkoztam vektor-értékű Hardy terekkel és vektor-értékű Vilenkin-Fourier sorokkal. A Hardy és BMO terek közötti dualitást kiterjesztettem Banach tér értékű martingálokra. Megadtam a vektor-értékű martingál Hardy terek atomos felbontását. Marcinkiewicz egy klasszikus egyenlőtlenségét kiterjesztettem UMD tér értékű Vilenkin-Fourier sorokra. Bebizonyítottam, hogy egy $f \in L_p(X)$ $(1 < p < \infty)$ függvény Vilenkin-Fourier sora konvergál f-hez $L_p(X)$ normában akkor és csak akkor, ha X egy UMD tér. Igazoltam a jól ismert Carleson tétel kiterjesztését, azaz ha X egy UMD Banach tér és $f \in L_p(X)$ valamely $1 < p < \infty$-re, akkor f Vilenkin-Fourier sora konvergál f-hez majdnem mindenütt X normában. E tétel természetesen nem igaz $L_1(X)$ vagy $H_1(X)$-beli függvényekre. Azonban, hasonlóan a fentiekhez, egy $f \in H_1(X)$ UMD tér értékű függvény Vilenkin-Fourier sorának hézagos részletösszegei majdnem mindenütt konvergálnak f-hez X normában.

Végezetül egy új tudományterületen is elkezdtem dolgozni, a magyar Gábor Dénesről elnevezett Gábor analízis (vagy idő-frekvencia analízis) témakörben. Bekapcsolódtam az e témában folyó nemzetközi kutatásokba és a téma egyik legkiválóbb szakértőjével, Prof. Hans G. Feichtingerrel dolgoztam együtt.

A Gábor analízis fiatal tudományág és sok gyakorlati alkalmazása van, de Magyarországon még kevéssé művelt. Több cikket írtam illetve konferencián elő is adtam a Gábor analízisben elért eredményeimből. Sikerült összefüggést találnom a szummációelméletet és a Gábor analízis elmélete között és Gábor sorokra illetve Gábor transzformáltra illetve ezek összegzéseire bizonyítottam konvergencia tételeket.

2007. február 18.

Dr. Weisz Ferenc
egyetemi tanár

PUBLIKÁCIÓJEGYZÉK

Referált tudományos folyóiratokban megjelent dolgozatok

[1] Weisz, F.: Weak type inequalities for the Walsh and bounded Ciesielski systems. Analysis Math. 30, 147-160 (2004)

[2] Weisz, F.: θ-summability of Fourier series. Acta Math. Hungar. 103, 139-176 (2004)

[3] Weisz, F.: Strong summability of Ciesielski-Fourier series. Studia Math. 161, 269-302 (2004)

[4] Weisz, F.: Paley type inequalities and multipliers for Ciesielski-Fourier series. Acta Sci. Math. (Szeged) 70, 77-89 (2004)

[5] Weisz, F.: Almost everywhere convergence of Ciesielski-Fourier series of H_1 functions. Archiv der Math. 83, 135-145 (2004)

[6] Weisz, F.: Strong summability of more-dimensional Ciesielski-Fourier series. East J. Appr. 10, 333-354 (2004)

[7] Weisz, F.: The boundedness of the Hausdorff operator on multi-dimensional Hardy spaces. Analysis 24, 183-195 (2004)

[8] Weisz, F.: Marcinkiewicz-θ-summability of double Fourier series. Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. 24, 103-118 (2004)

[9] Weisz, F.: Summation of Fourier series. Acta Math. Acad. Paed. Nyíregyháziensis. 20, 239-266 (2004)

[10] Weisz, F.: Marcinkiewicz multiplier theorem and the Sunouchi operator for Ciesielski-Fourier series. J. Appr. Theory. 133, 195-220 (2005)

[11] Weisz, F.: Hardy-Littlewood inequalities for Ciesielski-Fourier series. Analysis Math. 31, 217-233 (2005)

[12] Weisz, F.: Wiener amalgams and summability of Fourier series. Annales Mathematicae et Informaticae. 32, 167-186 (2005)

[13] Feichtinger, H.G., Weisz, F.: The Segal algebra $\mathbf{S}_0(\mathbb{R}^d)$ and norm summability of Fourier series and Fourier transforms. Monatshefte Math. 148, 333-349 (2006)

[14] Feichtinger, H.G., Weisz, F.: Wiener amalgams and pointwise summability of Fourier transforms and Fourier series. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 140, 509-536 (2006)

[15] Weisz, F.: Multiplier theorems for multi-dimensional Ciesielski-Fourier series. East J. Appr. 12, 261-293 (2006)

[16] Feichtinger, H.G., Weisz, F.: Inversion formulas for the short-time Fourier transform. J. Geom. Anal. 16, 507-521 (2006)

[17] Feichtinger, H.G., Weisz, F.: Gabor analysis on Wiener amalgams. Sampl. Theory Signal Image Process. (2007) (to appear)

[18] Feichtinger, H.G., Weisz, F.: Herz spaces and summability of Fourier transforms. Math. Nachr. (to appear)

[19] Weisz, F.: Hardy spaces and convergence of vector-valued Vilenkin-Fourier series. Publ. Math. Debrecen 70, (2007) (to appear)

[20] Weisz, F.: Almost everywhere convergence of Banach space-valued Vilenkin-Fourier series. Acta Math. Hungar. (to appear)

[21] Simon, P., Weisz, F.: Weak inequalities for Cesàro and Riesz summability of Walsh-Fourier series. J. Appr. Theory. (to appear)

[22] Weisz, F.: Some convergence theorems for Gabor series. Pure Mathematics and Applications (submitted)

Nemzetközi konferencia kiadványok

[23] Weisz, F.: Results on spline-Fourier and Ciesielski-Fourier series. in Approximation and Probability. Banach Center Publications, Vol. 72, 367-383 (2006)

Előadások

[24] Summation of Fourier series. Dyadic Analysis with Applications and Generalizations, Balatonszemes, 2003

[25] Wiener amalgams and summability. University of Vienna, Numerical Harmonic Analysis Group, Faculty of Mathematics, 2004

[26] Feichtinger's algebra and summability of Fourier series. Conference on Modern Methods of Time-Frequency Analysis, Strobl, 2005

[27] Wiener amalgams and summability of Fourier series. „Fejér-Riesz Conference", Eger, 2005

[28] Inversion formulas and multipliers for STFT. University of Vienna, Numerical Harmonic Analysis Group, Faculty of Mathematics, 2006

[29] Some convergence theorems for Gábor series. 6th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Pécs, 2006