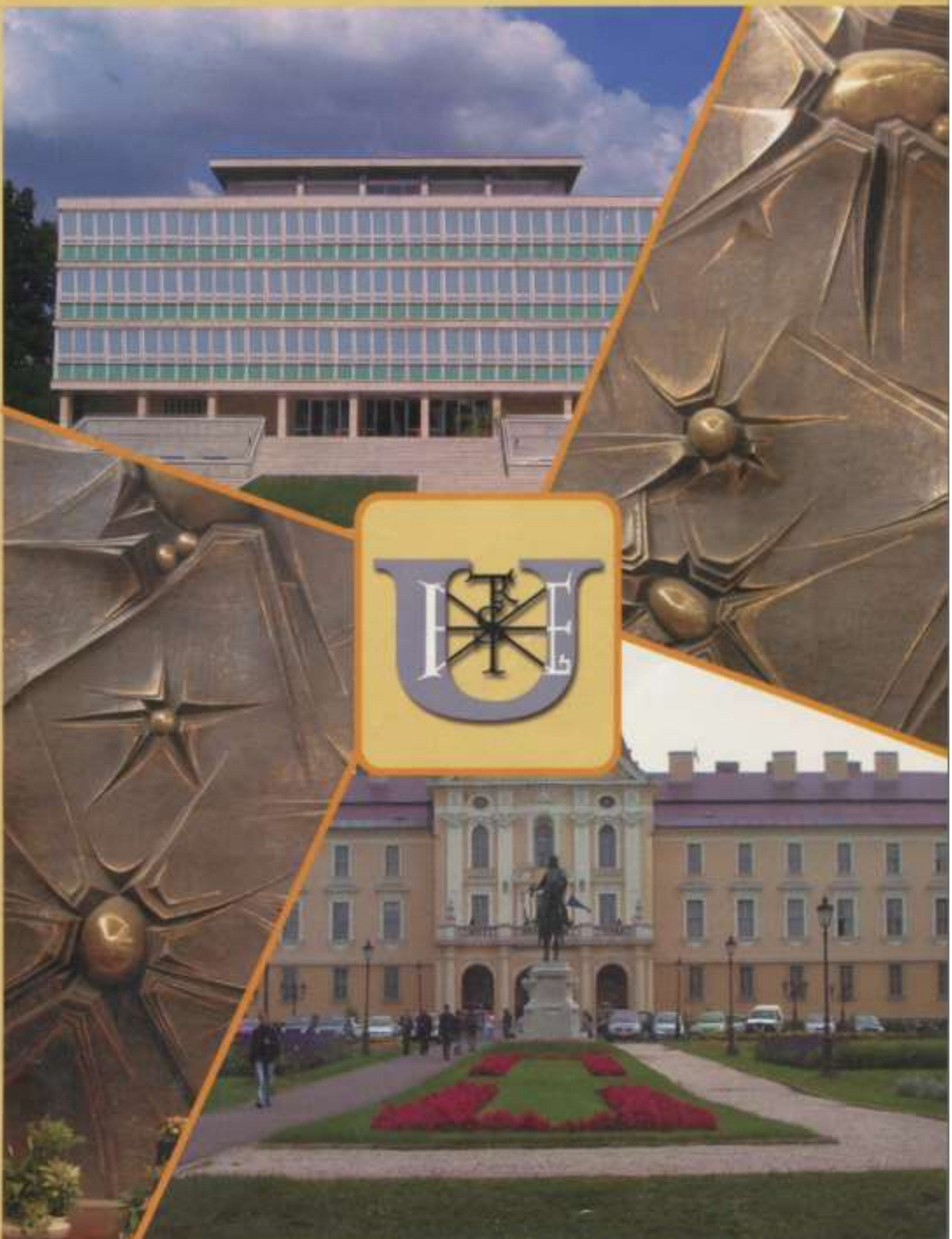
SZENT ISTVÁN
EGYETEM

BENKŐ JÁNOS

Készletgazdálkodás

Eljárások, modellek



Szent István Egyetemi Kiadó

Benkő János

Készletgazdálkodás

Eljárások, modellek

Gödöllő 2018.

Ez a kiadvány a Logisztika Oktatásért és Kutatásért Alapítvány támogatásával készült

Írta:
Dr. Benkő János
egyetemi tanár, a közgazdaságtudomány kandidátusa

Kiadja a Logisztika Oktatásért és Kutatásért Alapítvány
2100 Gödöllő, Páter K. u. 1.
Szerkesztette: dr. Benkő János

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ

Bármely szervezetben a menedzsment feladata a szervezeti célok eléréséhez szükséges erőforrások beszerzése, elhelyezése, irányítása és ellenőrzése. Ezek az erőforrások jellemzően a munkaerő, a tőke, a berendezések és az anyagok, amelyek közül e könyv középpontjában az anyagok állnak, amelyeket a szervezetek tevékenységük során valamilyen formában beszereznek, felhasználnak, átalakítanak, majd elosztanak vagy értékesítenek.

A múltban az anyaggazdálkodást rutinszerűen végezett, egyszerű raktári tevékenységnek tekintették. Napjainkra ez a tevékenység kifinomult, elméletileg megalapozott funkcióvá fejlődött, amely alapvetően befolyásolja a szervezet teljesítményét. Ez a felismerés jelentősen megváltoztatta az anyagmenedzsmentet helyét és súlyát a vállalati menedzsmentben.

A könyv az anyaggazdálkodásban (amelyet talán helyesebb készletgazdálkodásnak nevezni, és ennek is a szélesebb körű értelmezését használni, amely kiterjed értékesítésre vagy felhasználásra váró és a fel nem használt készletek is) használható modelleket, eljárásokat, módszereket mutat be. A készletgazdálkodás modelljei, eljárásai a legkülönbözőbb területeken, pl. a vízerőművek vízszint szabályozására, a pénzgazdálkodásra, a munkaerőszint szabályozásra, az általános erőforrás-elosztásra is alkalmazhatók. Általánosságban elmondható, hogy a készletgazdálkodás termelőeszközökre, például berendezésekre, gépalkatrészekre, szerszámokra, személyzetre, járművekre, készpénzre, stb. is vonatkozhat.

A szűkebb értelmezés szerint a készletgazdálkodás feladata az anyagok beszerzése, a szervezeten belüli áramoltatása, valamint elosztása. Az áramlás hatékonysága és eredményessége jelentősen befolyásolhatja a költségeket, valamint a bevételeket, és így komoly hatása van a marketingre, a pénzügyekre és a termelésre. A készletmenedzsment küldetése, hogy a gyártott és elosztott termék a megfelelő mennyiségekben, a megfelelő helyen és a megfelelő időben álljanak rendelkezésre, alacsony költségű és magas szintű vevőkiszolgálás mellett. Lényegében, a küldetését úgy teljesíti, hogy egyensúlyt keres rendszerköltségek és a vevői elégedettség között, miközben a bizonytalan termelési környezetben az anyaghiányok és feleslegek elkerülésére törekszik. A készletgazdálkodásban foglalkoztatott menedzser ennek érdekében, pénzügyekkel is összefüggő kulcsfontosságú kimeneti mutatókra koncentrál, mint például: (1) a vevőszolgálat színvonala (kielégített vevőigények aránya, vagy kiszolgálási arány); (2) az átlagos készletszint és az utánrendelés szintje; (3) az elveszett eladások aránya és mennyisége.

Ez a könyv a Szent István Egyetem Logisztikai Menedzsment mesterszak hallgatói számára készült, de reményeim szerint a gyakorlati szakemberek is hasznosan forgathatják. A kötött terjedelem és a rendelkezésre álló óraszám korlátozott volta miatt, az irodalomból ismert elméleti modellek közül válogatni kellet. A válogatás elsődleges szempontja a gyakorlati alkalmazhatóság volt, az elméleti és a gyakorlati ismeretek megfelelő arányainak megtartása mellett. Először egyszerű rendszereket mutatunk be, és ezek felől haladunk a bonyolultabb modellek felé. A könyvben számos kidolgozott mintapélda, esettanulmány segíti a tananyag megértését.

Szeretném köszönetemet kifejezni azoknak a hallgatóknak, kollégáknak, akik hasznos tanácsaikkal, észrevételeikkel hozzájárultak korábbi kiadások hibáinak kijavításához és a tartalom bővítéséhez.

Gödöllő, 2018. február

Prof. Benkő János

1. A KÉSZLETEZÉSI RENDSZER

A készletek jelenlétét a gazdaságban fizikai és gazdasági kényszerűségek indokolják. E kényszerek abból fakadnak, hogy sem fizikailag, sem gazdaságilag nem célszerű a terméket akkor és ott előállítani, ahol a szükséglet jelentkezik irántuk. E munkamegosztás következtében a termelés és a fogyasztás egyes szakaszai és mozzanatai **időben és térben elkülönülnek** egymástól. Ráadásul a különböző helyeken zajló termelési folyamatok **kapacitásai** is nagy különbségeket mutathatnak, amelynek okai között említhetők:

kevés az olyan termék létezik, amelyet az igényekhez igazodó sorozatnagysággal gazdaságosan lehet termelni,

a nem csekély gépátállítási költségek miatt a raktárra történő termelést nem lehet elkerülni,

a termelőeszközök kapacitása és a piaci kereslet általában időben, és mennyiségben nem fedi egymást (pl. szaloncukor, húsvéti nyulak és mikulások).

Más esetekben a termelés s**zezonális**. Ilyen például a mezőgazdasági termelés, ahol a termesztett növények a betakarítási, szüretelési ideje évszakokhoz kötődik. Az esetleges **válsághelyzetek** miatt, ajánlatos korlátozott raktárkészletet tartani az életfontosságú termékekből.

A termelési helyek közötti **távolságok áthidalása** időt igényel, amelyet gyakran váratlan események zavarnak meg. Sokszor nem az előállítás, hanem a szállítás ütközik időbeli korlátokba. Például a kontinensek közötti áruforgalom a hajójáratokhoz kötődik.

Így ahhoz, hogy az egymást követő folyamatok ne szaggatottan és esetlegesen, hanem folyamatosan és stabilan menjenek végbe, az ellátási-lánc és a részfolyamatok kapcsolódási pontjain szükségszerű a készletfelhalmozás. A kiskereskedők, a nagykereskedők és a gyártók ezért kénytelenek az anyagok és termékek bizonyos mennyiségét készletezni, raktározni.

A készletezés céljai alapvetően három csoportba sorolhatók:

a kereslet kielégítési és utánpótlási folyamatban mutatkozó, normálisnak mondható ingadozások kiegyenlítése (pl. a mezőgazdasági eredetű alapanyagok szezonális beszerzési lehetősége, a termelési folyamatok eltérő sorozatnagysága, kapacitása);

váratlan problémák esetén manőverezési lehetőség biztosítása (az utánpótlás fennakadása, váratlan meghibásodás);

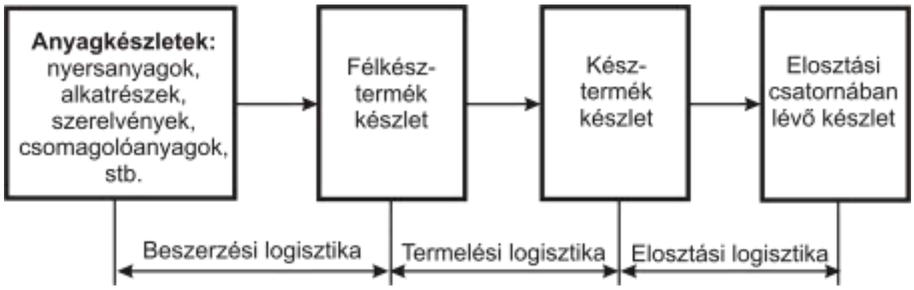
az üzleti lehetőségek kihasználása (mennyiségtől függő árengedmények, szezonális ármozgások stb.).

1.1. A logisztika és a készletezés kapcsolata

A készletek az ellátási-lánc (SCM) valamennyi pontján, a beszerzés, a termelés és az elosztás területén egyaránt megjelennek (*1.1. ábra*), és ezeken a helyeken egyebek mellett, valamilyen készletgazdálkodási feladatot is jelentenek. Az is mondhatjuk, hogy a készletezés átszövi a logisztika valamennyi területét, a beszerzési, a termelési és az elosztási logisztikát.

1.1.1 Beszerzési logisztika

A beszerzési logisztika feladata, hogy a termeléshez szükséges alap-, segéd- és üzemanyagok, alkatrészek és félkész-termékek a megfelelő mennyiségben és minőségben, a megfelelő időpontban, a megfelelő helyen, megfelelő költséggel álljanak rendelkezésre. E feladatot ellátásához a beszerzési logisztika az anyagellátással kapcsolatos anyagáramlás és az ehhez kapcsolódó információáramlás megtervezését, megszervezését, irányítását és ellenőrzését végzi. Azt is mondhatjuk, hogy a beszerzés a termelés ütemének megfelelő anyagszükséglet folyamatos kielégítését szolgálja.



1.1. ábra: Készletek a logisztikában

A termelési program és az anyagnormák ismeretében egy adott időszak anyagszükséglete pontosan tervezhető, továbbá ismertek a termeléshez szükséges anyagok beszerezési forrásai is. Ennek ellenére az anyagellátásban problémák jelentkezhetnek, amelyek egyrészt a termelési program nem tervezett változásaira és bizonytalanságaira, másrészt a külső beszállítóknál mutatkozó előre nem kalkulálható eseményekre vezethetők vissza.

A beszerzési logisztika nem megfelelő működése egyrészt anyaghiányhoz, másrészt nemkívánatos mennyiségű készlet-felhalmozódásához vezethet. Az anyaghiány a termelésben okoz zavarokat, a nagy készlet pedig sokba kerül. A vállalatok ezért a versenyképességük megőrzése, illetve növelése érdekében a készletek és az átfutási idők csökkentésére, ugyanakkor a vevők igényeinek rugalmas kielégítésére törekszenek, ami beszerzési menedzsment megfelelő kialakításával és működtetésével érhető el.

A beszerzési oldalon a logisztikával szembeni követelmények a következőképpen fogalmazódnak meg:

- a termeléshez olcsó, de minőségileg megfelelő anyagok biztosítása,
- a körülményekhez képest rövid szállítási idők elérése a beszállítóknál,
- rugalmas és megbízható beszállítás.

A beszerzési logisztika folyamatában hozott döntések lényegében a keresleti előrejelzésekből levezethető alapanyagigények kielégítésére, a készlethiányok és feleslegek elkerülésére, a legmegbízhatóbb és legolcsóbb beszerzési források felkutatására irányulnak.

1.1.2 Termelési logisztika

A termelési logisztikában a készletezés a termelési −átalakítási− folyamaton belüli anyagellátási tevékenység megszervezését valósítja meg, az egymást követő gyártási fázisok közötti termelésközi készletekkel való gazdálkodással.

A készletezési politika a készletek összetételére, a leköthető eszközök nagyságára és a lekötés időpontjára vonatkozó döntéseket tartalmazza. A döntések meghozatalánál tekintettel kell lenni arra, hogy a készletezési tevékenység a vállalati működés fontos integráló tényezője. A vállalati készletezés célja, hogy a gazdaságosság követelményeit szem előtt tartva biztosítsa az anyagi folyamatok zavartalanságát. A vállalatvezetés a készletekben lekötött tőke (forrás) nagyságáról a kiszolgálás minősége és a ráfordítások közti összefüggés ismeretében alapján dönthet. Általában a magasabb kiszolgálási szint nagyobb befektetést igénnyel.

1.1.3 Elosztási logisztika

Az elosztási logisztika magában foglalja az ügyfélkapcsolatok kiépítését, valamint a vevői rendelések bonyolítását, beleértve a rendelésrögzítést, a rendelési állomány kezelését és a kiszállítás lebonyolítását, egészen a számla elkészítéséig. A vállalatoknak ezen a területen, a késztermékek elérhetősége érdekében, a következő követelményeknek kell megfelelni:

rövid szállítási idő,

megfelelő szállítási minőség és készenlét,

szállítási megbízhatóság és rugalmasság.

Az elosztási logisztika alapfeladata a késztermék (áru) eljuttatása a fogyasztóhoz, amelynek műveletei a **készletezés**, csomagolás, komissiózás, kiszállítás, illetve az ezekhez a műveletekhez kapcsolódó irányítási, informatikai folyamatok menedzselése.

A rendszer rugalmassága a logisztikai rendszer felépítésétől, a kereslet kielégítés időzítésétől (rendelésre, vagy készletre történő gyártás), és a szállítási technológiától függ. Az elosztási logisztika folyamatában hozott döntések a készárukészletek nagyságára, a kiszállítások időben történő teljesítésére, a legkedvezőbb szállítási forma, vagy fuvareszköz megválasztására vonatkoznak.

1.1.4 Az ellátási-lánc működése és elemei

Lényegében a logisztika három területét integráló **ellátási-lánc a küldetését** úgy teljesíti, hogy egyensúlyt keres rendszerköltségek és a vevői elégedettség között. Ezt a következő ellátási-lánc elemek költséghatékony integrációjával és koordinációjával oldja meg:

1. Az ellátási-lánc csomópontjait felölelő szállítók, gyárak, raktárak, és boltok.
2. A csomópontokat összekapcsoló szállítási hálózat.
3. Az informatika-infrastruktúra, amely lehetővé teszi az adatcserét az ellátási-lánc csomópontjai között, támogatja az ellátási-lánc tervezését és a napi operációk lebonyolítását.
4. A módszerek és algoritmusok az anyagáramok és a készletmenedzsment irányításához.

Elméletileg közelítve, az ellátási-láncok lényegében lépcsősen rendezett, ellátó hálózati struktúrák, előre, visszafelé és mindkét irányban áramló összetevőkkel. A nyersanyagok, alkatrészek, termékek, stb. a főáram irányában mozognak, a pénzmozgások ellentétes irányúak, és végül az információk mindkét irányban áramlanak. Ennek ellenére, az ellátási-láncokban az entitásáramlások iránya nincs szigorúan meghatározva, mert például a hibás termékek visszafelé mozoghatnak javításra, vagy előfordulhat, hogy az átutalt pénzt valamilyen oknál fogva vissza kell fizetni.

Az alapvető **ellátási-lánc lépcsők** a következők:

1. A **beszerzési lépcső** nyersanyagokkal vagy alkatrészekkel látja el a gyártást.
2. A **termelési lépcső** a nyersanyagokat és az alkatrészeket késztermékké alakítja át.
3. Az **elosztási lépcső** az elosztási hálózatból áll: raktárak, az elosztó központok, szállítási létesítmények, amelyek késztermékeket mozgatnak a kereskedőkhöz.
4. A **kereskedelmi lépcső** értékesíti a termékeket a végfelhasználóknak (vevőknek).

Gyakorlatban a komplex **ellátási-láncok széles tartományt ölelnek fel** az egyszerű ellátási-láncoktól, ahol mindegyik lépcső egyetlen csomópont, a bonyolultakig, ahol mindegyik lépcső önmaga is egy bonyolult hálózat, amely több csomópontból és élből áll. Például a termelési lépcső lehet hierarchikus, amelyben a beszállító üzemek alkatrészekkel látják el az alkatrészeket bonyolultabb félkész vagy végtermékekké összeszerelő integrátor üzemet. Hasonlóan az elosztóhálózatok tartalmazhatnak nagyszámú hierarchikusan szervezett raktárt az elosztó központtól a nagykereskedelmi raktáron át a kiskereskedelmi raktárig. Az is tény, hogy az ellátási-lánc átlépheti a nemzeti határokat és kiterjedhet több kontinensre.

1.2. Raktározás és a készletezés kapcsolata

A raktározás tárolás és a készletezés között a köznyelv, de sokszor a szaknyelv sem tesz különbséget. A raktározás technológiai fogalmait definiáló szabvány (MSZ 12 895/1) integráló fogalomként definiálja a raktározást. A **raktározás** szó értelmezésünk szerint integrálja a tárolást közvetlenül megelőző és követő raktáron belüli fizikai folyamatokat (mozgatás, egységrakomány-képzés, komissiózás stb.), továbbá a fizikai folyamatokat működtető irányítási tevékenységeket (készletezés, nyilvántartás, ellenőrzés, stb.). A **tárolás** az előző definícióból következően csak az áru nyugalmi állapotát jelenti, a **tárolóhely** pedig azt a helyet, ahol az áru nyugszik. Az irányítási folyamatok között említett **készletezés,** olyan tevékenység, amely a készletváltozás és az igények ismeretében a tárolt áruk megrendelésének időpontjáról és mennyiségéről hoz döntéseket. A **készlet** egy adott helyen tárolt áru mennyiségét jelenti.

A raktározás és a készletezés sajátos szerepet tölt be a kitermeléstől a felhasználásig (fogyasztásig) terjedő komplex ellátási-láncban. A raktárak, mint alrendszerek a részfolyamatok összekötő elemeinek tekinthetők, amelyek a megelőző és a követő részfolyamatok kapacitás különbségeinek kiegyenlítése és a termelés folyamatosságának fenntartása érdekében árukat (anyagokat, félkész-termékeket, termékeket, stb.) halmoznak fel, **készleteznek**, majd tovább adják azokat.

Kérdés lehet, hogy a raktárak kiiktathatók-e az ellátási-láncból. Könnyen belátható, hogy csak akkor nélkülözhetnénk a raktárakat, ha

bármely áru bármely helyen a szükséges mennyiségben előállítható lenne,

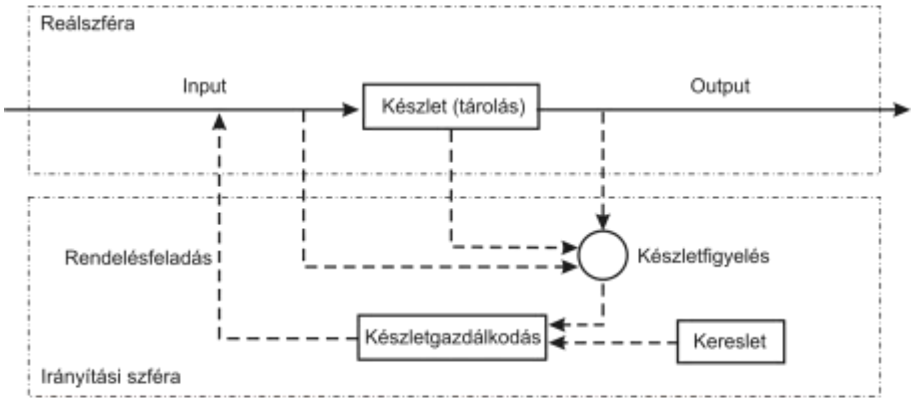
az egyedi gyártás gazdaságos volna, és pl. univerzális gépek, berendezések időigényes átállítás nélkül sokféle terméket tudnának előállítani,

a termelés és a kereslet időben és mennyiségben lefedné egymást,

a végfelhasználók számára előnyös mennyiség megegyezne az ideális termelési, szállítási, rakodási és raktározási mennyiséggel,

mindennemű válsághelyzetet kizárhatnánk.

Miután ilyen ideális helyzetek a valóságban nem léteznek, értelemszerűen a raktározás elkerülése érdekében tett felesleges erőfeszítések helyett a költségek csökkentésére, a tárolóhelyek jobb kihasználására, a rakodási teljesítmények javítására, a gazdaságosságra stb. kell törekedni.



1.2. ábra: A készletezési rendszer modellje

A **raktárak** olyan létesítmények, amelynek befogadóképessége alkalmas a szükséges mennyiségű áru (készlet) tárolására, az áruk mennyiségének minőségváltozás és veszteség nélküli megőrzésére, illetve mozgatási rendszerük révén a megfelelő intenzitású ki- és betárolásra.

A termelési folyamatok szakadási pontjain szabályzó vagy kiegyenlítő szerepet betöltő **raktározási rendszer** a raktározási feladatok megoldásában közreműködő rendszerelemek (tárolt anyagok, gépek, eszközök, berendezések, létesítmények, emberek, folyamatok, tevékenységek, stb.) összességét jelenti. Ezek az elemek, amelyek között fontos szerepet játszik a készletezés, emberi közreműködéssel, a környezetből érkező információk (pl. igények) és energiák segítségével összehangoltan működnek.

A **készletezési rendszer** tehát a raktározási rendszer alrendszere, amely a reál és irányítási szférában működik (*1.2. ábra*). A reálszférában a készletezés fizikai folyamati a beszállítás, tárolás és kiszállítás. Az irányítási szférában a készletek változásáról a **készletfigyelés** tájékoztatja a **készletgazdálkodást**, amely a kereslet vagy igények ismeretében rendelésfeladással korrigálja a készletszintet. A készletezési rendszer tehát a termelés vagy a fogyasztás folyamatos és stabil működéséhez a szükséges mennyiségű árukészletek (anyagok, félkész-termékek, termékek, stb.) fenntartásával járul hozzá.

A készletezéshez természetesen a reálszférában más ún. kiegészítő fizikai folyamatok is tartoznak, ilyenek például a komissiózás, csomagolás, egységrakomány-képzés és bontás, minőségi és mennyiségi megőrzés.

1.3. Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse a készletezés okait, milyen kérdésekre ad választ a készletezési elmélet!
2. Milyen zavarokat okozhat a készlethiány és milyen következményekkel jár?
3. A készletezés helye az ellátási-láncban.
4. Ismertesse a készletezési rendszer modelljét és annak működését!
5. Értelmezze a raktározás és a készletezés kapcsolatát.

2. KÉSZLETEZÉSI ALAPFOGALMAK

2.1. A készletek csoportosítása

A készleteket különböző szempontok szerint lehet csoportosítani. A nemzetgazdaságban **szektorok szerint**: ipari, mezőgazdasági, kereskedelmi, stb. A készletezett **áruk jellege szerint**: tartós, romlékony (FMCG: Fast Moving Consumer Goods), élőállat, stb. Termelő vállalatoknál a **termelésben betöltött funkció szerint**: anyagok, félkésztermékek, késztermékek. **Számviteli, származási szempontból**: vásárolt készletek, saját előállítású készletek.

A **vásárolt készletek** lehetnek anyagok vagy áruk. Az **anyagok** (alapanyagok, segédanyagok, fűtőanyagok, üzemanyagok, irodaszerek, stb.) olyan munkatárgyak, amelyek a gyártási folyamatban a termék előállításához szükségesek, alakjukat elveszítik, értéküket átadják az új terméknek. Az **áruk** (nagykereskedelmi áruk, kiskereskedelmi áruk, vendéglátó-ipari áruk, göngyölegek, stb.) változatlan állapotban továbbértékesített termékek.

Saját előállítású készletek késztermékek, félkész-termékek, befejezetlen termelés, növendék- és hízó állatok, stb. lehetnek. A **késztermékek** olyan készletek, amelyeken a megmunkálási folyamat minden művelete befejeződött, minőségileg átvettek és értékesíthetőek. A **félkész-termékek** az adott vállalat szempontjából a teljes megmunkálási folyamaton keresztül mentek és értékesíthetőek, de a késztermékké váláshoz további megmunkálást igényelnek. A **befejezetlen termelés** a számbavétel időpontjában megmunkálás alatt áll, és legalább egy munkafolyamatot elvégeztek rajta. Ilyenek például a tenyészállatnak nem minősülő **növendék- és hízó állatok,** az ősszel elvetett vegetáló **gabona**.

A készletekkel való gazdálkodás, az igények meghatározása, és az egyes készletelemek rendelési eljárásának kialakítása szükségessé teszi annak vizsgálatát, hogy a különböző készletféleségek kereslete függ-e egymástól. Ebből a szempontból vannak olyan készletelemek, amelyek felhasználása között **nem tárható fel függőség** (arányos felhasználási igény). Ilyen készletelemek lehetnek a vállalatoknál a göngyölegek, a munkaruha, az irodaszerek, az üzemanyagok, stb. Ezen készleteknek a beszerzése egymástól függetlenül, önállóan szervezhető, ezért **független keresletűeknek** tekinthetők.

A készletféleségek másik csoportjánál a készletekre vonatkozó igények nagysága pontosan összefügg, azaz arányos felhasználási igény mutatható ki. Ezek a **függő keresletű** készletek, amelyeket egymáshoz viszonyítva, meghatározott arányban használunk fel. Például egy személyautó összeszereléséhez egy motor, meghatározott számú karosszériaelem, egy akkumulátor szükséges, így bármelyik hiánya a gépkocsi összeszerelést hátráltatja. A függő és független keresletű készletelemekkel való gazdálkodás, az igények felmérése, stb. jelentősen eltér egymástól.

2.2. Készletgazdálkodás működése

Készletekre tulajdonképpen az input és az outputfolyamatban mutatkozó eltérések miatt van szükség. Ha ezek az eltérések minimálisak, akkor elméletileg készlettartás nélkül, vagy nagyon kicsi készletekkel is működtethető egy termelési folyamat, amit Just in Time (JIT) beszállítási rendszernek nevezünk.

A készletekkel az outputoldalon felhasználói igényeket szolgálunk ki, ami a rendszerben készletcsökkenést eredményez (*1.2. ábra*). Annak érdekében, hogy a készletek az adott időpontban a szükséges mennyiségben rendelkezésre álljanak, azok pótlásról az inputoldalon gondoskodunk.

Az igények gyakran véletlenszerűen jelentkeznek és nem szabályozhatóak, például a kiskereskedelemben. Ha megengednénk, hogy az inputoldalon az utánpótlás is irányításnélküli legyen, akkor a készletek kiszámíthatatlanul alakulnának, ezért **a készletezés szükségszerűen irányított folyamat**. Az inputfolyamat irányítása a készletgazdálkodáson keresztül valósul meg.

A készletgazdálkodás működéséhez szükséges információk különbözőek lehetnek. Ha az outputok, illetve az ebből adódó készletváltozás alapján hozunk utánpótlási döntést, akkor **visszacsatolásos** (feedback), ha a jövőben várható fogyasztást jelzik előre, akkor **előcsatolásos** (feedforward) irányításról beszélünk. A gyakorlatban sokszor e két irányítási elv kombinációja valósul meg. A determinisztikusnak tekinthető termelési folyamatokban gyakran állandó időközönként (ciklusonként) ugyanakkora mennyiségeket rendelnek.

A **készlettervezés** kiindulópontja alapvetően a vállalkozás éves gazdálkodási tevékenységét koordináló üzleti terv, amelyből kiindulva meghatározható a vállalat által finanszírozható készletek nagysága, annak összetétele, továbbá a területileg elkülönült termelőhelyek közötti megosztása. A készlettervek megfelelő színvonalú elkészítéséhez az értékesítési, illetve a termelési tervből kell kiszámítani a készletezéssel (készletgazdálkodással) szemben megjelenő igényeket.

A fogyasztói igényekre alapozott értékesítési terv alapján először a vállalati, illetve a termelőüzemekre bontott termelési terveket készítik el, amelyekből levezethetők a különböző készletigények, és azok területi, valamint időbeni eloszlása. Ezt egészíti ki az üzemfenntartás éves terve szerinti alkatrészigény, amely szintén keresletként jelenik meg a készletgazdálkodásban.

A **készletezési politika** megválasztásakor a következő tényezőeket kell mérlegelni:

- az outputfolyamat természete (kereslet, rendelés, kiszolgálás),
- az inputfolyamat természete (forrás, rendelés),
- a költségek,
- a működési politika (elvek, döntések).

A hatékony és gazdaságos készletgazdálkodás a vállalkozás operatív működésében a piaci információk (fogyasztói igénymódosulások) gyors, késedelemmentes visszacsatolását igényli a termelésprogramozás, illetve a készletgazdálkodás felé a készlethiányok és a feleslegek elkerülése érdekében.

2.3. Az outputfolyamat (készletfelhasználás)

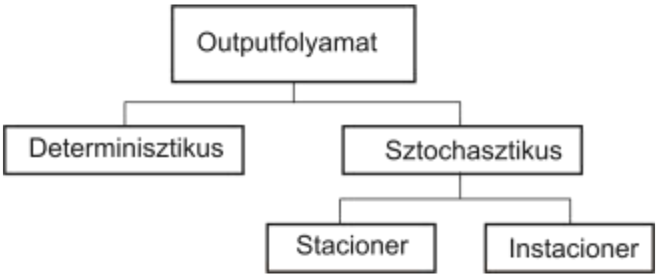
A készletek jelenlétét leggyakrabban a termelési folyamatok stabil és biztonságos működésének fenntartása igényli. (Előfordulhatnak természetesen olyan esetek is, amikor a kínálati oldal túltermelése miatt alakul ki nemkívánatos készlet. Ilyen például a készáruraktárakban felhalmozott készlet.) A készletezési rendszer mozgatórugója alapvetően a **kereslet**, mivel a kereslet idéz elő változást a készletben. Az outputfolyamat vizsgálatakor (majd később látni fogjuk, hasonlóan az inputfolyamatnál is) két jellemzőt kell figyelni. Az egyik a mennyiség, a másik az idő.

2.3.1 Az outputfolyamat természete

Az outputfolyamat természete alapvetően kétféle típusú lehet (*2.1. ábra*):

- determinisztikus (határozott),
- sztochasztikus (véletlenszerű).

Determinisztikus outputról akkor beszélünk, ha a kereslet időben és mennyiségben meghatározott, és pontosan előre jelezhető. Ilyen kereslet általában az állandó kapacitással működő tömegtermelésben fordul elő. Ebben az esetben állandó **készlet-felhasználási ráta** (μ) vagy egyszerűen felhasználási ráta definiálható, amely megadja az egységnyi idő alatt felhasznált készlet mennyiségét darab, tömeg vagy térfogat egységben.



2.1. ábra: Az outputfolyamat természete

A determinisztikus output viszonylag könnyen kezelhető, azonban tiszta formában ritkán fordul elő. A gyakorlatban szinte mindig számolni lehet valamilyen véletlen hatással. Ugyanakkor a determinisztikus output jelentette előny igazán akkor érvényesül, ha determinisztikus inputtal párosul.

Sztochasztikus outputról akkor beszélünk, ha a kereslet időben és/vagy mennyiségben, véletlenszerűen változik. Ilyen keresleti folyamatnak tekinthető például a termelő berendezések pótalkatrészeire vonatkozó igény. A berendezések meghibásodása véletlenszerűen következik be, így előre nem tudjuk megmondani, hogy egy adott alkatrészre mikor lesz szükség. Sztochasztikusnak tekinthető az olyan termékek alapanyagaira vonatkozó kereslet is, amely termékeket a fogyasztók különböző időpontokban, és különböző mennyiségekben igénylik. A sztochasztikus outputon belül további két típust különböztetünk meg: stacioner és instacioner.

A **stacioner** kereslet azzal jellemezhető, hogy bár véletlenszerű, de állandó eloszlású. Ilyen esetben, megfelelő számú adat összegyűjtése után, az outputfolyamat statisztikailag elemezhető. Az outputfolyamat tényleges természetét megvizsgálva hipotézist tudunk felállítani arra vonatkozóan, hogy az milyen eloszlásfüggvényt követ. Az adatok felhasználásával becsülhető a jellemző eloszlásfüggvény paramétere vagy paraméterei. Ugyancsak az adatok, valamint az eloszlásfüggvény ismeretében hipotézisvizsgálat végezhető arra vonatkozóan is, hogy a feltételezett eloszlástípus a becsült paraméterekkel megfelelően írja-e le az outputfolyamat természetét. Amennyiben a hipotézist elfogadhatjuk az adott eloszlásfüggvény felhasználásával az outputfolyamat kezelhetővé válik. (Például: készletezési modell építhető fel, vagy választható ki.) Ilyen stacioner folyamatnak tekinthető például az olyan termelés, amely nem állandó felhasználási rátával használja fel az inputanyagot, ingadozik, azonban hosszabb távon az időegység alatt felhasznált anyagok mennyisége és szórása is állandó. Ilyenkor valamilyen eloszlásfüggvénnyel, például normális eloszlással megkísérelhetjük leírni a keresleti folyamat eloszlását.

Az **instacioner** (nem stacioner) outputfolyamatra jellemző, hogy az outputfolyamat eloszlása és az eloszlásfüggvény paraméterei is időben változnak. Ekkor már az állandó paraméterű eloszlások nem alkalmasak a folyamat leírására. Egyszerűbb az eset, ha az eloszlás jellege állandó, csak a paraméterei változnak. A legkellemetlenebb helyzet az, amikor az eloszlásfüggvény típusa, és paraméterei egyidejűleg változnak. Ekkor, jobb híján csak a rendszerben fellépő különböző hatásokat lehet elemezni, és azt vizsgálni, hogy ezek a hatások milyen módon befolyásolják az outputfolyamat természetét (az eloszlásfüggvényt és annak paramétereit).

2.3.2 Kereslet, igény és kiszolgálás

Eddig az outputfolyamat mozgatórugójaként a keresletet említettük. Azonban a valóság ennél árnyaltabb, és lényeges, hogy különbséget tegyünk a **kereslet** és az **igény** között. Az outputfolyamat tulajdonképpen egy rendelés realizálását jelenti. A vállalati gyakorlatban a (belső) rendelést igénylésnek nevezzük. Például a karbantartás a javításhoz valamilyen pótalkatrészt igényel, vagy a termelés a raktárból alapanyagot igényel. Vegyük észre, hogy az igénylés nem teljesen azonos a kereslettel, attól nemcsak időben, hanem mennyiségben is eltérhet. Például különböző helyeken fellépő kereslet egyetlen igényként, vagy az időben egymástól kissé eltolódott kereslet (pl. két gép egymást követő meghibásodása) egy összevont igényként jelenik meg. Az outputfolyamatban ezért a kereslet az igénytől bizonyos mértékig időben eltérhet, általában megelőzi az igényt. Ezt a készletezési rendszer működésének vizsgálatakor mindig figyelembe kell venni.

A harmadik fogalom az outputfolyamat realizálásában a **kiszolgálás**, amely további késedelmet okozhat a folyamatban. A kiszolgálás gyakran igény megjelenéséhez viszonyítva is késéssel valósul meg. Például: a raktárakban az anyagkiadási rend jelentősen késleltetheti a kiszolgálást, vagyis az anyag kiáramlás késik az outputoldalon megjelenő kereslethez képest. Azt mondhatjuk, hogy az outputfolyamatot a kereslet generálja, de a kereslet nem közvetlenül az outputfolyamatot mozgatja, hanem az igénylést, és ez az igénylés a kiszolgálás meghatározott szabályai és keretei között hozza létre az outputot. Az outputfolyamat természetének vizsgálatakor tehát mindig figyelemmel kell lenni a kereslet, az igénylés és a kiszolgálás közötti különbségre.

2.4. Az inputfolyamat (készletfeltöltés)

Az inputfolyamatban a szabályozó szerepét a **megrendelés** tölti be. Azonban itt is érvényesül az outputfolyamatnál ismertetett közvetett hatás.

2.4.1 Az inputfolyamat természete

Az inputfolyamat természete hasonlóan írható le, mint az outputfolyamatoké. Itt is beszélünk mennyiségi és időbeli változásokról, itt is megkülönböztethetünk determinisztikus és sztochasztikus viselkedést, ezeken belül, stacioner és nem stacioner változatokat.

Determinisztikusnak akkor tekinthetünk egy inputfolyamatot, ha a beszállítás mennyiségét és időpontját előre ismerjük.

Az input akkor **sztochasztikus**, ha a mennyiség és/vagy a beszállítás időközei valószínűségi változók.

2.4.2 Kiszolgálási elvek

Bár az inputfolyamatot a megrendelés indítja el, és a megrendelés tölti be a szabályozó szerepét, azonban hatása a tényleges beérkezésre csak áttételesen érvényesül. A beérkezés ugyanis függ a szállítótól, illetve a szállító által alkalmazott kiszolgálási elvtől is. A kiszolgálási elv lehet:

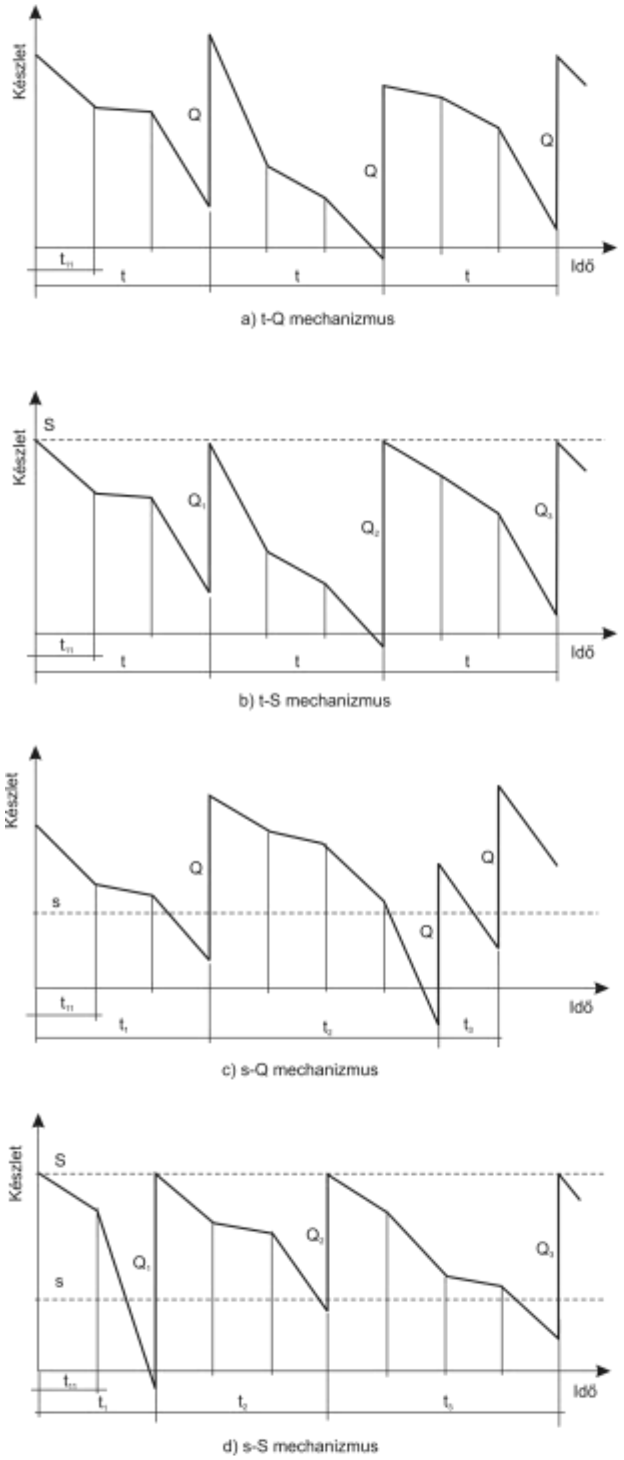
FIFO rendszerű: érkezési sorrendben elégítik ki a beérkező igényeket. A legegyszerűbb, a legkorrektebb és leghatékonyabb megoldás.

LIFO rendszerű: az igényeket a beérkezés fordított sorrendjében elégítik.

RND rendszer: a beérkező igényeket véletlenszerűen elégítik ki, nincs jelentősége az érkezési sorrendnek.

PRI rendszer: a beérkező igényeket fontossági sorrendben elégítik ki, bizonyos megrendelések vagy termékek prioritást élveznek. Szűkös készletek esetén alkalmazzák.

A készletfeltöltési folyamat tehát csak részben áll a megrendelő irányítása alatt. Legalább két további szereplővel kell számolni, akiknek a működése a beérkezést befolyásolja és bizonytalanná teheti. Az egyik szereplő az, akitől a termék érkezik (**a szállító**), a másik pedig az, aki a szállítást végzi (**a fuvarozó, szállítmányozó**). Itt is érvényesülhetnek a kiszolgálásra vonatkozó időkorlátok.



2.2. ábra: Készletezési mechanizmusok

2.4.3 Készletezési mechanizmusok

Az inputfolyamatok elméletének kérdései egyrészt a rendelés időpontjára, másrészt a mennyiségére vonatkoznak. A válaszok a **készletezés mechanizmusától** függően különbözőek lehetnek. A **rendelési időköz** attól függ, hogy a rendeléseket rögzített *t* **időközönként** kell feladni, vagy a készletutánpótlásról akkor döntünk, amikor a készletszint valamilyen s **minimális készletszintre** csökken. A **rendelési tétel nagysága** lehet **rögzített** Q, vagy a rendelési tétel akkora mennyiségre szól, hogy a beérkezés után a készlet egy előre meghatározott S **maximális készletszintet** ér el. A **készletgazdálkodási mechanizmusok** ezek kombinációi, így beszélhetünk (t,Q), (t,S), (s,Q) és (s,S) mechanizmusokról (*2.2. ábra*).

A készletezési mechanizmussal összefüggő, további fontos alapfogalmak: nyitó- és zárókészlet, folyókészlet, átlagkészlet, jelzőkészlet, biztonsági készlet és utánpótlási idő.

A **nyitókészlet** a ciklus elején rendelkezésre álló, a **zárókészlet** a ciklus végén megmaradó készlet.

A **folyókészlet** (Q_f) a készletezési folyamat egy adott időpontjában rendelkezésre álló készlet.

Az **átlagkészlet** adott időszakra, például egy ciklusra számítva, az időszak kezdő- és zárókészletének összege osztva kettővel.

A **biztonsági készlet** (törzskészlet, minimális készlet) az a készletszínt, amely alá a készlet tartósan nem csökkenhet, az utánpótlás vagy a felhasználás véletlen ingadozásainak kiegyenlítését szolgálja. Egy lehetséges becslése: *napi felhasználás* x *utánpótlási idő napokban*.

Az **utánpótlási idő** (τ) a megrendeléstől a tétel beérkezéséig eltelt idő.

A **jelzőkészlet** (jelentésköteles készlet) az utánpótlási idő alatti fogyasztás plusz a biztonsági készlet. Ha a készlethiány nem megengedett, akkor a jelzőkészlet elérésekor kell a rendelést feladni.

2.4.4 Készletfigyelés módszerei

A rendelési időpont (t) és a rendelt mennyiség (Q) meghatározásához a készletszint ismerete szükséges, ami ellenőrzéssel valósítható meg. A készletszint ellenőrzésnek két alapvető módszere: folyamatos és időszakos (periodikus) készletfigyelés.

A **folyamatos** készletfigyelés esetén az újrarendelés azonnal megtörténik, mihelyt a készlet egy előírt értékre csökken. A **periodikus** készletfigyelés azt jelenti, hogy a készleteket csak diszkrét intervallumok végén, például minden hónap végén ellenőrzik, és a megrendelésre vonatkozó döntés csak ekkor történik.

A folyamatos készletfigyeléskor minden időpillanatban ismert a készlet mennyisége. Az időszakos készletfigyelés pedig bizonyos időszakonként történő készletszint ellenőrzést igényel. Első pillantásra a folyamatos készletellenőrzés költségesebbnek és nagyobb biztonságot adónak tűnik a kevésbé költséges, de nagyobb kockázattal járó időszakos ellenőrzésnél.

Azt, hogy a gyakorlatban melyik módszert használják, nem a költségek, hanem az alkalmazott készletezési modell dönti el. A folyamatos készletfigyelés alkalmazása az esetek jelentős részében nem olyan munkaigényes, mint azt elsőre gondolnánk.

Az olyan raktárakban, ahol minden készletmozgásnál a bevételezett és kiadott anyagok mennyiségét, valamint a készletszintet egy raktári nyilvántartó lapon (raktári fejlap) rögzítik, a készletszint figyelése nem igényel külön erőfeszítést. Ha ugyanis a rendelési ponthoz tartozó készletszintet (törzskészlet, biztonsági készlet) ezen a fejlapon feltüntetjük, akkor a raktáros a készletváltozással járó események alkalmával ellenőrizheti, hogy a készletszint elérte-e az újrarendelési pontot. Számítógépes készletnyilvántartás esetén pedig a program automatikusan elvégzi az ellenőrzést és jelzi az újrarendelés indításának szükségességét.

Más, készletnyilvántartást nem igénylő technikával is meghatározható az újrarendelés időpontja. Egy lehetséges megoldás például, hogy a biztonsági készlethez, illetve a törzskészlethez tartozó alkatrészeket külön ládában tárolják, és a ládába egy papírlapot helyeznek figyelmeztető felirattal: *„Ebben a ládában található készlet már biztonsági készlet, kérem, adjon fel rendelést. A biztonsági készletből kivett mennyiséget a tétel beérkezése után pótolja!”*. Az előírás betartása esetén ez a megoldás egyenértékűnek tekinthető a folyamatos készletfigyeléssel.

2.5. Esettanulmányok

A készletezett tételek alapvetően két nagy osztályba sorolhatók. Az egyikbe tartoznak azok, amelyek valamilyen termelési folyamatban, mint anyagok vagy alkatrészek lesznek felhasználva. A másik csoportot az eladásra szánt késztermékek alkotják. A készletezési politika, illetve a hiány esetén követendő intézkedések a két osztály esetén nem azonosak.

A **gyártáshoz** szükséges anyagok készletezésekor a hiány miatti zavarok hatása is különböző lehet, mert

a hiányzó anyagok esetleg helyettesíthetők vagy kölcsönözhetők,

új anyagforrások vehetők igénybe,

a több terméket gyártó üzem átállíthatja a termelését egy másik termékre,

a legrosszabb esetben a gyártás leáll.

Az **eladásra** készletezett termékeknél a hiány a kereslet teljes elvesztését, vagy a bevétel csökkenését okozhatja. A hiány tehát minden esetben a profit csökkenését eredményezi.

A felvetődő kérdéseket a következő esettanulmányokon keresztül próbáljuk illusztrálni.

2.5.1 Esettanulmány I.

Egy mezőgazdasági gépgyártó cég négy ekefejes ekéihez saját maga gyárt ekevasakat. Az ekék összeszerelése folyamatos, havonta 200 db, amihez $4 \cdot 200 = 800$ db ekevasat használnak fel. Az ekevasak termelése szakaszos, mivel a gyártóvonal kapacitása sokkal nagyobb, mint az ekék összeszerelésének üteme. A gyártó szeretné meghatározni, mikor és mennyit gyártson az ekevasakból.

(1) A szakaszos gyártás beállítási költsége K_b=120000 Ft. Ez a költség tartalmazza a felszerszámozás, az adminisztráció stb. költségét. A beállítási költség nagysága azt sugallja, hogy a termelést csak nagyobb darabszám esetén célszerű indítani.

(2) Az ekevasak nagy darabszámban való gyártása nagy készletet eredményez. A becsült készlettartási költség h=30 Ft/hónap darabonként. Ez a költség magában foglalja a lekötött tőke, a tárolás, az adó, a biztosítás stb. költségét. A készlettartási költség arra ösztönöz, hogy az ekevasak gyártása kicsi tételekben történjék.

(3) Egy darab ekevas gyártási költsége a beállítási költség nélkül c=1000 Ft, ami független a gyártás darabszámától. (Általában az egy darabra eső gyártási költség állandó, vagy a darabszámmal arányosan csökken.)

(4) A gyártó óvatos politikát követ, tiltja bármely komponens hiányos tervezését. Azonban az ekevas hiány esetenként előfordul, és a becslések szerint ez a hiány egy darabra vonatkoztatva p=110 Ft/hónap veszteséget okoz. Ez a költség az utólagos felszerelés és a raktározás költségét, valamint a késés miatti bevételcsökkenést stb. tartalmazza.

2.5.2 Esettanulmány II.

Egy kerékpárokat forgalmazó nagykereskedőnek problémái vannak a népszerű, nem túl drága 10 sebességes modellel, ezért felülvizsgálja a készletezési politikáját. A nagykereskedő a modellt a gyártótól havonta szerzi be, és ezt követően szállítja a különböző kerékpárüzletekbe. A nagykereskedő költségeinek felülvizsgálata után a következőket állapítja meg:

(1) A hiányköltsége akkor jelentkezik, amikor az igény jelentkezésének pillanatában nincs a keresett modell a raktáron. A modellek többségét könnyű újrarendelni a gyártótól, és elfogadható egy kicsi késés a szállításban. A hiány megengedhető, de veszteséget okoz. A becsült veszteség p=4100 Ft kerékpáronként. Ebben a költségben benne van az üzleti hírnév csökkenése, bevételt csökkentő adminisztrációs többletköltség. Néhány modell készletezése azonban az árverseny miatt nem enged meg olyan hiányt, amely az eladásban veszteséget okoz. Ebben az esetben ugyanis az elmaradt bevétel jelenti a hiányköltségét.

(2) A készlettartás költsége (a készlet fenntartás költsége) h=275 Ft kerékpáronként egy hónapra. Ez a költség tartalmazza a tőkelekötés, a tárolás, a biztosítás az adó stb. költségét.

(3) A rendelési költség két komponense: a rendelés bonyolításának és a kerékpár árának költsége. Az elhelyezéssel és a rendeléssel kapcsolatos ügyvitel költsége K=220000 Ft/rendelés, a kerékpár beszerzési ára c=15000 Ft.

2.6. A készletezés költségtényezői

A készletezési politika hatása a jövedelmezőségre kézenfekvő, ezért a politika kiválasztása függ a relatív jövedelmezőségtől. A jövedelmezőségre ható költségek: rendelési vagy gyártási költség, készlettartási vagy raktározási költség, ki nem elégített igények vagy hiány miatti veszteség költsége, bevételek, maradványköltség és az árengedményekből származó költség.

2.6.1 Gyártási vagy rendelési költség

A gyártási vagy rendelési költséget z mennyiség esetén a $c(z)$ függvény reprezentálja. A legegyszerűbb formula esetén a c egységár állandó, és ekkor a költség $c \cdot z$. Egy másik gyakori feltételezés, amikor $c(z)$ két komponensből áll, egy K_b konstansból és egy z-vel arányos tagból. Ekkor, ha $z>0$, akkor a költség $K_b+c \cdot z$. A beállítási költségnek nevezett K_b egy rendelés egyszeri állandó költsége, ami tartalmazza a bevezetéssel, az indítással összefüggő kiadásokat (adminisztráció, nyomtatvány, munkabér stb.), a szállítás, a rakodás, az átvétel, stb. költségeket. Az *1. esettanulmányban* az ekevas-gyártás beállítási (állandó) költsége 120000 Ft rendelésenként, a gyártási költség 1000 Ft darabonként, így a teljes rendelési költség:

$$c(z)=120000+1000\,z, \quad \text{ha} \quad z > 0.$$

A *2. esettanulmányban* a nagykereskedő rendelési költsége:

$$c(z)=220000 + 15000\,z, \quad \text{ha} \quad z > 0.$$

A rendelési költség leírására léteznek más függvények is. Mi azonban csak ezt a két függvényt fogjuk használni.

2.6.2 Készlettartási vagy raktározási költség

A készlettartási vagy raktározási költség tartalmazza mindazokat a kiadásokat, amelyek a raktározás ideje alatt felmerülnek. Például a tőkelekötés, a tárolás, a bérleti díj, a biztosítás, az adók, tárolási veszteségek költségeit.

Bérelt raktár esetén ezek a költségek könnyen és egyértelműen meghatározhatóak, mivel az idegen raktár bérleti díja ismert.

A saját raktár költségeinek pontos számítása és adott termékre vetítése már sokkal nehezebb feladat. Ilyen költségnek tekinthető például a raktárépület világítása, fűtése, a raktárosok, raktári anyagmozgatók bére, azok járulékai. A raktározással kapcsolatos adminisztratív költségekhez sorolhatók a nyilvántartáshoz szükséges nyomtatványok, irodaszerek beszerzése, az alkalmazott szoftverek bérleti díjai. Legtöbbször a pontos számítás helyett egyszerűen a rezsiköltségeket arányosan elosztják. Az elosztás alapja lehet a készletezés során előforduló maximális mennyiség, az átlagos mennyiség, és az igények feletti kumulált felesleges készlet.

A tárolási veszteség a készletezett anyag mennyiségének csökkenése a készletezés során. Ez különböző okok miatt következhet be, mint például rongálódás, minőségromlás. Ezekben az esetekben a használhatatlan anyagokat selejtezési eljárással eltávolítják és leírják. Ugyancsak tárolási veszteségnek tekinthető a különböző anyagok párolgása. A nem megfelelő vagyonvédelem szintén tárolási veszteséghez vezethet.

2.6.3 A ki nem elégített igények vagy hiány miatti veszteség költsége

A ki nem elégített igények vagy hiány miatti veszteség költsége akkor jelentkezik, ha az igények nagysága meghaladja a raktáron elérhető mennyiséget. Ez a költség a modell struktúrájától függően kétféle lehet. Az első eset, amikor a pillanatnyi igény meghaladja az elérhető készletet, és később a hiány utórendeléssel megszüntethető. Ezt nevezik *pótolható kielégítetlen igénynek*. Ekkor az utórendelés költsége plusz költségként merül fel. A második esetben az igény kielégítetlen marad (a kereslet elveszik), mert ilyenkor a vásárló vagy lemond a termék megszerzéséről, vagy azt máshol szerzi be (*nem pótolható kielégítetlen igény*). Az elveszett kereslet költsége a bevétel elmaradása.

A első esetben az igény egy adott pillanatban ugyan nem elégíthető ki, de ez nem jelenti a vásárló elvesztését, mivel később az igény kielégíthető, pótolható. Ennek vesztesége összetett, hosszú távon a vásárló elvesztését, az üzleti hírnév csökkenését eredményezheti, közvetve csak a későbbi bevétel és a plusz költség miatt okoz veszteséget.

A kerékpáros esettanulmányban néhány kerékpármodell árversenyben van más gyártmányokkal, ilyenkor a ki nem elégített igény nem pótolható, és a bevétel elmaradása jelenti a veszteséget.

Ha anyaghiány miatt egy vállalat határidős szerződéses kötelezettségeinek (mennyiség, minőség) nem tud eleget tenni, a vevőnek lehetősége van kötbért követelni. Kötbért kell fizetni például a határidőre ki nem rakott vagonok után is.

2.6.4 A bevételek

A bevételek nem minden esetben jelennek meg a modellben. Ha az árak és az igények (kereslet) kontrollja nem tartozik a vállalat hatáskörébe, és az eladásokból származó bevételek függetlenek a vállalat készletezési politikájától, akkor a bevételek figyelmen kívül hagyhatók. A ki nem elégített igények miatti bevétel elmaradásokat, mint veszteséget azonban nem lehet elhanyagolni.

2.6.5 A maradványérték

A maradványérték annak a mennyiségnek az értéke, amely a készletezési periódus végén megmarad. Ha a készletezés meghatározatlan számú periódusból áll és nincs elavulás, akkor nem beszélhetünk maradék tételekről. Ugyanis a periódus végén megmaradó tételek a következő periódusban elérhetők, mint kezdő mennyiségek. Ha azonban a készletezés egy periódus után befejeződik, akkor a maradványérték a maradék tételek eladási ára, ami költséget jelent a vállalatnak. A maradványérték negatívja a maradványköltség. A maradvány költség lehet pozitív is, ha az be van építve az eladási árba. A tárolási költséget ugyanis általában a keresletet meghaladó kínálattal tervezik, és ebbe belekalkulálják a maradványköltséget is. Ezért a maradványköltség általában elhanyagolható.

2.6.6 A diszkontálási költség

Végül a diszkontálás az idő pénzben kifejezett értékét veszi számításba, amelyen egy meghatározott jövőbeli időpontra esedékes pénzösszeg jelenértékének a kiszámítását értjük. Amikor a vállalat tőkét köt le a készletezésre, azzal pénzt von el más alternatív céloktól. Például a pénz bankban biztonságos elhelyezhető és kamatoztatható, ezért minden jelenlegi pénzösszeg olyan jövőbeli pénzösszeggel tekinthető ekvivalensnek, amelyre a vizsgált időszak végéig a hozott kamatokkal növekszik. Tételezzük fel, hogy y_0 Ft-ot fordítunk készletbeszerzésre és az éves kamatláb 5%, akkor a befektetett tőke 1 év múlva

$$y_1 = y_0 + 0{,}05 \cdot y_0 = y_0(1 + 0{,}05)$$

értékre növekedne. Az n év múlva esedékes összeg, feltéve, hogy a kamatláb nem változik:

$$y_n = y_0(1 + 0{,}05)^n .$$

Az előző összefüggésből a **diszkontálási faktor**:

$$a = \frac{1}{(1 + 0{,}05)^n} = \frac{y_0}{y_n} .$$

A banki pénzbefektetés profitja:

$$p = y_n - y_0 = \frac{y_0}{a} - y_0 = y_0\left(\frac{1}{a} - 1\right),$$

amely mint elmaradt haszon, készletezési költségként jelentkezik. A faktor kiszámítása rövidebb vagy hosszabb időszakokra történhet, például akár egy hónapra is. A rövid távú tőkelekötésnél az a értéke közel 1, mivel rövid idő alatt a pénz értéke nem változik lényegesen, ezért a diszkontálási faktor elhanyagolható. Hosszú időtartamú lekötés esetén azonban a diszkontálási faktortorral számítható profitveszteséget, mint költséget figyelembe kell venni. Például, ha n=2 év időtartamra y_0=10000 Ft tőkét fektetünk készletekbe, akkor annak a költsége:

$$a = \frac{1}{(1 + 0{,}05)^n} = \frac{1}{(1 + 0{,}05)^2} = 0{,}9070$$

$$p = y_0\left(\frac{1}{a} - 1\right) = 10000\left(\frac{1}{0{,}9070} - 1\right) = 1025{,}36\,\text{Ft}.$$

Az optimális készletezési politika keresésére használt kvantitatív eljárásokban a cél a várható teljes költség minimalizálása, azon feltétel mellett, hogy a termék ára és a termék iránti igény felett a készletezőnek nincs kontrollja. Továbbá a veszteség és a késedelmes bevétel miatt elmaradt haszon a hiány miatti veszteségek költségébe épített, a minimalizált költség pedig azonos a maximális jövedelemmel. Egy másik cél, amely nem kvantitatív, de nagyon fontos a gyakorlatban, hogy a készletezési politika egyszerű legyen, vagyis az arra vonatkozó szabályok, hogy mikor rendeljünk és mennyit rendeljünk, egyszerűek legyenek. A legtöbb politika rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

2.7. Szabályozás és készletezési politikák

A korábban leírtak alapján a készletek szabályozása az inputoldalon a beszerzéssel, pontosabban a rendeléssel történik. (Az outputoldalon a kiszolgálásba történő beavatkozással ritkán élünk, de ez is előfordulhat.) A beszerzés során alapvetően két kérdésre keresünk választ: mikor rendeljünk, és mekkora mennyiséget rendeljünk. A készletezési mechanizmusok ismertetésekor már láthattuk, hogy a két alapkérdésre többféle válasz adható, és ezek kombinációi a készletezési mechanizmusok.

Ezen túlmenően a beszerzést egyéb szempontok, mint például a financiális, szállítási és piaci lehetőségek is generálhatják, amelyekből sokféle válaszpár és konkrét rendelés változat vezethető le (*2.1. táblázat*). A továbbiakban a táblázatban felsorolt politikák közül a szabályozás szempontjából az első négy sort elemezzük részletesebben.

2.1. táblázat

Szempont	Mikor?	Mennyit?
Állandó ciklus idő	Azonos *t* időközönként	Ugyanakkora *Q* mennyiséget
Állandó ciklus idő	Azonos *t* időközönként	Feltöltés *S* felső szintre
Készletszint	Az alsó *s* szint elérésekor	Ugyanakkora *Q* mennyiséget
Készletszint	Az alsó *s* szint elérésekor	Feltöltés *S* felső szintre
Pénz	Amikor pénz van rá	Amennyi pénz van rá
Szállítási lehetőség	Amikor van szállítási kapacitás	Amennyit szállítani lehet
Ajánlat	Amikor ajánlják	Amennyit ajánlanak
Akció	Amikor van akció	Amennyi akciósan kapható
Igény	Amikor szükség van rá	Amennyire szükség van
Véletlen stb.		

2.7.1 Egyenlő *t* időközönként, *Q* nagyságú tételek rendelése (*t-Q* mechanizmus)

Ez a készletezési politika előre meghatározott, egyenlő időközökben, egyenlő *Q* nagyságú tételek rendelését írja elő (*2.2/a ábra*). Könnyű belátni, hogy ezen előírások esetén az egy ciklus alatti átlagos készletszint csak akkor tartható állandó értéken, ha a felhasználás üteme (a felhasználási ráta) is ciklusonként közel állandó, továbbá az utánpótlási idő közel egyenletes, vagyis a *Q* tételek a ciklusok végig időben beérkeznek. Ha a feltételek nem teljesülnek, akkor vagy hiány lép fel, vagy pedig a készlet gazdaságtalanul magas szintre emelkedik. Ez a mechanizmus nem képes a véletlen események okozta eltéréseket kezelni, azaz nem alkalmas szabályozásra. Ennek ellenére az egyszerűsége miatt széles körben elterjedt. Később látni fogjuk, hogy a klasszikus optimális rendelési tételnagyság modellje is a leírt feltételek teljesülését feltételezi. Egyenletes termelés (pl. sorozatgyártás) estén nem okoz gondot az alkalmazása.

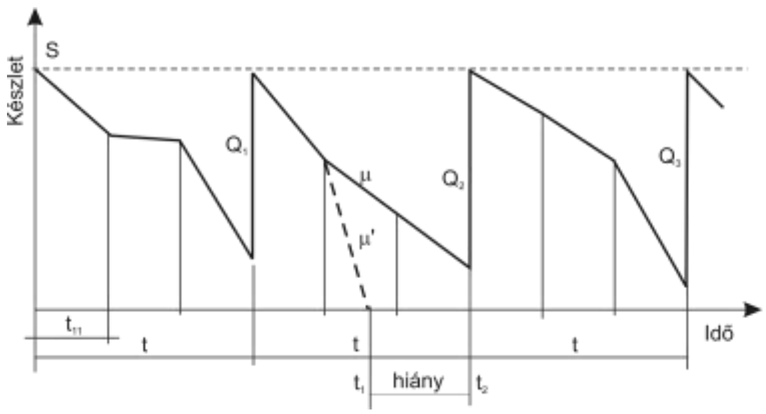
2.7.2 Ciklikus működési politika (*t-S* mechanizmus)

A ciklikus készletezési politika szerint a készletet állandó *t* időközönként maximális *S* szintre töltjük fel (*2.2/b ábra*). A készletszintet csak a ciklus végén, *t* ciklusidő eltelte után vizsgáljuk, és ennek ismeretében döntünk a beszerzésről. A beszerzendő mennyiséget úgy határozzuk meg, hogy maximális *S* készletszintből kivonjuk a ciklus végén megmaradó készletet. (Hiány esetén a megmaradó készlet negatív, amit a következő ciklusban pótolunk.) A felhasználási ráta ciklusonkénti várhatóértéke különböző lehet, ezért a ciklusonként beszerzendő mennyiség is változik, $Q_1, Q_2,...,Q_n$, attól függően, hogy a ciklus végén megmaradó készletet mennyivel kell növelni ahhoz, hogy az *S* maximális készletszintet elérjük.

A ciklikus mechanizmus előnyei: Nem igényel folyamatos készletellenőrzést, a rendelések pontosan ütemezhetőek. Rendelési naptár alakítható ki, kiszámítható, ami nemcsak a megrendelő, hanem a szállító számára is kedvező lehet. A rendelési tételnagyság a ciklus végén megmaradó készlet függvénye.

A ciklikus mechanizmus hátrányai: a beszerzendő mennyiséget ciklusonként újra és újra kell számítani, és változik a rendelési tételnagyság. A szállítók általában nem szeretik a mennyiségi szempontból állandóan változó rendeléseket. (Ez a szempont a tervgazdaság háttérbe szorulásával, megszűnésévei csökkenő jelentőségű.) A piacgazdasági viszonyok között a szállítók általában rugalmasan alkalmazkodnak a vevői igényekhez. További hátrány, hogy a nagyobb tételnagyságból származó árelőnyök is elvesznek, mivel időnként kisebb mennyiséget kell rendelni. A véletlen hatásokkal szemben a rendszer nem nyújt biztonságot, illetve a biztonság magas átlagos készletszintet eredményez.

A folyamatos készletfigyelés hiányából és a felhasználási ráta ciklusidő alatti változásából adódó biztonsági kockázatot az *2.3. ábrán* tanulmányozhatjuk. Amikor a rendelést követően, a ciklusidő alatt felgyorsul a készletfelhasználás (pl. μ-ről μ'-re növekszik a felhasználási ráta), akkor a készletszint a ciklus vége előtt már a t_1 időpontban is 0-ra csökkenhet. Ilyenkor a t_1-től, a ciklus végéig, a t_1–t_2 intervallumban jelentkező keresletet nem lehet kielégíteni, azaz hiány lép fel. Erősen ingadozó kereslet estén ezt a problémát csak nagyon magas S készletszint, illetve nagyon kicsi t rendelési ciklusidővel lehet kiküszöbölni. Ha a hiány nem megengedett, akkor a t ciklusidő meghatározásakor rendkívül körültekintően kell eljárni.



2.3. ábra: Biztonsági kockázat a ciklikus működési mechanizmusnál (*t-S*)

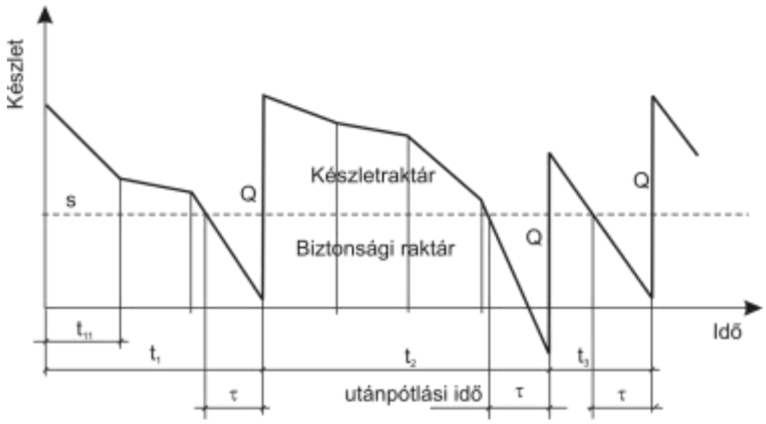
A ciklikus politika ezért ott alkalmazható, ahol a felhasználás kismértékben ingadozik, elvárás a rendelési határidők betartása, és ahol viszonylag magasak a készlet-ellenőrzési és rendelési költségek.

2.7.3 Kétraktáras készletezési politika (*s-Q* mechanizmus)

Az úgynevezett „kétraktáras” készletezési stratégiában (*2.4. ábra*) az s minimális rendelési szint vagy újrarendelési pont elérésekor előre meghatározott Q mennyiséget rendelünk.

Az ábrán látható, hogy a ciklusidő (t_1, t_2,…,t_n) a folyamatos készletfigyelés miatt változó értékű. A ciklus két szakaszra bontható. Az **első szakasz** a tétel megérkezésétől az s újrarendelési pont eléréséig tartó időszak, a **második szakasz** a rendelés feladásától a tétel beérkezéséig tart. A második szakasz hossza így az utánpótlási időtől (τ) függ. Könnyen belátható, hogy készlethiány csak a második szakaszon keletkezhet, és két okból következhet be. Egyrészt akkor, ha az utánpótlási idő nem normálisan, véletlenszerűen elhúzódik, másrészt akkor, ha normális utánpótlási idő alatt a felhasználás üteme megváltozik, pontosabban a felhasználási ráta növekszik.

A *2.4. ábrát* tanulmányozva magyarázatot kapunk a „kétraktáras” elnevezésre is. A ciklus első szakaszán a felhasználás az s készletszint (amit biztonsági készletnek is tekinthetünk) feletti ún. készletraktárból történik. A második szakaszon pedig, az utánpótlási idő alatt a biztonsági készletből, amit biztonsági raktárnak nevezünk.



2.4. ábra: Kétraktáras készletezési politika (s-Q)

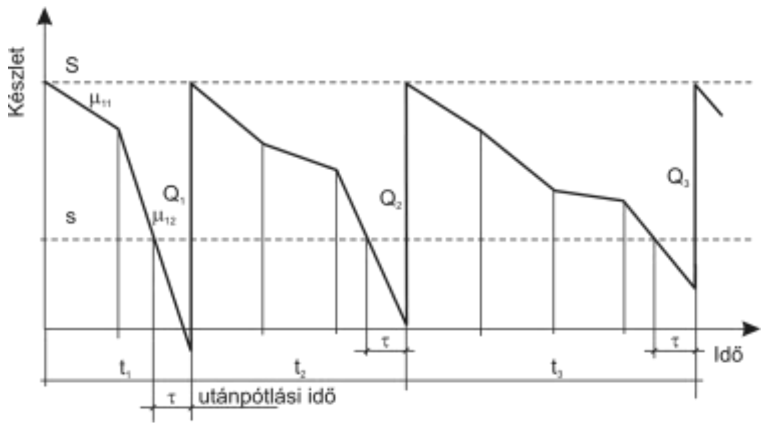
A kétraktáras működési politika előnye az önszabályozó képesség. Automatikusan képes kiegyenlíteni a különböző időben és mennyiségben jelentkező igényeket.

A kétraktáras működési politika hátránya, hogy erősen ingadozó felhasználás vagy kereslet esetén készletigényes, nem garantálja a hiány elkerülését és folyamatos készlet-ellenőrzést igényel.

A kétraktáras működési politika alkalmazása akkor javasolt, ha a felhasználás vagy kereslet ingadozása nem szélsőséges, és ha az utánpótlási idő közel állandó, valamint a készlettartás és a hiányköltségek viszonylag magasak.

2.7.4 Csillapításos működési politika (s-S mechanizmus)

A csillapításos működési politika a készletet az s minimális készletszint vagy az újrarendelési pont elérésekor S maximális szintre tölti fel (*2.5. ábra*).



2.5. ábra: Csillapításos készletezési politika (s-S)

Az előző s-Q készletezési stratégiához hasonlóan a készletfigyelés folyamatos, és az s biztonsági szint elérésekor rendeljük meg a beszerzendő mennyiséget, aminek következménye a változó ciklusidő (t_1, t_2,…,t_n). Az újdonság az, hogy a beszerzendő mennyiség is változik (Q_1, Q_2,…,Q_n), amit úgy határozunk meg, hogy az S maximális készletből kivonjuk a ciklus végén megmaradó készletet. Ez azt jelenti, hogy a megrendeléskor figyelembe vesszük a ciklus alatti készletcsökkenést.

A ciklus itt is két szakaszra bontható. Az **első szakasz**, amely a feltöltéstől az s újrarendelési pont eléréséig tart, jól determinált. A szakasz végén ismerjük a készletszintet és az előzményeket, amelyek az adott készletszint kialakulásához vezettek. A **második szakaszról** azonban, amely a rendelésfeladással kezdődik és a rendelés beérkezésével fejeződik be ez nem mondható el. A második szakasz időtartama, az utánpótlási idő (τ), közel állandó, azonban a szakasz felhasználását csak becsülni tudjuk, ami miatt készlethiány ebben a készletezési mechanizmusban is előfordulhat. Például a *2.5. ábrán* az első periódusban a felhasználási ráta μ_{11}-ről μ_{12}-re növekszik, ami hiányt eredményez. Jobb híján azt feltételezzük, hogy az utánpótlási idő (τ) közel állandó, és a felhasználási ráta az újrarendelési pontban mért rátával azonos. Probléma akkor jelentkezik, ha a felhasználás valami miatt felgyorsul, vagy az utánpótlásban váratlan események következnek be.

A csillapításos működési politika előnye, hogy a rendelés időpontja és a mennyisége egyaránt a felhasználás vagy a kereslet függvénye. A raktár kapacitás tervezése szempontjából lényeges, hogy a maximális készletszint pontosan ismert, amit az előző *s-Q* működési stratégiáról nem lehet elmondani.

A csillapításos működési politika hátrányai: folyamatos ellenőrzést igényel, véletlenszerűen ingadozó felhasználáskor a hiány csak magas készletszinttel küszöbölhető ki, a változó ciklusidő és rendelési tételnagyság miatt nagyobb lehet az utánpótlási költség.

A csillapításos működési politika alkalmazása akkor indokolt, ha a készlettartás és a hiányköltségek viszonylag magasak, és a felhasználás ingadozása nem szélsőséges, valamint az utánpótlási idő közel állandó.

Összességében elmondhatjuk, hogy ez a működési politika egyesíti a korábban ismertetett *t-S* és *s-Q* stratégiák előnyeit. A rendelési tételnagyság függése a felhasználástól csökkenti a hiány keletkezésének esélyét. A maximális készletszint kizárja a raktárkapacitás hiány jelentkezését, igaz ennek az ára a rendelések, illetve a beszállítások gyakoriságának növekedése lehet.

A készletezési elméleteket ismertető szakirodalomban számos készletezési modell leírása található. Ezek között a csillapításos működési stratégián alapuló modell nagyon fontos szerepet játszik. Sokáig úgy gondolták, hogy ez a működési politika az, amely általános megoldást kínál a különböző készletezési problémákra. Később beigazolódott, hogy ez a hipotézis nem teljesen állja meg a helyét.

2.8. Ellenőrző kérdések

1. Csoportosítsa a készleteket szektorok, az áruk jellege, a termelésben betöltött funkció, számviteli, származási és keresleti szempontból!
2. Az output és az input folyamat természete a készletezésben.
3. Ismertesse a rendelési vagy gyártási költség leírására alkalmas függvényeket!
4. Milyen költségelemeket tartalmaz a készlettartási költség?
5. Mit jelent a pótolható és a nem pótolható kielégítetlen igény?
6. Értelmezze a maradványértéket és a diszkontálást a készletezéssel összefüggésben!
7. Ismertesse a készletezési mechanizmusokat!
8. Ismertesse a készletfigyelés módszereit!

3. A VÁRHATÓ IGÉNY MEGHATÁROZÁSA

Amint azt korábban jeleztük, a készletezési rendszer mozgatórugója a kereslet vagy az igény. (Itt az igény és kereslet között nem teszünk különbséget.) Az igény az outputoldalon húzóhatást gyakorol a készletre, amelynek fontos jellemzői a mennyiség, illetve annak időbeli változása. Az igény realizálása csökkenti a készletet, ami az inputoldalon megrendelést generál. A készletezés számára ezért nélkülözhetetlen információ az adott anyagra vonatkozó, időben változó igénynagyság ismerete.

Az előző fejezetben láthattuk, hogy az anyagok különböző szempontok szerint csoportosíthatók, amelyek közül az igények előrejelzése szempontjából az egyik legfontosabb, hogy az adott anyag iránti igény nagysága függ-e más anyagokra vonatkozó igényektől vagy sem. Az olyan anyagokat, amelyek felhasználása között **nem tárható fel függőség** (arányos felhasználási igény) **független keresletűeknek** nevezzük. Ilyen anyagok a göngyölegek, a munkaruha, az irodaszerek, vagy az üzemanyagok. Ezeknek a beszerzése egymástól függetlenül, önállóan szervezhető.

Az anyagok másik csoportjánál az igények összefüggenek, és arányos felhasználási igény állapítható meg. Ezek a **függő keresletű** anyagok, amelyeket egymáshoz viszonyítva meghatározott arányban használjuk fel. Például egy előre gyártott elemekből készülő kétajtós szekrény összeszereléséhez egy korpusz, két ajtó, 4db polcelem, 8 db kicsapó pánt, 16 db csavar stb. szükséges. Vagyis ezekből az adatokból pontosan kiszámítható, hogy z db szekrény gyártásához hány darab ajtóra, polcelemre, kicsapó pántra, csavarra, stb. lesz szükség.

A függő és független keresletű anyagok igényének tervezése eltér egymástól, vagyis az anyagigény meghatározásakor követett eljárás függ attól, hogy függő vagy független keresletű anyagról van szó.

Független keresletű anyagok (késztermék, általános anyagok) igénytervét előrejelzéssel, például a várható igények vállalati szintű felmérésével lehet megalapozni. A függetlenségen azt értjük, hogy más ismert anyagigényből a várható igényt nem tudjuk kiszámítani.

Függő keresletű anyagok (adott termék előállításához szükséges alapanyagok, alkatrészek, félkész termékek, stb.) esetén az igények a különböző anyagnormák, beépülési fák alapján pontosan meghatározhatóak.

Az anyagszükséglet felmérésekor nem egyforma részletességgel vizsgáljuk az anyagokat. Az anyagigények meghatározásakor különböző elemzéseket, számításokat végzünk. Azonban tekintettel az anyagok számára, ami akár több ezer féle is lehet, nem célszerű minden anyagra azonos nagyságú figyelmet fordítani, és minden anyagot azonos mélységben elemezni. Általában anyagcsoportokat képezünk, és azokat a súlyuknak vagy fontosságuknak megfelelően kezeljük. A csoportosítás különböző tulajdonságok szerint történhet. Az operatív munkavégzés szempontjából például lényeges csoportosítási szempont az anyagok értéke vagy forgalma. Az érték vagy forgalom szerinti csoportosítás eszköze lehet az ABC analízis. Egy másik szempont lehet például a vámtarifaszám, rövidítve VTJ (Vámtarifa Termék Jegyzék) szerinti csoportosítás. A termelési folyamatban betöltött funkció szerint az anyagok lehetnek: alapanyagok, segédanyagok, energiahordozók, üzemfenntartási anyagok, késztermékek.

Az anyagszükséglet meghatározásakor alapvetően a tervidőszak elképzeléseiből, és a tervekből indulunk ki. A szükségletszámításnak ma már kialakult módszerei vannak, amelyek algoritmusai beépültek a számítógéppel támogatott termelésirányítási rendszerekbe. A több szintes beépülések szükségletszámításának alapvető eszköze a beépülési fa. Ennek alkalmazását később egy példában részletesen bemutatjuk.

3.1. A függetlenigények meghatározása előrejelzéssel

A készletezési politikák sokszor a szóban forgó cikkek eladásának vagy hasznosításának valamely előrejelzésén alapulnak. Az **előrejelzés** minden sikeres készletezési rendszer lényeges összetevője. Hangsúlyozzuk azonban, hogy az előrejelzés nem végtermék, hanem döntések meghozatalának egyik eszköze.

Előrejelzést tehetünk kvalitatív vagy kvantitatív módon (*3.1. ábra*). Az előbbi esetben az előrejelzés általában egy vagy több szakértő személyes véleménye vagy ítélete, és ezt véleményalkotásnak nevezzük. Például egy nagyobb kutatóegyetem minden szeptemberben összehívja vezető közgazdászait, hogy kikérje véleményüket a következő tanévben várható inflációról, aminek ismerete elengedhetetlen a költségvetés elkészítéséhez. Az eredmény általában a közgazdászok hosszú vitái után megegyezéssel születik meg.

3.1. ábra: Függetlenigények előrejelzési módszerei

Két különböző kvantitatív előrejelzési módszer használatos. Mindkettő, az **idősor-analízis** és a **regresszió-analízis** is ismert statisztikai módszer. Egy statisztikai idősor egyszerűen valamely valószínűségi változó számértékeinek a sorozata egy időintervallumban. Például egy meghatározott cikk napi piaczárási készlete egy év folyamán idősort alkot. Az **idősor-analízis** olyan módszereket használ, amelyek a megfigyelt adatok alapján a szóban forgó valószínűségi változó jövőbeli értékeire adnak előrejelzést. Például a 10 sebességes kerékpárt forgalmazó nagykereskedő (*2. fejezet*) a pontosabb tervezéshez negyedéves eladási előrejelzést szeretne készíteni. Ehhez adatokkal rendelkezik az előző negyedévek forgalmáról, azaz rendelkezésére állnak a negyedéves eladásokat jellemző valószínűségi változó értékei, amelyekből előre jelezhetők a következő negyedév vagy negyedévek várható eladásai.

A **regresszió-analízisben** az előre jelezni kívánt változót (a függő változót) más (független) változók függvényében fejezzük ki. Például egy könyv teljes forgalma egy időszakban összefüggésbe hozható az időszak alatti postai rendelésekkel. Az előző időszak postai rendeléseinek és a teljes forgalomnak az adatai alapul szolgálhatnak egy jövendő időszak teljes forgalmának az előrejelzésére a korábbi postai rendelések ismeretében.

Az említett előrejelzési módszerek persze kombinálhatók egymással. Általában a véleményalkotást az idősor-analízissel együtt alkalmazzák.

Irányultság szerint az előrejelzés lehet:

külső (például: az úthálózat várható fejlesztése),

belső (például az eszközök várható élettartama).

Tárgya, tartalma szerint lehet:

műszaki (például az újabb telekommunikációs technológiák megjelenése, környezetvédelmi előírások),

gazdasági (például az infláció jövőben alakulása);

értékesítési (például várható kereslet).

Az előrejelzésre szolgáló módszerek különböző elveken alapulnak (*3.1. ábra*).

3.1.1 Kísérleti módszerek

A kísérleti módszerek tényleges piaci műveletek elemzésén alapulnak. Ezek a következők:

Vevői és beszállítói felmérések

A leendő beszállítók megkérdezésén alapul. A kérdések vonatkozhatnak például a partnereknél várható fejlesztésekre, a kapacitásuk jövőbeni alakulására.

Tesztbeszerzés, próbavásárlás

Próbavásárlással jelezzük előre a beszállító várható viselkedését, a termék vagy szolgáltatás jellemzőit.

3.1.2 Véleményalkotás

Véleményalkotás során minták feldolgozásával juthatunk olyan információhoz, amiből a jövőre lehet következtetni. A mintavétel azt jelenti, hogy bizonyos személyeket kérdezünk meg. A véleményalkotás ezért és természeténél fogva szubjektív, és alapja a szaktudás, az intuíció, a jártasság, és a tapasztalat. Általában kvalitatív kritériumokon nyugvó előrejelzést eredményez. A szokásos eljárás: összehívják a szakértők egy csoportját, akik megvitatják a problémát, majd közös véleményt alakítja ki, ami az előrejelzés alapja.

A beszerzők megkérdezése

Ez az előrejelzés a beszállítókkal közvetlen kapcsolatban álló beszerzők tapasztalatait hasznosítja.. A múltbeli viselkedés felhasználható a jövőre vonatkozó elképzelések megismeréséhez is.

Brainstorming

Az ötletviharnak fordítható brainstormig az egyik legismertebb és régen használt módszer. A módszer alapfeltételezése, hogy a társas helyzet serkentőleg hat a lehető legjobb ötletek kitalálására. Társas helyzetben a részvevők elvileg egymást motiválják és kölcsönösen erősítik a kitűzött célprobléma megoldását. A sok ember jelenlétének és véleményének köszönhetően több szempont kerül előtérbe, így lehetőség nyílik a probléma komplexebb átgondolására is.

Az ötletek továbbgondolhatóak és valószínűsíthető, hogy sokkal színesebb megoldások születnek, mint amit egy személy önmaga ki tud találni. Ráadásul az ötleteket integrálni lehet, egymásra lehet építeni, ami még inkább segíti a jó megoldások megtalálását. A módszer sikerének záloga a nyitott légkör, a szabad ötlet- és véleménynyilvánítás. A felszabadult hangulat nagymértékben növelheti a szellemi munkát végző csoport hatékonyságát. Ez persze csak akkor működik, ha a csoport tagjai között elfogadó és együttműködő viszony alakul ki, mindenki elfogadja azt a feltételezés, hogy rossz ötlet nincs. Olyan körülményeket kell teremteni, hogy a gátlóhatásokat kiküszöböljük. Gátlóhatások lehetnek: kényelmetlen környezet, bántó kritika, stb. Ezek a feltételek fontos alappillérek a módszer hatékonyságának.

Egy klasszikus brainstorming folyamat első lépése a probléma felvetés, a probléma megoldására vonatkozó kérdés vagy kérdések megfogalmazása, amire kreatív megoldásokat kellene keresni – itt kezdődik minden. Fontos a probléma és kérdések pontos, célirányos megfogalmazása. Például egy beszerzéssel kapcsolatos kérdések a következők lehetnek:

Hány évig biztosítható még az alapanyag *a* termékhez a *b* piacról?

Mikor kerül az *a* termék életgörbéje hanyatló ágba?

Mennyi lesz az igény az *a* termékből jövőre?

A jelenleg beszerzett alapanyaghoz képest milyen hasonló, új, alapanyag megjelenése várható?

Hogyan alakul a beszállítók kapacitása a következő három évben?

Milyen változások várhatók a belső igényekben?

A brainstorming-ban laikusok és szakértők egyaránt részt vehetnek. Azonban a résztvevők kiválasztásakor lényeges szempont az érintettség és a hozzáértés, ez ugyanis nagyobb valószínűséggel biztosítja az elköteleződést és a lelkesedést a feladat iránt. Ha a korábban leírt körülmények adottak, akkor az adott probléma megoldásával kapcsolatban mindenki és egymás előtt szabadon fejtheti ki a véleményét, javaslatait.

Az ötlettelés általában nem lesz hasznos, ha parttalanul zajlik, ezért kell egy vezető, aki koordinálja a folyamatot. Nem szükséges, hogy a koordinátor a formális vezető legyen, sőt, hasznosabb, ha egy semleges személy vállalja fel ezt a szerepet. A koordináláson túl a vezető a folyamat végén összegzi, és az érintettek felé kommunikálja a munka végeredményét, továbbá feladata, hogy már a folyamat elején közölje, és mindvégig betartassa a szabályokat, melyek jellemzően a következők:

Mindenki azért van jelen, mert fontos a részvétele.

Egyszerre egy témával kapcsolatban zajlik az ötlettelés.

Tilos egymás ötletének minősítése, azaz nem megengedett sem a nyílt egyetértés, sem a kritizálás. Erre mind verbális, mind nonverbális szinten figyelni kell.

A legvadabb ötleteket is mondják ki bátran.

Minden javaslat feljegyzésre kerül.

A táblára került ötleteket tovább lehet gondolni, azok fejleszthetők.

A folyamat utolsó lépése mindig az ötletek hasznosításának átgondolása, megtervezése. A flip chartra előzetesen felvázolt ötleteket a csoport jó, ha közösen értelmezi, minősíti, csoportosítja. A minősítés során át kell gondolni, melyek az átfedésben lévő vagy az egymást kizáró elemek, és mérlegelni kell ezek elvetésének, továbbfejleszthetőségének kérdését.

A brainstorming második menete az ötletek kiválogatása, kritikája. Ebben a megkérdezettek együttesen szűkítik és fejlesztik tovább egymás ötleteit. A brainstorming írásos változatát brainwriting-nak hívják.

Szakértői csoport

Az előrejelzésre gyakran szakértők véleményét használjuk fel és ezek összesítésével alakítunk ki jövőképet. A szakértők többféle módon dolgozhatnak. A két lehetséges példát emelünk ki:

önállóan, egymástól függetlenül monográfia jellegű szakvéleményt készítenek, és ezeket összesítjük,

szakértői értekezleteket, konferenciát szervezünk, és a szakértők összegző véleményt készítenek.

A vélemények kifejtésére ezen kívül még más módszerek is alkalmazhatóak, pl. a videokonferencia egyre gyakrabban alkalmazott eszköz.

A szakértőicsoport-módszerre példa azoknak a korábban említett egyetemi közgazdászoknak csoportja, akiket megkértek, hogy előrejelzést adjanak az inflációról.

Delphi módszer

Talán a legfontosabb véleményalkotási eljárás az ún. *Delphi módszer.* Ugyanúgy, mint a szakértőicsoport-módszernél, itt is a szakértők egy csoportjáról van szó (de nem együttes ülésükről). A csoportot egy vagy több döntéshozó vezeti, akik végül is felelősek az előrejelzés elkészítéséért. A döntéshozó munkáját segítő csapat a módszerrel kapcsolatos feladatokat koordinálja, értékeli. Ilyen feladatok például a kérdőívek összeállítása, az beérkező adatok feldolgozása, kiértékelése és a jelentéskészítés.

A Delphi módszer kérdőívet küld a szakértőknek, és a kitöltött kérdőíveket kiértékeli. Az első kérdőív eredményei alapján összeállítanak egy másodikat, amelyet az előző kérdőív eredményeivel együtt megküldenek ugyanazoknak a szakértőknek. A visszaérkezés után a második kérdőívre adott véleményeket is kiértékelik, és a két kérdőív eredményei alapján a döntéshozók, saját tapasztalataikat is felhasználva, megalkotják az előrejelzést. A Delphii módszer kulcsa az első kérdőív szolgáltatta információk visszacsatolása. Így minden szakértő olyan információkhoz juthat, amelyek korábban nem voltak a birtokában, és a második kérdőív kitöltésekor minden szakértő ugyanazokkal az információkkal rendelkezik.

Természetesen a Delphi módszer sikere a kérdőívek összeállításának minőségén múlik. Ha szükségesnek látszik, esetleg kettőnél többször is megismételhető a kérdőív kiküldés, például ha igen nagy az eltérés az első két kérdőívre adott válaszokban, és remény van arra, hogy a második kérdőívből nyert információ alapján a harmadik kérdőív válaszai egységesebbek lesznek.

A Delphi-módszer kivitelezéséhez ma már remek kommunikációs eszközök állnak rendelkezésre. A korábban alkalmazott telefon és fax mellett az internet új lehetőségeket nyitott. A számítógép hálózatok lehetővé teszik nagy terjedelmű dokumentumok gyors, olcsó továbbítását.

3.1.3 Idősor analízis

Empirikus és elméleti idősorok

Valamely időben lejátszódó jelenség egymást egyenlő időközökben követő időpontokban mért, megfigyelt értékeinek egymásutánját **empirikus idősornak** nevezzük. A megfigyelések sorrendjének itt fontos szerepe van, annál is inkább, mert az egymást követő empirikus adatok rendszerint nem függetlenek egymástól. Ez az oka annak, amiért az idősorok modellezése külön fejezete a statisztikai törvényszerűségek feltárásával foglalkozó módszertani könyveknek.

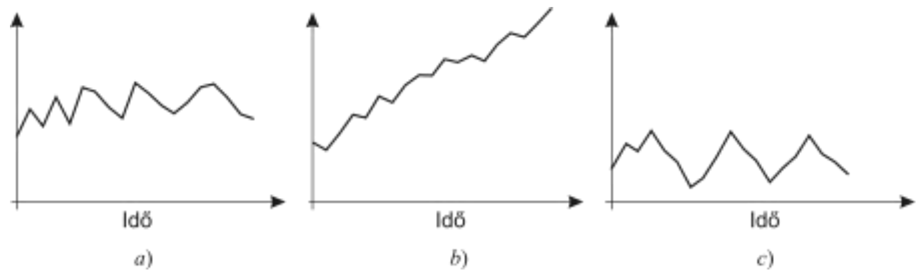
Az élet legkülönbözőbb területén találkozhatunk idősorok formájában jelentkező adatokkal, így például a gazdasági kategóriák időbeli alakulására vonatkozó megfigyelések, egyes biológiai, pszichológiai, orvosi megfigyelések, kísérletek, meteorológiai jelenségek, geofizikai, csillagászati mérések gyakran ilyen típusúak. Például egy bizonyos áru előző évi napi zárókészletei, a 2010. januártól 2014. decemberig tartó időszakban a negyedévi munkanélküliség értékei, az ország nyugati felét 10 sebességes kerékpárokkal ellátó nagykereskedő utolsó három negyedévi eladásai idősorokat alkotnak.

Előfordulhat az is, hogy a rendező elv nem az idő, hanem valamely más paraméter, például adott esetben a fonal hossza, amikor is a fonalszakadások gyakoriságának a megfigyelése, regisztrálása a feladat. Természetesen az alkalmazandó módszert ez a körülmény nem befolyásolja, ezért általánosságban idősorokról és idősorok elméletéről beszélünk.

A vizsgált jelenségek, változók egy része „folytonosan” létező, s ezért (legalábbis elvben) bármely időpontban megfigyelhetjük, regisztrálhatjuk értéküket, míg mások eleve csak bizonyos időpontokban vehetnek fel értékeket. Léteznek tehát olyan mennyiségek, amelyek (vagy definíciószerűen, vagy természetükből adódóan) csak bizonyos időpontokban léteznek (ilyen például a GDP, a csapadékmennyiség stb.).

Az **empirikus idősor** és az **elméleti idősor** (folyamat) egymástól eltérő, de egymással szorosan összefüggő fogalom. Arról a koncepcióról, amely e megkülönböztetést lehetővé és egyben szükségessé teszi, külön kell szólni.

Amikor valamely időben változó jelenségre vonatkozóan megfigyeléseket, méréseket végzünk, feltesszük, hogy a kapott adatok, **az empirikus idősor** mindazon információkat tartalmazza, amelyek alapján a megkonstruálható **modell**. A modell lényegében ugyanolyan törvényszerűségek szerint működik, mint maga a sztochasztikus folyamat, amely a megfigyelt értékeket generálta. Ebben az értelemben tehát az (empirikus) idősorok valamely (diszkrét vagy folytonos paraméterű) sztochasztikus folyamat realizációi.



3.2. ábra: Tipikus idősorok

Az idősorok ábrázolása

Az empirikus idősorok statisztikai elemzésének egyik első lépése lehet az adatok ábrázolása. Egy idősor viselkedését megjeleníthetjük grafikusan, oszlopgrafikával, vagy táblázattal. Általában az első lehetőség a leglátványosabb és a legpraktikusabb. Ekkor az adatokat egy olyan derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk, amelyben a vízszintes tengelyen az idő, a rá merőleges tengelyen pedig valamely alkalmasan választott egységben kifejezve a megfigyelt adatok értékei szerepelnek (*3.2. ábra*). Az ábrázolás eredményeként kapott ponthalmaz gyakran jó tájékoztatást ad az empirikus idősor néhány (elsődlegesen szembetűnő) alapvető tulajdonságáról, így például arról, van-e valamilyen jellegzetes tendencia (trend), ciklikusság, szezonalitás vagy véletlen ingadozás az idősorban. A *3.2/a)* ábra állandó szint körül változó idősort mutat, a *b) ábra* szerinti idősor lineáris tendenciájú, amelyre véletlen változások szuperponálódnak, és a *c) ábrán* szezonális hatások figyelhetők meg.

A trendillesztés általános elvi kérdései

Minthogy az idősor a múlt leírása, ezeket az adatokat a jövő előrejelzésre csak valamilyen logikai eljárással hasznosíthatjuk. Ha a múlt egyszerűen ismétlődik a jövőben, vagyis a múlt adatai megmutatják, mit várhatunk a jövőben, akkor felállíthatjuk a folyamatot jellemző **matematikai modellt.** Ha ez a modell ismert, akkor feltételesen elfogadva bizonyos paraméterek előrejelzésre használhatók. Ha a modellt nem ismerjük, a múlt adatai akkor is sugallhatnak valamilyen tendenciát.

Egy idősor általában egyenlő időközökben mért vagy megfigyelt értékek sorozata. Ezt az időközt egységnek tekintve, a sorozat t=1, 2, 3… időpontokban X_1, X_2, X_3… valószínűségi változókkal adott, ahol a t időponthoz tartozó érték X_t. Az X_t valószínűségi változók megfigyelt, empirikus értékei legyenek a t időpillanatokban: x_1, x_2,…,x_t.

Az X_t valószínűségi változót −például egy napi árat− jellemezzük a következő összefüggéssel:

$$X_t = h_t + e_t,$$

ahol X_t a valószínűségi változó értéke a t pillanatban, h_t az idősor viselkedésétől függő kifejezés és e_t a véletlen hiba. A h_t függvény a folyamatot leíró matematikai kifejezés sokféle lehet. Nézzünk erre néhány speciális példát.

Tegyük fel, hogy

$$h_t = \frac{1}{3}X_{t-1} + \frac{1}{3}X_{t-2} + \frac{1}{3}X_{t-3} = \frac{X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3}}{3}.$$

Ez a kifejezés azt mutatja, hogy a h_t az utolsó három megfigyelés mozgóátlaga.

Ha viszont

$$h_t = \alpha X_{t-1} + (1-\alpha)X_{t-2},$$

akkor a h_t az utolsó két megfigyelés súlyozott mozgóátlaga, ahol az $0<\alpha<1$ a súlyozó tényező.

Végül az utolsó példa szerint legyen

$$h_t = A + Bt.$$

Ekkor h_t az időnek elsőfokú (lineáris) függvénye, A tengelymetszettel és B meredekséggel.

Az

$$X_t - h_t$$

különbségeket **maradványoknak** nevezzük. Ezeknek valószínűségi értelemben ugyanúgy kell viselkedniük, mint az e_t véletlen hibának. Ha nem úgy viselkednek, akkor a modell nyilvánvalóan nem megfelelő.

Más példákat (modelleket) is könnyen lehet kreálni. Amikor egy modell paramétereit teljesen ismerjük, például az α súlyozó tényezőt, akkor az $X_1, X_2,\ldots,X_t$ múltbeli adatokból előállíthatjuk a megfelelő h_t értékeket bármelyik modellben, és az $X_1, X_2,\ldots,X_t$ ismeretében a h_{t+1} segítségével az X_{t+1} értéket is előre jelezhetjük.

A legtöbb valóságos esetben a modell egzakt formája nem ismert, sőt akkor is, ha ismerjük a modell egzakt formáját, a modell paraméterei még ismeretlenek lehetnek. Például, ha tapasztalatból tudjuk, hogy a modell a súlyozott közép, általában nem ismerjük az α súlyozó tényező pontos értékét. Az előrejelzési eljárásban a modellt kiválasztása után általában az $X_1, X_2,\ldots,X_t$ múltbeli adatokat használjuk arra, hogy valamiféle optimális becslést adjunk a paraméterekre. Ha magát a modellt sem ismerjük, akkor is léteznek bizonyos eljárások az előrejelzésre; ilyen például a *Box-Jenkins-féle* módszer, amelyről később rövid ismertetést adunk.

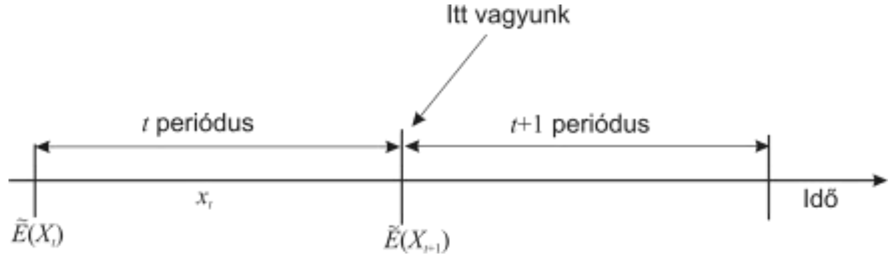
Előrejelzés idősorokkal

A folyamatot leíró modell és a becslésre használt előrejelzési eljárás nem teljesen azonos fogalmak. Nagyon ésszerűnek látszana az előrejelzési eljárást a folyamatmodell alapján megválasztani, de ezt a munkaigényes előkészítés miatt ritkán alkalmazzák. Ehelyett általában olyan előrejelzési módszert választanak, amely igen egyszerű, és része valamilyen számítógépes programcsomagnak, ezért gyakran kevés köze van a tényleges modellhez. Például, a munkanélküliségi arány előrejelzésére használhatunk egy olyan eljárást, amely az utolsó négy negyedév átlagán alapul, tekintet nélkül arra, hogy a

$$X_t = \frac{X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3} + X_{t-4}}{4}$$

előrejelzési eljárás (a mozgóátlag) a modellre vonatkozó idősort megfelelően követi vagy sem. Valójában, ahogy az várható, az eredeti modellre időszakos illesztést kell alkalmazni, ezért az ilyen mozgóátlagos előrejelzés pontatlan lehet. Ennek a szakasznak a hátralevő részét a leggyakrabban használt előrejelzési eljárásoknak szenteljük.

Az **előrejelzési feladat egy idősorra** a következőképpen fogalmazható meg. Adott a valószínűségi változóknak egy X_1, X_2,… sorozata (vagyis egy sztochasztikus folyamat) $E(X_1)$, $E(X_2)$... várható értékkel. A valószínűségi változók eloszlása lehet azonos, de változhat is valamilyen szabály szerint. A valószínűségi változók lehetnek függetlenek és nem függetlenek is. A valószínűségi változók megfigyelt értékeit x_1, x_2,…,x_t jelöli. Ezek ismeretében kell az $E(X_{t+1})$ jövőbeni várható értéket megbecsülni (*3.3. ábra*). A becsült értéket, amely egy jövendő időszakra adott előrejelzést jelenti, $\tilde{E}(X_{t+1})$ fogja jelölni.



3.3. ábra: Az idősor jelölései

Egy modell elfogadásáról döntést az előrejelzési hiba nagysága alapján hozhatunk. A múltbeli adatokat többféle módszerrel tesztelhetjük, és azt a módszert választjuk, amelynél az előrejelzési hiba a legkisebb. Az összegzett történeti hibák mérésére a két leggyakrabban használt mérőszám az átlagos abszolút eltérés (MAD) és az átlagos négyzetes hiba (MSE). A MAD az átlagos abszolút hiba, a MSE az átlagos négyzetes hiba. A különbség a kettő között az, hogy az egyik azonos súlyokat használ minden hibára, míg a másik súlyozza a hibákat a négyzetes értékek arányában. Az MSE, ellentétben a MAD-del, büntető előrejelzési technika, a nagyobb hibát súlyosabban bünteti, mint a kisebbet.

Az **átlagos abszolút hiba** (MAD):

$$MAD = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \tilde{E}(X_i)\right|$$

Az **átlagos négyzetes hiba** (MSE):

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[x_i - \tilde{E}(X_i)]^2$$

Sem a MAD sem az MSE nem mérlegeli, hogy a hiba pozitív, vagy negatív (alábecsült vagy túlbecsült). A MAD kifejezi előrejelzési hiba mértékét, de nem jelzi annak irányát. Az előrejelzési hibák irányának jelzésére a *bias*-t használjuk, amely a tendenciát méri, ami jelzi, hogy az előrejelzés következetesen felülbecsült vagy alulbecsült. Az ideális előrejelzési módszernél a MAD és a *bias* egyaránt nulla. A *bias* (eltérés) kiszámítása a következő képlettel történik:

$$bias = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[x_i - \tilde{E}(X_i)].$$

A pozitív *bias* az alulbecslést, míg a negatív *bias* a felülbecslést jelzi. Az előrejelzés pontatlanságát (a hibát) tehát a MAD és a *bias* együttesen mérik.

A következő hét előrejelzési eljárás, amelyeket példákkal is illusztrálunk, igen gyakran használt az iparban. Az első 4 eljárásban a

$$X_t = h_t + e_t,$$

összefüggésben a h_t csak az idősor X_1, X_2,…,X_t múltbeli adataitól és az eljárás paramétereitől függ és független az időtől, amit állandó szintű becslésnek is neveznek.

3.1. példa. Egy kisvállalkozás egy nagykereskedő beszállítójaként az utóbbi három évben, negyedévenként a *3.1. táblázatban* megadott darabszámban állított elő és értékesített egy bizonyos terméket. Az újévben azt szeretné tudni, hogy várhatóan mennyi terméket kell gyártania negyedévenként.

(1) Az utolsó értékre alapozott előrejelzési eljárás. A kerékpár kereskedő az utolsó negyedév eladásaiból (x_t) becsüli a következő negyedév várható keresletét, az $E(X_{t+1})$-t, azaz ekkor

$$\widetilde{E}(X_{t+1}) = x_t$$

a jövendő, t+1-edik időszakra adott előrejelzés. Ez a becslés meglehetősen durva, valószínűleg nagy a szórása, mert egyelemű mintán alapul. Alkalmazása csak akkor indokolt, ha nincsenek múltbeli adataink, vagy a feltételes eloszlás szórása igen kicsi és/vagy a folyamat oly gyorsan változik, hogy a jelen helyzetet illetően a t pillanat előtt bármi lényegtelen vagy félrevezető.

3.1. táblázat

Negyedév, (i)	Eladás, (x_i) (db)
1	2700
2	3270
3	3530
4	3750
5	4040
6	4110
7	3860
8	4300
9	4690
10	4380
11	5000
12	4836

A **3.1 példa megoldása** az utolsó értékre alapozott előrejelzési eljárás szerint:

$$\widetilde{E}(X_{t+1}) = x_t = 4836\,\text{db}.$$

(2) Átlagoló előrejelzési eljárás. A kerékpár kereskedő felhasználja a múltra vonatkozó összes adatát a jövőbeli eladások előrejelzésére, vagyis úgy dönthet, hogy a jövendő időszakra adott előrejelzés:

$$\widetilde{E}(X_{t+1}) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} x_i\,,$$

ahol: t a periódusok száma az idősorban, x_i az i-dik periódus megfigyelt értéke. Ez a becslés egyszerű és megfelelő, ha a folyamat stabil. Legyünk tekintettel arra, hogy a nagyon régi adatok esetleg torzíthatják a becslést, másrészt túl sok adattal amúgy is körülményes dolgozni, ezért a régi adatokat nem érdemes felhasználni.

A **3.1 példa megoldása** az átlagoló előrejelzési eljárás szerint:

$$\widetilde{E}(X_{t+1}) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} x_i = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = 4038{,}83\,\text{db}.$$

(3) Mozgóátlagokra alapozott előrejelzési eljárás (MA). Az egyszerű mozgóátlagolást stacionárius idősorokra (ha a stacionárius idősorok bizonyos állandóságot mutatnak, és trendmentesek) lehet alkalmazni. A t+1-edik időpontra vonatkozó előrejelzés n tagú mozgóátlaggal a következő módon számítható:

$$\widetilde{E}(X_{t+1}) = \frac{x_t + x_{t-1} + \ldots + x_{t-n+1}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n+1}^{t} x_i \,,$$

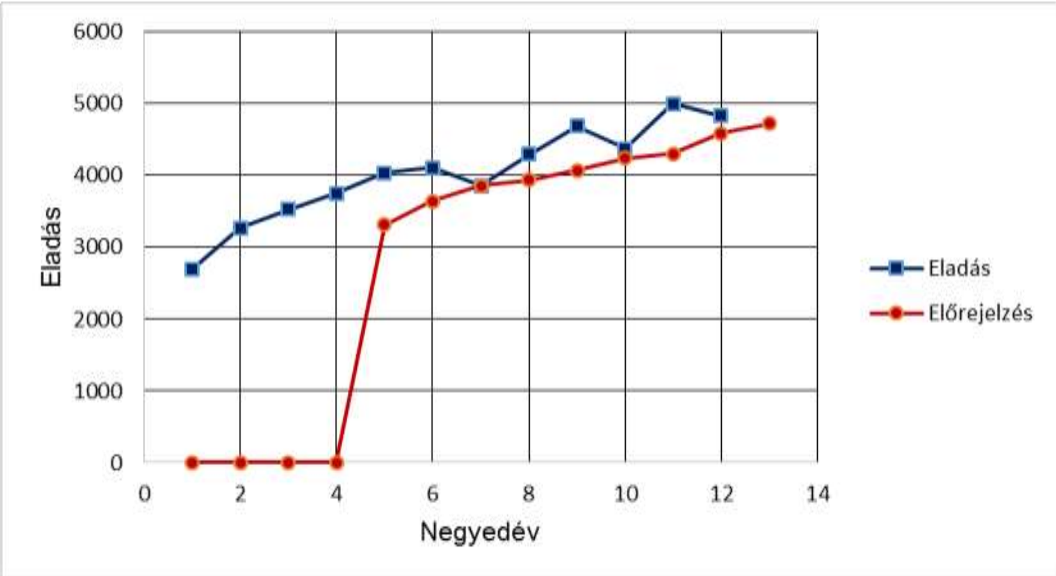
ahol x_i az i-dik periódus megfigyelt értéke, n a periódusok száma a mozgóátlagban.

Ez a becslés csak az utolsó n periódus adatait használja. Könnyen naprakész állapotban tartható: az első megfigyelést elhagyjuk, és az utolsót hozzávesszük. Ez az eljárás magában foglalja az előző eljárások előnyeit, ugyanakkor csak a viszonylag új, és több periódus megfigyelési adatait használja fel. Hátránya az, hogy azonos súllyal veszi figyelembe a vizsgált periódusok x_i értékeit, pedig az ember azt várná, hogy az újabb adatok nagyobb súllyal essenek latba. Az n értékét tapasztalati úton lehet meghatározni, leggyakrabban 3 és 8 közé esik.

A **3.1 példa megoldása** a mozgó átlagokra alapozott előrejelzési eljárás szerint, ha n=4:

$$\widetilde{E}(X_{t+1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n+1}^{t} x_i = 4726{,}5 \text{ db.}$$

A példában a várható eladások tendenciája a mozgóátlagok alapján a *3.4. ábrán* látható.



3.4. ábra: A várható eladások tendenciája a mozgóátlagok alapján

(4) Előrejelzési eljárás exponenciálisan súlyozott mozgóátlaggal (EWMA)

Az exponenciálisan súlyozott mozgóátlag, más néven **exponenciálissimítás** a mozgó átlag egy speciális formája, amelyben a múltbeli adatok nem egyenlő súllyal szerepelnek. A múltbeli adatok súlya az életkoruk növekedésével geometrikusan csökken, azaz, az újabb adatok súlya nagyobb, mint a kevésbé újaké.

A mozgóátlag technika, mint azt láttuk, azt feltételezi, hogy csak az utolsó n időszaknak van hatása az előrejelzésre. Ezzel szemben az EWMA egy olyan modell, amely megfelelő súlyokkal az összes adatot felhasználja, ami csak jobb lehet annál, mint ami elveti azokat. Ugyanakkor az EWMA utolsó előrejelzése minden korábbi adat hatását tartalmazó szám, ezért csak egy számot kell megőrizni, ami képviseli a korábbi előrejelzések történetét, és így az eljárás nem igényel nagyszámú múltbeli adatot.

A legegyszerűbb EWMA modell az új átlagos igényt vagy előrejelzési szintet a tárgyidőszakra (t+1) az előző előrejelzésből, $\tilde{E}(X_t)$ és az előző időszak előrejelzési hibájából (e_t) határozza meg. Az utóbbi az előző időszak aktuális igénye (x_t) és az előző időszakra készített előrejelzés, $\tilde{E}(X_t)$ különbsége. Az előrejelzés:

pillanatnyi előrejelzés=előző előrejelzés+$\alpha\cdot$(*előző aktuális igény−előző előrejelzés*)= =α(*előző aktuális igény*)+(1−α) (*előző előrejelzés*).

A szokásos jelölésekkel:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \tilde{E}(X_t) + \alpha[(x_t - \tilde{E}(X_t)] = \alpha x_t + (1-\alpha)\tilde{E}(X_t),$$

ahol: $e_t = x_t - \tilde{E}(X_t)$ az előző előrejelzés hibája, és α a simítótényező.

Az exponenciálissimítás tehát csak két adatot használ fel a következő periódus előrejelzéshez. Az egyik, az utolsó megfigyelt vagy mért érték x_t, a másik az utolsó, a t-edik periódus előrejelzése (becsült értéke), $\tilde{E}(X_t)$. Vegyük észre, hogy a kifejezés első alakja szerint a t+1-edik időszak előrejelzése, $\tilde{E}(X_{t+1})$, az előző előrejelzés, valamint az előző előrejelzés súlyozott hibájának összege. A **simítótényező** értéke 0<α<1, amelynek a választására később visszatérünk.

Az exponenciálissimítás tehát egy speciális mozgó átlag, és ezért nevezik exponenciálisan súlyozott mozgóátlagnak (Exponentially Weighted Moving Average, EWMA). Azért speciális mozgóátlag, mert a múltbeli adatok átlagban az adatok súlya változik.

Bármelyik formulát is használjuk, az előrejelzést egyszerű kiszámítani, mert a t pillanat előtti adatokat nem kell megőrizni, csak az utolsó x_t, és az utolsó periódusra becsült $\tilde{E}(X_t)$ előrejelzés szükséges a számításhoz. Az Excel a formula második alakját használja az exponenciálissimításra.

Az exponenciálissimítás egy rekurziós eljárás, amely n számú periódusra a következő formában is megadható:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-2} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^n x_{t-n} + (1-\alpha)^{n+1} x_{t-n+1}.$$

Ebből a formából nyilvánvaló, hogy az exponenciálissimítás a legnagyobb súlyt az utolsó megfigyelésre (x_t-re) helyezi, a korábbi megfigyelésekre pedig csökkenő súlyokat.

A mozgóátlag technika és az EWMA modell (trend vagy szezonális hatásoktól mentes) között, pontosabban a periódusok száma (n) és a simítási tényező (α) között közvetlen kapcsolat mutatható ki. A mozgóátlag érzékenysége úgy csökken, ahogy az időszakok száma (n) növekszik. Az EWMA érzékenysége pedig úgy csökken, ahogy az α értéke csökken. Valójában, ha a mozgóátlagban n a periódusok száma, akkor a hozzá tartozó EWMA simítási tényező:

$$\alpha = \frac{2}{n+1} \text{ vagy } n = \frac{2-\alpha}{\alpha}$$

Így a mozgóátlag modell (n=7 periódussal) egyenértékű egy α=0,25 simítási tényezővel jellemzett, trend vagy szezonális hatások nélküli EWMA modellel.

Végül, az exponenciálissimítás hatékonyságának a mértékét is meg tudjuk adni, ha a folyamat teljesen stabil, azaz ha X_1, X_2,… azonos eloszlású, független valószínűségi változók, amelyek szórása σ. Ekkor az előrejelzés hibájának varianciája:

$$\text{var} \approx \frac{\alpha\sigma^2}{2-\alpha} = \frac{\sigma^2}{(2-\alpha)/\alpha}.$$

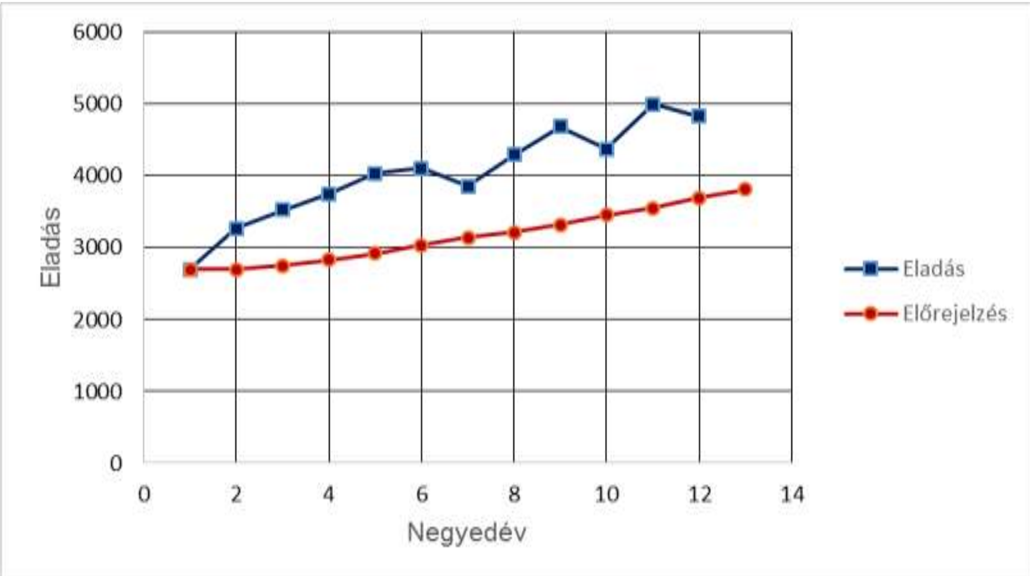
Az előző megállapítás alapján statisztikailag a szórásnégyzet is ekvivalens egy $(2-\alpha)/\alpha$ megfigyelésre vonatkozó mozgóátlaggal. Például, ha α=0,1 és $(2-\alpha)/\alpha$=19, akkor az exponenciálissimítás módszere ekvivalens n=19 periódusos mozgóátlagra alapozott eljárással. Meg kell azonban jegyezni, hogy az exponenciálissimítás érzékenyen reagálhat arra, ha az említett feltételeink nem teljesülnek.

A **3.1 példa megoldása** az exponenciálissimításra alapozott előrejelzési eljárás szerint, ha α=0,1:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \alpha x_t + (1-\alpha)\tilde{E}(X_t) = 3811{,}48 \text{db.}$$

A példában várható eladások tendenciája az exponenciálissimításnak köszönhetően követi a tényleges eladások tendenciáját, azonban az előrejelzés nagyon alulbecsült (*3.5. ábra*).

Az exponenciális simítás modellje a kereslet hirtelen és nagy változásaira lassan reagál, az eljárás azt feltételezi, hogy az ilyen változások csak véletlenszerűek. (Később megmutatjuk, hogy az eljárást könnyen tendenciához, szezonális hatásokhoz vagy mindkettőhöz lehet igazítani). Ha a tényleges keresletnövekedést vagy - csökkenést tükröző változások a következő időszakokban is folytatódnak, akkor az exponenciálissimítás a tényleges keresletet jól nyomon követi.



3.5. ábra: A várható eladások tendenciája exponenciálissimítással

A válasz érzékenységét a kereslet változásaira a simítási tényező (α) értéke határozza meg. Amikor az előrejelző rendszerben α értéket kicsi, akkor a túlfeszített kereslet csak nagyobb biztonsági készlettel elégíthető ki. A megfelelő a simítótényezőt nehéz megválasztani. Az exponenciálissimítást úgy is tekinthetjük, mint egy statisztikai szűrőt, amely egy sztochasztikus folyamat nyers (megmunkálatlan) adataiból az átlagok időben változó, kisimított becsléseit szolgáltatja. Ha α-t kicsire választjuk, a válasz lassan változik, sima becslésekkel. Ha viszont α nagy, akkor a válasz gyorsan változik, nagy varianciával. Ezért a folyamat stabilitásának függvényében kell megfelelő α-t kiválasztani. Továbbá, a simítótényező „jó" értéke függ a szóban forgó sztochasztikus folyamattól is.

Az α értéke lehetőleg ne haladja meg 0,3-at, és úgy tűnik, a legjobb választás általában 0,1 körül van. Természetesen lehet nagyobb is, esetleg csak időlegesen, pl. ha például szokatlan változás várható.

Az exponenciálissimítás alkalmazásához meg kell becsülni a kezdeti előrejelzést, ezt nevezzük **kezdő becslésnek**. Az eljárás indításakor a 2. periódus előre jelzésére a megfelelő közelítés

$$\widetilde{E}(X_2) = \alpha x_1 + (1-\alpha)(\text{kezdő becslés}),$$

ahol a (kezdő becslés)-t különböző megfontolások alapján lehet megválasztani.

Amikor elegendően sok múltbeli adattal rendelkezünk, és azok ingadoznak, akkor néhány kutató azt ajánlja, hogy bontsuk az adatokat két halmazra. A régebbi adatokat tartalmazó halmaz átlaga adja a kezdő becslést, és a másik halmaz adatai képezik a vizsgálat tárgyát. Más kutatók a kezdő becslés értékének az idősor legkorábbi értékét javasolják, különösen akkor, ha az idősor adati növekvő tendenciát mutatnak.

Egy adott adathalmazra a megfelelő α érték a múltbeli megfigyelt értékek mintáján végzett kísérlettel határozható meg (retrospektív vizsgálat). Az α választására a folyamat visszamenőleges szimulációja ad egy lehetőséget. Az α rögzített értékeire, a múlt adatait felhasználva hasonlítsuk össze az előre jelzett mennyiségeket a valóságos értékkel, és válasszuk azt az α-t, amely valamilyen szempontból optimális. Remélhetjük, hogy a folyamat a jövőben hasonlóan fog viselkedni, mint a múltban.

(5) Előrejelzési eljárás tendenciához igazított exponenciálissimítással. Mint ahogy korábban rámutattunk, a (4) pontban ismertetett eljárás a folytonos tendenciát késedelemmel követi. Most tegyük fel, hogy a megfigyelt idősor alapján generált folyamatot véletlen ingadozásoknak kitett lineáris függvénnyel lehet leírni, amelynek a meredeksége B. A meredekséget itt **tendenciatényezőnek** nevezzük, amely a kerékpár-példában az egy periódusra eső várható forgalomnövekedést vagy forgalomcsökkenést jelzi. Ezt a modellt a következő kifejezéssel írhatjuk le:

$$X_t = h_t + e_t = A + Bt + e_t,$$

ahol X_t a t időponthoz tartozó véletlen változó, az A konstans, B a tendenciatényező, és e_t a véletlen hiba a t időpontban, amiről gyakran azt feltételezzük, hogy a várható értéke 0 és a szórásnégyzete állandó.

Az előző modellekben a t+1-edik periódus előrejelzése csak az előző periódusok adataira támaszkodott, és az előrejelzés t+1+m, (m=1,2,...) periódusokra az idő szerepét figyelmen kívül hagyta. Ez az állítás a lineáris tendencia modellre nem igaz. Ez azonnal kiderül, amint bevezetjük az **előrejelzési szint** vagy simítási szint fogalmát. Ha az idősor t időpontban megfigyelt értéke x_t, akkor az előrejelzési szintet a t időpontban az S_t jelöli. Az előrejelzési szint:

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + B_{t-1}).$$

Az S_t előrejelzési szint az utolsó x_t, és a megelőző $t-1$ periódus előrejelzési szintjének (S_{t-1}) a tendenciatényezővel (B_{t-1}) korrigált lineáris kombinációja ($S_{t-1}+B_{t-1}$). Az S_{t-1}-hez tehát hozzáadjuk a B_{t-1} meredekséget, ami az időegység alatti változást jelzi.

Maga az előrejelzés a t+1 időpontra pedig a következő kifejezéssel számítható:

$$\widetilde{E}(X_{t+1}) = S_t + B_t.$$

Általában azonban B_t-t nem ismerjük, így B_t-t is meg kell becsülni. Az exponenciálissimítás erre a célra is használható:

$$B_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)B_{t-1},$$

ahol B_t a tendenciatényező (meredekség) simított értéke a t periódus végén, $0<\beta<1$ egy másik (α-tól esetleg különböző) simítótényező. (A β választására is azok a megfontolások vonatkoznak, amit korábban az α választásáról elmondtunk.)

A tendenciatényezővel korrigált exponenciálissimítás nemcsak az $E(X_{t+1})$-re ad jó becslést, hanem a további periódusokra is. Ez a növekedési vagy csökkenési tendenciának köszönhető. A $(t+m)$-dik periódusra előre jelzett eladást, amelyhez a t-edik periódusra vonatkozó múltbeli adatokat használjuk fel, a következő formulával határozhatjuk meg:

$$\widetilde{E}(X_{t+m}) = S_t + mB_t$$

Ezek után az előrejelzési eljárást a következők szerint foglalhatjuk össze:

(1) Felhasználva az idősor megfigyelt értékét (x_t) a t-edik periódus végén, az idősor előző előrejelzési szintjét, (S_{t-1}) a $t-1$-edik időpontban, és a tendenciatényező előző simított értékét, (B_{t-1}) a $t-1$-edik periódus végén, az idősor előrejelzési szintje a t időpontban a

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + B_{t-1})$$

képlettel számítható.

(2) Az idősor (1) lépésben számított előrejelzési szintjéből (S_t) a t időpontban, az idősor $t-1$ időpontjához tartozó előrejelzési szintjéből (S_{t-1}), és a $t-1$ időpont simított tendenciatényezőből (B_{t-1}) a t-edik periódus végén a simított tendenciatényező értéke:

$$B_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)B_{t-1}.$$

(3) Az idősor előrejelzése $t+m$-edik periódusra (m=1,2,...,) az

$$\widetilde{E}(X_{t+m}) = S_t + mB_t$$

kifejezéssel számítható.

A kerékpár értékesítésre vonatkozó előrejelzésben, az aktuálisan értékesített kerékpárok száma a t-edik periódus végén x_t. Az eladások előrejelzési szintje a $t-1$-edik periódus végén (S_{t-1}), és a tendenciatényező simítás szintje a $t-1$–edik periódus végén (B_{t-1}) ismertek, így az

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + B_{t-1})$$

kiszámítható.

Ezután az S_t ismeretében a B_t is meghatározható a következő kifejezésből:

$$B_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)B_{t-1},$$

amelyben a tendenciatényező simított értéke a $t-1$–edik periódus végén (B_{t-1}), és az eladások előrejelzési szintje a $t-1$-edik periódus végén (S_{t-1}) külön-külön ismertek.

Végül az eladások előrejelzése az $t+m$-edik periódusokra

$$\widetilde{E}(X_{t+m}) = S_t + mB_t.$$

A lineáris tendencia modellben a simítási eljárás elindításához, az állandószintű exponenciálissimítás modellhez hasonlóan, kezdeti értékekre van szükség. Ennek az inicializálásnak gyakori módszere, hogy egy egyenest illesztünk a múltbeli adatokra (a módszert lásd később a „Regresszió analízis” című szakaszban). Az illesztett egyenes paramétereit fel lehet használni az idősor kezdeti simítási szintjének (S_0) és a tendenciatényező (B_0) kezdeti értékének a meghatározására, így az

$$S_1 = \alpha x_1 + (1-\alpha)(S_0 + B_0).$$

és

$$B_1 = \beta(S_1 - S_0) + (1-\beta)B_0 .$$

Ha például a 2. periódushoz tartozó előrejelzés meghatározása kívánatos, akkor az a

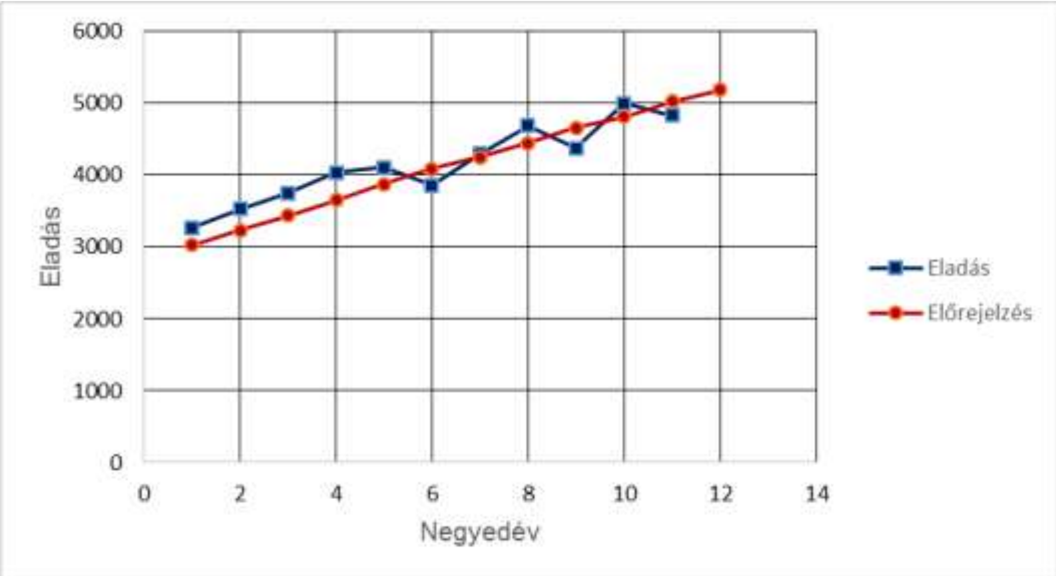
$$\widetilde{E}(X_{1+1}) = \widetilde{E}(X_2) = S_1 + B_1$$

összefüggéssel számítható.

A **3.1 példa megoldása trendkorrekcióval.** A tendenciatényező kezdeti értékét (B_0=176) lineáris regresszióval határoztuk meg az előző 12 negyedév eladási adataiból (*3.1. táblázat*). Az előrejelzési szint kezdeti értékét S_0=2700-ra, a simítási tényezőt α=0,1 választottuk. A bemutatott eljárást követve a tendenciához igazított exponenciálissimítással a 13. negyedévre az előrejelzés:

$$\widetilde{E}(X_{t+1}) = 5193{,}04 \text{ db.}$$

A várható eladások tendenciája a *3.6. ábrán* látható. A várható eladások a trendkorrekció és az exponenciálissimítás kombinációjának köszönhetően sokkal jobban illeszkednek a megfigyelt eladásokra, mint korrekciónélküli exponenciálissimításnál esetén (*3.5. ábra*).



3.6. ábra: A várható eladások tendenciája tendenciához igazított exponenciálissimítással

3.2. példa. Tegyük fel, hogy a kerékpárok negyedévenkénti eladásai az utolsó 4 negyedévben, rendre x_0=2750, x_1=2800, x_2=2925 és x_3=3040 voltak. Használjunk a tendenciához igazított exponenciálissimítást az utolsó négy megfigyelésre alapozva, abból a célból, hogy megadjuk az ötödik periódus eladásának előrejelzését. A legkorábbi megfigyelés x_0=2750 legyen egyenlő a kezdeti S_0 szinttel, továbbá legyen $\alpha=\beta$=0,1. A múlt adataira (ez most négy adat) egyenest illesztettünk. Az illesztés eredményeként az egyenes egyenlete:

$$y = 99{,}5x + 2729{,}5 .$$

Az egyenes meredeksége, a tendenciatényező kezdeti értéke: B_0=100, és az S_0=2750.

Az (1) lépésben, a kezdeti becsléseket felhasználva, azt kapjuk, hogy

$$S_1 = \alpha x_1 + (1-\alpha)(S_0 + B_0) = 0{,}1 \cdot 2800 + 0{,}9 \cdot (2750 + 100) = 2845 .$$

A (2) lépésben a tendenciatényező simított értéke az 1. periódus végén:

$$B_1 = \beta(S_1 - S_0) + (1-\beta)B_0 = 0{,}1\cdot(2845-2750) + 0{,}9\cdot 100 = 99{,}5.$$

Ezt az eljárást, az (1) és (2) lépéseket ismételve, a 2. periódusra az

$$S_2 = \alpha x_2 + (1-\alpha)(S_1 + B_1) = 0{,}1\cdot 2925 + 0{,}9\cdot(2845+99{,}5) = 2943,$$

$$B_2 = \beta(S_2 - S_1) + (1-\beta)B_1 = 0{,}1\cdot(2943-2845) + 0{,}9\cdot 99{,}5 = 99{,}4.$$

Végül a harmadik periódusban az eredmény:

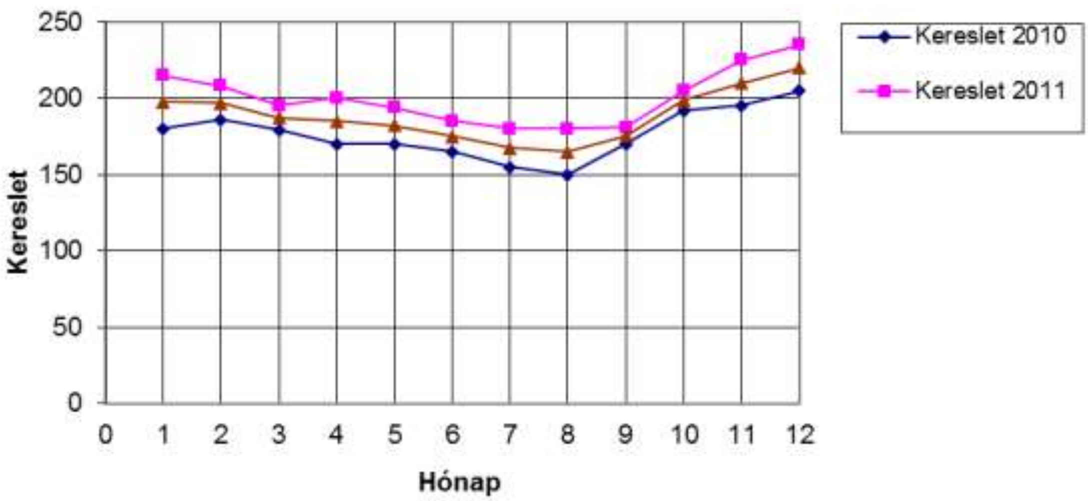
$$S_3 = \alpha x_3 + (1-\alpha)(S_2 + B_2) = 0{,}1\cdot 3040 + 0{,}9\cdot(2943+99{,}4) = 3042,$$

$$B_3 = \beta(S_3 - S_2) + (1-\beta)B_2 = 0{,}1\cdot(3042-2943) + 0{,}9\cdot 99{,}4 = 99{,}4.$$

A (3) lépéssel kiszámítjuk az ötödik periódusra az eladási előrejelzés

$$F_{3+2} = F_5 = S_3 + mB_3 = 3042 + 2\cdot 99{,}4 = 3241.$$

(6) Előrejelzési eljárás szezonálisan korrigált exponenciálissimítással. Az időszakonként többé-kevésbé szabályosan visszatérő magas és alacsony igények szezonális keresletet jeleznek. Például a *3.2. táblázat* két egymást követő év havi keresleti adatait és ezek átlagait tartalmazza. Az adatokból szerkesztett *3.7. ábra* idősorai jólláthatό szezonális változást mutatnak. A kereslet mindig decemberben éri el a csúcs- és augusztusban a minimálisértéket. Az ilyen természetű idősorok vizsgálatára az exponenciális simítás modelljét úgy kell módosítani, hogy az figyelembe vegye a szezonális változásokat.



3.7. ábra: Szezonális változásokat mutató idősor

Az egyes szezonokban (pl. hónap, negyedév) megfigyelt értékek eltérését a teljes időszak (pl. év) átlagától a szezonindexszel fejezzük ki. A **szezonindex** nem más, mint az aktuális igény értékének és az időszak átlagos értékének normalizált hányadosa. A *3.2. táblázat* szerinti példában először kiszámítjuk az aktuális (i-edik) hónap átlagos keresletét:

$$x_t = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} x_{tj},$$

majd a teljes időszak (1 év) átlagos havi keresletét:

$$\bar{x} = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{12} x_t .$$

3.2. táblázat

Hónap	Kereslet			Szezonindex, $I_t = x_t / \bar{x}$
	2010	2011	Átlag, x_t	
Január	180	215	197,5	1,049
Február	186	208	197,0	1,046
Március	179	195	187,0	0,993
Április	170	200	185,0	0,982
Május	170	194	182,0	0,966
Június	165	185	175,0	0,929
Július	155	180	167,5	0,889
Augusztus	150	180	165,0	0,876
Szeptember	170	181	175,5	0,932
Október	192	205	198,5	1,054
November	195	225	210,0	1,115
December	205	235	220,0	1,168
Összesen			2260,0	12,000
Átlag, $\bar{x}$			188,3	

Az előző két eredményből a szezonindexek:

$$I_t = \frac{x_t}{\bar{x}}$$

A *3.2. táblázatban* például az

$$x_1 = \frac{180 + 215}{2} = 197{,}5\text{, és az}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{12} x_t = \frac{2260}{12} = 188{,}33.$$

Végül a szezonindex január hónapban

$$I_1 = \frac{x_1}{\bar{x}} = \frac{197{,}5}{188{,}33} = 1{,}049.$$

A szezonindexeket exponenciálissimítással a következő kifejezéssel aktualizáljuk:

$$I_{t+m} = \frac{\gamma\, x_t}{S_t} + (1-\gamma) I_t,$$

ahol:

I_t szezonindex a *t*-edik időszakra,

γ a szezonindex exponenciális simítási állandója, 0 és 1 közötti érték,

m időszakok száma a szezonális mintában (éves szezonális mintában: havi adatok esetén, m=12, és negyedéves adatok esetén, m=4).

Az előrejelzési szint (simítási szint) szezonális kiigazítása a következő:

$$S_t = \frac{\alpha\, x_{t-1}}{I_{t-1}} + (1+\alpha) S_{t-1}.$$

Az előrejelzés a t+1-edik időszakra előrejelzés szint és a szezonális index szorzata:

$$\widetilde{E}(X_{t+1}) = S_t I_t.$$

Előrejelzés a t+n-edik időszakra is meghatározható:

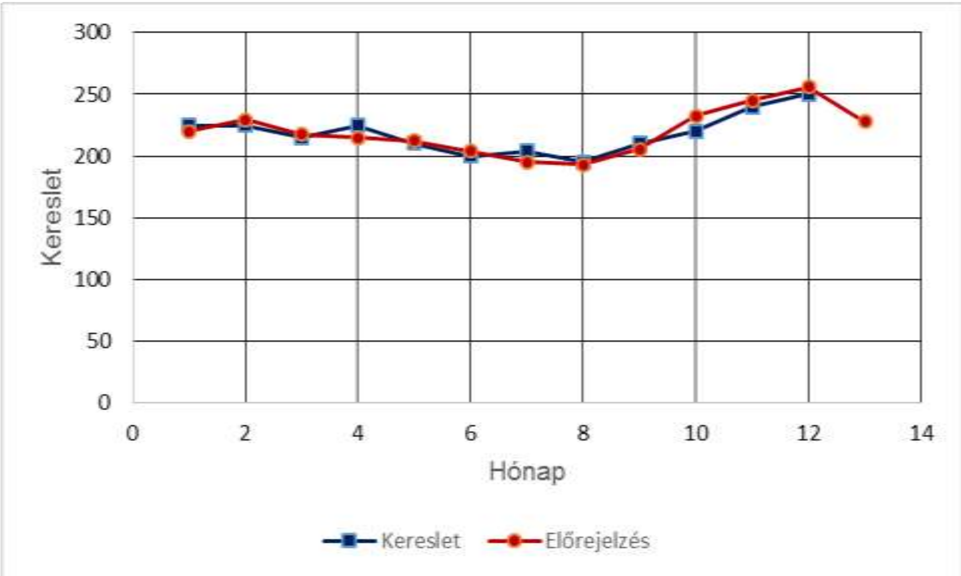
$$\widetilde{E}(X_{t+n}) = S_t I_{t+n}, \qquad n \le m.$$

3.3. példa. Egy bizonyos termék kereslet előrejelzéshez ismerjük a 2010. és a 2011. évi (*3.2. táblázat*) és a 2012. évi eladásokat (*3.3. táblázat*). A táblázatok adatai szezonális változást mutatnak, mint az a *3.7. ábrán* látható. Az 2012. évi idősorból **szezonális exponenciálissimítással** becsültjük meg a 2013. évi márciusi előrejelzést. Tegyük fel, hogy α=0,1, γ=0,3, és a kezdeti értékek S_1=220, $\widetilde{E}(X_1)$=220, B_1=0. A szezonindexeket a korábbi két év (2010 és 2011) adataiból határozzuk meg (*3.2. táblázat*).

Az algoritmust követve, a számításokat a *3.3. táblázatban* végeztük el.

3.3. táblázat

Hónap	Kereslet 2012	Simítási szint	Szezonindex		Előrejelzés	Eltérés
t	x_t	S_t	I_t	I_{t+m}	$\widetilde{E}(X_t)$	$x_t-\widetilde{E}(X_t)$
Január	225	220,00	1,049	1,041	220,00	5,00
Február	225	219,46	1,046	1,040	229,55	-4,55
Március	215	219,02	0,993	0,990	217,47	-2,47
Április	225	218,77	0,982	0,996	214,90	10,10
Május	210	219,80	0,966	0,963	212,41	-2,41
Június	200	219,55	0,929	0,924	204,01	-4,01
Július	204	219,12	0,889	0,902	194,88	9,12
Augusztus	195	220,14	0,876	0,879	192,87	2,13
Szeptember	210	220,39	0,932	0,938	205,37	4,63
Október	220	220,88	1,054	1,037	232,81	-12,81
November	240	219,67	1,115	1,108	244,94	-4,94
December	250	219,23	1,168	1,160	256,09	-6,09
Január (2013)		218,71	1,041		227,65	



3.8. ábra: A várható kereslet előrejelzése szezonális exponenciálissimítással

A *3.3. táblázatban* a simítási szint és a szezonindex 2012. februárra:

$$S_t=\frac{\alpha\, x_{t-1}}{I_{t-1}}+(1+\alpha)S_{t-1}=\frac{0{,}1\cdot 225}{1{,}049}+(1+0{,}1)\cdot 220=219{,}46,\ I_t\text{=1,046.}$$

Ezekkel az adatokkal az előrejelzés februárra:

$$\widetilde{E}(X_t)=S_t I_t=219{,}46\cdot 1{,}046=229{,}55.$$

Az új szezonindex a következő év (2013) januárra:

$$I_{t+m}=\frac{\gamma x_t}{S_t}+(1-\gamma)I_t=\frac{0{,}3\cdot 225}{220}+(1-0{,}3)\cdot 1{,}049=1{,}041\,.$$

A simítási szint és előrejelzés 2013. januárra:

$$S_t=\frac{\alpha\, x_{t-1}}{I_{t-1}}+(1+\alpha)S_{t-1}=\frac{0{,}1\cdot 250}{1{,}168}+(1-0{,}1)\cdot 219{,}23=218{,}71,$$

$$\widetilde{E}(X_{t+n})=S_t I_{t+n}=218{,}71\cdot 1{,}041=227{,}65$$

A *3.3. táblázat* további értékeit az előzőekhez hasonlóan számíthatjuk. Például az előrejelzés 2013. márciusra:

$$\widetilde{E}(X_{t+n})=S_t I_{t+n}=218{,}71\cdot 0{,}99=216{,}42.$$

Az előrejelzési és a keresleti adatokat az idő függvényében a *3.8. ábra* szemlélteti.

(7) Előrejelzési eljárás tendenciához igazított, szezonális, exponenciálissimítással. Ha az idősorban a trend és a szezonális hatások egyértelműen jelentkeznek, akkor a simítási szintet és a szezonindexet egyaránt frissíteni kell minden periódusban. Ez az eljárás a következő egyenletekkel írható le.

Az előrejelzési szint:

$$S_t=\frac{\alpha x_{t-1}}{I_{t-1}}+(1-\alpha)(S_{t-1}+B_{t-1})\,.$$

A tendenciatényező (meredekség) simított értéke:

$$B_t=\beta(S_t-S_{t-1})+(1-\beta)B_{t-1}\,.$$

A szezonindex a t+m periódusra:

$$I_{t+m}=\frac{\gamma x_t}{S_t}+(1-\gamma)I_t\,.$$

Az előrejelzés a t-edik periódusra:

$$\widetilde{E}(X_t)=(S_t+B_t)I_t\,.$$

Az előrejelzés a t+n-edik periódusra:

$$\widetilde{E}(X_{t+n})=[S_t+(n+1)B_t]I_{t+n}\text{, ha az } n\leq m.$$

3.3. példa. A tendenciához igazított szezonális exponenciálissimítás alkalmazásához ismét a *3.2.* és *3.3. táblázatokban* adott idősorokat használjuk fel, vagyis egy bizonyos termék kereslet előrejelzéshez ismerjük a 2010. és a 2011. évi és a 2012. évi eladásokat. A 2012. évi idősorból a **tendenciához igazított szezonális exponenciálissimítással** becsültjük meg a 2013. évi márciusi előrejelzést. Tegyük fel, hogy α=0,1, β=0,1, γ=0,3, és a kezdeti értékek S_1=220, $\widetilde{E}(X_1)$=220, B_1=0, továbbá a *3.3. táblázatból* felhasználjuk a korábbi két év (2010 és 2011) adataiból számított szezonindexeket is.

A számítások a *3.4. táblázatban* követhetők. Például a simítási szint és a meredekség februárra:

$$S_t=\frac{\alpha x_{t-1}}{I_{t-1}}+(1-\alpha)(S_{t-1}+B_{t-1})=\frac{0{,}1\cdot 225}{1{,}049}+(1-0{,}1)(220+0)=219{,}46\,,$$

$$B_t=\beta(S_t-S_{t-1})+(1-\beta)B_{t-1}=0{,}1\cdot(219{,}45-220{,}00)+(1-0{,}1)\cdot 0=-0{,}054\,.$$

Az adatokat felhasználva az előrejelzés februárra:

$$\widetilde{E}(X_t) = (S_t + B_t)I_t = (219{,}46 - 0{,}055)\cdot 1{,}046 = 229{,}50.$$

3.4. táblázat

Hónap	Kereslet 2012	Simítási szint	Trend	Szezonindex		Előrejelzés	Eltérés
t	x_t	S_t	B_t	I_t	I_{t+m}	$\widetilde{E}(X_t)$	$x_t - \widetilde{E}(X_t)$
Január	225	220,00	0	1,049	1,041	220	5,00
Február	225	219,46	-0,054	1,046	1,040	229,50	-4,50
Március	215	218,97	-0,097	0,993	0,990	217,32	-2,32
Április	225	218,64	-0,121	0,982	0,996	214,65	10,35
Május	210	219,57	-0,015	0,966	0,963	212,17	-2,17
Június	200	219,33	-0,038	0,929	0,924	203,77	-3,77
Július	204	218,89	-0,079	0,889	0,902	194,61	9,39
Augusztus	195	219,87	0,027	0,876	0,879	192,65	2,35
Szeptember	210	220,16	0,054	0,932	0,938	205,21	4,79
Október	220	220,73	0,105	1,054	1,037	232,76	-12,76
November	240	219,62	-0,016	1,115	1,108	244,87	-4,87
December	250	219,17	-0,059	1,168	1,160	255,95	-5,95
Január (2013)		218,60	-0,110	1,041		227,43	

A szezonindex, a simítási szint és a trend a következő év (2013) januárjára:

$$I_{t+m} = \frac{\gamma x_t}{S_t} + (1-\gamma)I_t = \frac{0{,}3\cdot 225}{220} + (1-0{,}3)\cdot 1{,}049 = 1{,}041.$$

$$S_t = \frac{\alpha x_{t-1}}{I_{t-1}} + (1-\alpha)(S_{t-1} + B_{t-1}) = \frac{0{,}1\cdot 250}{1{,}168} + (1-0{,}1)(219{,}17 + (-0{,}059)) = 218{,}60,$$

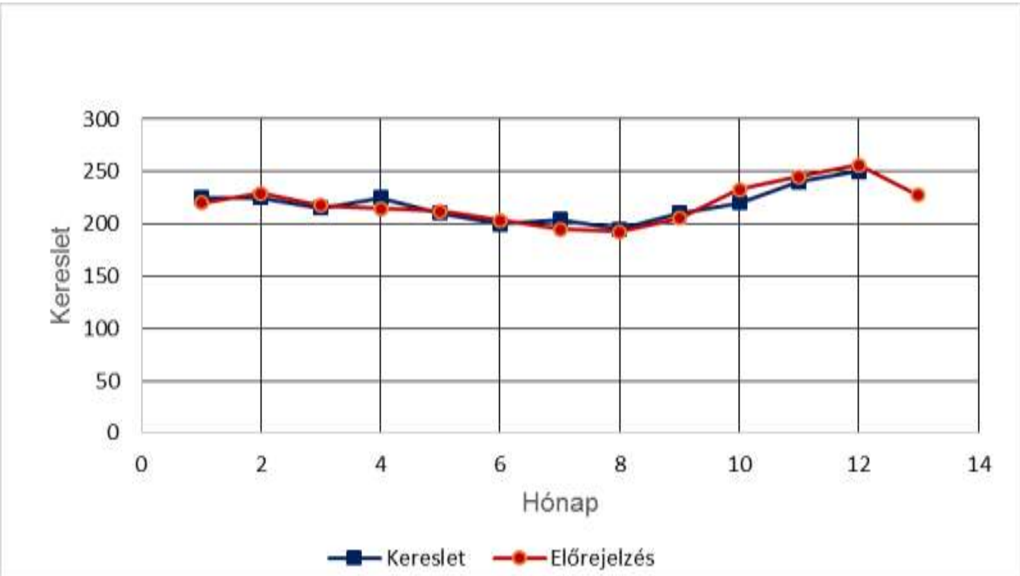
$$B_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)B_{t-1} = 0{,}1\cdot(218{,}6 - 219{,}17) + (1-0{,}1)\cdot(-0{,}059) = -0{,}11.$$

Ezeket felhasználva az előrejelzés 2013. januárra:

$$\widetilde{E}(X_{t+n}) = [S_t + (n+1)B_t]I_{t+n} = [218{,}61 + 1\cdot(-0{,}11)]\cdot 1{,}041 = 227{,}43$$

A további hónapokra az előrejelzést az előzőekhez hasonlóan határozhatjuk meg. Például az előrejelzés 2013. márciusra:

$$\widetilde{E}(X_{t+n}) = [S_t + (n+1)B_t]I_{t+n} = [218{,}61 + 3\cdot(-0{,}11)]\cdot 0{,}99 = 216{,}09.$$



3.9. ábra: A várható kereslet előrejelzése tendenciához igazított, szezonális exponenciálissimítással

A Box-Jenkins módszer

Korábban jeleztük, hogy a gyakorlatban az alkalmazott előrejelzési eljárások és modellek nem mindig vannak összhangban. A Box-Jenkins-módszer elvont és bonyolult, ráadásul sok múltbeli adatot (legalább 50 periódusnyit) igényel, azonban automatikusan megteremti a modell és az eljárás összhangját. Szerencsére az eljárást már számítógépre vitték. A programok kiszámolják a modell azonosításához szükséges minta szerinti autókorrelációkat és részleges autókorrelációkat, becslést adnak a modell paramétereire, és elvégzik a modell azonosításához szükséges vizsgálatokat is. Bár a módszer bonyolult, az általa adott előrejelzések hihetetlenül pontosak, és ha a tervezési idő rövid, akkor jobbak minden más módszer által nyújtott előrejelzésnél, és mi több, az eljárás az előrejelzés hibáját is méri.

3.1.4 Okozati módszerek

Ezeknél a kvantitatív módszereknél objektív kapcsolatot feltételezünk ismert tények és bizonyos jellemzők jövőbeni alakulása között.

Gazdasági modellek

Gazdasági összefüggések ismeretében a jelenségek modellezhetők. Például a lakásépítési támogatások változtatása hatással van az építőanyagok keresletére.

Mutatószámok

A beszállítókra vonatkozó mutatószámok hasznos információt tartalmazhatnak a beszerző részére. Például mennyire stabil a beszállító helyzete a piacon, milyen minőségű kiszolgálás várható tőle.

Input-output modellek

A különböző ágazatok kapcsolatban vannak egymással. Az egyik ágazatban előállított cikkek, szolgáltatások a másik szektorból anyagot, szolgáltatást igényelnek. Például a járműipar jelentős keresletet generál más ágazatokban.

Regresszió analízis

A statisztikai problémákban gyakran szerepelnek olyan adatok, ahol két vagy több változó között valamilyen összefüggés van. A regressziós számításoknál olyan elméleti függvényt keresünk, amely a változók közötti összefüggést a lehető legjobban leírja. A regressziós függvény meghatározása valamilyen feltételezett elméleti függvénynek a mért pontokra illesztését jelenti. Például ha tudjuk, hogy a vállalatunk múltbeli termelési volumenétől hogyan függött a gázfogyasztás, akkor a jövőbeni termelés terv ismeretében becsülhető a várható gázfogyasztás.

A továbbiakban csak arra az esetre koncentrálunk, amikor ez az összefüggés lineáris, de megjegyezzük, hogy más függvények illesztésére is kidolgozott módszerek állnak rendelkezésre, ezek számítógépes programjai is elérhetőek. A közismert *Microsoft Excellel* például a lineáris mellett logaritmikus, hatvány, exponenciális és polinomiális függvények is illeszthetők.

Tegyük fel például, hogy egy könyvkiadó a könyveit boltokban és postai megrendeléseken keresztül forgalmazza. Ez utóbbinál széleskörű hirdetést alkalmaz. A kereskedelmi menedzser az első évben igen érdekes lineáris összefüggést vett észre a postai rendelések és a könyvesbolti eladások között. Reméli, hogy a következő évben a postai megrendelések ismeretében az összefüggést jól tudja hasznosítani a könyvesboltokban eladható könyvek példányszámainak megállapításához.

Ha X jelöli a postai rendelések számát, Y pedig a könyvesbolti eladásokét, azt mondhatjuk, hogy az X és az Y valószínűségi változók bizonyos fokú összetartozást mutatnak. A két valószínűségi változó között természetesen nincs egyértelmű függvénykapcsolat, azaz ha ismerjük a postai rendelések számát, nem határozhatjuk meg **pontosan** a könyvesbolti eladások számát. A postai rendelések egy adott számához csak a lehetséges bolti eladásoknak egy **tartománya** tartozik, és ez fordítva is igaz. Ez a tartomány részben mérési hibából eredhet (például pontatlan összeszámlálásból), de főként a kiadott könyvek különbözőségéből adódik. Ezért nem is remélhető, hogy egyértelmű függvénykapcsolat legyen a postai rendelések és a bolti eladások között. Az azonban igaz, hogy több postai megrendelés több bolti eladással jár együtt. Mit jelenthet ekkor ez a kijelentés: hogy „a kereskedelmi menedzser az első évben igen érdekes lineáris összefüggést vett észre a postai rendelések és a könyvesbolti eladások között". Ez azt jelenti, hogy a könyvesbolti eladások **várható száma** lineárisan függ a postai rendelések számától, azaz

$$E[Y|X = x] = \alpha + \beta \cdot x .$$

Tehát, ha a könyvekből a postai rendelések száma x, akkor a megfelelő bolti eladások átlaga közelítőleg $\alpha+\beta\cdot x$ lesz.

Más példa is említhető a **bizonyos fokú összetartozásra**. A mérnököt érdekelheti, hogy milyen az anyag szakítószilárdsága és a keménysége közötti összefüggés. A közgazdász meg szeretné jósolni az infláció mértékét a megélhetési költségek függvényében stb.

Egyes esetekben a két valószínűségi változó között tényleges függvénykapcsolat áll fenn, amely lehet lineáris is. Az előrejelzésekkel kapcsolatban az egyik változó az idő, a másik pedig az a jellemző, amelyet éppen vizsgálni akarunk. Ilyen esetet mutattunk *3.1.3 szakaszban*, ahol az idősor viselkedését leíró kifejezés a következő volt:

$$h_t = \alpha + \beta \cdot t .$$

A valószínűségi változó pedig:

$$X_t = \alpha + \beta \cdot t + e_t ,$$

amiből

$$E(X_t) = \alpha + \beta \cdot t .$$

Vegyük észre, hogy mind a **bizonyos fokú összetartozás**, mind a **pontos függvénykapcsolat** ugyanarra a lineáris regresszióra vezet, és a tárgyalásuk is majdnem ugyanolyan. Ezért a továbbiakban a könyvkiadási példával mindkét esetet szemléltetjük, bár a modell speciális

$$h_t = \alpha + \beta \cdot t$$

ahol t értékei l-től kezdődően az egész számok, bizonyos egyszerűsített kifejezéseket szolgáltat. A regresszió analízisben általában X jelöli a független, és Y pedig a függő változót. Ezért az idősor modell kifejezése a megszokott jelölésekkel a következő alakú:

$$Y_t = \alpha + \beta \cdot t + e_t .$$

A legkisebb négyzetek módszere

Tegyük fel, hogy 15 könyvre vonatkozóan összegyűjtöttük a postai rendelések és a bolti eladások adatait, amelyeket a *3.5. táblázatban* foglaltuk össze. Az adatokra $y=a+b\cdot x$, alakú egyenest szeretnénk illeszteni. Az a és b együtthatókat úgy szeretnénk meghatározni, hogy az egyenletbe az x különböző értékeit behelyettesítve, az eredmény az y értékeinek a lehető legpontosabb becslését adja. Az illeszkedés pontosságát azzal mérhetjük, hogy összeadjuk a pontoknak az egyenestől mért távolságnégyzeteit.

Legyen tehát, az i-dik könyv bolti eladásainak száma y_i és postai megrendelések száma x_i. Jelölje $\tilde{y}_i$, az illesztett egyenesen az x_i-hez tartozó pontot. Az illesztés jóságának mértéke pedig a

$$Q = (y_1 - \tilde{y}_1)^2 + (y_2 - \tilde{y}_2)^2 + \ldots + (y_{15} - \tilde{y}_{15})^2 = \sum_{i=1}^{15} (y_i - \tilde{y}_i)^2$$

mennyiség.

A legjobb illesztést a legkisebb négyzetek módszerével úgy határozzuk meg, hogy azt az egyenest választjuk, amelyre a Q értéke a legkisebb. Az egyenes választása az a és b meghatározását jelenti. Ezeket a módszer szerint egyszerűen úgy kapjuk meg, hogy nullával tesszük egyenlővé Q-nak az a és a b szerinti parciális differenciálhányadosait, és megoldjuk az így kapott egyenleteket. A módszer azt eredményezi, hogy

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}},$$

és az

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x},$$

ahol az

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad \text{és az} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}.$$

3.5. táblázat

Postai rendelések és könyvesbolti eladások alakulása

n	Postai rendelések, x_i	Bolti eladások y_i	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	1310	4360	37065,91	1860,48
2	1313	4590	25257,24	1610,68
3	1320	4520	23171,24	1097,82
4	1322	4770	13989,24	969,28
5	1338	4760	6951,24	229,02
6	1340	5070	1961,24	172,48
7	1347	5230	-65,42	37,62
8	1355	5080	-260,09	3,48
9	1360	5550	2270,58	47,15
10	1364	5390	1854,58	118,08
11	1373	5670	8953,24	394,68
12	1376	5490	6189,24	522,88
13	1384	5810	18231,91	952,75
14	1395	6060	35195,91	1752,82
15	1400	5940	33775,24	2196,48
Σ	20297	78290	214541,33	11965,73
	$\bar{x}$ =1353,13	$\bar{y}$ =5219,33		

A *3.5. táblázatban* elvégzett számítások eredményei:

$$\bar{x} = 1353{,}1,$$

$$\bar{y} = 5219{,}3,$$

$$\sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 214543{,}9,$$

$$\sum_{i=1}^{15}(x_i-\bar{x})^2=11966.$$

Ezeket helyettesítve az előző képletekbe, a

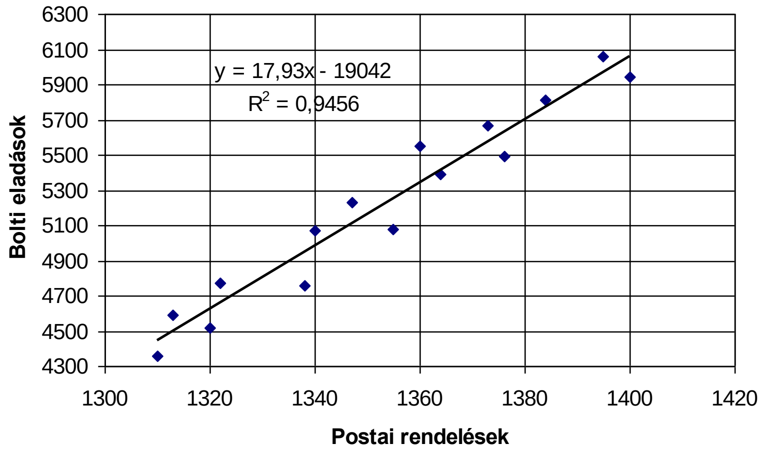
$$b=\frac{214543{,}9}{11966}=17{,}93,$$

és az

$$a=5219{,}3-17{,}93\cdot 1353{,}1=-19041{,}9.$$

A legkisebb négyzetek módszere alapján a bolti eladások $\tilde{y}$ becslése a postai megrendelések függvényében:

$$\tilde{y}=-19041{,}9+17{,}93x.$$



3.10. ábra: A bolti eladások és a postai rendelések összefüggésének szemléltetése

A könyvkiadó példa megfigyelt adatait és az azokra illesztett egyenest a *3.10. ábra* szemlélteti.

Az így illesztett egyenes az előrejelzések szempontjából igen hasznos, ugyanis adott x értékekhez tartozó $\tilde{y}$ értékek jelentik az előrejelzést. A döntéshozót persze érdekli, mennyire bizonytalan ez az előrejelzés. Ezt a bizonytalanságot alkalmas feltételek mellett könnyű megkapni. A szakasz hátralevő részében mindig feltesszük, hogy

1. n pár, (x_1,Y_1), (x_2,Y_2),…,(x_n,Y_n) véletlen mintát vettünk,
2. Y_i-k normális eloszlásúak, várható értékük $a + b\cdot x_i$, szórásuk σ (független i-től).

Az előrejelzés bizonytalanságának meghatározásában nem nagyon lényeges, hogy Y_i normális eloszlású e, de az igen, hogy a szórása állandó. Továbbá, erre a szórásra is kell becslést adnunk.

Az illeszkedés jóságát az eltérés négyzetösszeg (Q) és az $r_i=y_i-bx_i-a$ reziduális hibák s_r korrigált szórása jellemzi, ahol

$$s_r^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\tilde{y}_i)^2}{n-2}.$$

A szórásnégyzet (σ^2) torzítatlan becslését az s_r^2 adja. Az illeszkedés jóságának megítélésére gyakran használjuk a következő kifejezéssel számítható **korrelációs együttható** négyzetét:

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2}.$$

A *3.6. táblázatból* az utolsó két oszlop összegzett adatait helyettesítve a korrelációs együttható négyzete a mintapéldában:

$$r^2 = \frac{4068093{,}33 - 221446{,}71}{4068093{,}33} = 0{,}945564989.$$

3.6. táblázat

Adatok a korrelációs együttható számításához

n	Postai rendelések x_i	Bolti eladások y_i	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - a - bx_i)^2$
1	1310	4360	738453,78	7464,96
2	1313	4590	396060,44	8065,84
3	1320	4520	489067,11	11172,49
4	1322	4770	201900,44	11759,23
5	1338	4760	210987,11	35509,63
6	1340	5070	22300,44	7344,49
7	1347	5230	113,78	14445,64
8	1355	5080	19413,78	30015,56
9	1360	5550	109340,44	42890,41
10	1364	5390	29127,11	606,14
11	1373	5670	203100,44	8837,88
12	1376	5490	73260,44	19538,45
13	1384	5810	348887,11	1352,77
14	1395	6060	706720,44	8019,20
15	1400	5940	519360,44	14424,01
Σ	20297	78290	4068093,33	221446,71

3.1.4 Összefoglalás

A természeti, gazdasági és társadalmi tényezők hatását és alakulását nem elegendő feltárni és a jelenben tanulmányozni, hanem azokat a jövőben várható kívánalmaknak megfelelően kell alakítani. A statisztika bizonyos módszerei lehetőséget nyújtanak az előrejelzésre, de csak rövid távú becsléseknél alkalmazhatók. Az előrejelzés szükségessége különböző menedzselési szinteken jelentkezhet.

A statisztika, az idősorok módszeres vizsgálata alapján, adhat bizonyos előrejelzést. Az ok és okozati jellegű összefüggések nagyobb része **statikus**, vagyis az adott időszakra vonatkozó keresztmetszeti adatok alapján jellemzi számszerűen a kapcsolatot. Ilyen esetben feltételezhető, hogy a kapcsolat a jövőben is hasonló jellegű marad, és a kapcsolatban rejlő törvényszerűség a jövőben is érvényesül. Az összefüggések kisebb része **dinamikus** jellegű, amikor idősorok között adódik ok és okozati kapcsolat. Az ilyen kapcsolatok, ha azok jellemzői hosszabb időszakra vonatkozó vizsgálat eredményei, használhatóbbak előrejelzési célokra, mint a statikus összefüggéseké. Az idősorok összefüggésén alapuló előrejelzéskor figyelemmel kell lenni az idősoroknál fellépő autókorrelációra is.

A múlt adatait össze kell gyűjteni, és az adatok tanulmányozása alapján állítható fel a megfelelő modell. A modellhez választani kell egy előrejelzési eljárást, amely összhangban működik a modellel. Az előrejelzési eljárás egy vagy több paraméter, például az exponenciálissimítás a simítási tényező, megválasztását igényelheti. A múltbeli adatok segíthetik ezt a választást.

Ebben a fejezetben több előrejelzési eljárást ismerhetünk meg. Mindegyik rendelkezik előnyökkel és hátrányokkal. Az alkalmas eljárás kiválasztása az előrejelzést igénylő modell sajátosságaitól függ, mint például a periódusszám, vagy az alkalmazás típusa. A gyakorlatban általánosan elterjedt alapvető előrejelzési módszereket és eljárásokat a *3.7, 3.8. és 3.9. táblázatok* foglalják össze.

3.7. táblázat

Kvalitatív módszerek

	1. Delphi módszer	**2. Véleményalkotás**
Leírás	Szakértők egy csoportját kérdőívek sorozatával keresik meg. Az első kérdőívre adott válaszokat a következő kérdőív összeállításánál felhasználják. Így minden információ, amit egy szakértő ismert, eljut a többi szakértőhöz is, ezzel mindenki azonos információk alapján válaszolhat. Ez a módszer kiküszöböli a többségi vélemény pártosságát.	Ez a módszer azon alapszik, hogy néhány szakértő együtt jobb előrejelzést tud adni, mint egy személy. Nincs titoktartás, az eszmecserét bátorítják. Az előrejelzést gyakran befolyásolják társadalmi tényezők, és nem mindig valós egyetértésen alapszik.
Pontosság		
Rövidtáv (0-3 hónap között)	Megfelelő és nagyon jó	Elégséges és megfelelő
Középtáv (3 hó-2 év között)	Megfelelő és nagyon jó	Elégséges és megfelelő
Hosszútáv (2 év fölött)	Megfelelő és nagyon jó	Elégséges
A fordulópont azonosítása	Megfelelő és jó között	Elégséges és megfelelő között
Tipikus alkalmazások	Hosszú távú és új termékek eladására vonatkozó előrejelzések	Hosszú távú és új termékek eladására vonatkozó előrejelzések, haszon előrejelzéssel
Szükséges adatok	Szervező állítja össze a kérdőívet, értékeli a válaszokat.	Szakértők egy csoportjától szerzett információk megvitatása nyilvános üléseken, az előrejelzésben való megegyezés érdekében legalább két találkozó szükséges.
A számítógépes előrejelzés költsége.	2000000 Ft	3000000 Ft
Lehet-e számítógéppel számolni	igen	igen
Fejlesztés és alka1mazás időigény	2 hónap	2 hét

3.8. táblázat

Idősor-analízis

	1. Mozgó átlag	2. Exponenciálissimítás	3. Box-Jenkins módszer
Leírás	Egy idősor mozgóátlagának minden pontja a sor egymást követő pontjainak számtani vagy súlyozott közepe, ahol az adatokat úgy választják, hogy az időszakos és a szabálytalan hatásokat kiküszöböljék.	Ez a mozgóátlag módszerhez hasonló, csak a frissebb adatokat nagyobb súllyal veszi figyelembe. Az új előrejelzés egyenlő a régi előrejelzései plusz a régi előrejelzés hibájának bizonyos hányadával. Az adaptív előrejelzés is hasonló, csak az évszakok hatását is figyelembe veszi. Az exponenciálissimításnak sok változata ismert, néhány hatékonyabb, mint a többi, néhány összetettebb a számítások szempontjából, néhány több gépidőt igényel.	Az exponenciálissimítás a *Box-Jenkins* módszer speciális esete. Az idősort egy olyan matematikai modellbe illesztjük, amely optimális abból a szempontból, hogy a múlthoz kisebb hibát rendel, mint más modellek. Meg kell határozni a modell típusát, majd becsülni kell paramétereit. Ez a jelenleg rendelkezésünkre álló legjobb statisztikai eljárás, de ugyanakkor igen költséges és időigényes
Pontosság			
Rövidtáv (0-3 hónap között)	Elégséges és jó között	Megfelelő és nagyon jó	Nagyon jó és kitűnő
Középtáv (3 hó-2 év között)	Rossz	Elégséges és jó között	Elégséges és jó között
Hosszútáv (2 év fölött)	Rossz	Elégséges	Rossz
A fordulópont azonosítása	Elégséges	Rossz	Megfelelő
Tipikus alkalmazások	Készletirányítás kis mennyiségű cikkekre.	Termelés- és készletirányítás, haszon és más pénzügyi adatok előrejelzése.	Termelés- és készletirányítás nagy mennyiségű termék esetén, pénzügyi mérlegek előrejelzése
Szükséges adatok	Legalább két éves eladási statisztika, ha az eladás időszakosan változik, egyébként lehet kevesebb. (Természetesen, minél több annál jobb.)	Ugyanaz, mint a mozgóátlag esetén.	Ugyanaz, mint a mozgóátlag esetén, azonban itt a több múltbeli adat igen előnyös a modellazonosítás érdekében.
A számítógépes előrejelzés költsége.	150 Ft	150 Ft	30000 Ft
Lehet-e számító- géppel számolni	Igen (Microsoft Excel)	Igen (Microsoft Excel)	Igen (IBM SPSS)
Fejlesztés és alka1mazás időigénye	1 nap	1 nap	1-2 nap

3.9. táblázat

Okozati módszer

	Regressziós modell
Leírás	Az eladást gazdasági mutatókkal, vagy más belső változókkal függvény-kapcsolatba hozzuk. Az összefüggéseket előzetesen statisztikailag megvizsgáljuk, majd kiválasztunk egy alkalmas függvényt és azt a legkisebb négyzetek módszerével a megfigyelt adatokra illesztjük. tetszőleges összefüggés választható valamilyen ésszerű megfontolás alapján.
Pontosság	
Rövidtáv (0-3 hónap között)	Jó és nagyon jó között
Középtáv (3 hónap-2 év között)	Jó és nagyon jó között
Hosszútáv (2 év fölött)	Elégséges
A fordulópont azonosítása	Nagyon jó
Tipikus alkalmazások	Eladások előrejelzése termékosztályok számára, haszon előrejelzés.
Szükséges adatok	Néhány év negyedéves adatai, hogy értelmes összefüggést kapjunk. Matematikailag kettővel több megfigyelés kell, mint a független változók száma.
A számítógépes előrejelzés költsége.	30000 Ft
Lehet-e számítógéppel számolni	igen
Fejlesztési és alka1mazás időigénye	Attól függ, milyen ügyesen tudjuk az összefüggést azonosítani.

3.2. A függőigények meghatározása

Függő keresletű anyagok (adott termék előállításához szükséges alapanyagok, alkatrészek, félkész termékek, stb.) igényének meghatározása a **gyártástervezés** keretei között valósul meg. A gyártástervezés során megoldandó fő feladatok a következők:

a **gyártási programtervezés** (a gyártandó végtermékek meghatározása fajta, mennyiség, minőség és időpont szerint),

a **mennyiségi tervezés** (a gyártandó alkatrészek és részegységek, illetve a beszerzendő anyagok, alkatrészek, részegységek, késztermékek mennyiségének meghatározása),

a **határidő- és kapacitástervezés** (a munkafolyamatok kezdő- és befejező időpontjainak meghatározása, a szükséges kapacitások tervezése).

A gyártási folyamat tervezésének kiindulópontja, és az összes további tervezés alapja a **gyártási program**, amely az értékesítési folyamattal szorosan összehangoltan működik. A gyártási programtervezés pontossága nagymértékben befolyásolja az egész vállalat (üzem, gyár) gyártási és irányítási rendszerének hatékonyságát, valamint az ezzel kapcsolatos logisztikai ráfordítások nagyságát.

A gyártási programtervezés keretein belül kell meghatározni a gyártandó termékek fajtáját, mennyiségét és elkészítésének időpontját. Ekkor általában ún. elsődleges igényfelmérésre, azaz a terméket felvevő piac várható igényére támaszkodhatunk. Az **elsődleges igény** származhat tényleges vagy prognosztizált vevői megrendelésekből. Az optimális gyártási program kidolgozása érdekében az értékesítési prognózisok, előrejelzések alapján különböző gyártási alternatívákat kell meghatározni, esetleg szimulálni lehet a tervezési döntéseket.

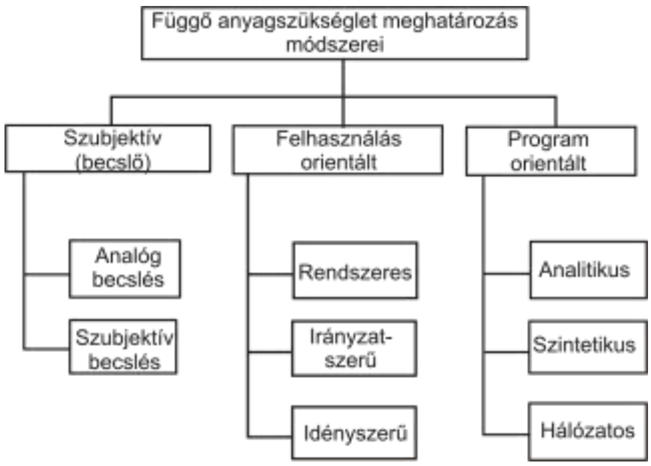
A **mennyiségi tervezés** keretében meg kell határozni a bruttó és a nettó anyagszükségletet az anyagnormák és beépülési fák alapján, illetve el kell készíteni azok beszerzési tervét.

Az **anyagszükségleten** belül háromféle igény határozható meg:

az elsődleges anyagszükségletet az előrelátható végtermék- és alkatrészigény jelenti,

a másodlagos anyagszükségletet az elsődleges igényként jelentkező termékek előállításához szükséges nyersanyagok, alkatrészek és részegységek mennyisége határozza meg,

a harmadlagos anyagszükségleti terv a segéd- és üzemanyagok mennyiségét (minőség és fajta szerint) tartalmazza.



3.11. ábra: A függőigények meghatározási módszerei

Az anyagszükségleti terv elkészítésének célja az, hogy az elsődleges igényfelmérésből levezesse a másod- és harmadlagos igényeket. A különböző szintű igény-meghatározásokhoz: programorientált, felhasználás orientált és szubjektív (becslő) eljárásokat lehet alkalmazni (*3.11. ábra*).

3.2.1 Anyagnormák

Az **anyagnormák** olyan fajlagos mutatószámok, amelyek megadják, hogy egy termékegység gyártása, illetve egy tevékenységegység végzése mennyi anyagot igényel. Anyagnorma például az 1 m^3 beton keveréséhez szükséges sóder, cement és víz mennyisége, a gépkocsi üzemanyag fogyasztása 100 km-en. Az anyagnormák a következő szempontok szerint csoportosíthatók:

Forma szerint: felhasználási norma, kihozatali norma.

Szerkezet szerint: nettó, bruttó és beszerzési norma.

Az alkalmazott meghatározási módszer szerint: statisztikai eljárással becsült norma, és műszaki gazdasági elemzéssel kalkulált norma (analitikus módszer).

Az **anyag felhasználási norma** vagy anyagnorma azt adja meg, hogy egységnyi mennyiségű termék előállítása mennyi anyagot igényel. Az **anyag kihozatali norma** ennek a reciprok értéke, azaz egységnyi mennyiségű nyersanyagból mennyi készterméket lehet előállítani. Információtartalmát tekintve a kétféle anyagnorma azonos értékű.

Mikor melyiket használjuk, azt az dönti el, hogy mi az alkalmazás célja. Szükségletszámításhoz inkább az anyag felhasználási norma alkalmazása ajánlott. Az anyag kihozatali norma elsősorban a tevékenység változás hatásfokának, hatékonyságának a mérésére alkalmas.

A szerkezet szerint megkülönböztetett anyagnormák abban különböznek, hogy a ténylegesen beépülő, átalakuló anyagmennyiségen felül (a veszteségek miatt) különböző plusz anyagmennyiségeket tartalmaznak. Így:

A **nettó anyagnorma** az elméleti anyagszükségletet tartalmazza.

A **bruttó anyagnorma** = **nettó anyagnorma** + **technológiai veszteségek**.

Beszerzési anyagnorma = **bruttó anyagnorma** + **egyéb veszteségek** (szállítás, raktározás, porlás, párolgás stb.)

A mennyiséget mérhetjük tömeg, térfogat, darab, stb. egységekben.

3.2.2 Szubjektív (becslő) eljárások

A **szubjektív (becslő) eljárásokat** akkor kell az anyagszükségleti terv elkészítéséhez alkalmazni, ha nem állnak rendelkezésre múltbeli értékek, amelyekre az előrejelzés támaszkodhat (pl. egy új termék kifejlesztésekor). Két változata van:

analóg becslés (ennek alkalmazásakor valamely összehasonlítható anyagra vagy termékre vonatkozó előrejelzési adatokat megpróbálják átvinni a szóban forgó anyagra vagy termékre),

intuitív becslés (az anyagfelhasználást az adott területen dolgozó szakértő személyek kikérdezésére, azok becslésére alapozzák).

Mivel mindkét módszer nagymértékben szubjektív, ezért a hibás becslés veszélye nagy. Elsősorban akkor célszerű alkalmazni, ha kicsi értékű anyagokról vagy termékekről van szó.

3.2.3 Felhasználás orientált eljárások

A **felhasználás orientált eljárások** statisztikus módszereket használnak. Akkor alkalmazzák, ha

a programorientált módszerek nem eredményesek (pl. új termékek vagy gyártástechnológiák bevezetésekor keletkező nagyszámú selejt miatt), vagy nem gazdaságosak,

a harmadlagos anyagszükségleti tervekben, ahol kisebb értékű anyagokat (segéd- és üzemanyagok, gyorsan kopó szerszámok) használnak.

Ezeknél az eljárásoknál összefüggést feltételeznek a múltbeli felhasználás és a jövőbeni igény között. Az összefüggések kimutatására és az anyagnormák meghatározására statisztikai módszerek alkalmazhatók. Ennek feltételei:

megfelelő számú adat (statisztikai minta) álljon rendelkezésre,

a múlt és a jövő körülményei hasonlóságot mutassanak, valamint az egyéb befolyásoló tényezők se változzanak lényegesen.

A **statisztikai becslésre** alapvetően kétféle módszer ismert: az összegző becslés, és a részletező becslés. **Összegző becslés** esetén egy lépésben állítjuk elő a keresett értéket (anyagnormát). **Részletező becslésnél** először elemi műveletekre, összetevőkre bontjuk a feladatot, a részműveleteket külön-külön becsüljük, majd ezek összesítésével állítjuk elő az eredőbecslést.

Ha például egy mosodában a feladat meghatározni mennyi víz szükséges egy kilogramm textília kimosásához, akkor a vízmennyiség kétféle módon becsülhető:

a) Összegző becsléssel azt becsüljük, hogy egységnyi mennyiségű textília teljes kimosása mennyi vizet igényel.

b) Részletező becslés esetén a mosást részműveletekre bontjuk, például előmosás, áztatás, mosás, öblítés, majd becsléssel meghatározzuk a részműveletek vízigényét, és ezeket a becsléseket összegezzük.

Példa az összegző statisztikai becslésre:

Határozzuk meg 1 kg textília kimosásának anyagnormáját, majd azt, hogy 1000 kg textília mosásához mennyi vízre van szükség, ha 1 kg textília kimosásához az elmúlt 7 alkalommal a *3.10. táblázatban* megadott mennyiségű vizet (q_i) használtak fel literben mérve. A *3.10. táblázat* adataiból egy kilogramm textília kimosása átlagosan

$$\bar{q} = \frac{\sum_{i=1}^{7} q_i}{7} = 13{,}09 \text{ liter}$$

vizet igényelt, amelyből látszólag az következik, hogy várhatóan 1 kg textília kimosásához 13,09 liter, és 1000 kg textília kimosásához 1000·13,09 = 13090 liter vízre lesz szükségünk.

3.10. táblázat

Alkalom	1	2	3	4	5	6	7
Felhasználás, q_i (l/kg)	13,5	13,4	12,9	12,6	12,4	13,0	13,8

Jogos lehet a kérdés, hogy a következő, például a 8. mosás alkalmával 1 kg textília kimosásához mennyi vízre (q) lesz szükség. Azt mondhatjuk, hogy várhatóan 13,09 liter, de a tényleges érték az adatok változása (szóródása) miatt ettől eltérhet. Ha a megfigyelt adatokról azt feltételezzük, hogy normális eloszlás szerint változnak, akkor a mosások felénél, az átlagosnál kevesebb, a mosások másik felénél pedig az átlagosnál több vizet fogunk felhasználni. A kérdésre ezért a helyes válasz: 50% a valószínűsége annak, hogy a 13,09 liter vízzel kimoshatunk 1 kg textíliát. Hasonlóan, 1000 kg textíliához a 13090 liter víz 50% valószínűséggel elegendő.

Ha feltételezésünk szerint a vízigény normális eloszlású, akkor a várhatóérték becsült értékével ($\bar{q}$), és a σ szórás becsült értékével, az

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(q_i - \bar{q})^2}$$

tapasztalati szórással bármilyen valószínűségi szinten becsülhető a q vízigény.

Ha 90% valószínűséggel szeretnénk megbecsülni, hogy mennyi víz lesz elegendő a következő mosás alkalmával 1 kg textília kimosásához, (ekkor 10 esetből csak egyszer fordul elő vízhiány), akkor a következő módon járunk el.

1. A standard normális eloszlású (0 várható értékű, 1 szórású) valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

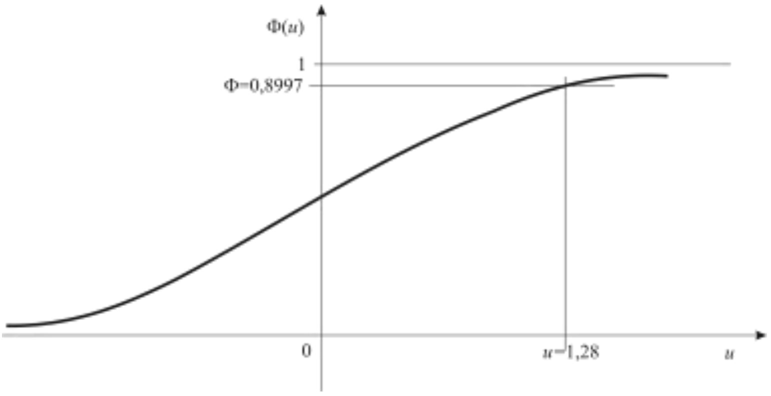
$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Ha ξ egy tetszőleges, nem nulla szórású valószínűségi változó, akkor a standard valószínűségi változó:

$$u = \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)},$$

ahol: $\xi - M(\xi)$ a ξ valószínűségi változó várhatóértéktől való eltérése, és $D(\xi)$ a szórása.

Az u valószínűségi változó értékét a $\Phi(u)$ függvény értékeit tartalmazó táblázatából olvashatjuk ki. A $\Phi(0{,}8997)$ eloszlásfüggvény értékhez (valószínűséghez) u=1,28 tartozik (*3.12. ábra*).



3.12. ábra: A standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye

Ha nem áll rendelkezésünkre táblázat, akkor közelítő számítással is meghatározhatjuk az u értékét. A standard normális eloszlású (0 várható értékű, 1 szórású) valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő kifejezéssel közelíthető:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \varphi(u) \cdot (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) + \varepsilon \, ,$$

ahol:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$$

a standard normális eloszlású (0 várható értékű, 1 szórású) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, a p=0,2316419, b_1=0,31938153, b_2=−356563782, b_3=1,781477937, b_4=−1,821255978, b_5=1,330274429 értékű állandók, a t paraméter

$$t = \frac{1}{1 + p \cdot u} \, ,$$

és az ε hiba $\leq 7{,}5 \cdot 10^{-8}$.

A bemutatott kifejezéseket és az *Excel Solver* programját használva, a következő eredményt kapjuk: $\Phi(u)$ = 0,899999947 és u= 1,281551636. A *Solver* segítségével az u értéket úgy keressük, hogy az ε hibát minimalizáljuk.

2. A *3.10. táblázat* adatait felhasználva, az átlagtól való eltérésekből kiszámítjuk a tapasztalati szórást:

$$s = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_{i=1}^{7} (q_i - 13{,}09)^2} = 0{,}5.$$

3. Számítás eredménye s=0,5, így a várható értéktől való eltérés az előzőek alapján:

$$\Delta q = \xi - M(\xi) = u \cdot D(\xi) = u \cdot s = 1{,}28 \; 0{,}5 = 0{,}65 \text{ liter}$$

vízmennyiség, amit az átlaghoz ($\overline{q}$) hozzá kell adni ahhoz, hogy a mosások 90%-ánál ne legyen vízhiány.

4. Az összes igény tehát

$$q = \overline{q} + \Delta q = 13{,}09 + 0{,}65 = 13{,}74 \text{ 1iter.}$$

Ha ennyi vizet biztosítanánk minden egyes kilogramm textília kimosásához, akkor 10 esetből várhatóan csak egyszer fordulna elő a vízhiány.

További kérdés, hogy a kapott eredmény azt jelenti-e, hogy 1000 kg textília kimosásához $1000 \cdot 13{,}74 = 13740$ liter víz szükséges a 90%-os valószínűségi szint eléréséhez. A válasz egyértelműen nem, mivel a nagyobb mennyiség ingadozásai, az átlagtól való eltérések nagyobb eséllyel egyenlítik ki egymást. Nagyobb mennyiségű textília esetén ezért a vízigény szórása csökken. Ha az 1 kg textíliára vonatkozó szórás 0,5, akkor az n=1000 kg textília esetén a szórás:

$$s' = \frac{n \cdot s^2}{\sqrt{n}} = \frac{1000 \cdot 0{,}5^2}{\sqrt{1000}} = 7{,}9 \text{ liter.}$$

Ekkor a

$$\Delta q_{1000} = u\, s' = 1{,}28\ 7{,}9 = 10{,}11 \text{ liter.}$$

Ha tehát egyszerre 1000 kg textíliát kell kimosni, akkor

$$q_{1000} = \bar{q}_{1000} + \Delta q_{1000} = 13090 + 10{,}11 = 13110{,}111\text{iter}$$

vízről kell gondoskodni. Ez a vízmennyiség 1000 kg textília kimosásához 90% biztonsággal elegendő.

A példa eredményéből kiolvasható, hogy centralizált készletből ugyanakkora igény ugyanakkora biztonsággal olcsóbban elégíthető ki, mint megosztott készletekből. Vagyis a centralizált készlet nagysága kisebb lehet, mint a megosztott készletek összege. Azt is mondhatjuk, hogy az ingadozó igényeket a centralizált készlet magasabb biztonsági szinten képes kielégíteni. A vállalatok nem véletlen törekszenek nagy elosztóraktárak, logisztikai központok létesítésére. (Ezzel természetesen nőnek a szállítási távolságok, amit szintén figyelembe kell venni. Optimalizáláskor ezért egyidejűleg több szempontot kell szem előtt tartani.)

Példa a részletező statisztikai becslésre:

Egy kilogramm textília mosásához az elmúlt 7 alkalommal a *3.11. táblázatban* látható mennyiségű vizet használtak fel műveletenként részletezve és literben mérve. Kérdés mennyi a textília mosás teljes anyagnormája.

3.11. táblázat

Alkalom/művelet	1	2	3	4	5	6	7
Előmosás (l)	4,05	4,02	3,87	3,78	3,72	3,90	4,14
Mosás (l)	7,42	7,37	7,09	6,93	6,82	7,15	7,59
Öblítés (l)	2,03	2,01	1,94	1,89	1,86	1,95	2,07

A számítások elvégzése után kapott eredményeket a *3.12. táblázat* foglalja össze. Az összesítés után az utolsó sorban a számok megegyeznek a *3.10. táblázat* 2. sorában közölt számokkal.

3.12. táblázat

Alkalom/művelet	1	2	3	4	5	6	7	Átlag	Szórás
Előmosás (l)	4,05	4,02	3,87	3,78	3,72	3,90	4,14	3,93	0,15
Mosás (l)	7,42	7,37	7,09	6,93	6,82	7,15	7,59	7,20	0,28
Öblítés (l)	2,03	2,01	1,94	1,89	1,86	1,95	2,07	1,96	0,08
Összesen (l)	13,5	13,4	12,9	12,6	12,4	13,0	13,8	13,09	0,50

A statisztikai eljárás viszonylag egyszerű, megbízható és nagyon eredményes. A számítógéppel támogatott információs rendszerek elterjedésével várható, hogy a statisztikai eljárás egyre könnyebbé válik, és az anyagnormák statisztikai úton történő számításának jelentősége nő fog. Hátránya, hogy új termékek, illetve a befolyásoló tényezők megváltozása esetén közvetlen nem alkalmazható.

3.2.3 Programorientált anyagszükséglet tervezés

A **programorientált anyagszükséglet tervezési módszer** esetében a mennyiségek és az időpontok egzakt módszerekkel (determinisztikus módon) határozhatók meg, és elsősorban a másodlagos anyagszükségleti terv készítéséhez használhatók. A szakirodalomban három változatával lehet találkozni:

- analitikus tervezés (alapja a tényleges vásárlói megrendelés és/vagy a tervezett értékesítési, illetve gyártási program, valamint darabjegyzék),
- szintetikus tervezés (a darabjegyzék helyett az alkatrész-felhasználási kimutatásokat használja),
- tervezés hálózattal (beépülési fa) a végtermék tervezett mennyiségéből kiindulva határozza meg a beépülő anyagokra, félkész termékekre vonatkozó igényeket.

A felsorolt módszerek egzakt számításokon alapulnak, azonban a kapott eredmények értékelésekor figyelembe kell venni a tényleges megvalósuláskor fellépő bizonytalansági tényezőket (az alapanyag minőségének, technológiai paraméterek ingadozását, stb.). Ezek miatt az előzetes elemzéssel számított analitikus normák általában nem teljesen egyeznek meg a tényleges normákkal.

Anyagszükséglet tervezés gráfokkal

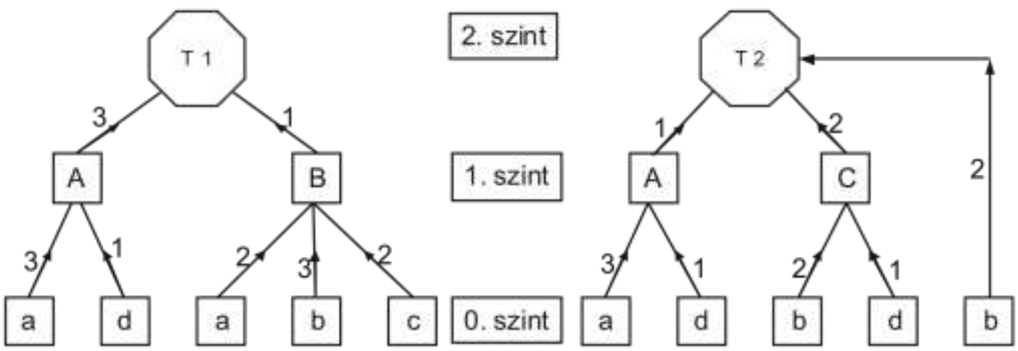
Egy vállalat által előállított végtermékekhez szükséges részegységek, alkatrészek számát az összeállítási rajzok segítségével adhatjuk meg. Azt a terméket, amely más termékbe nem épül be **végterméknek**, azt a terméket, amelybe más termék beépül, de még nem végtermék **félkész terméknek**, és végül azt a terméket, amelybe nem épül be más termék, **alkatrésznek** fogjuk nevezni. Az alkatrész fogalmát gyűjtőnévként használjuk függetlenül attól, hogy vásárolt, gyártott alapanyag, vagy komplett részegység. Vagyis a szükséglettervezési rendszer elemeit három nagy csoportba soroljuk, végtermékek, röviden termékek, félkész termékek, illetve alkatrészek. Az összeállítási rajzok elemei többféleképpen megadhatók, összeállítási fával, gozinto-gráffal és darabjegyzékkel.

Termék összeállítási fa

Az **összeállítási fa** (eredetfának is nevezik) a végtermék összes komponensét tartalmazza, mégpedig az egyes szerelési fázisok sorrendjében. Például a **0-adik szint** (*3.13. ábra*) megfelel a nyersanyagoknak, illetve elemi alkatrészeknek, míg a legmagasabb gyártási szint, mondjuk az ***N*-edik szint** a végterméknek. A több helyen előforduló azonos alkatrészeket (pl. csavarok) minden szerelési szinten ábrázolni kell, ahol előfordulnak.

Egy összeállítási fa nem más, mint egy körmentes irányított fa, amelynek

- pontosan egy olyan csomópontja van, ahova nem vezet él, ez a fa gyökere,
- a gyökéren kívül minden más csomópontba egy él vezet,
- a gyökérből minden csomópontba egy út vezet.



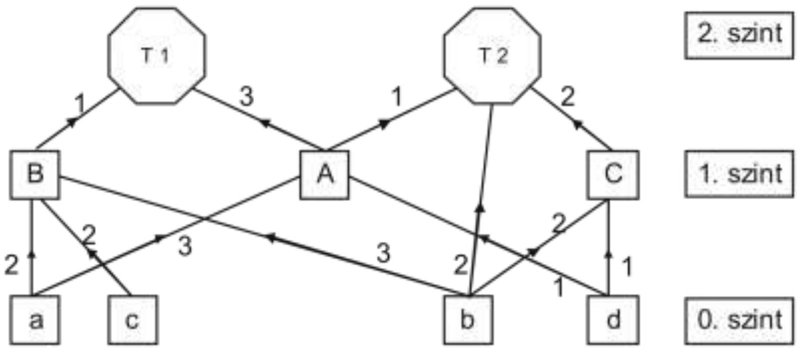
3.13. ábra: Termék összeállítási fa

A gráf különböző szintjein elhelyezkedő csomópontok megfelelnek az egyes gyártási szinteken elhelyezkedő termékeknek (*A*, *B*, *C*, *a*, *b*, stb.). Az élek irányítása a beépülés irányát mutatja. Legyen a_{ij} az *i,j* élhez rendelt érték, amely azt mutatja, hogy az *i*-edik alkatrészből közvetlenül mennyi (db, kg, m, stb.) épül be a *j*-edik alkatrészbe. Az a_{ij}-t gyakran **input koefficiensnek**, vagy **termelési koefficiensnek** nevezik.

A *3.13. ábra* két végtermék (*T*1 és *T*2) összeállítási fa struktúráját szemlélteti, amelyek *A, B, C* félkész termékekből, és *a, b, c, d* elemi alkatrészekből épülnek fel. Ügyeljünk arra, ha egy *i,j* él több összeállítási fában is előfordul, például az (*a*-*A*) és (*d*-*A*) élek, akkor azokhoz azonos a_{ij} értékek tartozzanak.

Gozinto-gráf

A termék összeállítási fa a termékek ábrázolásának jól áttekinthető formája, de a redundancia (ugyanazon elemek többszöri ábrázolása) miatt, számítástechnikai szempontból a kezelésük nem a leghatékonyabb. Kompaktabb ábrázolást tesz lehetővé az ún. **gozinto-gráf** (*3.14. ábra*), amelynek a neve egy szójátékból ered (*the part that goes into her*).



3.14. ábra: Gozinto-gráf

3.13. táblázat

*T*1 végtermék

Jelölés	Alkatrésztípus	Mennyiség
A	félkész termék	3
B	félkész termék	1

*T*2 végtermék

Jelölés	Alkatrésztípus	Mennyiség
A	félkész termék	1
C	félkész termék	2
b	elemi alkatrész	2

A félkész termék

Jelölés	Alkatrésztípus	Mennyiség
a	elemi alkatrész	3
d	elemi alkatrész	1

B félkész termék

Jelölés	Alkatrésztípus	Mennyiség
a	elemi alkatrész	2
b	elemi alkatrész	3
c	elemi alkatrész	2

C félkész termék

Jelölés	Alkatrésztípus	Mennyiség
b	elemi alkatrész	2
d	elemi alkatrész	1

Az élek pontosan ugyanazt jelentik, mint a *3.13. ábrán* bemutatott gráfon, de a **gozinto-gráfon** minden alkatrész csak egyszer jelenik meg. Így ugyan romlik a gráf áttekinthetősége, de ugyanakkor sok hibát kiküszöbölhetünk általa. Ha valamely részegységben az összetevőket megváltoztatjuk, pl. termékfejlesztés során, akkor ezt csak egy helyen kell módosítani. Hagyományos összeállítási fa alkalmazása esetén, az összes terméken, illetve részegységen végig kell menni, és a módosítást minden olyan helyen végrehajtani, ahol az érintett (módosított) alkatrész előfordul.

Ezek a gráfok a gépiparban ciklusmentesek, vegyipari alkalmazásoknál előfordulnak ciklusok (pl. finomítási eljárásoknál), amikor a végterméket, vagy egyes részterméket újra visszavezetnek ugyanabba a folyamatba.

Az összeállítási fák az ipari gyakorlatban leggyakrabban **darabjegyzék** formájában állnak rendelkezésünkre. Ide tartoznak a receptúrák a vegyiparban, anyaglisták az építőiparban, összetevők a textiliparban stb. Leginkább az építőkocka elv szerinti felosztással lehet találkozni, amely különálló „dobozokba” csoportosítja az egyes elemek tartozékait, az ismétlődő egységeket természetesen csak egyszer részletezve. A *3.8. ábrán* látható *T*1 és *T*2 termékek darabjegyzékét látjuk a *3.13. táblázatban*.

Miután elkészült a végtermékeket és az egyes félkész termékek, alkatrészek beépülését ábrázoló gráf vagy darabjegyzék, amely a szerelési szinteken kívül mutatja a beépülő mennyiségeket is, következhet a bruttó alkatrészigény meghatározása.

A bruttó alkatrészigény meghatározása

A számításokhoz először ábrázoljuk a *3.13. ábrán* látható gráfot az **A** mátrixszal (*3.14. táblázat*) Az **A** mátrix elemei az élekhez rendelt a_{ij} értékek, ahol i=1,2,..m, j=1,2,..m. Például az a-adik sorban és B-edik oszlopban az a_{ij}=2 azt jelenti, hogy a B félkész termékbe az a alkatrészből 2 db épül be. Ez a mátrix a közvetlen beépüléseket mutatja, ezért a **közvetlen ráfordítás mátrixának** nevezik.

3.14. táblázat

A közvetlen ráfordítás mátrixa (A)

i/j	*T1*	*T2*	*A*	*B*	*C*	*a*	*b*	*c*	*d*
T1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A	3	1	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	2	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	3	2	0	0	0	0	0
b	0	2	0	3	2	0	0	0	0
c	0	0	0	2	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	1	0	0	0	0

A termelés-programozás feladata a vevők közvetlen igényeinek ismeretében meghatározni az egyes termékekből, félkész termékekből és alkatrészekből gyártandó vagy beszerzendő mennyiségeket. Jelölje a $\mathbf{t}^T = [t_1, t_2, \ldots t_m]$ vektor a vevők közvetlen igényeit, amit **tervvektornak** nevezünk. A tervvektorban nemcsak végtermékek, hanem olyan félkész termékek és alkatrészek is előfordulhatnak, amelyeket a vevők a végtermékeken kívül rendelnek, például pótalkatrészként. Legyen $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \ldots x_m]$ a végtermékek és az ezekbe beépülő elemek összes mennyiségét leíró vektor, amit úgy kapunk, hogy a vevők közvetlen igényeihez (t_i) hozzáadjuk a beépülő mennyiségeket.

$$x_i = t_i + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot x_j \quad \text{ahol } i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,..,m.$$

Rendezzük az egyenletet:

$$t_i = x_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot x_j \ ,$$

amelyet tömören, vektori alakban is felírhatunk:

$$\mathbf{t} = \mathbf{x} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} \, ,$$

ahol **E** az egységmátrix. Ebből a gyártandó vagy beszerzendő mennyiségek:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{t} \, ,$$

ahol a $\mathbf{T}=(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ inverz mátrixot a **teljes ráfordítás mátrixának** is nevezik. A teljes ráfordítás mátrix elemei azt mutatják, hogy a *j*-edik termék hány *i*-edik alkatrészt vagy félkész terméket tartalmaz.

3.15. táblázat

Az (E−A) mátrix

i/j	*T1*	*T2*	*A*	*B*	*C*	*a*	*b*	*c*	*d*
T1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
T2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
A	−3	−1	1	0	0	0	0	0	0
B	−1	0	0	1	0	0	0	0	0
C	0	−2	0	0	1	0	0	0	0
a	0	0	−3	−2	0	1	0	0	0
b	0	−2	0	−3	−2	0	1	0	0
c	0	0	0	−2	0	0	0	1	0
d	0	0	−1	0	−1	0	0	0	1

Először számítsuk ki az (**E**−**A**) mátrixot (*3.15. táblázat*). Ez egy olyan kvadratikus mátrix, amelynek diagonálisában minden elem 1, a többi elem pedig az **A** mátrix elemeinek mínusz egyszerese. A mátrix inverze a $\mathbf{T}=(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ mátrix, amely a teljes ráfordítás mátrixa (*3.16. táblázat*). Az inverz mátrix számítása munkaigényes művelet (lásd a 8.1.10 szakaszban), a Microsoft Excelben azonban az INVERZ.MÁTRIX(tömb) függvénnyel egyszerűen elvégezhető.

3.16. táblázat

A teljes ráfordítás mátrixa, (T)

i/j	*T1*	*T2*	*A*	*B*	*C*	*a*	*b*	*c*	*d*
T1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
T2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
A	3	1	1	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	1	0	0	0	0	0
C	0	2	0	0	1	0	0	0	0
a	11	3	3	2	0	1	0	0	0
b	3	6	0	3	2	0	1	0	0
c	2	0	0	2	0	0	0	1	0
d	3	3	1	0	1	0	0	0	1

Legyen a tervvektor $\mathbf{t}^T = [30, 25, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$, akkor az összes gyártandó vagy beszerzendő késztermék, félkész termék és alkatrész a **T** mátrix és a **t** vektor skaláris szorzata:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{t}.$$

A kijelölt mátrixszorzást (lásd a 8.1.4 szakaszban) elvégezve, a *3.17. táblázat* utolsó oszlopában megkapjuk a termelési programot, vagyis az **x** vektor elemeit, amelyek szerint például az a alkatrészből 405 darabot, a b alkatrészből 240 darabot, kell gyártani, vagy beszerezni.

Ha ismerjük a **c** $=[c_1, c_2, \ldots c_m]$ fajlagos termék, félkész termék és alkatrész költségeket, akkor az összes költség:

$$K = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}.$$

3.17. táblázat

	T1	*T2*	*A*	*B*	*C*	*a*	*b*	*c*	*d*		t		x
T1	1	0	0	0	0	0	0	0	0		30		30
T2	0	1	0	0	0	0	0	0	0		25		25
A	3	1	1	0	0	0	0	0	0		0		115
B	1	0	0	1	0	0	0	0	0		0		30
C	0	2	0	0	1	0	0	0	0	·	0	=	50
a	11	3	3	2	0	1	0	0	0		0		405
b	3	6	0	3	2	0	1	0	0		0		240
c	2	0	0	2	0	0	0	1	0		0		60
d	3	3	1	0	1	0	0	0	1		0		165

3.2.4 A gyártástervezési és - irányítási rendszerek

A gyártástervezési és - irányítási rendszerek a meghozandó döntések központosítási mértékének függvényében: centralizáltak, részben centralizáltak (területenként központosítottak) és decentralizáltak lehetnek.

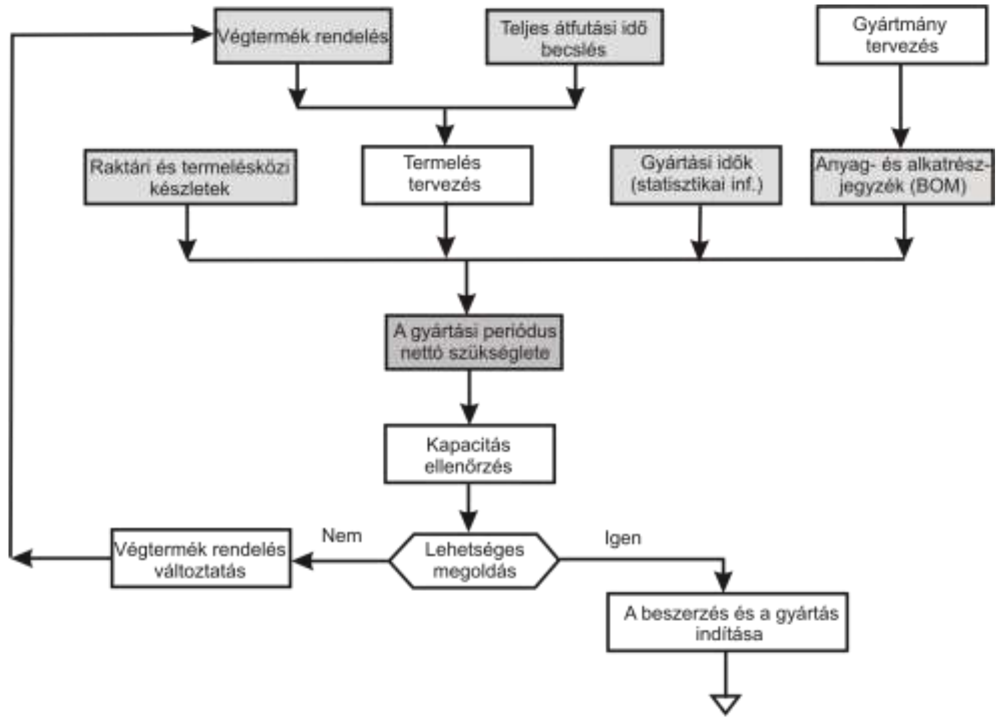
A **centralizált** gyártástervezési és - irányítási rendszereknél valamennyi, a gyártás végrehajtására (a sorozat nagyságra, a megrendelések teljesítési határidejére stb.) vonatkozó döntést, központilag hoznak meg, így a gyártásnál csupán végrehajtási tevékenységet végeznek. Az ilyen ún. erőforrás tervező rendszerek működésének előfeltételei:

- a központnak folyamatos visszajelzéseket kell kapnia a gyártás rendszerállapotairól (ez csak on-line módon valósítható meg),
- a központ rendelkezik a valóságos gyártási folyamatot pontosan leíró szimulációs modellel, amely minden pillanatban alkalmas a döntések meghozatalához szükséges információk előállítására.

A **részben centralizált** gyártástervezési és - irányítási rendszer esetén csak azoknak a termelési egységeknek (üzemeknek) a termelési folyamatát tervezik és irányítják központilag, amelyek a rendelés átfutását illetően kritikus szűkkeresztmetszetet jelentenek. A központi szűkkeresztmetszetek tervezésére és irányítására az OPT (*Optimized Production Technology* - *optimalizált gyártástechnológia*) rendszert dolgozták ki.

A **decentralizált** gyártástervezési és - irányítási rendszerekben a hierarchiailag fölérendelt szinteken csak a tervezéshez és a döntéshez szükséges keretfeltételeket írják elő, miközben a termelési folyamatokat közvetlen az alárendelt döntési szintekről irányítják. Ez a rendszer lehetővé teszi az ún. napi programok szerinti munkaszervezést (például a JIT-elvű anyagellátást és termelést), amelynek minden szakaszában −kezdve a nyersanyagok beszerzésétől egészen a végszerelésig és kiszállításig− minden tevékenység aktuális „lehívások" alapján történik. Ilyen rendszerek a japán Kanban-rendszer és a szinkrongyártás.

Az MRP-rendszerek. Az első professzionális erőforrás-tervező rendszert a 60-as években az IBM fejlesztette ki MRP I. néven (Material Requirement Planning). Ez a rendszer elsősorban az anyagszükséglet tervezést támogatta. Az MRP I.-et később az igényeknek megfelelően továbbfejlesztették, és MRP II. (Manufacturing Resource Planning) néven széles körben elterjedt.



3.15. ábra: Az MRP II működésének egyszerűsített folyamata

Mindkettő azonos logikai alapon működő tervezési, irányítási rendszer. Központi része az általános adatbázis, amelyben többek között megtalálható a megrendelések nyilvántartása, a raktár és termelésközi készletek adatai, az anyag- és alkatrészjegyzék, a gyártási ütemterv, a gyártási rendszer kapacitási, stb. (*3.15. ábra*). Az MRP II rendszer kapacitás-ellenőrző funkcióval is rendelkezik, továbbá lehetőséget nyújt pénzügyi információs rendszer kialakítására, valamint a kutatás-fejlesztéshez, a marketing tevékenységhez szükséges adatok tárolására és feldolgozására.

Az OPT-rendszer néven −ugyancsak az USA-ban− kifejlesztett rendszer adatbázisa megfelel az MRP- rendszerek adatbázisának, de eltér a két rendszer tervezési módszere. Az OPT segítségével meghatározhatók a gyártási folyamat szűkkeresztmetszetei, segíti e keresztmetszetek optimális leterhelésének tervezését, a rendelési és az átfutási idők, valamint a forgó készletek csökkentését. Az OPT rendszer alapjául szolgáló fontosabb (gyártásfilozófiai) szabályok a következők:

A gyártási folyamatot és nem a kapacitást kell kiegyenlíteni.

Valamely kapacitás rendelkezésreállása és kihasználása nem ugyanazt jelenti.

A szűkkeresztmetszet kapacitása vagy átfutási ideje miatt elvesztegetett egy óra, az egész rendszer szempontjából egy órás veszteséget jelent.

A szűkkeresztmetszeteken kívül megtakarított egy óra nem okoz átfutási idő csökkenést.

A szállítási és a gyártási sorozatnak nem kell feltétlenül megegyeznie.

A gyártási sorozatnagyság nem konstans.

A gyártási terv elkészítésekor valamennyi feltételt ellenőrizni kell, az átfutási idő ennek a tervnek lesz az eredménye, és előre nem lehet meghatározni.

Az egyedi optimumok összege nem azonos a teljes rendszer optimumával.

A darabjegyzékek alapján a szűkkeresztmetszetek megkeresése és a kapacitások meghatározása előre haladó határidő tervezéssel, a teljes gyártási folyamat kritikus és nem kritikus területekre való felosztása.

A szűkkeresztmetszeteket változó kapacitásokkal, sorozatnagyságokkal és rendelési sorrendekkel lehet optimalizálni.

Visszafelé haladó határidő tervezést kell alkalmazni annak érdekében, hogy ellenőrizni lehessen az előző lépésben kapott kapacitáselosztás, a gyártási és szállítási sorozatnagyságok, illetve a rendelési sorrendek hatását az egyéb területekre. Amennyiben az utolsó lépésben újabb szűkkeresztmetszetek adódnak, a rendszer paramétereinek és keretfeltételeinek módosításával, az eljárás megismételhető mindaddig, amíg újabb szűkkeresztmetszetek fedezhetők fel.

3.3. Feladatok

1. feladat

Tegyük fel, hogy az előző előrejelzés 2083 volt, a szóban forgó változó tényleges értéke pedig 1975, a változó legrégibb értéke 1945. Használjuk az utolsó négy megfigyelésre alapozott mozgóátlagos módszert, hogy megtaláljuk a következő periódusra szóló előre jelzést.

1. feladat megoldása

Az előző előrejelzés $\widetilde{E}(X_t)=2083$, az x_t=1975, az n=4 és a x_{t-n}= x_{t-4}=1945.

Az előrejelzés a szóban forgó t+1-edik időszakra:

$$\widetilde{E}(X_{t+1})=\sum_{i=t-n+1}^{t}\frac{x_i}{n}$$

$$\widetilde{E}(X_{t+1})=\frac{1}{n}\sum_{i=t-n+1}^{n}x_i=\frac{1}{n}(x_{t-3}+x_{t-2}+x_{t-1}+x_t).$$

Az előrejelzés a t-edik időszakra:

$$\widetilde{E}(X_t)=\frac{1}{n}\sum_{i=t-n}^{n}x_i=\frac{1}{n}(x_{t-4}+x_{t-3}+x_{t-2}+x_{t-1}).$$

Az első kifejezésből a másodikat kivonva:

$$\widetilde{E}(X_{t+1})-\widetilde{E}(X_t)=\frac{1}{n}(x_t-x_{t-4})$$

és rendezve

$$\widetilde{E}(X_{t+1})=\widetilde{E}(X_t)+\frac{1}{n}(x_t-x_{t-4}).$$

Végül az adatokat behelyettesítve, a keresett előrejelzés

$$\widetilde{E}(X_{t+1})=2083+\frac{1}{4}(1975-1945)=2090{,}5.$$

Könnyen belátható, hogy az utolsó kifejezés általánosítható:

$$\widetilde{E}(X_{t+1})=\widetilde{E}(X_t)+\frac{1}{n}(x_t-x_{t-n})$$

2. feladat

Tegyük fel, hogy az előző előrejelzés 2083 volt, a szóban forgó változó tényleges értéke pedig 1975, α=0,2. Használjuk az exponenciálissimítást, hogy megtaláljuk a következő periódusra szóló előrejelzést.

2. feladat megoldása

Az előző előrejelzés $\widetilde{E}(X_t)=2083$, az x_t=1975 és az α =0,2.

Az előrejelzés a következő periódusra, a t-edik időszakra:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \alpha x_t + (1-\alpha)\tilde{E}(X_t) = 0{,}2 \cdot 1975 + (1-0{,}2) \cdot 2083 = 2061{,}4,$$

vagy

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \tilde{E}(X_t) + \alpha[x_t - \tilde{E}(X_t)] = 2083 + 0{,}2 \cdot [1975 - 2083] = 2061{,}4.$$

3. feladat

Tegyük fel, hogy az előző előrejelzés 782 volt, a szóban forgó változó tényleges értéke pedig 794, és α=0,1. Használjuk az exponenciálissimítást, hogy megtaláljuk a következő periódusra szóló előrejelzést.

4. feladat

Tegyük fel, hogy az előző előrejelzés 782 volt, a szóban forgó változó tényleges értéke pedig 794, a változó legrégibb értéke 810. Használjuk az utolsó három megfigyelésre alapozott mozgóátlagos módszert, hogy megtaláljuk a következő periódusra szóló előre jelzést.

5. feladat

Mi lesz az előrejelzéssel, ha az exponenciálissimításban α értéke 0 vagy 1?

5. feladat megoldása

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \alpha x_t + (1-\alpha)\tilde{E}(X_t)$$

Ha α=0, akkor

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \tilde{E}(X_t)$$

vagyis az előrejelzés egyenlő az előző (utolsó) előrejelzéssel.

Ha α=1, akkor

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = x_t$$

vagyis az előrejelzés egyenlő a szóban forgó változó előző tényleges értékével. A t-edik időszakot megelőző időszakok nincsenek hatással a t-edik időszak előrejelzésre.

3.4. Ellenőrző kérdések

1. Hasonlítsa össze a függő és a független keresletű igényeket!

2. Csoportosítsa a független keresletű igények előrejelzési módszereit!

3. Ismertesse a véleményalkotás módszereit!

4. Mutassa be az idősorok elméletével kapcsolatos alapfogalmakat!

5. Ismertesse a mozgó átlagokra és az exponenciálissimításra alapozott előrejelzési eljárásokat.

6. Ismertesse a tendenciához igazított és a szezonálisan korrigált exponenciálissimítást.

7. Milyen okozati előrejelzési módszereket ismer?

8. Hogyan használható a regresszió analízis előrejelzésre?

9. Csoportosítsa a függő keresletű igények előrejelzési módszereit!

10. Ismertesse az előrejelzésekhez használható anyagnormákat!

11. Ismertesse a függő keresletű igények meghatározására alkalmas szubjektív becslő eljárásokat!

12. Mutassa be a felhasználás orientált eljárásoknál alkalmazott statisztikai módszereket!

13. Ismertesse a függő keresletű igények meghatározására alkalmas programorientált anyagszükséglet tervezési eljárásokat!

14. Hasonlítsa össze a termék összeállítási fa, a gozinto-gráf és a darabjegyzék felépítését.

15. Ismertesse a termék összeállítási fára alapozott bruttó alkatrészigény meghatározását.

16. Milyen számítógéppel segített gyártástervezési és irányítási módszereket ismer?

4. FOLYAMATOS KÉSZLETFIGYELÉSŰ MODELLEK

4.1. Folyamatos készletfigyelés, egyenletes igény

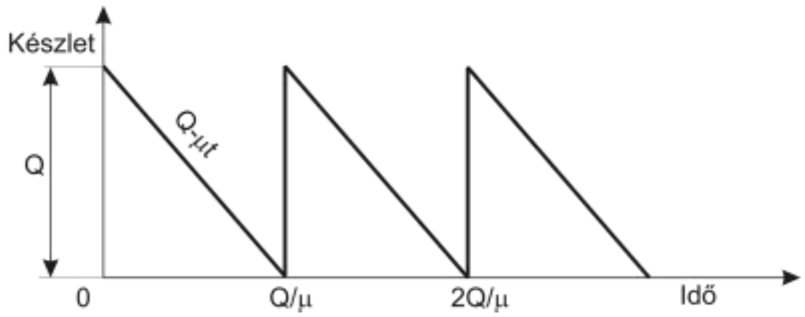
A leggyakrabban előforduló készletezési probléma, amellyel a kereskedőknek vagy a gyártóknak szembe kell nézniük, a következők szerint fogalmazható meg.

A készlet az idő függvényében csökken, amit az újrarendeléssel kell feltölteni. A **rendelési tételről** feltételezzük, hogy determinisztikus, konstans μ paraméter szerint folyamatosan fogy, ahol a μ a **felhasználási ráta,** az egységnyi idő alatti csökkenést jelenti. Továbbá feltételezzük, hogy a tételt időszakonként ugyanakkora Q darabszámban termeljük vagy rendeljük, és a Q mennyiség az igény jelentkezésével egyidejűleg rendelkezésre áll (a véges állandó utánpótlási idő esetét később tárgyaljuk). A modellekben a K_b a **beállítás** vagy a **rendelés egyszeri állandó költsége**, a c az egy darabra eső **gyártási vagy rendelési** és a h a **darabonkénti egységnyi időtartamra eső készlettartási költség**. A feladat: meghatározni a tétel gyártásának vagy rendelésének gyakoriságát és mennyiségét úgy, hogy az időegységre eső költség minimális legyen.

Ez ún. folyamatos figyelésű készletezési politika. Először feltételezzük, hogy a hiány nem megengedett, később ezt a feltételt feloldjuk. Ez a modell alkalmas a 2. fejezetben, az 1. esettanulmányban ismertetett probléma megoldására.

4.1.1 A hiány nem megengedett

A **ciklus** úgy tekinthető, mint két rendelés vagy gyártás indítása között eltelt idő. Ha például Q=2400 ekevasat gyártunk minden gyártási ciklusban, és a felhasználás intenzitása μ=800 ekevas hónaponként, akkor a ciklus hossza $t=Q/\mu$=2400/800=3 hónap. A készletszint változását az idő függvényében a *4.1. ábra* mutatja.



4.1. ábra: A készletszint változása az idő függvényében, ha a hiány nem megengedett

A **gyártási költség** egy ciklusban:

$$\begin{cases} 0, & \text{ha } Q = 0, \\ K_b + cQ, & \text{ha } Q > 0. \end{cases}$$

A **készlettartási költséget** egy ciklusra könnyen megkaphatjuk. Egy ciklus készlete a $Q-\mu t$ egyenes alatti terület, ami az átlagos készletszint $(Q+0)/2=Q/2$, és a ciklus hosszának $t=Q/\mu$, szorzata. A fajlagos készlettartási költség h, így a készlettartási költség ciklusonként

$$\frac{Q}{\mu} h \frac{Q}{2} = \frac{hQ^2}{2\mu}.$$

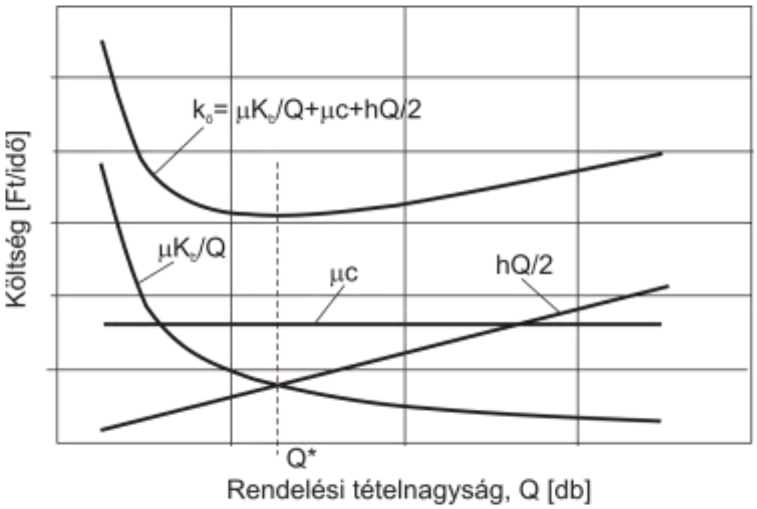
Az összes készletezési költség ciklusonként:

$$K_ö = K_b + cQ + \frac{hQ^2}{2\mu} \quad [\text{Ft}],$$

amit osztva a ciklus hosszával (Q/μ), az időegységre eső összes készletezési költséget kapjuk:

$$k_{ö} = \frac{K_{ö}}{Q/\mu} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hQ}{2} \quad \text{[Ft/idő]}.$$

A függvény képét, a részköltségeket és az eredő összköltséget a *4.2. ábra* szemlélteti, amelyen jól látható az eredőköltség minimum helye.



4.2. ábra: Az időegységre eső költségek a darabszám függvényében

Keressük Q-nak azt a Q^* értékét, amely a $k_ö$ értékét minimalizálja. Ezt a

$$\frac{dk_ö}{dQ} = -\frac{\mu K_b}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$$

feltételből kapjuk, azaz

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}},$$

amit optimális rendelési tételnagyságnak nevezünk. Ebből az optimális rendelési ciklus ideje:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \sqrt{\frac{2K_b}{\mu h}}.$$

Az irodalomban gyakran találkozhatunk az optimális rendelési tételnagyságot leíró formula más alakjával. Ha például a készletezés határozott T időtartamú, amely véges számú, $n=T/t$ periódusból áll, és ismert a T időtartam alatti teljes kereslet (N), akkor a $\mu=N/T$ miatt a formula

$$Q^* = \sqrt{\frac{2NK_b}{Th}}$$

alakban is felírható. Hasonlóan a ciklus hossza is leírható a T és N jellemzőkkel:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \sqrt{\frac{2TK_b}{Nh}}.$$

Mintapélda:

Alkalmazzuk az eredményeket az ekevas-gyártási példára. A paraméterek: K_b=120000 Ft, h=30 Ft/db-hónap, μ=800 db/hónap, c=1000 Ft/db.

Az egy ciklusban gyártott ekevasak száma, az optimális tételnagyság:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 800 \cdot 120000}{30}} = 2530 \text{ db/ciklus.}$$

Az optimális ciklusidő, vagyis az ekevas-gyártás indításának gyakorisága

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{2530}{800} = 3{,}2 \text{ hónap.}$$

A készletezés havi költsége:

$$k_ö = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hQ}{2} = \frac{800 \cdot 120000}{2530} + 800 * 1000 + \frac{30 \cdot 2530}{2}$$

$$k_ö = 875895 \text{ Ft/hónap.}$$

4.1.2 A hiány megengedett

Esetenként a hiány megengedése gazdaságos lehet, mivel az a ciklus időtartamának növekedését, és így az egy termékre eső beállítási költség csökkenését eredményezi. Magától értetődően ennek haszna a hiány miatt keletkező veszteséggel csökken.

A hiány miatt jelentkező veszteség legyen p Ft/darab-hónap, amit gyakran **utórendelési költségnek** is neveznek. A ciklus elején a beszerzés vagy feltöltés után a raktári készlet legyen S (*4.3. ábra*).

A gyártási vagy rendelési költség egy ciklusban:

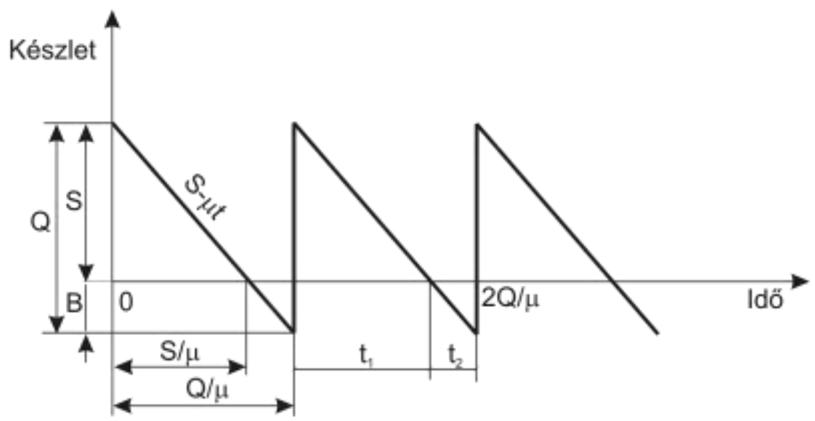
$$\begin{cases} 0, & \text{ha } Q = 0, \\ K_b + cQ, & \text{ha } Q > 0. \end{cases}$$

A készlettartási költség egy ciklusra, a *pozitív térfélre* (*4.3. ábra*), ha az átlagos készlet $(S+0)/2=S/2$, a készlettartás időtartama $t_1=S/\mu$:

$$\frac{S}{2} h \frac{S}{\mu} = \frac{hS^2}{2\mu}.$$

Hasonlóan a készlettartási költség a *negatív térfélre*, ahol az átlagos készlethiány $[(0+(Q-S)]/2=(Q-S)/2$, a fajlagos veszteség p, és a hiány időtartama $t_2=(Q-S)/\mu$:

$$\frac{Q-S}{2} p \frac{Q-S}{\mu} = \frac{p(Q-S)^2}{2\mu}.$$



4.3. ábra: A készletszint változása az idő függvényében, ha a hiány megengedett

Az összes készletezési költség ciklusonként:

$$K_ö = K_b + cQ + \frac{hS^2}{2\mu} + \frac{p(Q-S)^2}{2\mu}.$$

Az időegységre eső összes készletezési költség:

$$k_ö = \frac{K_ö}{Q/\mu} = \frac{K_b \mu}{Q} + c\mu + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q}.$$

Mivel ebben a modellben két döntési változó van, S^* és Q^*, ezért $k_ö$ minimum helyét a

$$\frac{\partial k_ö}{\partial S} = \frac{hS}{Q} - \frac{p(Q-S)}{Q} = 0,$$

$$\frac{\partial k_ö}{\partial Q} = -\frac{\mu K_b}{Q^2} - \frac{hS^2}{2Q^2} + \frac{p(Q-S)}{Q} - \frac{p(Q-S)^2}{2Q^2} = 0$$

egyenletek határozzák meg, amelyeket Q-ra és S-re megoldva az optimális készlet a ciklus kezdetén:

$$S^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}}.$$

A rendelés optimális nagysága:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}.$$

A ciklus teljes hossza:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \sqrt{\frac{2K_b}{\mu h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}.$$

A megengedett maximális hiány:

$$B^* = Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}}.$$

A ciklusban a hiánymentes időtartam (S^*/μ) és a teljes ciklushossz (Q^*/μ) közötti arány

$$\rho = \frac{S^*/\mu}{Q^*/\mu} = \frac{S^*}{Q^*} = \frac{p}{p+h}$$

független a K_b beállítási költségtől. A ρ hányadost gyakran **hiányrátának** is nevezik, ami fontos mutató a hiányt megengedő készletezésben.

A hiányos időtartamot jelöljük t_h^*, amely a *4.3. ábra* szerint

$$t_h^* = Q^*/\mu - S^*/\mu,$$

ekkor a hiányos időtartam és a teljes ciklushossz közötti arány:

$$\frac{t_h^*}{t^*} = \frac{Q^*/\mu - S^*/\mu}{Q^*/\mu} = 1 - \frac{S^*}{Q^*} = 1 - \rho.$$

Ha előre felvesszük a hiányrátát, akkor az azt jelenti, hogy $(1-\rho)$-szoros hiányt engedünk meg a ciklus időtartama alatt. Valószínűség számítási kifejezéssel a raktárhiány valószínűsége $1-\rho$. Könnyen belátható, hogy ha a $p \ll h$, akkor a ρ nagyon kicsi, és ha a $p \gg h$, akkor a ρ közelít 1-hez.

Mintapélda:

Az ekevas-gyártási példában hiány esetén p=110 Ft/db-hónap a veszteség, a többi paraméter változatlan, így

$$S^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}} = \sqrt{\frac{2\cdot 800\cdot 120000}{30}}\sqrt{\frac{110}{110+30}} = 2242 \text{ db/ciklus},$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}} = \sqrt{\frac{2\cdot 800\cdot 120000}{30}}\sqrt{\frac{110+30}{110}} = 2854 \text{ db/ciklus},$$

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{2.854}{800} = 3{,}6 \text{ hónap},$$

$$B^* = Q^* - S^* = 2854 - 2242 = 612 \text{ db/ciklus}.$$

Az egy hónapra eső készletezési költség:

$$k_{\ddot{o}} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q}$$

$$k_{\ddot{o}} = \frac{800\cdot 120000}{2854} + 800\cdot 1000 + \frac{30\cdot 2242^2}{2\cdot 2854} + \frac{110\cdot (2854-2242)^2}{2\cdot 2854},$$

$$k_{\ddot{o}} = 867273 \text{Ft/hónap}.$$

A költséget összehasonlítva az előző példa eredményével, a hiány megengedése veszteséget eredményez.

4.1. példa: Egy termék iránti kereslet μ=600 db hetente, amit egyenletesen elégítünk ki. A termék rendelési költségének állandó része K_b=5000 Ft, a darabköltsége c=600 Ft a tárolási költség darabonként és hetente h=10 Ft. A hiányt nem engedjük meg. Határozzuk meg, milyen gyakran kell a terméket rendelni, és mekkora az optimális rendelési tételnagyság.

4.2. példa: Engedjük meg a hiányt a *4.1. példában*, aminek a költsége p=400 Ft darabonként és hetente. Kérdés ebben az esetben milyen gyakran és mennyit rendeljünk.

4.1.3 Véges feltöltési kapacitás és a hiány nem megengedett

A gyakorlatban sokszor, különösen gyártással kapcsolatos készletezési problémákban, a feltöltés időtartama olyan hosszú, hogy az utánpótlás alatti felhasználás miatt, a maximális készletszint jelentősen kisebb lesz a Q megrendelt mennyiségnél. Ilyenkor figyelembe kell venni a készlet növekedését jellemző λ **feltöltési vagy érkezési rátát**. Magától értetődően ez a modell csak akkor működik, ha a $\lambda>\mu$. A készletszint változása az idő függvényében a *4.4. ábrán* látható.

Először a feltöltés utáni S maximális készlet meghatározásához számítsuk ki a feltöltés Q/λ időtartama alatti $Q–S$ felhasználást. A *4.4 ábrából* a

$$\frac{Q-S}{Q} = \frac{Q/\lambda}{Q/\mu} = \frac{\mu}{\lambda},$$

amelyből a

$$Q - S = \mu\frac{Q}{\lambda}.$$

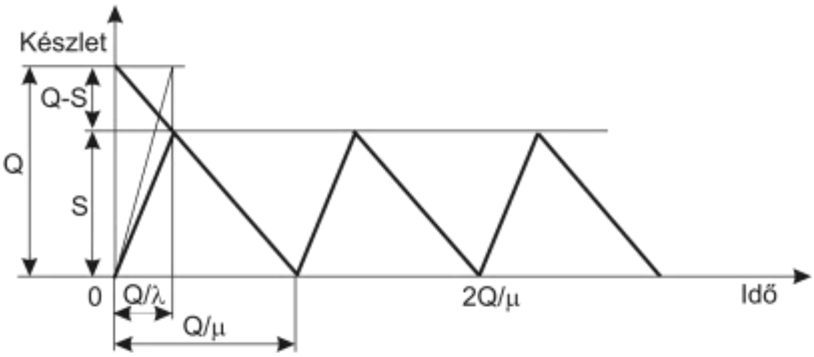
Ebből a maximális készlet:

$$S = Q - \mu\frac{Q}{\lambda}.$$

Az átlagos készlet pedig:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\left(Q - \mu\frac{Q}{\lambda}\right).$$

A maximális készletszint grafikusan is meghatározható (*4.4. ábra*), ha ismerjük a Q, λ és μ értékeket, ekkor a Q/λ és a Q/μ kiszámítható. Ezt követően a függőleges tengelyen kijelöljük a Q magasságú pontot, a vízszintes tengelyen pedig a Q/μ távolságnak megfelelő pontot, majd a két pontot összekötve megkapjuk a készletcsökkenést ábrázoló egyenest. A vízszintes tengely Q/λ pontjából húzunk egy függőleges egyenest és metszésbe hozzuk a Q magasságú vízszintes egyenessel és a készletcsökkenést ábrázoló egyenessel. Az utóbbi metszéspont adja az S értékét. Az S magasságú metszéspontot összekötve az origóval, a Q/λ időtartam alatti készletnövekedést ábrázoló egyenest kapjuk.



4.4. ábra: A készletszint változása az idő függvényében, ha a feltöltési kapacitás véges

A továbbiakban az előző két modellnél alkalmazott eljárást követjük. A gyártási költség egy ciklusban

$$\begin{cases} 0, & \text{ha } Q = 0, \\ K_b + cQ, & \text{ha } Q > 0. \end{cases}$$

A készlettartási költség egy ciklusra, ha ciklus hossza $t=Q/\mu$, és a fajlagos készlettartási költség h, akkor

$$\frac{1}{2}\left(Q - \mu\frac{Q}{\lambda}\right)h\frac{Q}{\mu} = \frac{hQ^2}{2\mu}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right).$$

Az összes készletezési költség ciklusonként:

$$K_ö = K_b + cQ + \frac{hQ^2}{2\mu}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) \quad \text{[Ft]},$$

és az időegységre eső összes készletezési költség

$$k_ö = \frac{K_ö}{Q/\mu} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hQ}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) \quad \text{[Ft/idő]}.$$

Keressük Q-nak azt a Q^* értékét, amely a $k_ö$ értékét minimalizálja. Ezt a

$$\frac{dk_ö}{dQ} = -\frac{\mu K_b}{Q^2} + \frac{h}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) = 0$$

feltételből kapjuk, azaz az optimális rendelési tételnagyság:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h(1 - \mu/\lambda)}},$$

ebből az optimális rendelési ciklus ideje:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \sqrt{\frac{2K_b}{\mu h(1 - \mu/\lambda)}}.$$

A maximális készletszint optimális értéke:

$$S^* = Q^* - \mu\frac{Q^*}{\lambda}.$$

Mintapélda:

Ismét tekintsük az ekevas-gyártási problémát. Az adataink legyenek változatlanok: K_b=120000 Ft, h=30 Ft/db-hónap, μ=800 db/hónap, c=1000 Ft/db. Az ekevas gyártás intenzitása azonban korlátozott, a λ=3000 db/hónap.

Az optimális tételnagyság:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h(1-\mu/\lambda)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 800\cdot 120000}{30\cdot(1-800/3000)}} = 2954 \text{ db/ciklus.}$$

A maximális készletszint:

$$S^* = Q^* - \mu\frac{Q^*}{\lambda} = 2954 - 800\frac{2954}{3000} = 2166 \text{ db.}$$

Az optimális ciklusidő, vagyis az ekevas-gyártás indításának gyakorisága:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{2954}{800} = 3{,}7 \text{ hónap.}$$

A gyártás (feltöltés) időtartama:

$$\frac{Q^*}{\lambda} = \frac{2954}{3000} = 0{,}98 \text{ hónap}$$

Az egy hónapra eső készletezési költség:

$$k_{\ddot{o}} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hQ}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right),$$

$$k_{\ddot{o}} = \frac{800\cdot 120000}{2954} + 800\cdot 1000 + \frac{30\cdot 2954}{2}\left(1 - \frac{800}{3000}\right),$$

$$k_{\ddot{o}} = 864992 \text{Ft/hónap.}$$

4.1.4 Véges feltöltési kapacitás és a hiány megengedett

A gazdaságos tételnagyságú modellek legösszetettebb változata a *4.5. ábrán* látható, amelyben megengedjük a hiányt, és figyelembe vesszük a készlet növekedését jellemző λ feltöltési rátát. Az ábrán az eddig használt jelöléseket alkalmazzuk, így

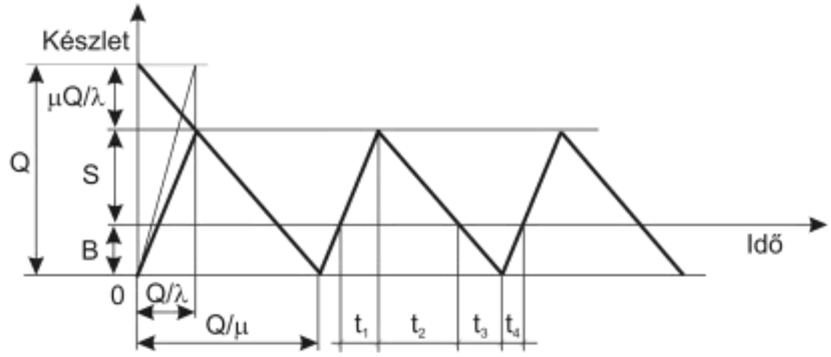
- μ a felhasználási ráta,
- λ a feltöltési ráta,
- Q a ciklusonként rendelt mennyiség,
- S a maximális készlet,
- B a megengedett maximális hiány,
- Q/μ a ciklusidő,
- Q/λ a feltöltési idő.

A feltöltés időtartama alatti fogyasztás az ábrából a háromszögek hasonlósága alapján $\mu Q/\lambda$. Ezt felhasználva, a számítások egyszerűsítése érdekében definiáljuk a látszólagos feltöltési intenzitás fogalmát. A *4.5. ábrából* a

$$\frac{Q - \mu Q/\lambda}{Q/\lambda} = \lambda - \mu.$$

A továbbiakban határozzuk meg a készletszint változását jellemző időtartamokat. A t_1 legyen az az időtartam, amíg a készletszint 0-ról S-re növekszik. Ez a látszólagos feltöltési intenzitással

$$t_1 = \frac{S}{\lambda-\mu} = \frac{1}{\lambda-\mu}(Q-B-\mu\frac{Q}{\lambda}).$$



4.5. ábra: A készletszint változása az idő függvényében, ha a feltöltési kapacitás véges és a hiány megengedett

A t_2 legyen az az időtartam, amíg a készletszint S-ről 0-ra csökken:

$$t_2 = \frac{S}{\mu} = \frac{1}{\mu}(Q-B-\mu\frac{Q}{\lambda}).$$

A t_3 legyen az az időtartam, amíg a készletszint 0-ról $-B$-re csökken:

$$t_3 = \frac{B}{\mu}.$$

Végül t_4 legyen az az időtartam, amíg a készletszint $-B$-ről 0-ra növekszik, amit ugyancsak a látszólagos feltöltési intenzitással fejezhetünk ki:

$$t_4 = \frac{B}{\lambda-\mu}.$$

Ezt követően a szokásos módon tekintsük a költségeket. A gyártási vagy rendelési költség egy ciklusban:

$$\begin{cases} 0, & \text{ha } Q=0, \\ K_b + cQ, & \text{ha } Q>0. \end{cases}$$

A készlettartási költség egy ciklusra, a *4.5. ábrán* a pozitív térfélre:

$$\frac{S}{2}h(t_1+t_2) = \frac{hS^2}{2\mu}\frac{\lambda}{\lambda-\mu} = \frac{h(Q-B-\mu Q/\lambda)^2}{2\mu}\frac{\lambda}{\lambda-\mu}.$$

Hasonlóan a készlettartási költség a negatív térfélre:

$$\frac{B}{2}p(t_3+t_4) = \frac{pB^2}{2\mu}\frac{\lambda}{\lambda-\mu}.$$

Az összes készletezési költség ciklusonként:

$$K_ö = K_b + cQ + \frac{h(Q-B-\mu Q/\lambda)^2}{2\mu}\frac{\lambda}{\lambda-\mu} + \frac{pB^2}{2\mu}\frac{\lambda}{\lambda-\mu}.$$

Az időegységre eső összes készletezési költség:

$$k_ö = \frac{K_b}{Q/\mu} = \frac{\mu K_b}{Q} + c\mu + \left(\frac{h(Q-B-\mu Q/\lambda)^2}{2Q} + \frac{pB^2}{2Q}\right)\frac{\lambda}{\lambda-\mu}.$$

A készletezési költséget minimalizáló hiány (B^*) a

$$\frac{\partial k_ö}{\partial B} = -\frac{h(Q-B-\mu Q/\lambda)}{Q}\frac{\lambda}{\lambda-\mu} + \frac{pB}{Q}\frac{\lambda}{\lambda-\mu} = 0$$

egyenletből:

$$B^* = \frac{h}{h+p} Q(1-\mu/\lambda)$$

A rendelés optimális nagysága a $\partial k_ö / \partial Q = 0$ feltételből számítható:

$$\frac{\partial k_ö}{\partial Q} = -\frac{\mu K_b}{Q^2} + \frac{h}{Q}(Q-B-\mu Q/\lambda) - \frac{h}{2Q^2}(Q-B-\mu Q/\lambda)^2 \frac{\lambda}{\lambda-\mu} - \frac{pB^2}{2Q^2}\frac{\lambda}{\lambda-\mu},$$

amelyet Q^2-tel szorozva, a

$$-\mu K_b + hQ(Q-B-\mu Q/\lambda) - \frac{h}{2}(Q-B-\mu Q/\lambda)^2 \frac{\lambda}{\lambda-\mu} - \frac{pB^2}{2}\frac{\lambda}{\lambda-\mu} = 0.$$

Az egyenletet átalakítva, a

$$-\mu K_b + \frac{hQ^2}{2}\frac{\lambda-\mu}{\lambda} - \frac{B^2}{2}(h+p)\frac{\lambda}{\lambda-\mu} = 0.$$

A B értékét helyettesítve, a

$$-\mu K_b + \frac{hQ^2}{2}\frac{\lambda-\mu}{\lambda} - \frac{h^2Q^2}{2}\frac{\lambda-\mu}{\lambda(h+p)} = 0,$$

$$-\mu K_b + \frac{hQ^2}{2}\frac{\lambda-\mu}{\lambda}(1-\frac{h}{h+p}) = 0,$$

amelyből a

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h(1-\mu/\lambda)}\frac{h+p}{p}}.$$

A maximális készletszint:

$$S^* = Q^* - B^* - \mu\frac{Q^*}{\lambda}$$

A ciklus hossza:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu}.$$

Mintapélda:

Az ekevas-gyártási probléma harmadik változatához képest engedjük meg a hiányt, amelynek költsége p=110 Ft/db-hónap, a többi adat változatlan: K_b=120000 Ft, h=30 Ft/db-hónap, μ=800 db/hónap, c=1000 Ft/db, λ=3000 db/hónap.

Az optimális tételnagyság:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h(1-\mu/\lambda)}\frac{h+p}{p}} = \sqrt{\frac{2\cdot 800\cdot 120000}{30\cdot(1-800/3000)}\frac{30+110}{110}},$$

$$Q^* = 3333 \text{ db/ciklus.}$$

A maximális hiány:

$$B^* = \frac{h}{h+p}Q(1-\mu/\lambda) = \frac{30}{30+110}3333\cdot(1-800/3000) = 524 \text{ db.}$$

A maximális készletszint:

$$S^* = Q^* - B^* - \mu\frac{Q^*}{\lambda} = 3333 - 524 - 800\frac{3333}{3000} = 1920 \text{ db.}$$

Az optimális ciklusidő:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{3333}{800} 4{,}2 \text{ hónap.}$$

Az egy hónapra eső összes készletezési költség:

$$k_ö = \frac{\mu K_b}{Q} + c\mu + \left(\frac{hS^2}{2Q} + \frac{pB^2}{2Q}\right)\frac{\lambda}{\lambda - \mu},$$

$$k_ö = \frac{800 \cdot 120.000}{3333} + 800 \cdot 1000 + \left(\frac{30 \cdot 1920^2}{2 \cdot 3333} + \frac{110 \cdot 524^2}{2 \cdot 3333}\right)\frac{3000}{3000 - 8000},$$

$$k_ö = 857610 \text{ Ft/hónap.}$$

A hiány megengedése itt megtakarítást eredményez.

4.3 példa: Egy kenyérgyár napi termeléséhez 2000 kg lisztet használ fel, amit a szomszédos malomból szerez be. A számítások szerint az optimális rendelési tételnagyság 4000 kg/ciklus. A kenyérgyárban tárolható legnagyobb készlet 3000 kg.

Kérdések:

milyen időszakonként kell rendelni, vagyis mekkora a ciklusidő hossza,

a malom milyen ütemben szállíthat, mekkora a feltöltési ráta,

a ciklus kezdetétől számítva a készlet mikor éri el a maximumot?

Ábrázolja a készlet változását az idő függvényében!

4.4 példa: Egy televízió készülékeket forgalmazó kiskereskedő tapasztalatból tudja, hogy a készülékek iránti kereslet egész évben egyenletes és az igény közel állandó, 600 db/év. A rendelés egyszeri költsége 10000 Ft/rendelés. A készülékek a nagykereskedelemben 50000 Ft-os egységáron szerezhetők be. Az éves készlettartási költség a beszerzési költség 20%-a. Kérdés: a kiskereskedő milyen időközönként és hány készüléket rendeljen ahhoz, hogy a készletezési költsége minimális legyen.

4.2. A rendelési tételnagyság figyelembevétele, és a hiány nem megengedett

Az előző modelleknél feltételeztük, hogy a darabonkénti rendelési (gyártási) költség független a megrendelt vagy gyártott mennyiségtől. Ez a feltétel azonban nem mindig tartható, gyakran fordul elő, hogy a *c* fajlagos költség csak szakaszosan állandó, vagy a *Q* folytonos függvénye. Például az ekevas-gyártás esetén elképzelhető a költségek következő változása:

Rendelési tétel (Q) [db]	Rendelési költség (c_j) [Ft/db]
≤1000	1100
1000-8000	1000
8000≤	950

Kérdés ebben az esetben, hogyan határozható meg az optimális politika. Ehhez felhasználjuk az előző eredményeket. Az időegységre eső készletezési költség:

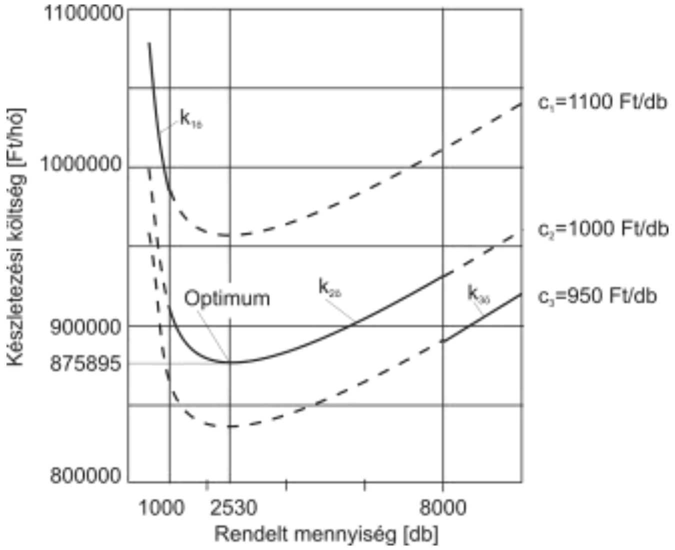
$$k_{jö} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c_j + \frac{hQ}{2} \quad \text{[Ft/idő].}$$

A költségek változását a *4.6. ábra* mutatja, ahol a lehetséges értékeket a folytonos vonalak jelzik. A görbékhez tartozó optimális rendelési tételnagyság könnyen meghatározható a korábban már használt négyzetgyökös formula segítségével. Ha K_b=120000, h=30 Ft/db-hónap, és μ=800 db/hónap, akkor a

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} = \sqrt{\frac{2\cdot 800\cdot 120000}{30}} = 2530 \text{ db/ciklus.}$$

Ennél a rendelési tételnagyságnál csak a középső görbe értelmezett. Az időegységre eső rendelési költség:

$$k_{2ö} = \frac{800\cdot 120000}{2530} + 800\cdot 1000 + \frac{30\cdot 2530}{2} = 875895 \text{ Ft/hónap.}$$



4.6. ábra. Az időegységre eső összes készletezési költség változó darabköltség esetén

Az 1000 db-nál kisebb rendelést nem kell vizsgálni, mivel $c_1>c_2$, így $k_{1ö}>k_{2ö}$. A 8000 db-nál nagyobb rendelés esetén a görbe értelmezhető szakasza monoton növekvő, ezért a Q minimális értékénél, 8000 db-nál kell kiszámítani az időegységre eső rendelési költséget:

$$k_{3ö} = \frac{800\cdot 120000}{8000} + 800\cdot 950 + \frac{30\cdot 8000}{2} = 892000 \text{ Ft/hónap.}$$

Tekintve, hogy a $k_{2ö}<k_{3ö}$ az optimális rendelési tételnagyság 2530 db.

Könnyen kiszámítható, hogy ha a fajlagos rendelési költség c_3=950 Ft/db helyett 900 Ft/db lenne, akkor a $k_{3ö}$=852000 Ft/hónap, és ekkor az optimális rendelés nagysága 8000 db/ciklus.

4.5. példa: Egy fuvarozó vállalat havonta átlagosan 40000 l gázolajat használ. A gázolaj ára 130 Ft/l, a rendelés egyszeri költsége 100000 Ft, a tárolás költsége literenként és havonta 50 Ft. Ha 200000 l felett rendel a vállalat, akkor 5 Ft/l árkedvezményt kap. A hiány nincs megengedve. Milyen gyakran és mennyit kell rendelni?

4.3. Megjegyzések a gazdaságos tételnagyságú modellekhez

A modellekben feltételeztük, hogy a felhasználási ráta (μ) és a darabonkénti rendelési vagy gyártási költség (c) időben állandó. Ennek eredményeként azt kaptuk, hogy a darabonkénti rendelési (gyártási) költségnek nincs hatása a optimális megoldásra. Az eredmény evidens, mivel az időegységre eső készletezési költségben ($k_ö$) a μc tag független Q-tól.

A modellekben kikötöttük, hogy a Q rendelési tételnagyság minden ciklusban állandó. Az alábbi fejtegetésből azonban kiderül, hogy ez a kikötés akár eredménynek is tekinthető. Ezek a modellek ugyanis az (s,S) politika speciális esetei.

Az (s,S) mechanizmust általában a periodikus készletfigyeléssel összefüggésben említik. Ennek lényege: az újrarendelést akkor kezdeményezik, amikor a készletszint s-re csökken, és ekkor a készletszintet egy előre meghatározott maximális S értékre emelik. Az s tehát meghatározza az újrarendelési pontot. A gazdaságos tételnagyságú modellekben, ha a hiány nem megengedett, az újrarendelési ponthoz tartozó készletszint s=0, ha a hiány megengedett, akkor

$$s = -B^* = -(Q^* - S^*) = -\sqrt{\frac{2\mu K_b}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}}\,.$$

Így a gazdaságos tételnagyságú modellekben az (s, S) politika a következők szerint értelmezhető: amikor a készlet az s újrarendelési szintre csökken, akkor a készletszintet S-re emeljük Q=S–s nagyságú rendeléssel.

A $Q \geq S$ relációból (*4.3. ábra*) és az $s=S^*-Q^*$ összefüggésből következik, hogy az újrarendelési ponthoz tartozó készletszint nem lehet pozitív, azaz az $s \leq 0$. Az $s>0$ politika azért sem lehet optimális, mivel az újrarendelési ciklus időtartamát csökkenti, és így az időegységre eső beállítási költség növekedését eredményezi.

4.4. Feladatok

1. feladat

Egy taxi-társaság havonta átlagosan 420000 liter benzint használ., A rendelési (beállítási) költség 2000000 Ft/rendelés. A tárolási költség 70 Ft/liter havonta. Az első 100000 liter benzin ára 300 Ft/liter. Ha rendelési tételnagyság 100000 és 300000 liter közé esik, akkor 295 Ft-ot kell fizetni literenként. 300000 liter feletti rendelés esetén a benzin literenként ára 292 Ft/liter. A taxi-társaság készletezési politikájában a hiány nincs megengedve.

Határozzuk meg az optimális rendelési tételnagyságot annak figyelembevételével, hogy a benzin ára a rendelési tételnagyság függvénye.

Határozzuk meg, hogy milyen gyakran kell rendelni.

Ábrázolja az egy hónapra eső készletezési költséget a rendelési tételnagyság és a benzin árának függvényében.

1. feladat megoldása

Az optimális rendelési tételnagyság:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} = \sqrt{\frac{2\cdot 420000\cdot 2000000}{70}} = 154919{,}3 \text{ liter}$$

Az 1 hónapra eső készletezési költség

$$k_{öi} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c_j + \frac{hQ}{2} \quad \text{(Ft/hónap)}$$

Q*=100000 liter esetén

$$k_{ö1} = \frac{420000\cdot 2000000}{100000} + 420000\cdot 300 + \frac{70\cdot 100000}{2} = 137900000 \text{ Ft/hó}$$

Q*=154919,3 liter esetén

$$k_{ö2} = \frac{420000 \cdot 2000000}{154913,3} + 420000 \cdot 295 + \frac{70 \cdot 154913,3}{2} = 134744353,37 \text{ Ft/hó}$$

Q*=300000 liter esetén

$$k_{ö3} = \frac{420000 \cdot 2000000}{300000} + 420000 \cdot 292 + \frac{70 \cdot 300000}{2} = 135940000 \text{ Ft/hó}$$

Az optimális rendelési tételnagyság Q*=154919,3 liter, a rendelési ciklusidő:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{154913,3}{420000} = 0,3688 \text{ hónap}$$

2. feladat

Egy mezőgazdasági gépgyártó cég négy ekefejes ekéihez egy beszállítótól szerzi be az ekevasakat. Az ekék összeszerelése folyamatos, havonta 200 db, amihez 4·200=800 db ekevasat használnak fel. A rendelés egyszeri költsége 120000 Ft/rendelés. A becsült készlettartási költség 30 Ft/hónap darabonként. Az ekevasak ára függ a rendelési tételnagyságtól:

Rendelési tétel (Q) [db]	Rendelési költség (c_j) [Ft/db]
≤1000	1100
1000-8000	1000
8000≤	900

A gyártó szeretné meghatározni, mikor és mennyit rendeljen az ekevasakból, ha a hiány nem megengedett. Ábrázolja az egy hónapra eső készletezési költséget a rendelési tételnagyság és az ekevas árának függvényében.

2. feladat megoldása

Az optimális rendelési tételnagyság:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 800 \cdot 12000}{30}} = 2529,822 \text{ db} = 2530 \text{ db}$$

Az 1 hónapra eső készletezési költség

$$k_{öi} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c_j + \frac{hQ}{2} \quad \text{(Ft/hónap)}$$

Q*=1000 db esetén

$$k_{ö1} = \frac{800 \cdot 120000}{1000} + 800 \cdot 1100 + \frac{30 \cdot 1000}{2} = 991000 \text{ Ft/hó}$$

Q*=2530 db esetén

$$k_{ö2} = \frac{800 \cdot 120000}{2530} + 800 \cdot 1000 + \frac{30 \cdot 2530}{2} = 875894,66 \text{ Ft/hó}$$

Q*=8000 db esetén

$$k_{ö3} = \frac{800 \cdot 120000}{8000} + 800 \cdot 900 + \frac{30 \cdot 8000}{2} = 852000 \text{ Ft/hó}$$

Az optimális rendelési tételnagyság Q*=8000 db, a rendelési ciklusidő:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{8000}{800} = 10 \text{ hónap}$$

3. feladat

Egy kenyérgyár napi termeléséhez 2000 kg lisztet használ fel, amit a szomszédos malomból szerez be. A számítások szerint az optimális rendelési tételnagyság 4000 kg/ciklus. A kenyérgyárban tárolható legnagyobb készlet 3000 kg. A készletezési politika nem engedi meg a hiányt. Kérdések:

milyen időszakonként kell rendelni, vagyis mekkora a ciklusidő hossza,

a malom milyen ütemben szállíthat, mekkora a feltöltési ráta,

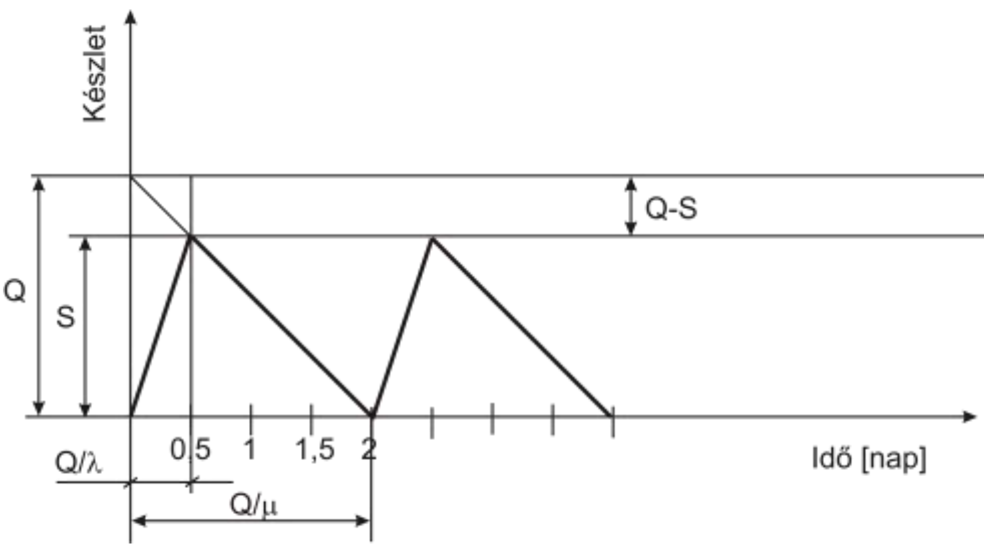
a ciklus kezdetétől számítva a készlet mikor éri el a maximumát ?

Ábrázolja a készlet változását az idő függvényében.

3. feladat megoldása

A ciklus hossza:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{4000}{2000} = 2 \text{ nap}$$



A háromszögek hasonlóságából (lásd az ábrát), a

$$\frac{Q-S}{Q} = \frac{Q/\lambda}{Q/\mu} = \frac{\mu}{\lambda},$$

amelyből a feltöltési ráta:

$$\lambda = \mu \frac{Q}{Q-S} = 2000 \frac{4000}{4000-3000} = 8000 \text{ kg/nap.}$$

A készlet a maximumot a rendelést követően

$$\frac{Q^*}{\lambda} = \frac{4000}{8000} = 0{,}5 \text{ nap múlva éri el.}$$

4. feladat

Tegyük fel, hogy egy cikk iránti kereslet 30 egység havonta, és ezt folyamatosan elégítik ki. A termelés mindenkori beindításának a költsége 4500 Ft. A termelési költség darabonként 300 Ft, a tárolási költség darabonként és havonta 90 Ft.

Feltéve, hogy hiány nincs megengedve, határozzuk meg, milyen gyakran kell a termelést beindítani, és mennyit kell egyszerre gyártani.

Ha hiány miatti költség darabonként és havonként 90 Ft, milyen gyakran kell a termelést indítani, és mennyit kell egyszerre gyártani?

5. feladat

Egy termék iránti kereslet 650 darab hetente, és ezt folyamatosan elégítik ki. A termék rendelési költsége 7500 Ft/rendelés, darab költsége 900 Ft/db. A tárolási költség darabonként és hetente 15 Ft. Milyen gyakran kell a beszerzést indítani, és mennyit kell egyszerre beszerezni, ha

(1) a hiány nincs megengedve,
(2) a hiány megengedett és a hiány költsége darabonként és hetenként 600 Ft ?

(3) Mennyivel csökken a maximális készlet, ha megengedjük a hiányt?

(4) Okoz-e veszteséget a hiány megengedése?

(5) Mekkora a hiány és a hiány időtartama?

5. feladat megoldása

(1) Az optimális rendelési tételnagyság, ha a hiány nincs megengedve:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 650 \cdot 7500}{15}} = 806{,}23 \text{ db.}$$

A rendelési ciklusidő, ha a hiány nincs megengedve:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{806{,}23}{650} = 1{,}24 \text{ hét}$$

(2) Az optimális rendelési tételnagyság, ha a hiány megengedett:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 650 \cdot 7500}{15}}\sqrt{\frac{600+15}{600}} = 816{,}24 \text{ db.}$$

A rendelési ciklusidő, ha a hiány megengedett:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{816{,}25}{650} = 1{,}26 \text{ hét}$$

(3) A maximális raktárkészlet, ha a hiány megengedett:

$$S^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 650 \cdot 7500}{15}}\sqrt{\frac{600}{600+15}} = 796{,}33 \text{ db}$$

A maximális raktárkészlet 806,23 db-ról 796,33 db-ra csökken.

(4) Az 1 hétre eső készletezési költség, ha a hiány nincs megengedve:

$$k_ö = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c_j + \frac{hQ}{2} \quad \text{(Ft/hét),}$$

$$k_ö = \frac{650 \cdot 7500}{806{,}23} + 650 \cdot 900 + \frac{15 \cdot 806{,}23}{2} = 597093{,}39 \text{ Ft/hét.}$$

Ha a hiány megengedett, akkor a

$$k_{ö} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c_j + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q}$$

$$k_{ö} = \frac{650 \cdot 7500}{816{,}24} + 650 \cdot 900 + \frac{15 \cdot 796{,}33^2}{2 \cdot 816{,}24} + \frac{600 \cdot (816{,}24 - 796{,}33)^2}{2 \cdot 816{,}24} = 596945 \text{ Ft/hét},$$

vagyis hiány esetén az egységnyi időre eső készletezési költség csökken.

(5) A hiány nagysága:

$$B^* = Q^* - S^* = 816{,}24 - 796{,}33 = 19{,}91 \text{db},$$

a hiány időtartama:

$$t_h^* = \frac{B^*}{\mu} = \frac{Q^* - S^*}{\mu} = \frac{816{,}24 - 796{,}33}{650} = \frac{19{,}91}{650} = 0{,}031 \text{ hét}$$

6. feladat

Oldjuk meg az 5. példát úgy, hogy a hiány megengedett, és a szállítási csúszás (a hiány időtartama) 1 hét. Határozzuk meg a

(1) a hiány nagyságát,

(2) az optimális rendelési tételnagyságot,

(3) a ciklus időt, és

(4) az egy ciklusra eső készletezési költséget

A hiány nagysága, ha a hiány időtartama t_h= 1 hét

$$B^* = Q^* - S^* = \mu t_h = 650 \cdot 1 = 650 \text{ db}.$$

Mivel az

$$S^* = Q^* - B^*,$$

és az

$$S^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} \sqrt{\frac{p}{p+h}},$$

amelyekből az optimális rendelési tételnagyság:

$$Q^* = B^* + \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} \sqrt{\frac{p}{p+h}} = 650 + \sqrt{\frac{2 \cdot 650 \cdot 7500}{15}} \sqrt{\frac{600}{600+15}} = 1446{,}33 \text{ db}.$$

Ebben az esetben a ciklus hossza:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{1446{,}33}{650} = 2{,}22 \text{ hét},$$

és a maximális készlet

$$S^* = Q^* - B^* = 1446{,}33 - 650 = 796{,}33 \text{ db}$$

Az 1 hétre eső készletezési költség, pedig:

$$k_{ö} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c_j + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q}$$

$$k_{ö}=\frac{650\cdot 7500}{1446{,}33}+650\cdot 900+\frac{15\cdot 796{,}33^2}{2\cdot 1446{,}33}+\frac{600\cdot(1446{,}33-796{,}33)^2}{2\cdot 1446{,}33}=679294{,}57\ \text{Ft/hét.}$$

Az 1 ciklusra eső készletezési költség, pedig:

$$K_{ö}=t^{*}k_{ö}=2{,}22\cdot 679294{,}57=1508033{,}95\ \text{Ft/ciklus}$$

7. feladat

Egy gépkocsialkatrész-gyártótól, mint beszállítótól 120000 kapcsolótáblát rendelnek, amelyet egy év alatt kell leszállítani. A megrendelő, (a gépkocsigyártó) egyforma ütemben használja fel a kapcsolótáblákat (μ=állandó). A beállítási költség K_b=3000000 Ft, a készlettartási költség darabonként és naponta h=35 Ft. A darabonkénti gyártási költség (c) állandó, ezért nincs hatása a készletezett tételekre és a készletezési költségre. Kérdés a beszállító milyen mekkora mennyiségeket és milyen ciklusidővel szállítson, ha szállítási késedelem nincs megengedve? Mekkora lesz a készletezés éves költsége.

7. feladat megoldása

Az évet 360 nappal számolva, a felhasználási ráta egy napra:

$$\mu=120000/360=333{,}33\ \text{db/nap}$$

Az optimális rendelési tételnagyság:

$$Q^{*}=\sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}}=\sqrt{\frac{2\cdot 333{,}33\cdot 3000000}{35}}=7559\ \text{db.}$$

A rendelési ciklusidő:

$$t^{*}=\frac{Q^{*}}{\mu}=\frac{7559}{333{,}33}=22{,}68\ \text{nap.}$$

Az 1 napra eső készletezési költség a gyártási költség nélkül:

$$k_{ö}=\frac{\mu K_b}{Q}+\frac{hQ}{2}=\frac{333{,}33\cdot 3000000}{7559}+\frac{35\cdot 7559}{2}=264573{,}8\ \text{Ft/nap.}$$

A teljes rendelésre, vagyis az 1 évre eső készletezési költség:

$$K_{ö}=360\cdot k_{ö}=360\cdot 26457{,}38=95246571\ \text{Ft/év}$$

8. feladat

Tegyük fel, hogy egy cikk iránti kereslet 10 kg naponta, és ezt folyamatosan elégítik ki. A termelés mindenkori beindításának költsége 50 Ft. A termelési költség darabonként 40 Ft/kg, a tárolási költség kilogrammonként és naponta 0,1 Ft, a hiányköltség kilogrammonként és naponta 4 Ft. Kérdés, érdemes-e megengedni a hiányt és mekkora legyen az optimális rendelési tételnagyság és a rendelési ciklusidő? Milyen nagyságú folyókészletnél kell feladni a következő ciklus rendelését, ha az utánpótlási idő 4 nap. Ábrázolja a készletváltozást az idő függvényében és az ábrán jelölje meg a rendelés helyét!

8. feladat megoldása

Az optimális rendelési tételnagyság, ha a hiány nem megengedett:

$$Q^{*}=\sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}}=\sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 50}{0{,}1}}=100\ \text{kg.}$$

Az 1 napra eső készletezési költség, ha a hiány nem megengedett:

$$k_{ö} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c_j + \frac{hQ}{2} = \frac{10 \cdot 50}{100} + 10 \cdot 40 + \frac{0{,}1 \cdot 100}{2} = =410 \text{ Ft/nap}$$

Az optimális rendelési tételnagyság, ha a hiány megengedett:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} \sqrt{\frac{p+h}{p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 50}{0{,}1}} \sqrt{\frac{4+0{,}1}{4}} = 101{,}24 \text{ kg}$$

A maximális raktárkészlet, ha a hiány megengedett:

$$S^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} \sqrt{\frac{p}{p+h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 50}{0{,}1}} \sqrt{\frac{4}{4+0{,}1}} = 98{,}77 \text{ kg}$$

Az 1 napra eső készletezési költség, ha a hiány nem megengedett:

$$k_{ö} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c_j + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q} =$$

$$= \frac{10 \cdot 50}{101{,}24} + 10 \cdot 40 + \frac{0{,}1 \cdot 98{,}77^2}{2 \cdot 100{,}24} + \frac{4 \cdot (101{,}24 - 98{,}77)^2}{2 \cdot 100{,}24} = 409{,}93 \text{ Ft/nap.}$$

Mivel a hiány megengedése esetén az 1 napra eső készletezési költség kisebb, 409,93<410, ezért az optimális rendelési tételnagyság Q^*=101,24 kg.

A rendelési ciklusidő, ha a hiány megengedett:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{101{,}24}{10} = 10{,}12 \text{ nap}$$

A hiány nagysága:

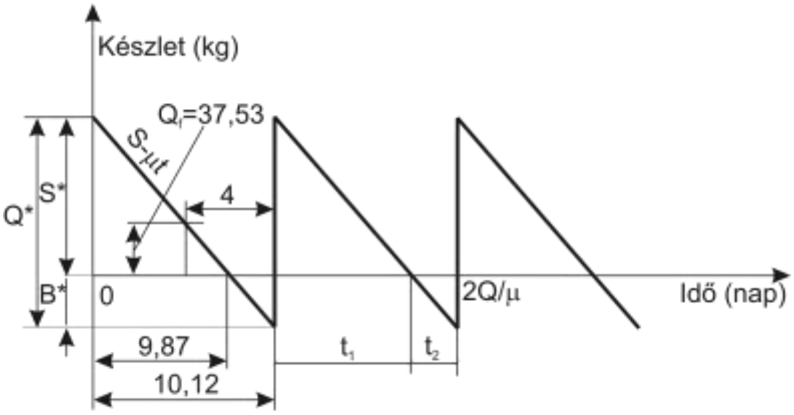
$$B^* = Q^* - S^* = 101{,}24 - 98{,}77 = 2{,}47 \text{ kg.}$$

A hiány időtartama:

$$t_h^* = \frac{B^*}{\mu} = \frac{Q^* - S^*}{\mu} = \frac{2{,}47}{10} = 0{,}25 \text{ nap.}$$

Ha az utánpótlási idő τ=4 nap, akkor a rendelést a ciklus vége előtt 4 nappal kell feladni. Ehhez az időponthoz tartozó folyókészlet:

$$Q_f = \mu\tau - B^* = 10 \cdot 4 - 2{,}47 = 37{,}53 \text{ kg.}$$



9. feladat

Tegyük fel, hogy egy termelési folyamat segédanyag iránti igénye 10 kg naponta, és ezt folyamatosan elégítik ki. A segédanyagot helyben állítják elő, és a termelőkapacitás 20 kg naponta. A termelés mindenkori beindításának költsége 50 Ft. A termelési költség darabonként 40 Ft/kg, a tárolási költség kilogrammonként és naponta 0,1 Ft, a hiány-költség kilogrammonként és naponta 4 Ft. Kérdés, érdemes-e megengedni a hiányt és mekkora legyen az optimális rendelési tételnagyság és a rendelési ciklusidő? Mennyi a feltöltés és a hiány időtartama? Ábrázolja a készletváltozást az idő függvényében!

9. feladat megoldása

Az optimális rendelési tételnagyság, ha a hiány nem megengedett:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h(1-\mu/\lambda)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 50}{0{,}1\cdot(1-10/20)}} = 141{,}42 \text{ kg}$$

Az 1 napra eső készletezési költség, ha a hiány nem megengedett:

$$k_ö = \frac{K_ö}{Q/\mu} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hQ}{2}\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)$$

$$k_ö = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hQ}{2}\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right) = \frac{10\cdot 50}{141{,}42} + 10\cdot 40 + \frac{0{,}1\cdot 141{,}42}{2}\left(1-\frac{10}{20}\right) = =407{,}07 \text{ Ft/nap}$$

Az optimális rendelési tételnagyság, ha a hiány megengedett:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h(1-\mu/\lambda)}}\sqrt{\frac{p+h}{p}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 50}{0{,}1\cdot(1-10/20)}}\sqrt{\frac{4+0{,}1}{4}} = 143{,}18 \text{ kg}$$

A hiány nagysága:

$$B^* = \frac{h}{h+p}Q(1-\mu/\lambda) = \frac{0{,}1}{0{,}1+4}\cdot 143{,}18\cdot(1-10/20) = 1{,}75 \text{ kg}$$

A maximális raktárkészlet, ha a hiány megengedett:

$$S^* = Q^* - B^* - \mu\frac{Q^*}{\lambda} = 143{,}18 - 1{,}75 - 10\cdot\frac{143{,}18}{20} = 69{,}84 \text{ kg}$$

Az 1 napra eső készletezési költség, ha a hiány megengedett:

$$k_ö = \frac{\mu K_b}{Q} + c\mu + \left(\frac{hS^2}{2Q} + \frac{pB^2}{2Q}\right)\frac{\lambda}{\lambda-\mu}$$

$$= \frac{10\cdot 50}{143{,}18} + 10\cdot 40 + \left(\frac{0{,}1\cdot 69{,}84^2}{2\cdot 143{,}18} + \frac{4\cdot 1{,}75^2}{2\cdot 143{,}18}\right)\frac{20}{20-10} = 406{,}98 \text{ Ft/nap.}$$

Mivel a hiány megengedése esetén az 1 napra eső készletezési költség kisebb, 406,98<407,07, ezért az optimális rendelési tételnagyság Q^*=143,18 kg.

A rendelési ciklusidő, ha a hiány megengedett:

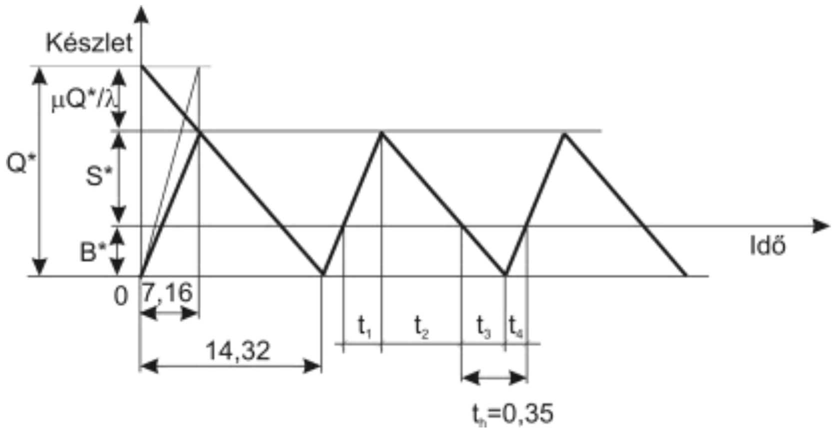
$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{143{,}18}{10} = 14{,}32 \text{ nap}$$

A feltöltés időtartama:

$$t_f^* = \frac{Q^*}{\lambda} = \frac{143{,}18}{20} = 7{,}16 \text{ nap.}$$

A hiány időtartama:

$$t_h^* = t_3 + t_4 = \frac{B^*}{\mu} + \frac{B^*}{\lambda - \mu} = \frac{1,75}{10} + \frac{1,75}{20-10} = 0,35 \text{ nap.}$$



10. feladat

Egy keveréktakarmány napi felhasználása 80 kg/nap, a készlettartási költsége 0,5 Ft/kg nap, az ára 100 Ft/kg. A keveréktakarmány feltöltése közvetlen a takarmánygyárból történik, a gyártás kapacitása 400 kg/nap, és a gyártás indítási költsége 5000 Ft/indítás. Az optimális készlegazdálkodáshoz milyen időközönként kell indítani a gyártást? Optimális esetben mennyit kell egy alkalommal gyártani, és mennyi ideig működik a gyártás egy-egy indítás után? Mennyi lesz a maximális készlet? Mennyi lesz a működés átlagos napi költsége? Ábrázolja a készletváltozást az idő függvényében.

10. feladat megoldása

Véges feltöltési kapacitásnál az optimális rendelési tételnagyság:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h(1-\mu/\lambda)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \cdot 5000}{0,5 \cdot (1-80/400)}} = 1414,21 \text{ kg.}$$

A gyártás indításának ciklusideje:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{1414,21}{80} = 17,68 \text{ nap.}$$

A gyártás egy-egy indítás követően

$$t_m = \frac{Q^*}{\lambda} = \frac{1414,21}{400} = 3,54 \text{ napig}$$

működik.

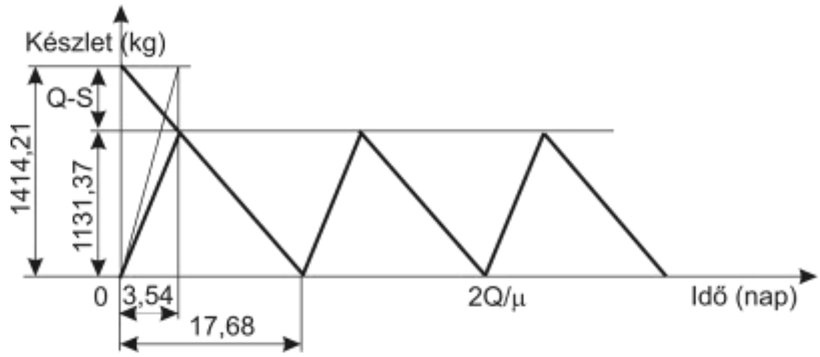
A maximális készlet a gyártás leállásakor:

$$S^* = Q^* - \mu\frac{Q^*}{\lambda} = 1414,21 - 80 \cdot \frac{1414,21}{400} = 1131,37 \text{ kg.}$$

A készletezés átlagos napi költsége:

$$k_ö = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hQ}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) =$$

$$= \frac{80 \cdot 5000}{1414,21} + 80 \cdot 100 + \frac{0,5 \cdot 1414,21}{2}\left(1 - \frac{80}{400}\right) = 8565,69 \text{ Ft/nap}$$



4.5. Ellenőrző kérdések

1. Mit jelent a folyamatos készletfigyelés és az optimális rendelési tételnagyság?

2. Rajzolja le a folyamatos készletfigyelésű modellek $Q(t)$ diagramjait készlethiány kizárása és megengedése esetén!

3. Hogyan módosulnak a folyamatos készletfigyelésű modellek diagramjai véges feltöltési kapacitás esetén?

4. Mutassa be a rendelési tételnagyság függvényében változó rendelési költség esetén követendő eljárást!

5. PERIODIKUS KÉSZLETFIGYELÉSŰ MODELLEK

5.1. Periodikus készletfigyelés, változó igény

Az előző fejezetben a gazdaságos rendelési tételnagyságot kerestük, és az eredmények azon a feltételezésen alapultak, hogy a μ felhasználási ráta minden ciklusban azonos nagyságú és állandó. Amikor azonban az igényelt mennyiségek periódusonként változnak, akkor ez a feltétel már nem tartható, és a négyzetgyökös formula nem biztosít minimális költségű megoldást.

Tekintsük *Wagner* és *Whithin* modelljét, amelyben az előzőekhez hasonlóan a következő költségeket vesszük figyelembe: K a periódus elején jelentkező **beállítási költség**, c a darabonkénti **gyártási vagy rendelési költség**, h az egy periódusra eső darabonkénti **készlettartási költség** [22].

Készletnek a periódus végén megmaradó mennyiséget tekintjük, ami lehet tetszőleges vagy korlátozott nagyságú. A készlettartási költség így az előző periódus szükségletét meghaladó mennyiség függvénye is. A készlettartási költség ezért némileg különbözik a gazdaságos tételnagyságú modellben használt készlettartási költségtől, ahol az h egy darab egységnyi időre eső költséget jelentette. Világos, hogy a készlettartási költség eltérő értelmezése más készletezési politikát eredményez.

További eltérés, hogy r_i=1,2,...,n jelenti az i-edik az időszak szükségletét. Ezen kívül feltételezzük, hogy a készlet az első periódus elején ismert nagyságú, általában 0, az n-edik periódus végén pedig 0-ra csökken. A modellekben a gyártási idő hatását elhanyagoljuk, vagyis a gyártókapacitást végtelennek tekintjük. A periódusok elején, a gyártás, vagy a megrendelés után a maximális készlet a probléma jellegétől függően ugyancsak lehet tetszőleges vagy korlátozott. A készletezési probléma megoldásának célja meghatározni az egyes periódusok elején a gyártandó mennyiséget úgy, hogy a teljes költséget minimalizáljuk. A modellt az ekevas-gyártási probléma következő változatával illusztráljuk.

III. A mezőgépgyártó piaci vizsgálatai kimutatták, hogy az ekék iránti igény nem egyenletes, hanem szezonális. Az előrejelzések szerint a kereslet a betakarítást megelőző szezonban (április-június) a legnagyobb, 800 db. A harmadik negyedévben a vásárlási kedv csökkenése nem jelentős, mivel 600 db eladása várható. A késő őszi és a téli időszakban (október-december) viszont a kereslet 200 darabra esik vissza. Az első negyedévben azonban újara élénkül a piac, és 400 db eke eladására lehet számítani.

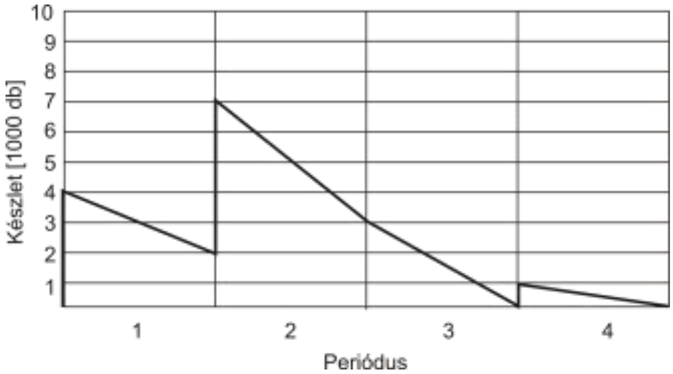
A különböző számú ekefejekkel ellátott eketípusok (4, 5, és 6 vasú ekék) iránti kereslet közel azonos, így átlagosan egy ekére 5 ekevasat lehet számolni, vagyis a negyedévenkénti ekevas-szükséglet a következő:

Negyedév	I.	II.	III.	IV.
Szükséglet [db]	2000	4000	3000	1000

A igény növekedése szükségszerűen maga után vonja a részegységek gyártási vonalainak és programjainak a módosítását. A változtatások lehetővé teszik új módszerek bevezetését, és néhány részegység fejlesztését. A fejlesztés érinti az ekevas-gyártást is. Ennek köszönhetően az ekevas-gyártás beállítási költség 200000 Ft-ra növekszik, a darabonkénti gyártási költség 1000 Ft, a készlettartási költség pedig 30 Ft. A munkabér és az eszközköltségek miatt egy ciklusban minimálisan 1000 ekevasat kell gyártani, de a vonal kapacitása lehetővé teszi, hogy egy periódus alatt akár az egész évi szükségletet (10000 db) legyártsuk. Az ekevasakat utolsó komponensként szereljük fel az ekékre, és a szerelés gyorsan elvégezhető.

A ekevasakból rövid idő alatt nagy mennyiségek gyárthatók, ezért utánpótlási idejük elhanyagolható. A feladat: meghatározni az egyes periódusokban gyártandó mennyiséget úgy, hogy a szükségletetek ki legyenek elégítve, és az összes készletezési költség minimális legyen.

Egy szemmel láthatóan nem optimális lehetséges megoldást mutat az 5.*1. ábra.* Az optimális megoldás elérhető enumerációval, ahol a kombinációk száma 2^{n-1}, ezért kívánatos a megoldásra hatékonyabb eljárást keresni. Az egyik lehetséges a dinamikus programozás, de használható a lineáris programozás is.



5.1. ábra: Az ekevas-gyártási probléma egy lehetséges megoldása

5.2. Megoldás dinamikus programozással

A dinamikus programozás változói a készletezéssel összefüggésben a következők. Az *i*-edik fázis az *i*-edik periódussal azonosítható, az állapotok pedig megfelelnek az *i*-edik periódusba belépő lehetséges készleteknek, amit x_i-vel jelölünk. A z_i döntési változó a periódus elején megrendelt vagy gyártott mennyiséget jelenti.

Az *i*-edik időszakban felmerülő költség $B_i(x_i,z_i)$ legyen a belépőkészlet (x_i) és a gyártott mennyiség (z_i) függvénye. Az x_i készlet az első periódus elején és az utolsó periódus végén nulla, azaz $x_1=x_{n+1}=0$.

Emlékezzünk arra, hogy a költségek közül csak az állandó *K* beállítási, a darabszámmal arányos *c* rendelési vagy gyártási, és a *h* készlettartási költséget tekintjük. A szükséglet az *i*-edik időszakban r_i. Akkor az *i*-edik periódus költsége:

$$B_i(x_i, z_i) = \begin{cases} K + c z_i + h(x_i + z_i - r_i), & \text{ha } z_i > 0, \\ h(x_i - r_i), & \text{ha } z_i = 0. \end{cases}$$

Jelentse $C_i(x_i,z_i)$ az alpolitikák teljes költségét az *i*-edik periódus elejétől az *n*-edik periódus végéig, ami szintén a belépő készlet és a gyártott mennyiség függvénye, és $C_i^*(x_i)$ jelölje a $C_i(x_i,z_i)$ minimális értékét. A probléma természetéből fakadóan a korlátozó feltételek:

$$z_i \geq 0, \text{ és az } x_i + z_i \geq r_i,$$

vagyis a hiányt nem engedjük meg, amelyből a

$$z_i \geq r_i - x_i.$$

Az $x_{n+1}=0$ előírás miatt, ami azt jelenti, hogy az utolsó periódus végén nem maradhat készlet, a z_i felülről is korlátos, azaz a

$$z_i \leq r_i + r_{i+1} + \ldots + r_n - x_i$$

A legjobb alpolitikák költségei az i-edik periódus elejétől az n-edik periódus végéig így

$$C_i^*(x_i)=\min_{\substack{z_i\ge r_i-x_i\ge 0\\ z_i\le r_i+r_{i+1}+\ldots+r_n-x_i}}\{C_i(x_i,z_i)\}=\min_{\substack{z_i\ge r_i-x_i\ge 0\\ z_i\le r_i+r_{i+1}+\ldots+r_n-x_i}}\{B_i(x_i,z_i)+C_{i+1}^*(x_{i+1})\},$$

és mivel $x_{i+1}=x_i+z_i-r_i$, a

$$C_i^*(x_i)=\min_{\substack{z_i\ge r_i-x_i\ge 0\\ z_i\le r_i+r_{i+1}+\ldots+r_n-x_i}}\{C_i(x_i,z_i)\}=\min_{\substack{z_i\ge r_i-x_i\ge 0\\ z_i\le r_i+r_{i+1}+\ldots+r_n-x_i}}\{B_i(x_i,z_i)+C_{i+1}^*(x_i+z_i-r_i)\},$$

minden i=1,2,...,n-re, ahol a C_{n+1}^* definíció szerint nulla.

Most térjünk vissza az ekevas-gyártás problémájához. A gyártási feltételekből eredően a gyártást csak akkor lehet indítani, ha a szükséglet minimálisan 1000 db, ezért egy gyártási egységnek vagy tételnek 1000 db ekevasat tekintünk. Így a periódusonkénti igények gyártási egységben:

Periódus	1	2	3	4
Szükséglet [r_i]	2	4	3	1

A költségeket az egyszerűbb kezelés érdekében osszuk el 10-zel, így a K=20, a c=100 és a h=3. Az optimális politika meghatározására az első iterációt a negyedik periódusban kezdjük. Az utolsó periódus végén nem maradhat készlet (x_{n+1}=0, ezért a $C_5^*=0$, így az iterációs képlet pedig:

$$C_4^*(x_4)=\min_{\substack{z_4\ge r_4-x_4\ge 0\\ z_4\le r_4-x_4}}\{B_4(x_4,z_4)\}=\min_{\substack{z_4\ge 1-x_4\ge 0\\ z_4\le 1-x_4}}\{B_4(x_4,z_4)\}.$$

Az x_i és z_i párokra a számításokat táblázatokban végezzük el. Az x_i és z_i változók értelmezési tartománya a 0 és $r_i+r_{i+1}+\ldots+r_n$ közötti egész-számok halmaza. Vegyük észre azonban, hogy az alsó és felső korlátokra vonatkozó előírások:

$$z_i\ge r_i-x_i\ge 0 \text{ és } z_i\le r_i+r_{i+1}+\ldots+r_n-x_i$$

miatt a számpárok egymásnak is függvényei. Az x_i függvényében a z_i legkisebb és legnagyobb értéke:

$$z_{i\min}=r_i-x_i \text{ és } z_i\ge 0,$$

$$z_{i\max}=r_i+r_{i+1}+\ldots+r_n-x_i$$

lehet. A negyedik periódus szükséglete r_4=1, és az előzőek alapján, egymástól függően a belépő készlet (x_4)és a gyártott mennyiség (z_4) is csak 0 vagy 1 lehet. Az utolsó periódusra érvényes iterációs képletet felhasználva, a negyedik periódus alpolitikái a következők:

	$B_4(x_4,z_4)$			
$x_4\,/\,z_4$	0	1	$C_4^*(x_4)$	z_4^*
0		120	120	1
1	0		0	0

A táblázat szerint, ha nincs belépő készlet, azaz x_4=0, akkor z_4=1, és az alpolitika költsége $C_4^*(0)=120$. Ha az x_4=1, akkor z_4=0, és az alpolitika költsége $C_4^*(1)=0$.

A második iteráció célja, hogy megtaláljuk az optimális politikát a harmadik periódus kezdetétől a negyedik periódus végéig. Ebben az esetben a formula:

$$C_3^*(x_3)=\min_{\substack{z_3\ge 3-x_3\ge 0\\ z_3\le 4-x_3}}\{B_3(x_3,z_3)+C_4^*(x_3+z_3-3)\}.$$

A 3. periódusban az x_3 0 és r_3+r_4=4 között változhat, és az előzőleg megadott összefüggésekkel, az x_3 függvényében a z_3 legkisebb és legnagyobb értékei a következők:

x_3	$z_{3\min} = 3 - x_3$	$z_{3\max} = 4 - x_3$
0	3	4
1	2	3
2	1	2
3	0	1
4		0

Az eredmények pedig a 3-4 periódusokra a következők:

	$B_3(x_3, z_3) + C_4^*(x_3 + z_3 - 3),$						
x_3 / z_3	0	1	2	3	4	$C_3^*(x_3)$	z_3^*
0				440	423	423	4
1			340	323		323	3
2		240	223			223	2
3	120	123				120	0
4	3					3	0

A táblázatban tekintsük például azt, amikor az x_3=2, azaz 2 egység a kezdőkészlet, ekkor z_3 legkisebb értéke 3–x_3=3–2=1, legnagyobb értéke pedig 4–x_3=4–2=2 lehet. Ha 1 egységet gyártunk (z_3=1), akkor a gyártási költség 20+100*1= 120, a készlettartási költség 3*(2+1-3)=0. A 4. periódusba átlépő készlet x_4=x_3+z_3–3=0, amelyre a $C_4^*(0) = 120$, és a teljes költség $B_3(x_3,z_3)$= 120+0+120=240. A táblázat utolsóelőtti oszlopába a legjobb alpolitikák költségeit, azaz $C_3^*(x_3)$ minimális értékeket írtuk be.

A harmadik iterációban keressük az optimális politikát a 2-4 periódusokra. Ebben az esetben a

$$C_2^*(x_2) = \min_{\substack{z_2 \geq 4 - x_2 \geq 0 \\ z_2 \leq 8 - x_2}} \{B_2(x_2, z_2) + C_3^*(x_2 + z_2 - 4)\}.$$

A 2. periódusban az x_2 0 és r_2+r_3+r_4=8 között változhat, és az x_2 függvényében a z_2 legkisebb és legnagyobb értékei a következők:

x_2	$z_{2\min} = 4 - x_2$	$z_{2\max} = 8 - x_2$
0	4	8
1	3	7
2	2	6
3	1	5
4	0	4
5	0	3
6	0	2
7	0	1
8		0

A megoldás a 2. periódustól a következő:

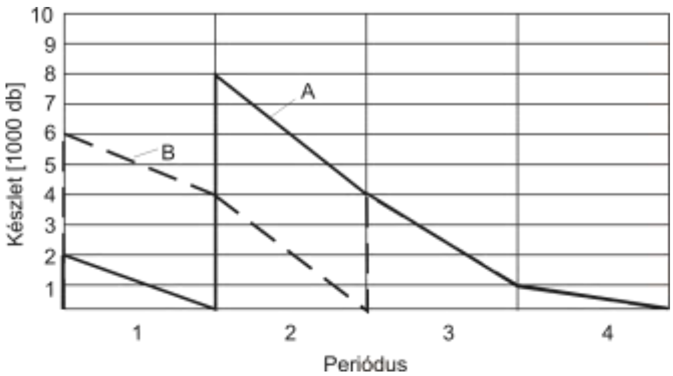
	$B_2(x_2, z_2) + C_3^*(x_2 + z_2 - 4),$										
x_2 / z_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$C_2^*(x_2)$	z_2^*
0					843	846	849	849	835	835	8
1				743	746	749	749	735		735	7
2			643	646	649	649	635			635	6
3		543	546	549	549	535				535	5
4	423	446	449	449	435					423	0
5	326	349	349	335						326	0
6	229	249	235							229	0
7	129	135								129	0
8	12									12	0

Végül az utolsó iterációval az 1-4 periódusok optimális politikáját határozzuk meg a

$$C_1^*(0) = \min_{\substack{z_1 \geq 2 \\ z_1 \leq 10}} \{B_1(x_1, z_1) + C_2^*(z_1 - 2)\}$$

összefüggéssel. Mivel a belépőkészlet nem változik, az x_1=0, ezért a z_1 $z_{1\min} = 2 - x_1 = 2$ és $z_{1\max} = 10 - x_1 = 10$ között változik. Így az ekevas-gyártási probléma végső megoldása:

	$B_1(0, z_1) + C_2^*(z_1 - 2)$											
x_1 / z_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$C_1^*(x_1)$	z_1^*
0			1055	1058	1061	1064	1055	1061	1067	1070	1059	1055	2 és 6



5.2. ábra: Az ekevas-gyártási probléma optimális megoldásai

A táblázat szerint két optimális megoldást kaptunk (*5.2. ábra*), amelyek költsége 1055 10^4 Ft. Az első (*A*) szerint 2000 darabot az első periódus, 8000 darabot a második periódus elején gyártunk. A másik optimális megoldás (*B*) szerint 6.000 darabot az első és 4000 darabot a harmadik periódus elején kell legyártani. Az optimális megoldáshoz tartozó alpolitikák sorait a táblázatokban kiemeltük.

Vegyük észre, hogy a mintapéldában a darabonkénti gyártási költség (c) minden periódusban azonos, ezért ebben az esetben a c-nek a készletezési politikára nincs hatása, és a modellből akár el is hagyható.

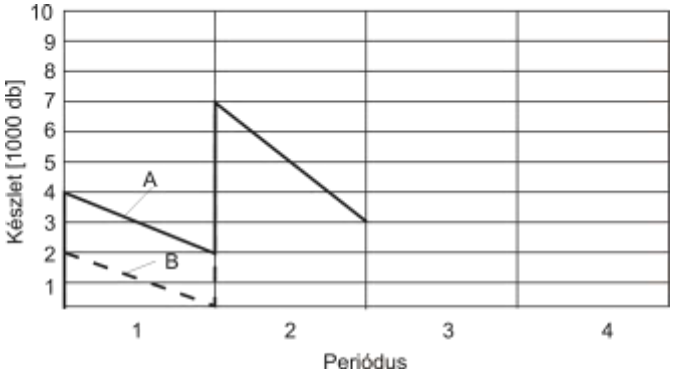
Más a helyzet azonban akkor, ha a darabköltség változik. Például lehetséges, hogy a csúcsszezonban, amikor 800 ekét gyártunk, a dolgozókat teljesen leköti az eke összeszerelés, így az ekevas gyártása csak túlórában történhet, ami a darabköltség növekedését okozza. Könnyen belátható, hogy a modell alkalmas ennek a problémának a kezelésére is.

5.3. A megoldás egyszerűsítése

Az előzőekben a dinamikus programozást alkalmaztuk az ekevas-gyártási probléma megoldására. Most kihasználva a modell struktúráját, ezt a közelítést egyszerűsítve, tovább fejlesztjük az algoritmust. A megoldandó feladat változatlan, amit tetszőleges igény, állandó beállítási, lineárisan változó gyártási és készlettartási költség jellemez.

Az **egyszerűsítés alapja** az a felismerés, hogy tetszőleges igény, állandó beállítási, lineárisan változó gyártási és készlettartási költség esetén optimális alpolitikát akkor kapunk, ha a gyártást nulla készletszintről indítjuk. E felismerés a következő gondolatmenet alapján könnyen belátható.

Tekintsünk egy alpolitikát az 5.*6 ábrán*, ahol a gyártás nulla belépőkészlettel kezdődik, és nem nulla készletszinten fejeződik be, ezért az új gyártási szakasz értelemszerűen nem nulla készlettel indul. Ez az alpolitika az ábrán az első periódus elején kezdődik és a második periódus elején végződik, amikor 5000 db ekevasat gyártását indítjuk. Az alpolitikát az 5.*3. ábrán* folytonos vonallal (*A*) újra megrajzoltuk.



5.3. ábra: A készletezési politika különböző alternatívái

Nézzünk egy alternatív alpolitikát, amely szerint 2000 db ekevasat gyártunk az első periódus és 7000 db-ot a második periódus elején. Az alternatívát (*B*) a szaggatott vonal jelzi az 5.*3. ábrán*. A *B* alpolitika kedvezőbb, mint *A*, mivel az összes költsége kisebb, ugyanis a beállítási és a gyártási költség mindkét esetben ugyanannyi, a készlettartási költség pedig *B* estén kisebb, mert a periódus végén nincs készlet a raktáron. Ezért *B* jobb, mint *A*, tehát *A* nem lehet optimális.

Az optimális politikák e jellemzője felhasználható annak eldöntésére, hogy mely politikák nem optimálisak. Pontosabban a példában adott feltételek esetén csak az a politika lehet optimális, amelyben a gyártás nulla készletszintről indul. Ráadásul, kihasználva azt, hogy ekkor az *i*-edik periódus elején a gyártandó mennyiség z_i kifejezhető a 0, r_i, r_i+r_{i+1},..., r_i+ r_{i+1}+...+ r_n igényekkel, egy egyszerű és hatékony algoritmust konstruálható.

Feltételezve, hogy létezik optimális politika, tekintsük azt az időszakot, amely az első periódus elején kezdődő gyártástól addig tart, amíg a készletszint a nullát el nem éri. Az ezt követő periódusok teljes költségének minimálisnak kell lenni ahhoz, hogy a teljes politika optimális legyen. Így a ekevas-gyártási példában, ha az első periódusban induló gyártás után a nulla készletszintet a második periódus végén érjük el, és ez egy optimális alpolitika választásának az eredménye, akkor nincs más teendő, mint hozzávenni az utolsó két periódus optimális alpolitikáját, amelyek igénye 3000 illetve 1000 db ekevas.

C_i jelölje az x_i=0-val jellemzett legjobb alpolitika teljes költségét *i*-edik periódus elejétől az *n*-edik periódus végéig. Ennek számítására alkalmas rekurzív formula a következő:

$$C_i = \min_{j=i,i+1,\dots,n} \{C_{j+1} + K + c(r_i + r_{i+1} + \dots + r_j) + h(r_{i+1} + 2r_{i+2} + 3r_{i+3} + \dots + (j-i)r_j)\},$$

ahol a *j* index azt a periódust jelöli, amelynek a végén a készlet először éri el a nulla szintet az *i*-edik periódus elején kezdődő gyártás után. A *j* értelmezési tartománya: $j \geq i$ és $j \leq n$. Kikötés szerint a C_{n+1} nulla, az *i*-től *j*-ig terjedő periódusokban a gyártási költség

$$c(r_i + r_{i+1} + \dots + r_j),$$

a készlettartási költség

$$h(r_{i+1} + 2r_{i+2} + 3r_{i+3} + \dots + (j-i)r_j).$$

Ez utóbbi költség a periódusok végén jelentkezik az igényen felüli többletek miatt.

A fenti formulával leírt algoritmus megoldása jóval egyszerűbb, és kisebb számításigényű, mint a dinamikus programozásnak az előzőleg használt változata. Az iterációt most is az *n*-edik periódusban kezdjük.

Visszatérve az ekevas-gyártási példához, először vegyük a C_4 esetet, az optimális politika a 4. periódus elejétől a tervezési horizont végéig:

$$C_4 = C_5 + K + cr_4 = 0 + 20 + 100 \cdot 1 = 120.$$

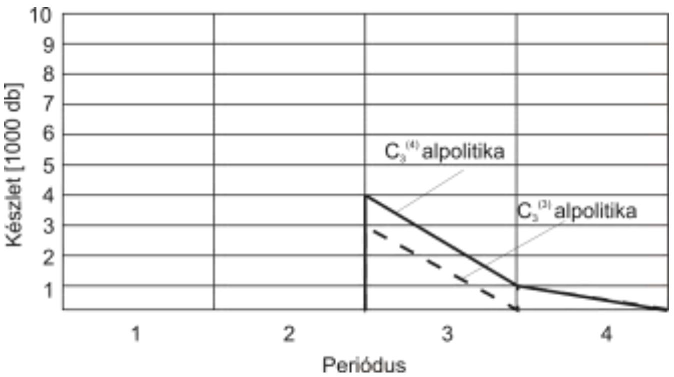
A C_3 meghatározásához két esetet kell figyelembe venni (*5.4. ábra*). A készlet a harmadik periódus elején kezdődő gyártás után az egyiknél a harmadik, a másiknál a negyedik periódus végén éri el a nulla szintet. Tehát j értelmezési tartománya 3 és 4, amelyhez a $C_3^{(3)}$ és $C_3^{(4)}$ költségek tartoznak. A $C_3^{(3)}$ alpolitika szerint a harmadik periódusban a gyártás a periódus igényének megfelelően r_3, amit az előző iterációban meghatározott C_4 optimális alpolitikának kell követnie. Ezzel szemben a $C_3^{(4)}$ alpolitika azt mondja, hogy mindkét periódus igényét már a harmadik periódusban gyártsuk le, ami miatt a készlet csak a negyedik periódus végén éri el a 0 szintet. A $C_3^{(3)}$ és $C_3^{(4)}$ alpolitikák közül a kisebb lesz a C_3 költség.

$$C_3^{(3)} = C_4 + K + cr_3 = 120 + 20 + 100 \cdot 3 = 440.$$

$$C_3^{(4)} = C_5 + K + c(r_3 + r_4) + hr_4 = 0 + 20 + 100(3 + 1) + 3 \cdot 1 = 423.$$

Így a

$$C_3 = \min\{C_3^{(3)}, C_3^{(4)}\} = \min\{440, 423\} = 423.$$



5.4. ábra: Alpolitikák a 3. iterációban

A C_2 meghatározására már három esetet kell vizsgálni. A második periódus elején kezdődő gyártás után a készlet először a második, harmadik vagy a negyedik periódus végén érheti el a nulla szintet. Most a j értelmezési tartománya 2, 3, 4, ami a $C_2^{(2)}$, $C_2^{(3)}$ és $C_2^{(4)}$ költségeket eredményezi. Így C_2 költség, a $C_2^{(2)}$, $C_2^{(3)}$ és $C_2^{(4)}$ minimális értéke. A

$$C_2^{(2)} = C_3 + K + cr_2 = 423 + 20 + 100 \cdot 4 = 843,$$

$$C_2^{(3)} = C_4 + K + c(r_2 + r_3) + hr_3 = 120 + 20 + 100(4 + 3) + 3 \cdot 3 = 849,$$

$$C_2^{(4)} = C_5 + K + c(r_2 + r_3 + r_4) + h(r_3 + 2r_4) = 0+20+100\ (4+3+1)+3(3+2\cdot 1) = 835,$$

amelyekből a

$$C_2 = \min\{C_2^{(2)}, C_2^{(3)}, C_2^{(4)}\} = \min\{843,\ 849, 835\} = 835.$$

Végül C_1 számításakor 4 esetet kell tekintetbe venni. Az első periódus elején kezdődő gyártás után a készlet először az első, második, harmadik vagy a negyedik. periódus végén érheti el a nulla szintet. A j értelmezési tartománya 1, 2, 3, 4, amelyekhez a $C_1^{(1)}$ $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$ és $C_1^{(4)}$ költségek tartoznak, és most a C_1 a $C_1^{(1)}$ $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$ és $C_1^{(4)}$ költségek közül a minimális.

$$C_1^{(1)} = C_2 + K + cr_1 = 835 + 20 + 100 \cdot 2 = 1055,$$

$$C_1^{(2)} = C_3 + K + c(r_1 + r_2) + hr_2 = 423 + 20 + 100(2 + 4) + 3 \cdot 4 = 1055,$$

$$C_1^{(3)} = C_4 + K + c(r_1 + r_2 + r_3) + h(r_2 + 2r_3) = 120+20+100(2+4+3)+3(4+2\cdot 3) = 1070,$$

$$C_1^{(4)} = C_5 + K + c(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + h(r_2 + 2r_3 + 3r_4) =$$
$$= 0 + 20 + 100(2 + 4 + 3 + 1) + 3(4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1) = 1059,$$
$$C_1 = \min\{C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, C_1^{(3)}, C_1^{(4)}\} = \min\{1055, 1055, 1070, 1059\} = 1055.$$

Mint látható az eredmény megegyezik az előző pontban kapott megoldással.

5.6. példa: Tegyük fel, hogy a következő öt hónapra ismert egy cikk iránti kereslet r_i=[2,4,2,3,4] egység. A rendelés egyszeri költsége 800 Ft, a darabköltség 200 Ft, a tárolási költség 60 Ft. Határozzuk meg az optimális rendelési ütemet, annak költségét. Oldjuk meg a feladatot dinamikus programozással.

5.4. Megoldás dinamikus programozással általános feltételek mellett

A előző példában a korlátlan gyártási és raktározási kapacitás, valamint az x_1=x_{n+1}=0 kikötés egy viszonylag egyszerű algoritmus alkalmazását tette lehetővé. Sokszor azonban különböző okok miatt kénytelenek vagyunk korlátozásokkal élni, amelyek természetesen a készletezési költség növekedését idézik elő [5].

Az új modellben az előrelépést az jelenti, hogy abban a gyakorlat által jogosan igényelt alsó és felső korlátok írhatók elő, továbbá az eredetihez képest a költségfüggvényben a készlet fogalma is közelebb áll a valósághoz. A korlátozó feltételek következők: periódusonkénti beszerzés vagy gyártás és a feltöltés utáni készlet nem léphetnek át adott határokat, a periódusok végén pedig a készlet nem csökkenhet az előírt szint alá.

Tekintsük először modellben figyelembevett költségelemeket. Legyen K a periódusok elején jelentkező, a rendelés vagy a gyártás indításakor felmerülő állandó költség, amit rendelési vagy beállítási költségnek nevezünk. A darabonkénti beszerzési vagy gyártási költség (c_i) az új modellben periódusonként változhat, esetleg a rendelési tételnagyság függvénye is lehet. A darabonkénti készlettartási költség (h_i) ugyancsak lehet állandó, periódusonként változó és a készletnagyság függvénye.

Készlettartási költséget generáló készletnek az eredeti modellben a vizsgált periódus végén megmaradó mennyiséget tekintettük. A fejlesztett változatban lineáris változást feltételezve, a periódus elején és végén mérhető mennyiségek átlagával azonosítjuk a készletet, ami lehet tetszőleges vagy korlátozott nagyságú. A készlet minimumának a korlátozása a gyakorlatban általában biztonsági megfontolásokra vezethető vissza, és egy olyan minimális szint (s) előírását jelenti, ami alá a készlet soha nem csökkenhet. A készlet felsőhatárait az egy periódus alatt beszerezhető vagy gyártható mennyiség (Z), vagy a rendelkezésre álló raktárkapacitás (S) determinálja.

Értelemszerűen az i-edik periódus végén megmaradó mennyiség, a készlet az (i+1)-edik periódus belépőkészlete. Feltételezzük, hogy a belépőkészlet az első periódus elején ismert nagyságú, az n-edik periódus végén pedig a készlet 0-ra csökken. A modellben a fogyási ráta (egységnyi időre eső készletváltozás) helyett a készletváltozást az i-edik az periódus szükségletével r_i (i=1,2,...,n) jellemezzük.

A vázolt készletezési probléma megoldásának célja, az előzőekhez hasonlóan, meghatározni az egyes periódusok elején rendelendő vagy gyártandó mennyiséget (z_i (i=1,2,...,n)) úgy, hogy a teljes költséget minimalizáljuk. A megoldáshoz célszerűen itt is a dinamikus programozást használjuk, amelynek változói a készletezéssel összefüggésben a következők. Az i-edik fázist az i-edik periódussal azonosítjuk, az állapotok pedig feleljenek meg az i-edik periódusba belépő lehetséges készleteknek, amit x_i (i=1,2,...,n) -vel jelölünk. Az x_i készlet az első periódus elején ismert nagyságú és az utolsó periódus vagyis a tervezési horizont végén nulla, azaz x_{n+1}=0. A döntési változó legyen a i-edik periódus elején megrendelt vagy gyártott mennyiség (z_i). A szükséglet az i-edik időszakban pedig legyen r_i.

Az i-edik időszakban felmerülő költség $B_i(x_i,z_i)$ így a belépőkészlet (x_i) és a gyártott mennyiség (z_i) függvénye. Amint azt előre jeleztük, a költségek közül az állandó rendelési vagy beállítási (K), a darabszámmal arányos c_i beszerzési vagy gyártási és a h_i készlettartási költséget vesszük figyelembe.

A készlet az i-edik periódusban a feltöltés utáni készlet x_i+z_i és a periódus végén megmaradó készlet $x_{i+1}=x_i+z_i-r_i$ átlaga, azaz

$$\frac{x_i + z_i + x_i + z_i - r_i}{2} = x_i + z_i - r_i / 2\,,$$

amit felhasználva, az i-edik periódus költsége:

$$B_i(x_i, z_i) = \begin{cases} K + c_i(z_i)z_i + h_i(x_i + z_i - r_i / 2), \text{ ha a } z_i > 0, \\ \quad h_i(x_i - r_i / 2), \text{ ha a } z_i = 0. \end{cases}$$

A $B_i(x_i,z_i)$ költségfüggvényben a c_i darab- és a h_i készlettartási költség periódusonként változhat, sőt az sem szükséges, hogy $B_i(x_i,z_i)$ lineáris függvény legyen. Nagyon gyakran fordul elő, hogy nagyobb tételszám esetén kedvezményeket kapunk, azaz a darabonkénti ár (c_i) a rendelési tételnagyság (z_i) függvénye.

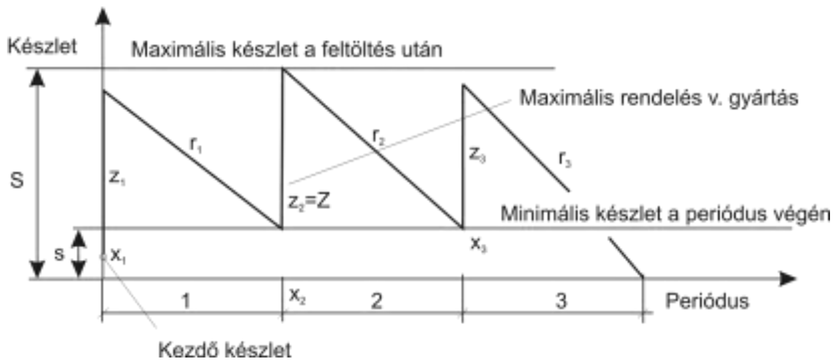
A probléma természetéből fakadóan a lehetséges korlátozások a következők:

a periódusonkénti beszerzés vagy gyártás maximalizált, $Z \geq z_i$,

a készlet a gyártás vagy feltöltés után maximalizált, $S \geq z_i + x_i$,

a hiányt nem engedjük meg, $x_i + z_i - r_i \geq 0$,

a készlet a periódus végén minimalizált, $s \leq x_i$.



5.5. ábra: Egy három periódusos modell

Mivel z_i-t választottuk döntési változónak, a korlátozó feltételeket az alábbiak szerint rendezzük:

$$z_i \leq Z\,,$$
$$z_i \leq S - x_i\,,$$
$$z_i \geq r_i - x_i\,,$$
$$x_i \geq s\,.$$

Az utolsó feltételt alakítsuk át az 5.5. *ábrából* felírható

$$x_{i+1} = x_i + z_i - r_i$$

egyenlettel, amelyből az

$$x_i = x_{i+1} + r_i - z_i\,.$$

Ezt helyettesítve az utolsó feltételbe és rendezve, az

$$x_{i+1} + r_i - z_i \geq s\,,$$

$$z_i \leq x_{i+1} + r_i - s\,.$$

A feltételeket összevonva:

$$\min\{Z, (x_{i+1} + r_i - s), (S - x_i)\} \geq z_i \geq \max\{r_i - x_i\}\,.$$

Jelentse $C_i(x_i,z_i)$ az alpolitikák teljes költségét az i-edik periódus elejétől az n-edik periódus végéig, amelyek értelemszerűen a belépő készlet és a gyártott mennyiség függvényei, és x_i belépőkészlet esetén jelölje $C_i^*(x_i)$ a $C_i(x_i,z_i)$ halmaz minimális értékét.

A korlátozó feltételeket figyelembe véve a legjobb alpolitikák a

$$C_i^*(x_i) = \min_{\substack{z_i \leq \min\{Z,(x_{i+1} r_i - s),(S - x_i)\} \\ z_i \geq \max\{r_i - x_i\}}} \{C_i(x_i, z_i)\} = \min_{\substack{z_i \leq \min\{Z,(x_{i+1} r_i - s),(S - x_i)\} \\ z_i \geq \max\{r_i - x_i\}}} \{B_i(x_i, z_i) + C_{i+1}^*(x_i + z_i - r_i)\}$$

rekurzív formulával számíthatók minden i= 1,2,…,n periódusban, ahol a C_{n+1}^* definíció szerint nulla, és az

$$x_{i+1} = x_i + z_i - r_i.$$

A feladat megoldásának további feltételei:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \leq nZ + x_1\,,$$

azaz az összes beszerezhető vagy gyárható mennyiség és az első periódusba belépő készlet összege nem lehet kevesebb, mint az összes szükséglet. Az első periódus szükséglete pedig nem lehet nagyobb, minta az első periódusba belépőkészlet és a periódusonként maximálisan beszerezhető vagy gyárható mennyiség összege:

$$r_1 \leq Z + x_1\,.$$

A tervezési horizont végén az x_{n+1}=0 csak akkor teljesül, ha az

$$s \leq r_n\,,$$

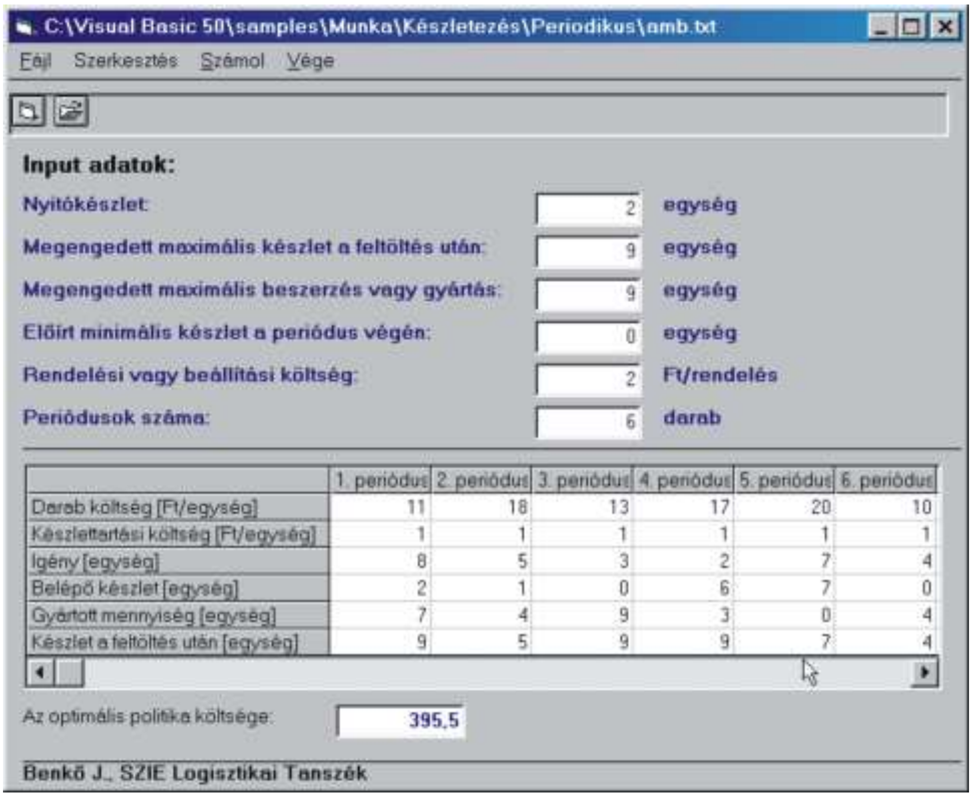
azaz a minimális készlet nem lehet nagyobb az utolsó periódus igényénél.

A leírt algoritmus alapján készített számítógép program bemutatásához tekintsük a következő példát. A program adatbeviteli képernyőjét az 5.*6. ábra* mutatja.

Egy vállalat anyagellátási osztályának az éves termelési program megvalósítása érdekében kéthavonta az *5.1. táblázatban* megadott mennyiségben (r_i) kell a gyártáshoz szükséges alapanyagokat biztosítania. A beszerzési ár (c_i) periódusonként változó, és a raktárkapacitás pedig korlátozott, S=9 t. Az első periódusba belépőkészlet x_1=2 t. A rendelési költség K=2 ezer Ft/rendelés, a fajlagos készlettartási költség minden periódusban egyenlő, h_i=1 ezer Ft/t. Határozzuk meg az optimális készletezési politikát. Kérdés, ehhez az egyes periódusokban mekkora mennyiségeket (z_i) rendeljünk, ha a minimális készletet nem korlátozzuk, majd vizsgáljuk meg, hogy milyen költségnövekedéssel jár, ha a minimális készletet 1 tonnára növeljük.

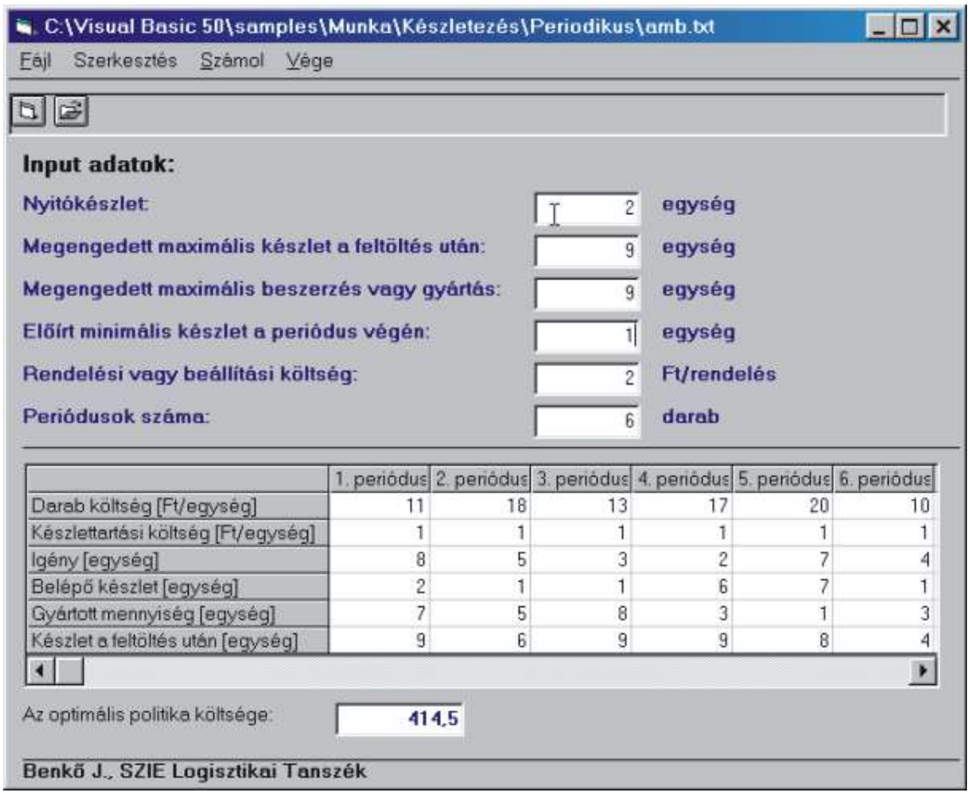
5.1. táblázat

Periódus (i)	1	2	3	4	5	6
Beszerzési ár (c_i) [ezer Ft/t]	11	18	13	17	20	10
Szükséglet (r_i) [t]	8	5	3	2	7	4
Készlettartási költség (h_i) [ezer Ft/t]	1	1	1	1	1	1



5.6. ábra: Az input adatok és az eredmények, 0 minimális készletszintnél.

A program futásának eredményei (a periódusok belépő készletei (x_i), a periódusokban beszerzett mennyiségek (z_i) és a feltöltés utáni készletek (x_i+z_i)), nulla minimális készletszintnél az 5.*6. ábrán*, 1 tonnás minimális készletszintnél pedig az 5.*7. ábrán* láthatók. Az első esetben az összes beszerzési és készletezési költség 395,5 ezer Ft, ami a minimális készletszint növelésekor 414,5 ezer Ft-ra növekszik, azaz az 1 tonnás minimális készletszint okozta költségnövekedés 19 ezer Ft.



5.7. ábra: Az input adatok és az eredmények 1 tonnás minimális készletszintnél.

5.7. példa: Valamely vállalat féléves gyártási programja megvalósításához havonta szükséges alapanyagokat és azok árait az alábbi táblázat tartalmazza.

Periódus	1	2	3	4	5	6
Szükséglet	5	7	6	3	7	4
Beszerzési ár	12	17	11	17	22	18

Mivel a raktárkapacitás korlátozott a készlet S=10 egységnél nagyobb nem lehet. A kezdőkészlet 2, a zárókészlet 0 egység. A beszerzési költséget szeretnénk minimalizálni, mennyit és mikor vásároljunk. Oldjuk meg a feladatot dinamikus programozással.

5.5. Megoldás egészértékű lineáris programozással

E modellben is feltételezzük, hogy az első periódus elején a belépő készlet 0, és az utolsó (n-edik) periódus végén nem marad készlet. Legyen ismét z_i az i-edik periódus elején gyártott mennyiség, r_i az i-edik periódus szükséglete, c a darabonkénti gyártási költség, K pedig a beállítási költség. Az utóbbi, mint tudjuk, akkor jelentkezik, ha a gyártást újra indítjuk. Vezessük be továbbá a $v_i \in \{0,1\}$ változókat, ezeknek az értéke 0, ha az i-edik periódusban nincs gyártás, azaz $z_i = 0$, és 1, ha az i-edik periódusban $z_i > 0$. A **gyártási költség** ekkor:

$$K\sum_{i=1}^{n} v_i + c\sum_{i=1}^{n} z_i \, .$$

Készletnek most is a periódus végén megmaradó mennyiséget tekintjük, ami kifejezhető az i-edik periódusig gyártott és felhasznált mennyiségek különbségeként. A fajlagos készlettartási költség legyen h, ekkor az összes **készlettartási költség**:

$$h(z_1 - r_1) + h(z_1 + z_2 - r_1 - r_2) + \ldots + h(z_1 + z_2 + \ldots + z_n - r_1 - r_2 - \ldots - r_n) =$$
$$= h[n-1)(z_1 - r_1) + (n-2)(z_2 - r_2) + \ldots + (z_n - r_n)] = h\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(z_i - r_i)\, .$$

A minimalizálandó célfüggvény a fenti költségek összege:

$$z = K\sum_{i=1}^{n} v_i + c\sum_{i=1}^{n} z_i + h\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(z_i - r_i)$$

a következő feltételek mellett

$$z_j \le \left(\sum_{i=j}^{n} r_i\right) v_j \, , \text{ ahol } j \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

$$\sum_{i=1}^{j} z_i \ge \sum_{i=1}^{j} r_i \, , \text{ ahol } j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Alkalmazzuk a modellt az ekevas-gyártási feladatra, ahol 1000 darabot tekintünk egy egységnek és a periódusonkénti szükségletek:

Periódus	1	2	3	4
Szükséglet [r_i]	2	4	3	1

Ennek megfelelően a K=200000/1000 db=200 Ft, a c=1000 Ft/db és a h=30 Ft/db.

A célfüggvény:

$$z = 200(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + 1000(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + 30[3(z_1 - 2) + 2(z_2 - 4) + (z_3 - 3)]\, .$$

A feltételi egyenletek:

$$z_1 \le 10v_1,\; z_2 \le 8v_2,\; z_3 \le 4v_3,\; z_4 \le v_4,$$

$$z_1 \geq 2,\; z_1 + z_2 \geq 6,\; z_1 + z_2 + z_3 \geq 9,\; z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \geq 10,$$
$$z_1 \geq 0,\; z_2 \geq 0,\; z_3 \geq 0,\; z_4 \geq 0, \text{ egész számok},$$
$$v_1 \geq 0,\; v_2 \geq 0,\; v_3 \geq 0,\; v_4 \geq 0, \text{ egész számok},$$
$$v_1 \leq 1,\; v_2 \leq 1,\; v_3 \leq 1,\; v_4 \leq 1, \text{ egész számok.}$$

Pc-Prog version 2.00 programcsomaggal készített megoldás szerint a célfüggvény értéke 10550 10^3Ft, a változók értékei pedig: $z_1=6$, $z_2=0$, $z_3=4$, $z_4=0$, $v_1=1$, $v_2=0$, $v_3=1$, $v_4=0$ (*5.1. lista*), ami megegyezik a dinamikus programozás *B* megoldásával (*5.2. ábra*).

5.1. lista:

Az ekevas-gyártási probléma megoldása egészértékű lineáris programozással

```
$declare z[1..4],v[1..4]
$integer z[1..4], v[1..4]
$bound v[1..4],1
$const r[1..4] = 2 4 3 1
$const K = 200
$const c = 1000
$const h = 30
$const n = 4
{celfuggveny}
Min K $sum(i := 1 to n, v[i]) + c $sum(i := 1 to n, z[i]) + h $sum(i := 1 to n - 1, (n - i) (z[i] - r[i]))
{feltetelek}
$for j := 1 to n do
    (
        z[j] <= $sum(i := j to n, r[i] v[j])
    )
$for j := 1 to n do
    (
        $sum(i := 1 to j, z[i]) >= $sum(i := 1 to j, r[i])
    )

Pc-Prog version 2.00                    JAN 1988

 The following model was read:
 Maximize  - 1.1E+003 Z[1] - 1.1E+003 Z[2] - 1.0E+003 Z[3] - 1.0E+003 Z[4]
        - 200 V[1]  - 200 V[2] - 200 V[3] - 200 V[4] + 510

 Subject to
  1.  + Z[1] - 10 V[1] <= 0
  2.  + Z[2] - 8 V[2] <= 0
  3.  + Z[3] - 4 V[3] <= 0
  4.  + Z[4] - V[4] <= 0
  5.  + Z[1] >= 2
  6.  + Z[1] + Z[2] >= 6
  7.  + Z[1] + Z[2] + Z[3] >= 9
  8.  + Z[1] + Z[2] + Z[3] + Z[4] >= 10

 Variable   Bound    Variable   Bound    Variable   Bound
 V[1]       1        V[2]       1        V[3]       1
 V[4]       1

 Integer variables :
 Z[1]    Z[2]    Z[3]    Z[4]    V[1]    V[2]    V[3]
 V[4]

 Number of constraints :   8
 Number of variables   :   8
```

Discrete variables : 8
Density of A : 28.1250%
Translation time : 0.06 secs.

Calculation Time : 0.06 sec.
Summary of Results
Value Objectfunction : 10550.00000 (adapted to minimization)

		Activity Level
Z[1]	:	6.00000
Z[2]	:	0.00000
Z[3]	:	4.00000
Z[4]	:	0.00000
V[1]	:	1.00000
V[2]	:	0.00000
V[3]	:	1.00000
V[4]	:	0.00000

5.6. Feladatok

1. feladat

Tegyük fel, hogy a következő 5 hónapra ismert egy cikk iránti kereslet: $r_1=2$, $r_2=4$, $r_3=2$, $r_4=2$, $r_5=3$, a beállítási költség $K=1200$ Ft/rendelés, a beszerzési ár $c=300$ Ft/db, a készlettartási költség $h=90$ Ft/db. Határozzuk meg azt az optimális rendelési ütemet, amely kielégíti a havi kereslteket. Használjuk a dinamikus programozást.

2. feladat

Oldjuk meg a 1. példát $300\cdot(1+\ln z)$ Ft beszerzési költség mellett, ahol z az egy hónapban termelt mennyiség.

3. feladat

Oldjuk meg a 1. példát a tankönyv 5.3. szakaszában ismertetett egyszerűsített algoritmussal.

4. feladat

Fogalmazzuk meg a 1. példát, mint egészértékű lineáris programozási feladatot.

5. feladat

Tekintsük a következő szituációt: egy-bizonyos terméket gyártanak, majd addig raktározzák, amíg a termelési folyamat következő szakaszában szükség nem lesz rá. A következő 3 hónapban igényelt darabszámot, a beállítási költséget és a fajlagos előállítási költséget az alábbi táblázat mutatja:

Hónap	Kereslet (db)	Beállítási költség (Ft/db)	Előállítási költség (Ft/db)
1	1	1500	2400
2	2	3000	3000
3	3	1500	2700

Kezdetben 1 egység van raktáron (az első hónap belépő készlete), és azt szeretnénk, hogy a 3. hónap végén 2 egység maradna. Havonta legfeljebb 3 egység gyártható, azonban túlórában még egy egység gyártható 600 Ft többlet költséggel. A készlettartási költség 600 Ft/db.

Határozzuk meg dinamikus programozással, hány darabot kell gyártani havonta úgy, hogy az összköltség minimális legyen.

5.7. Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse a periodikus készletfigyelés fogalmát, értelmezze a költségeket!
2. Írja fel a *Wagner* és *Whithin* modell költség függvényét és korlátozó feltételeit!
3. Alkalmazza a dinamikus programozást a *Wagner* és *Whithin* modell megoldására!
4. Hogyan egyszerűsíthető a dinamikus programozási eljárás állandó gyártási költség esetén!
5. Mutassa be, hogyan korlátozható a maximális- és minimális készlet, illetve a periódusonkénti maximális gyártás!
6. Oldja meg a a *Wagner* és *Whithin* problémát egészértékű lineáris programozással!

6. SZTOCHASZTIKUS MODELLEK

Ebben a fejezetben olyan készletezési problémákkal foglalkozunk, amelyekben a kereslet valószínűségi változó ismert valószínűségi eloszlással, vizsgálataink egyperiódusos és többperiódusos modellekre terjednek ki.

6.1. Egyperiódusos modell beállítási költség nélkül

A 2.5. szakaszban tárgyalt esettanulmányban 10 sebességes kerékpárok elosztásáról volt szó. Tegyük fel, hogy a nagykereskedő igen kedvező ajánlatot kap az ismert márkájú kerékpárok beszerzésére azok termelésének leállítása miatt. Ez a lehetőség ideálisnak tűnik, mert közeleg a karácsonyi szezon, és az üzleteket értesítették, hogy a modellt nem lehet utánrendelni a termelés leállítása miatt. Minden kerékpár c=15000 forintba kerül, és feltesszük, hogy nincs beállítási költség. A készlettartási költség h=−11725 Ft kerékpáronként. Ez magában foglal 275 Ft tárolási költséget, a lekötött tőke költségét, stb. valamint −12000 Ft-ot, amelyet a nagykereskedő kaphat minden kerékpárért, ami karácsony után megmarad (maradványérték). A készlettartási költség tehát a tárolási költség és kerékpárok maradványértékének a kombinációja, ami végül is negatív értéket ad. Minden kerékpárt 22000 forintért adnak el, azaz 7000 Ft a nyereség.

Még két költséget kell megvizsgálnunk: a ki nem elégített igény büntetését és a jövedelmet terhelő költségeket. Ha a kereslet meghaladja a kínálatot, azok az ügyfelek, akiknek nem jutott kerékpár, elégedetlenek a nagykereskedővel, ami átvitt értelemben büntetést jelent. Az ezzel kapcsolatos költséget úgy szokás figyelembe venni, hogy arányos a hiánnyal. A kerékpár-példában ezt a költséget elhanyagoljuk.

Ha a nettójövedelem maximumára törekszünk, akkor a modellbe be kell építeni a bevételt is. A nettójövedelem egyenlő a bevétel mínusz a felmerült (rendelési, készlettartási, hiány, stb.) költségek. Az összbevétel egyszerűen úgy adódik, hogy az igényelt kerékpárok számának és az eladási árának (22000 forint) szorzatából levonjuk a hiány és az eladási ár szorzatát. A kereslet független a készletezési politikától, ezért a „*kereslet* x *eladási ár*” elhagyható, a hiány azonban éppen az elvesztett jövedelmet testesíti meg, tehát „*hiány* x *eladási ár*” lényeges. Az ennek megfelelő költség hasonlóan viselkedik, mint az elvesztett bizalom (neheztelés) miatti költség, ezért e kettő belefoglalható a ki nem elégített igény miatti költségbe. A ki nem elégített igény miatti költségét ebben a fejezetben mindig így értjük. A kerékpár-példában a ki nem elégített igény költsége egyszerűen úgy adódik, hogy 22000 forinttal megszorozzuk a ki nem elégített keresletet, ha van ilyen. (Általában a bizalom elvesztése miatti költséget, amelyet a kerékpár-példában elhanyagolunk, hozzá kell adni a jövedelem kieséshez, hogy megkapjuk a ki nem elégített igény miatti teljes költséget.)

A „*kereslet* x *eladási ár*” független a készletezési politikától, a nettójövedelem kifejezéséből való elhagyása azt eredményezi, hogy az összköltséget negatív értékben kapjuk meg. Ezért a nettójövedelem maximalizálása itt egyenértékű az összköltség minimalizálásával.

A ki nem elégített igény miatti költség előbbi taglalása azon alapult, hogy a nem teljesített kereslet elvész. Ha a túl keresletet pótrendeléssel elégítik ki, ugyanazok az elvek érvényesek. Az összbevételt megkapjuk, ha vesszük az eladási ár (22000 Ft) és a kereslet szorzatát mínusz a pótrendelés egységár és a kielégítetlen igény szorzatát (hiányesetén). Ha a szóban forgó nagykereskedő arra kényszerül, hogy egy másik nagykereskedőtől pótolja a hiányt, ugyancsak 22000 forintért darabonként, és ehhez darabonként még 550 Ft szállítási költség is adódik, akkor a ki nem elégített igény miatti valódi költség 22550 Ft kerékpáronként. Természetesen, más költségeket is hozzá kell számolni, ami még a bizalomvesztésből eredhet.

Az előző gondolatmenet a felmerülő költségekre összpontosított, és alig szentelt figyelmet a kerékpárok iránti keresletnek. Sajnos a nagykereskedő nem tudja pontosan, mekkora lesz a kereslet az ország nyugati területén, vagyis a keresletet valószínűségi változónak kell tekintenie. Ha a kereslet valószínűségi eloszlása ismert, akkor optimális politika meghatározható. Legyen D a kereslet, mint valószínűségi változó, és jelölje $P_D(d)$ annak a valószínűségét, hogy a kereslet éppen d:

$$P_D(d) = P\{D = d\}.$$

Feltesszük, hogy $P_D(d)$ ismert minden d-re, azaz a valószínűségi eloszlása meg van adva.

Általában a következő készletezési modellt tekintjük. Egy periódusban tételeket (árukat) vásárolnak (vagy termelnek) c Ft egységáron. A készlettartási költség egységenként h Ft, amelyet a kereslet kielégítése után megmaradt mennyiség szerint kell kifizetni (ez egyenlő a fennmaradt egységek raktározási költségének és maradványértékének a különbségével). A ki nem elégített igény miatti költség p Ft egységenként ($p>c$). Feltesszük azt is, hogy kezdetben nincs indulókészlet. Jelölje y a periódus alatt beszerzett (vagy termelt) mennyiséget, és legyen D a kereslet valószínűségi változója. (Az előző modellekben z jelölte a termelt mennyiséget, x pedig a periódus belépő készletét. Itt azért vezettük be az y jelölést, hogy azzal a rendelés utáni leendő készletre utaljunk, vagyis $y=z+x$ a rendelés utáni készlet. Mivel a kezdeti készlet nulla, azaz $x=0$, ezért itt az y és z megegyezik.)

Ez az egyperiódusos modell olyan tételek készletezésének felel meg, amelyek (1) igen gyorsan elfogynak, mint pl. a kerékpárok a példában, vagy mint egy napilap, (2) gyorsan megromlik, mint pl. a zöldségek, (3) csak egyszer kerül raktárra, mint pl. egy repülőgép prototípusának alkatrészei, (4) bizonytalan a jövője egy időszak után.

Mindezekkel együtt felmerül az a kérdés, hogy mekkora legyen a készlet. Valószínűleg több mint a várható kereslet, de biztosan kevesebb, mint a maximális kereslet. Két kockázat között kell tehát kompromisszumot kötni: (1) ha kicsi a készlet, akkor hiány jelentkezhet és hiányköltség csökkenti a nyereséget, (2) ha nagy a készlet, akkor a rendelési és a tárolási költségek nagysága miatt keletkezik veszteség. Ésszerűnek látszik azt a készletezési szintet választani, amely minimalizálja ezeknek a költségeknek a valószínűségi értelemben vett várható értékét.

Az eladott mennyiséget a

$$\begin{cases} D, \text{ ha } D < y \\ y, \text{ ha } D \geq y \end{cases} = \min(D, y)$$

adja meg. Ezért a felmerülő összes költség, a D kereslet és az y készlet függvénye:

$$C(D, y) = cy + p\max(0, D - y) + h\max(0, y - D),$$

ahol p az egységenkénti hiányköltség, h az egységenkénti készlettartási költség.

Mivel a kereslet valószínűségi változó, amelynek a valószínűségi eloszlása $P_D(d)$, a költség is valószínűségi változó. A költség várhatóértéke:

$$C(y) = E[C(D, y)] = \sum_{d=0}^{\infty} \left[cy + p\max(0, d - y) + h\max(0, y - d)\right] P_D(d) =$$

$$= cy + \sum_{d=y}^{\infty} p(d - y) P_D(d) + \sum_{d=0}^{y-1} h(y - d) P_D(d).$$

Nyilvánvaló, hogy a $C(y)$ költség függ a $P_D(d)$ valószínűségi eloszlástól. Gyakran azonban nehéz megtalálni ennek az eloszlásnak a pontos alakját, különösen akkor, ha a kereslet igen sok a lehetséges értéket vehet fel. Ezért a diszkrét valószínűségi változót gyakran helyettesítjük folytonossal. Ennek további előnye, hogy a folytonos keresletre vonatkozó kifejezések könnyebben kezelhetők, mint a diszkrétre vonatkozók. Ha a keresletnek igen sok a lehetséges értéke, akkor ez a közelítés általában csak kis eltéréseket ad az optimáliskészlet értékeiben. Ezért, hacsak nem jelezzük, a fejezet hátralévő részében folytonos keresletet tételezünk fel. Ennek a folytonos valószínűségi változónak a valószínűségi sűrűségfüggvényét $\varphi_D(\xi)$ fogja jelölni. (A valószínűségelmélet szokásos jelöléseit követjük. Ha X valószínűségi változó, amelynek $f_x(y)$ a sűrűségfüggvénye, és $g(X)$ az X-nek függvénye, akkor

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f_x(y) dy.$$

Ennek megfelelően ekkor a $C(y)$ várható költséget a

$$\begin{aligned} C(y) = E[C(D,y)] &= \int_0^{\infty} \left[cy + p \max(0, \xi - y) + h \max(0, y - \xi)\right] \varphi_D(\xi) d\xi = \\ &= cy + \int_y^{\infty} p(\xi - y)\varphi_D(\xi) d\xi + \int_0^{y} h(y - \xi)\varphi_D(\xi) d\xi = \\ &= cy + L(y) \end{aligned}$$

kifejezés adja meg, ahol az $L(y)$ a várható hiány- és a készlettartási költség összege.

Meg kell tehát keresni azt az y^0 értéket, amely minimalizálja a $C(y)$ költségfüggvényt. Az optimális rendelési tételnagyság (y^0) az az érték, amely kielégíti a

$$\Phi(y^0) = \frac{p - c}{p + h}$$

kifejezést, ahol $\Phi(a)$ a kereslet eloszlásfüggvénye, azaz

$$\Phi(a) = \int_0^{a} \varphi_D(\xi) d\xi .$$

Ennek a megoldásnak a levezetését később, a 6.1.3 szakaszban adjuk meg.

Ha D diszkrét, akkor eloszlásfüggvénye

$$F_D(b) = \sum_{d=0}^{b} P_D(d),$$

és az optimális rendelési tételnagyságra hasonló eredmény származtatható. Speciálisan (diszkrét D esetén), az optimális y^0 rendelési tételnagyság az a legkisebb érték, amelyre az

$$F_D(y^0) \geq \frac{p - c}{p + h}$$

teljesül.

Mintapélda:

Térjünk vissza a kerékpár-példánkhoz. Tegyük fel, hogy a kereslet exponenciális eloszlású, λ=10000 várhatóértékkel, azaz a kereslet sűrűségfüggvénye:

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{10000} e^{-\xi/10000}, & \xi \geq 0 \\ 0, & \text{egyébként}. \end{cases}$$

A korábban közölt költségadatok: c=15000, p=22000 és h=–11725.

Minthogy a kereslet-eloszlása exponenciális, a

$$\Phi(a)=\int_0^a \frac{1}{10000}e^{-\xi/10000}d\xi=1-e^{-a/10000}.$$

Az y^0 optimális rendelésre azt kapjuk, hogy

$$1-e^{-y^0/10000}=\frac{p-c}{p+h}=\frac{22000-15000}{22000-11725}=0{,}6813,$$

$$e^{y^0/10000}=\frac{1}{1-0{,}6813}=\frac{1}{0{,}3187}$$

$$y^0=10000\ln\left(\frac{1}{0{,}3187}\right)=11435.$$

Az eredmény alapján a nagykereskedőnek 11435 kerékpárt kell a karácsonyi időszakra beszereznie. Ez a szám alig több mint a kereslet várhatóértéke.

Ha a kereslet exponenciális eloszlású λ várható értékkel, akkor a mintapélda alapján, az y^0-t a következő összefüggésből határozhatjuk meg:

$$y^0=-\lambda\ln\left(\frac{c+h}{p+h}\right).$$

6.1.1 Egyperiódusos modell kezdeti készlettel

Az előző modellen végezzünk egy apró változtatást, tegyük fel, hogy a nagykereskedőnek már 500 kerékpárja van raktáron. Kérdés, hogyan befolyásolja ez az optimális készletezési politikát? Általában tegyük fel, hogy a kezdeti készlet x, és az a feladat, hogy mennyi legyen y, vagyis az eladásra szánt készlet. Ekkor y–x-et kell rendelni.

Felhasználható mennyiség (y) = kezdeti mennyiség (x) + megrendelt mennyiség (y–x)

A költségegyenlet majdnem ugyanaz lesz, mint az előbb, azzal a különbséggel, hogy a cy helyét most $c(y–x)$ foglalja el. A feladat tehát a következő, ha $y \geq x$:

$$\min_{y\geq x}\left[c(y-x)+\int_y^\infty p(\xi-y)\varphi_D(\xi)\,d\xi+\int_0^y h(y-\xi)\varphi_D(\xi)\,d\xi\right].$$

Az $y \geq x$ mellékfeltételt elő kell írni, hiszen a kezdeti készlet 0-nál kisebb nem lehet. Az optimális politika a következőképen írható le.

Azt a készletezési politikát, amely $p>c$ esetén megoldja a

$$\min_{y\geq x}\left\{-cx+\left[\int_y^\infty p(\xi-y)\varphi_D(\xi)\,d\xi+\int_0^y h(y-\xi)\varphi_D(\xi)\,d\xi+cy\right]\right\}$$

feladatot, az az

$$y=\begin{cases} y^0 \\ x \end{cases}$$

adja meg, amely mellett

ha $x<y^0$, akkor a rendelés $y^0–x$,
ha $x>y^0$, akkor nincs rendelés.

Az y^0-t a

$$\Phi(y^0)=\frac{p-c}{p+h}$$

összefüggés határozza meg.

Tehát ha az előző mintapéldában 500 darab van raktáron, akkor az optimális politika szerint a készletet ki kell egészíteni y^0=11435-re, azaz rendelni kell 10935 darabot. Viszont, ha 12000 db van raktáron, akkor nem rendelni semmit.

6.1.2 Egyperiódusos modell nemlineáris büntetőköltséggel

Hasonló eredményeket származtathatunk akkor is. ha a tárolási költség vagy hiányköltség nem lineáris. Legyen a tárolási költség

$$\begin{cases} h(y-D), & ha \quad y \geq D \\ 0, & ha \quad y < D \end{cases},$$

ahol $h()$ nem szükségképpen lineáris függvény.

Hasonlóan legyen a hiányköltség

$$\begin{cases} p(y-D), & ha \quad D \geq y \\ 0, & ha \quad D < y \end{cases}$$

ahol $p()$ nem szükségképpen lineáris függvény.

A várható összköltség

$$c(y-x) + \int_y^\infty p(\xi - y)\varphi_D(\xi)\,d\xi + \int_0^y h(y-\xi)\varphi_D(\xi)\,d\xi \quad ,$$

x a raktáron levő mennyiség.

Ha $L(y)$ a várható tárolási költség és a várható hiányköltség összege. Azaz

$$L(y) = \int_y^\infty p(\xi - y)\varphi_D(\xi)\,d\xi + \int_0^y h(y-\xi)\varphi_D(\xi)\,d\xi \quad ,$$

akkor a várható összköltség a következő alakban írható fel:

$$c(y-x) + L(y) \quad .$$

Az optimális politika minimalizálja ezt a kifejezést az $y \geq x$ feltétel mellett, azaz

$$\min\left[c(y-x) + L(y)\ \right].$$

Ha $L(y\}$ szigorúan konvex (aminek elégséges feltétele, hogy a hiányköltség és a készlettartási költség konvex, és $\varphi_D(\xi)>0$, akkor az optimális politikát az adja, hogy

$$\begin{cases} \text{ha } x < y^0, \text{ akkor a rendelés } y^0 - x, \\ \text{ha } x \geq y^0, \text{ akkor nincs rendelés,} \end{cases}$$

ahol y^0 az az érték, amely kielégíti a

$$\frac{dL(y)}{dy} + c = 0$$

egyenletet.

6.1.3 Az egyperiódusos, beállítási költség nélküli, lineáris hiány- és tárolási költségű modell eredményeinek levezetése

Egy hasznos eredmény, amely segít a várható költségeket minimalizáló politika megtalálásában, a következő. Legyen D valószínűségi változó, amelynek a sűrűségfüggvénye

$$\begin{cases} \varphi_D(\xi) & \text{ha } \xi \geq 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Jelölje a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $\Phi(a)$, akkor a

$$\Phi(a) = \int_0^a \varphi_D(\xi)\,d\xi\,.$$

Legyen definíció szerint

$$g(\xi, y) = \begin{cases} c_1(y-\xi), \text{ ha } & y > \xi,\, c_1 > 0 \\ c_2(\xi - y), \text{ ha } & y \le x,\, c_2 > 0, \end{cases} \quad \text{és}$$

$$G(y) = \int_y^\infty g(\xi, y)\varphi_D(\xi)\,d\xi + cy\ ,$$

ahol $c>0$. Ekkor $G(y)$ annál az y^0-nál veszi fel a minimumát, amelyre

$$\Phi(y^0) = \frac{c_2 - c}{c_2 + c_1}\,.$$

Ennek belátásához vegyük észre, hogy definíció szerint

$$G(y) = c_1\int_0^y (y-\xi)\varphi_D(\xi)\,d\xi + c_2\int_y^\infty (\xi - y)\varphi_D(\xi)\,d\xi + cy\ .$$

Deriváljuk a $G(y)$ függvényt, és a deriváltat tegyük egyenlővé nullával, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{dG(y)}{dy} = c_1\int_0^y \varphi_D(\xi)\,d\xi + c_2\int_0^y \varphi_D(\xi)\,d\xi + c = 0\,.$$

Ez maga után vonja, hogy

$$c_1\Phi(y^0) - c_2[1 - \Phi(y^0)] + c = 0\,,$$

mivel

$$\int_0^\infty \varphi_D(\xi)\,d\xi = 1.$$

Ennek a megoldása arra vezet, hogy

$$\Phi(y^0) = \frac{c_2 - c}{c_2 + c_1}\,.$$

A második deriváltra a

$$\frac{d^2G(y)}{dy^2} = (c_1 + c_2)\varphi_D(y) \ge 0$$

feltétel minden y esetén teljesül, így a kívánt eredményhez jutottunk.

Eredményünk alkalmazásához elég megmutatni, hogy a

$$C(y) = cy + \int_y^\infty p(\xi - y)\varphi_D(\xi)\,d\xi + \int_0^y h(y-\xi)\varphi_D(\xi)\,d\xi$$

$G(y)$ alakú.

Világos, hogy $c_1=h$, $c_2=p$ és $c=c$, ezért az y^0 optimális rendelési tételnagyság az az érték, amelyre a

$$\Phi(y^0) = \frac{p-c}{p+h}$$

teljesül.

Tekintsük most az esetet, amikor a kezdeti készlet *x*, és emlékezzünk, hogy a megoldandó feladat

$$\min_{y \geq x}\left\{-cx+\left[cy+\int_y^{\infty} p(\xi-y)\varphi_D(\xi)d\xi+\int_0^{y} h(y-\xi)\varphi_D(\xi)d\xi\right]\right\}.$$

Vegyük észre, hogy a zárójelen belüli kifejezés $G(y)$ alakú, ahol $c_1=h$, $c_2=p$ és $c=c$. Ezért a feladat

$$\min_{y \geq x}\left[-cx+G(y)\right].$$

Mivel a $-cx$ állandó, a feladat átfogalmazható:

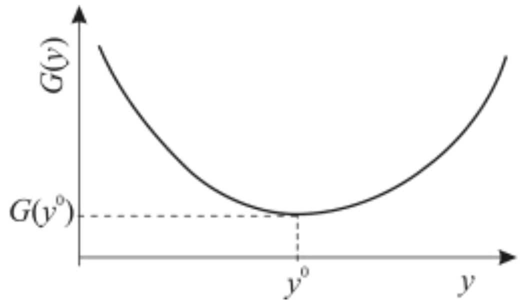
$$\min_{y \geq x}[G(y)].$$

Ezért a $G(y)$-t minimalizáló y^0 kielégíti a

$$\Phi(y^0)=\frac{p-c}{p+h}$$

egyenlőséget. Továbbá, $G(y)$-nak konvexnek kell lennie (*6.1. ábra*), hiszen

$$\frac{d^2G(y)}{dy^2} \geq 0\,.$$



6.1. ábra: A $G(y)$ függvény grafikonja

Az is igaz, hogy

$$\lim_{y \to 0}\frac{dG(y)}{dy}=c-p,$$

amely negatív, és

$$\lim_{y \to \infty}\frac{dG(y)}{dy}=h+c,$$

amely pozitív. Ezért $G(y)$ olyan alakú, mint amilyent a *6.1. ábra* mutat. Tehát az optimális politika a következő:

ha $x<y^0$, akkor a készletet ki kell egészíteni y^0-ra, mert y^0 elérhető a minimális $G(y^0)$ értékkel;

ha $x \geq y^0$, akkor nem kell rendelni, mert $y>x$ mellett minden $G(y)$ nagyobb, mint $G(x)$.

Hasonló meggondolások alapján kapható meg az optimális politika nemlineáris büntetőfüggvény esetén, ha $L(y)$ szigorúan konvex.

6.2. Egyperiódusos modell beállítási költséggel

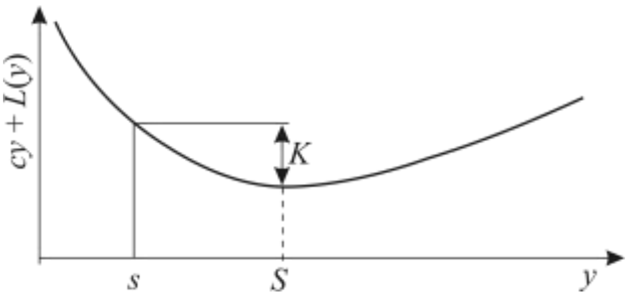
A kerékpár-példánkban eddig feltettük, hogy nincs rögzített többletköltség a karácsonyi szezonra való rendelésnél. Valójában azonban a rendelés leadásának költsége 220000 Ft, és ezt is figyelembe kell vennünk vizsgálatainknál. A beállítási költség figyelembevétele általában jelentősen megváltoztatja az eredményeket.

A beállítási költséget szokás szerint K-val jelöljük. Legyen most a hiány- és készlettartási költség lineáris. Ezek együttes hatását $L(y)$ adja meg, ahol

$$L(y) = p\int_{y}^{\infty}(\xi - y)\varphi_D(\xi)\,d\xi + h\int_{0}^{y}(y-\xi)\varphi_D(\xi)\,d\xi \ .$$

A felmerülő várható összköltség így, ha y-ig rendelünk (annyit rendelünk, hogy a készlet y-ra töltődjön fel), következő:

$$\begin{cases} K - c(y-\xi) + L(y), & \text{ha } \ y > x, \\ L(x), & \text{ha } \ y = x. \end{cases}$$



6.2. ábra: A $c\,y$+$L(y)$ függvény grafikonja

Vegyük észre, hogy cy+$L(y)$ ugyanaz a várható költség, ami az előzőekben szerepelt, vagyis amikor nem volt beállítási költség. A összköltség változását a készlet (y) függvényében, a cy+$L(y)$ függvény mutatja (*6.2. ábra*). (Az egy periódusos, beállítási költség nélküli, lineáris hiány- és készlettartási költségű modellben cy+$L(y)$ helyett $G(y)$ szerepelt, és egzaktul megmutattuk, hogy olyan alakú, mint amilyent a 6.*2. ábra* mutat.) Legyen S az az y érték, amely minimalizálja a cy+$L(y)$ függvényt, legyen továbbá s az a legkisebb y^0 érték, amelyre

$$cs+L(s)=K+cs+L(S).$$

A 6.*2. ábrából* nyilvánvaló, hogy, ha x>S, akkor a

$$K+cy+L(y)> cx+L(x).$$

Minden y>x esetén. Ezért

$$K+c(y-x)+L(y)> L(x),$$

ahol az egyenlőtlenség bal oldala az y-ig történő rendelés várható összköltsége, a jobb oldala pedig a várható összköltség akkor, ha nincs rendelés. Tehát az optimális politika azt követeli meg, hogy x>S esetén ne rendeljünk. Ha $s \le x \le S$, akkor megint a 6.*2. ábráról* látszik, hogy

$$K+cy+L(y) \ge cx+L(x), \quad \text{ha } y>x,$$

ezért

$$K+c(y-x)+L(y) \ge L(x).$$

Ismét: a nem rendelés kevésbé költséges, mint a rendelés. Végül, ha x<s, akkor a 6.*2. ábrából* az következik, hogy

$$\min_{y \ge x}\left[K + cy + L(y)\right] = K + cS + L(S) < cx + L(x)\,,$$

vagy

$$\min_{y \ge x}\left[K + c(y-x) + L(y)\right] = K + c(S-x) + L(S) < cx + L(x)\,,$$

tehát kifizetődő a rendelés, és akkor minimális a költség, ha S-ig rendelünk.

Az optimális politika tehát

$$\begin{cases} \text{ha } x < s, \ \text{akkor } S-\text{ig kell rendelni,} \\ \text{ha } x \ge s, \ \text{akkor nem kell rendelni.} \end{cases}$$

Az S értékét a

$$\Phi(S) = \frac{p-c}{p+h}$$

egyenlet határozza meg, és s az a legkisebb érték, amelyik kielégíti a

$$cs+L(s) = K+cS+L(S)$$

összefüggést.

Ez a korábban definiált (s, S) készletezési politika, amelyet kiterjedten használnak az iparban.

Mintapélda

Tekintsük ismét a kerékpár-példát, és a kereslet legyen most is exponenciális eloszlású és λ=10000 várhatóértékkel, akkor az

$$F_D(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{10000} e^{-\varphi/10000}, & \xi \geq 0, \\ 0, & \text{egyébként}. \end{cases}$$

A költségek: K=220000, c=15000, p=22000 és h=−11725, így az optimális rendelési tételnagyság:

$$y^0 = -\lambda \ln\left(\frac{c+h}{p+h}\right) = -10000 \ln\left(\frac{15000-11725}{22000-11725}\right) = 11435 \text{ db}$$

$$y^0 = S = 11435 \text{ db.}$$

Ekkor az újrarendelési pontot, az s-t a következő összefüggésből számíthatjuk:

$$cs + p\int_s^\infty (\xi - s)\frac{1}{\lambda}e^{-\xi/\lambda}\,d\xi + h\int_0^s (s-\xi)\frac{1}{\lambda}e^{-\xi/\lambda}\,d\xi =$$

$$= K + cS + p\int_S^\infty (\xi - S)\frac{1}{\lambda}e^{-\xi/\lambda}\,d\xi + h\int_0^S (S-\xi)\frac{1}{\lambda}e^{-\xi/\lambda}\,d\xi.$$

Helyettesítve az adatokat:

$$15000\cdot s + 22000\int_s^\infty (\xi - s)\frac{1}{10000}e^{-\xi/10000}d\xi - 11725\int_0^s (s-\xi)\frac{1}{10000}e^{-\xi/10000}d\xi =$$

$$= 220000 + 15000\cdot 11435 + 22000\int_{11435}^\infty (\xi - 11435)\frac{1}{10000}e^{-\xi/10000}d\xi -$$

$$-11725\int_0^{11435} (11435-\xi)\frac{1}{10000}e^{-\xi/10000}d\xi,$$

amelyből az

$$s = 10696 \text{ db.}$$

Az optimális politika szerint a kerékpár készletet S=11435 darabra kell feltölteni, ha a pillanatnyi készlet, kisebb, mint s=10696 darab, egyébként nem kell rendelni.

6.2.1 Közelítő megoldás, ha a kereslet exponenciális eloszlású

Érdeklődésre tarthat számot, ha általánosságban is megoldjuk a feladatot abban az esetben, amikor a D kereslet eloszlása exponenciális, azaz

$$\varphi_D(\xi) = \frac{1}{\lambda}e^{-\xi/\lambda}, \quad \text{ha } \xi > 0.$$

Legyen Δ az $S-s$ mennyiség, akkor Δ a következő egyenletből számítható:

$$e^{\Delta/\lambda} = \frac{K}{\lambda(c+h)} + \frac{\Delta}{\lambda} + 1,$$

továbbá Δ-nak jó közelítése a

$$\Delta \cong \sqrt{\frac{2\lambda K}{c+h}}.$$

Vegyük észre, hogy

$$s=S-\Delta.$$

Ezeket az eredményeket könnyen megkaphatjuk. Ha nincs beállítási költség, akkor

$$1-e^{-S/\lambda} = \frac{p-c}{p+h},$$

vagy

$$S = \lambda \ln\left(\frac{h+p}{h+c}\right).$$

Bármely y-ra

$$\begin{aligned} cy + L(y) &= cy + h\int_0^y (y-\xi)\frac{1}{\lambda}e^{-\xi/\lambda}d\xi + p\int_0^y (\xi - y)\frac{1}{\lambda}e^{-\xi/\lambda}d\xi = \\ &= (c+h)y + \lambda(h+p)e^{-y/\lambda} - \lambda h. \end{aligned}$$

A $cy+L(y)$ függvény értékei $y=s$ és $y=S$ esetén:

$$(c+h)s + \lambda(h+p)e^{-s/\lambda} - \lambda h = K + (c+h)S + \lambda(h+p)e^{-S/\lambda} - \lambda h,$$

amelyből a

$$(c+h)s + \lambda(h+p)e^{-s/\lambda} = K + (c+h)S + \lambda(h+p)e^{-S/\lambda}.$$

Az utóbbi egyenlet meg zárt alakban nem, csak numerikusan vagy analitikusan közelítve oldható meg. A közelítő analitikus megoldás a következő módon érhető el.

Az utóbbi egyenletet rendezve és felhasználva a $\Delta=S-s$ összefüggést a

$$e^{\Delta/\lambda} = \frac{K}{\lambda(c+h)} + \frac{\Delta}{\lambda} + 1.$$

Ha Δ/λ közel van a nullához, akkor az exponenciális függvényt Taylor-sorának első tagjával közelíthetjük, és ekkor azt kapjuk, hogy

$$1 + \frac{\Delta}{\lambda} + \frac{\Delta^2}{2\lambda} \cong \frac{K}{\lambda(c+h)} + \frac{\Delta}{\lambda} + 1,$$

amelyből a

$$\Delta \cong \sqrt{\frac{2\lambda K}{c+h}}.$$

Ez a közelítés a kerékpár példában:

$$\Delta \cong \sqrt{\frac{2\cdot 10000\cdot 220000}{15000-11725}} = 1159 \text{ db}$$

eredményt ad, amelyből $s = S - \Delta = 11856 - 1159 = 10697\text{db}$, ami nagyon közel áll az egzakt megoldáshoz.

6.2.2 Modellek nemlineáris büntetőköltséggel

Hasonlóan 6.1.2 szakaszhoz, itt is is eléggé nyilvánvaló, hogy ezeket eredményeket kiterjeszthetjük bármilyen konvex $L(y)$ várható hiányköltségre. Ekkor $cy+L(y)$ szigorúan konvex, olyan, mint amilyent a 6.*2. ábra* mutat. Így az optimális rendelési politika:

$$\begin{cases} \text{ha } x < s, \text{ akkor } S-\text{ig kell rendelni,} \\ \text{ha } x \geq s, \text{ akkor nem kell rendelni.} \end{cases}$$

S értékét a

$$c + \frac{dL(y)}{dy} = 0$$

egyenlet határozza meg, és s az a legkisebb érték, amelyik kielégíti a

$$cs+L(s) = K+cS+L(S)$$

összefüggést.

6.3. Kétperiódusos készletezési modell beállítási költség nélkül

Az egyperiódusos modellt egy olyan kerékpár-példával szemléltettük, amelyben a nagykereskedő csak egy alkalommal tud rendelni. Igen sok esetben a rendelés periodikus, például havonta ismétlődő, és arról kell dönteni, hogy kell-e tárolni, és ha igen, akkor mennyit. A tervezési időszak lehet 2 hónap, 12 hónap, 18 hónap, vagy akármennyi. Ha csak két periódusról van is szó, az egyperiódusos esetre kapott eredmény kétszeri alkalmazása nem feltétlenül adja az optimális politikát. A kétperiódusos esetre is használhatjuk az 5. fejezetben megismert dinamikus programozási módszert az optimális politika megkereséséhez. Az 5. fejezethez viszonyítva csak az a különbség, hogy a véletlen kereslet miatt valószínűségi tulajdonságok is fellépnek.

6.3.1 Kétperiódusos modell beállítási költség nélkül

Tegyük fel, hogy a kerékpár nagykereskedőnek lehetősége van még egyszer, mondjuk november 15-én új rendelést leadni az eredeti, október 15-én kelt rendelése után. A költségekre vonatkozó feltevéseink legyenek ugyanazok, mint az előbb.

Feltesszük azt is, hogy rendelésre a szállítás késedelem nélkül történik; az első periódus végén jelentkező hiányt (túlkeresletet) a második periódusban kielégítik (nem így a második periódus végén keletkező hiányt), a végkiárusítás nincs megengedve. Továbbá, a két periódus, D_1 és D_2 kereslete független valószínűségi változó, azonos $\varphi_D(\xi)$ valószínűségi sűrűségfüggvénnyel. A beszerzési ár lineáris, azaz cz alakú, ahol z a rendelt mennyiség (tehát nincs beállítási költség), a hiány miatti költség és a készlettartás költség szintén lineáris, p, illetve h fajlagos költséggel.

Amint említettük, ennek a problémának nem az a megoldása, hogy kétszer egymás után alkalmazzuk az egyperiódusos megoldást. Ennél kisebb költség is elérhető, ha a problémát kétperiódusos dinamikus programozási feladatnak tekintjük. Az első periódus kezdetekor két periódus áll előttünk. A második kezdetekor egy. Az a feladat, hogy megtaláljuk az optimális politikát jellemző számokat. Látni fogjuk, ezek a számok az egyes periódusokra jellemző egy-egy számból tevődnek össze, ezeket y_1^0 és y_2^0 fogja jelölni, y_1, é y_2 felsőindex nélkül az első, illetve a második periódus elejéig rendelt mennyiséget.

Jelölje $C_1(x_1)$ a várható költséget a kétperiódusnyi időben akkor, ha optimális politikát követünk (a költség minimális), feltéve, hogy x_1 mennyiség van raktáron. Hasonlóan, jelölje $C_2(x_2)$ a várható költséget a második periódusban, ha optimális politikát követünk, feltéve, hogy x_2 mennyiség van raktáron. Nyilván $C_1(x_1)$ az, amelyet keresünk, megtalálásához azonban, előbb meg kell találnunk $C_2(x_2)$-t is. Az egyperiódusos modellre vonatkozó eredményünk szerint az optimális politikát a

$$\Phi(y_2^0) = \frac{p-c}{p+h}$$

egyenletből meghatározott y_2 jellemzi, azaz ha x_2 a második periódus elején raktáron levő mennyiség, akkor

$$\begin{cases} \text{ha } x_2 < y_2^0, \text{ akkor a rendelés } y_2^0 - x_2, \\ \text{ha } x_2 \geq y_2^0, \text{ akkor nincs rendelés.} \end{cases}$$

Ennek az optimális politikának a költsége:

$$C_2(x_2) = \begin{cases} L(x_2), & \text{akkor ha } x_2 \geq y_2^0, \\ c(y_2^0 - x_2) + L(y_2^0), & \text{akkor ha } x_2 < y_2^0. \end{cases}$$

$L(z)$ az egy periódus alatti várható hiány, plusz a készlettartási költség, ha z mennyiség van raktáron:

$$L(z) = \int_z^\infty p(\xi - z)\varphi_D(\xi)d\xi + \int_0^z h(z-\xi)\varphi_D(\xi)d\xi .$$

Az első periódus kezdetén felmerülő költség a $c(y_1 - x_1)$ beszerzési költségből, az $L(y_1)$ hiány és készlettartás várható költségből és a második periódusban követett optimális politika költségéből tevődik össze. Ezért a két perióduson át követett optimális politika várható költsége:

$$C_1(x_1) = \min_{y_1 \geq x_1} \{c(y_1 - x_1) + L(y_1) + E[C_2(x_2)]\}$$

ahol $E[C_2(x_2)]$-t a következőképp kaphatjuk meg: x_2 valószínűségi változó, amely függ a 2. periódus elején levő raktárkészlettől: $x_2 = y_1 - D_1$. Ezért a

$$C_2(x_2) = C_2(y_1 - D_1) = \begin{cases} L(y_1 - D_1), & \text{ha } y_1 - D_1 \geq y_2^0 \\ c(y_2^0 - y_1 + D_1) + L(y_2^0), & \text{ha } y_1 - D_1 < y_2^0 \end{cases}$$

A $C_2(x_2)$ is valószínűségi változó, amelynek várható értéke:

$$E[C_2(x_2)] = \int_0^\infty C_2(y_1 - \xi)\varphi_D(\xi)d\xi = \int_0^{y_1 - y_2^0} L(y_1 - \xi)\varphi_D(\xi)d\xi + \\ + \int_{y_1 - y_2^0}^\infty \left[c(y_2^0 - y_1 + \xi) + L(y_2^0)\right]\varphi_D(\xi)d\xi.$$

Minthogy a hiány megengedett, az $(y_1 - \xi)$ negatív is lehet. Vegyük észre továbbá, hogy $E[C_2(x_2)]$ valójában y_1-nek és y_2^0-nak a függvénye, és y_2^0 megkapható az egyperiódusos modell megoldásából. Ezért

$$C_1(x_1) = \min_{y_1 \geq x_1} \Bigg\{ c(y_1 - x_1) + L(y_1) + \int_0^{y_1 - y_2^0} L(y_1 - \xi)\varphi_D(\xi)d\xi + \\ + \int_{y_1 - y_2^0}^\infty \left[c(y_2^0 - y_1 + \xi) + L(y_2^0)\right]\varphi_D(\xi)d\xi \Bigg\}$$

Könnyen kimutatható, hogy $C_1(x_1)$-nek egyetlen minimuma van, ezért az optimális y_1^0 érték kielégíti a

$$-p + (p+h)\Phi(y_1^0) + (c-p)\Phi(y_1^0 - y_2^0) + (p+h)\int_0^{y_1^0 - y_2^0} \Phi(y_1^0 - \xi)\varphi_D(\xi)d\xi = 0,$$

egyenletet, ahol $\Phi(a)$ az eloszlásfüggvény, azaz

$$\Phi(a) = \int_0^a \varphi_D(\xi)d\xi .$$

Ha x_1 az első periódus elején elérhető készlet, akkor az optimális politika:

$$\begin{cases} \text{ha } x_1 < y_1^0, \text{ akkor a rendelés } y_1^0 - x_1, \\ \text{ha } x_1 \geq y_1^0, \text{ akkor nincs rendelés.} \end{cases}$$

Ha a kereslet (D) valószínűségi sűrűségfüggvénye állandó (egyenletes eloszlású) 0 és t között, vagyis

$$\varphi_D \leq (\xi) = \begin{cases} 1/t, & \text{ha } 0 \leq \xi \leq t \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases},$$

akkor az y_1^0-t a következő kifejezés adja meg:

$$y_1^0 = \sqrt{(y_2^0)^2 + \left[\frac{2t(c-p)}{p+h}\right] y_2^0 + \frac{t^2[2p(p+h)+(h+c)^2}{(p+h)^2}} - \frac{t(h+c)}{p+h}$$

Végül, ha a kereslet (D) sűrűségfüggvénye exponenciális,

$$\varphi_D(\xi) = \frac{1}{\lambda} e^{-\xi/\lambda}, \quad \text{ha } \xi > 0,$$

akkor az optimális y_1^0 kielégíti a

$$(h+c)e^{-(y_1^0 - y_2^0)/\lambda} + (p+h)e^{-y_1^0/\lambda} + \frac{(p+h)(y_1^0 - y_2^0)}{\lambda} e^{-y_1^0/\lambda} = 2h + c$$

összefüggést. Egy másik módja az y_1^0 meghatározásának az, hogy bevezetjük a $z_0 = (y_1^0 - y_2^0)/\lambda$ jelölést; ekkor z_0 kielégíti az

$$e^{-z_0}[(h+c) + (p+h)e^{-y_2^0/\lambda} + z_0(p+h)e^{-y_2^0/\lambda} = 2h + c,$$

egyenletet és az

$$y_1^0 = \lambda z_0 + y_2^0$$

Mintapélda

Legyen egy termék gyártásának fajlagos költsége 2750 Ft (c=2750). Ha egy periódus végén marad raktárkészlet, akkor egységenként 2750 forintba kerül (h=2750), ha nincs maradvány, akkor nincs költség. Ha hiány mutatkozik egy periódusban, akkor 4125 Ft egységenkénti büntetőköltséget kell fizetni (p=4125). A kereslet egyenletes eloszlású 0 és 10 között, sűrűségfüggvénye:

$$\varphi_D \leq (\xi) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{ha } 0 \leq \xi \leq 10, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Keressük meg az optimális kétperiódusos politikát. Lineáris költségfüggvények esetén a

$$\Phi(y_2^0) = \frac{p-c}{p+h} = \frac{4125 - 2750}{4125 + 2750} = \frac{1375}{6875} = \frac{1}{5}.$$

Mivel a

$$\Phi(y_2^0) = \int_0^{y_2^0} \varphi_D(\xi)\,d\xi = \int_0^{y_2^0} \frac{1}{10}\,d\xi = \frac{y_2^0}{10} = \frac{1}{5},$$

amelyből az $y_2^0 = 10/5 = 2$.

Mivel a kereslet eloszlása egyenletes (t=10 paraméterrel), az optimális y_1^0 értéket a következő összefüggésből számíthatjuk:

$$y_1^0 = \sqrt{(y_2^0)^2 + \left[\frac{2t(c-p)}{p+h}\right] y_2^0 + \frac{t^2[2p(p+h)+(h+c)^2}{(p+h)^2}} - \frac{t(h+c)}{p+h} =$$
$$= \sqrt{(2)^2 + \left[\frac{2\cdot 10\cdot(10-15)}{15+10}\right] 2 + \frac{10^2[2\cdot 15\cdot(15+10)+(10+10)^2}{(15+10)^2}} - \frac{10\cdot(10+10)}{15+10} =$$
$$= \sqrt{4-8+184} - 8 = 5{,}42$$

Behelyettesítve az y_1^0=5 és y_1^0=6 értékeket $C_1(x_1)$ költségfüggvénybe, a kisebb költségértéket y_1^0=5 esetén kapjuk. Tehát az optimális politika így írható le: ha az x_1 kezdeti raktárkészlet nem haladja meg az 5-öt, akkor 5-ig kell rendelni (azaz a rendelés $5-x_1$), egyébként nem kell rendelni. Egy periódus múltával, a második periódus elején, ha az x_2 készlet nem haladja meg a 2-t, 2-ig kell rendelni (azaz a rendelés $2-x_2$, ahol x_2 negatív is lehet).

Ebben a kétperiódusos modellben ugyanakkora volt a büntetőköltség mind a két periódusban, noha az első periódus végén levő kielégítetlen keresletet át lehetett tolni a második periódusra, de a második periódus végén jelentkező kielégítetlen igény elveszik. Ez hiányossága a modellnek, de könnyen orvosolható azáltal, hogy különböző büntetőköltséggel számolunk az első és a második periódusban. A számítási eljárás lényegében ugyanaz marad, a változtatás nem jár külön nehézséggel.

6.4. Többperiódusos modellek

A kétperiódusos modellek kiterjeszthetők több, esetleg végtelen sok periódusra is. Ez a szakasz a többperiódusos modellekre vonatkozó olyan eredményeket foglalja össze, amelyeknek gyakorlati jelentősége van.

6.4.1 Beállítási költség nélküli többperiódusos modell

Ez a modell a kétperiódusosnak a kiterjesztése. Tegyük fel, hogy n periódusra tervezünk, és meg akarjuk határozni az optimális készletezési politikát. Mint korábban, most is feltesszük, hogy a rendelést azonnal követi a szállítás, a hiányt a következő periódus mennyiségéből fedezzük, kivéve az utolsó periódust, a végkiárusítás nincs megengedve. Továbbá, a periódusokban jelentkező keresletek független valószínűségi változók, azonos $\varphi_D(\xi)$ valószínűségi sűrűségfüggvénnyel. A beszerzési ár lineáris, azaz cz alakú, ahol z a rendelt mennyiség (tehát nincs beállítási költség), az egy periódusra eső hiány miatti és tárolási költség $L(y)$. Erről feltesszük, hogy szigorúan konvex, ami teljesül, ha minden költség lineáris, és $\varphi_D(\xi)>0$. A költéségre diszkonttényezőt alkalmazunk, amelyet α jelöl: $0<\alpha<$l.

Az előzőhöz hasonlóan az optimális politikát az egyes periódusokhoz rendelt $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ számok jellemzik, ezeket kiszámolni meglehetősen nehéz, de az optimális politikát egyszerűen jellemzik:

Az i-edik periódus kezdetén, (i=1,2,...,n),

$$\begin{cases} \text{ha } x_i < y_i^0, \text{ akkor a rendelés } y_i^0 - x_i, \\ \text{ha } x_i \ge y_i^0, \text{ akkor nincs rendelés.} \end{cases}$$

Továbbá

$$y_n^0 \le y_{n-1}^0 \le \ldots \le y_2^0 \le y_1^0 .$$

A végtelen-periódusos modellben (amikor is a készletezési döntést akárhány periódusra kell meghozni) létezik egy y^0 kritikus szám, amellyel az optimális politika így írható le:

Az i-edik periódus kezdetén, (i=1,2,...,n),

$$\begin{cases} \text{ha } x_i < y^0, \text{ akkor a rendelés } y^0 - x_i, \\ \text{ha } x_i \geq y^0, \text{ akkor nincs rendelés.} \end{cases}$$

Továbbá az y^0 könnyen meghatározható, mivel az y^0 az az érték, amely eleget tesz a

$$\frac{dL(y)}{dy} + c(1-\alpha) = 0$$

egyenletnek. Lineáris hiány (p) és készlettartási (h) költségek esetén az y^0 könnyen számítható:

$$\Phi(y^0) = \frac{p - c(1-\alpha)}{p+h}.$$

6.4.2 Beállítási költség nélküli többperiódusos modell módosított változata

Az előzőek egy apró változtatással egyszerű, de érdekes eredményre vezetnek. Tekintsük az n–periódusos modellt, de most tegyük fel azt, hogy az n-edik periódus végén megmaradt készletet vissza lehet küldeni az eredeti c beszerzési árért. Hasonlóan, ha hiány (túlkereslet) van az n-edik periódus végén, azt is pótolni lehet c beszerzési áron. Ez a két módosítás valósághűvé teszi a modellt, és ami legalább olyan fontos, meglehetősen egyszerű optimális készletezési politikát eredményez. Közelebbről, ugyanaz az y^0 szám jellemzi az összes periódust, és az optimális politika ugyanúgy írható le, mint az előbb:

Az i-edik periódus kezdetén, (i= 1,2,...,n),

$$\begin{cases} \text{ha } x_i < y^0, \text{ akkor a rendelés } y^0 - x_i, \\ \text{ha } x_i \geq y^0, \text{ akkor nincs rendelés,} \end{cases}$$

ahol az y^0 kielégíti a

$$\frac{dL(y)}{dy} + c(1-\alpha) = 0$$

egyenletet.

Természetesen ugyanez az eredmény igaz lesz a végtelen-periódusos modellre is. Ha a hiány (p) és a készlettartási (h) költségek lineárisak, akkor

$$\Phi(y^0) = \frac{p - c(1-\alpha)}{p+h}.$$

Mintapélda

A 2.5. szakasz második esettanulmánya egy kerékpár-nagykereskedőjéről szól, aki ezúttal bajban van egy 10 sebességes kerékpártípus hiánya miatt. A fajlagos hiányköltséget p=4125 forintra becsüli. A készlettartási költség h=275 Ft a hónap végén megmaradt kerékpáronként. Egy kerékpár beszerzési ára c=15000 Ft. Minden hónap első munkanapján lehet rendelést leadni. A kereskedő minden hónapban rendel valamilyen típusú kerékpárt, ezért úgy veszi, hogy ennek a legnépszerűbb 10 sebességes kerékpárnak a rendelési költsége nulla (nincs beállítási költség). A diszkonttényező: α=0,995. Az elmúlt időszakok tapasztalata alapján a kereslet egyenletes eloszlásúnak vehető (t=800):

$$\varphi_D \leq (\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{800}, & \text{ha } 0 \leq \xi \leq 800, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A kereskedő reméli, hogy hosszú ideig számíthat ennek a cikknek a forgalmára, tehát a végtelen-periódusos modellt alkalmazza. Mivel a hiány miatti és a tárolási költség lineáris, y^0 kielégíti a

$$\Phi(y^0)=\frac{p-c(1-\alpha)}{p+h}$$

egyenletet. Mivel a kereslet eloszlása egyenletes, a

$$\Phi(y^0)=\int_0^{y^0}\varphi_D(\xi)\,d\xi=\int_0^{y^0}\frac{1}{800}\,d\xi=\frac{y^0}{800},$$

és a

$$\Phi(y^0)=\frac{p-c(1-\alpha)}{p+h}=\frac{4125-15000\cdot(1-0{,}995)}{4125+275}=0{,}9204$$

Tehát az y^0=800·0,9204=736. Vagyis, ha az x kezdőkészlet minden hónap elején kisebb, mint 736, akkor az optimális politika szerint 736−x kerékpárt kell rendelni; egyébként nem kell rendelni. Megjegyezzük, hogy ha ezt a politikát csak véges sok periódusra alkalmazzuk, mondjuk 24 hónapra, és

(1) a 24. hónap végén megmaradt kerékpárokat 15000 forintért el lehet adni,

(2) a 24. hónap végén jelentkező kielégítetlen keresletet pótolni lehet a beszerzési árnak megfelelő összegért, 15000 forintért (például egy másik nagykereskedőtől),

akkor a leírt 736−x -es rendelési politika optimális marad.

6.4.3 Többperiódusos modell beállítási költséggel

Valósághoz közelebb álló modellt kapunk, ha figyelembe vesszük a rendelések rögzített K beállítási költségét is. Sajnos, ekkor a matematikai formalizmus meglehetősen bonyolulttá válik, és csak az optimális politika jellemzése marad viszonylag egyszerű. Speciálisan, ha a rendelési költség $K+cz$ alakú $z>0$ esetén, és nulla, ha $z=0$, továbbá, ha $L(y)$ szigorúan konvex, akkor az optimális politika ilyen formájú lesz:

az i-edik periódus kezdetén, (i= 1,2,...,n),

$$\begin{cases}\text{ha } x_i<s_i,\ \text{akkor a rendelés } S_i-x_i,\\ \text{ha } x_i\ge s_i,\ \text{akkor nincs rendelés.}\end{cases}$$

Ez a jól ismert (s,S) rendelési politika, amelyre már az egyperiódusos modellnél is utaltunk. Amint említettük, s_i és S_i kiszámolása, sajnos, igen nehéz mind véges, mind végtelen sok periódus esetén. Mindazonáltal nem lebecsülendő ennek az eredménynek az értéke. Még ha s_i és S_i nem is ismertek, fontos tudni, hogy ilyen formájú politikát kell alkalmaznunk, és nem mást.

6.4.4 A (k,Q) politika a többperiódusos modellre, beállítási költség nélkül

Az előbbi modellekben a periódusok elején bármekkora mennyiséget lehetett rendelni. Most tegyük fel, hogy a következő korlátozás létezik: minden rendelési tétel valamely Q mennyiségnek a nem negatív egész számú többszöröse.

Mint eddig, most is feltesszük, hogy minden az n periódusban a keresletek azonos eloszlású, független valószínűségi változók $\varphi_D(\xi)$ valószínűségi sűrűségfüggvénnyel. A beszerzési költség lineáris, az egy periódusra eső $L(y)$, a várható hiányköltség és készlettartási költség szigorúan konvex. Az α diszkonttényező, 0< α <1. A készletellenőrzés a periódus kezdetén történik, azaz a készletfigyelés periodikus. A rendelés valamely rögzített Q mennyiség nem negatív egész számú többszöröse. Más szóval a rendelést valamilyen állandó nagyságú csomagméret (batch) többszöröseként kell megadni. Ha a kereslet meghaladja a kínálatot, a kielégítését eltolhatják a következő szállítmány megérkezéséig. Az utolsó periódus végén megmaradt készletet a kezdeti c beszerzési áron lehet eladni. Hasonlóan, az ekkor felmerült hiányt szintén a c beszerzési áron lehet pótolni. Ezt a modellt *A. F. Veinott* vezette be, és megmutatta, hogy a modellre a (k,Q) politika optimális. A (k,Q) politikát a következőképpen lehet leírni:

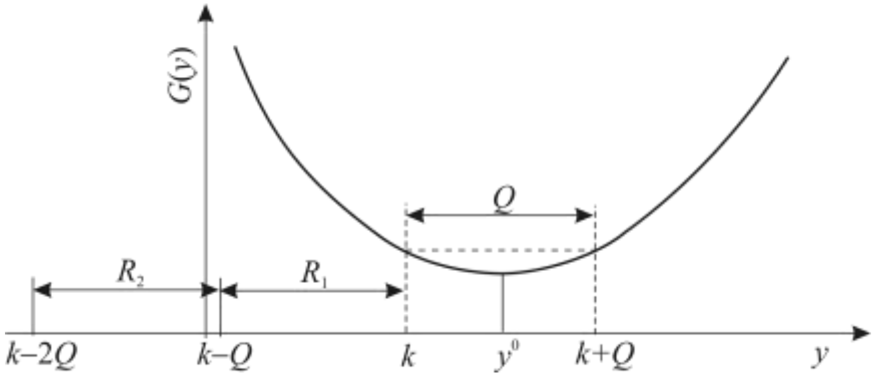
Ha a periódus elején a készlet kisebb, mint k, akkor Q-nak a legkisebb olyan többszörösét kell rendelni, amely a készletszintet legalább k-ra (esetleg nagyobbra) emeli, egyébként nem kell rendelni. A k paraméter minden periódusban egyenlő.

A k paramétert a következőképpen kell megválasztani: Legyen y^0 az az érték, amely minimalizálja a

$$G(y) = (1-\alpha)cy + L(y)$$

függvényt. A $G(y)$-nak konvexnek kell lennie, mint amilyen a 6.*3. ábrán* látható függvény. Ekkor k olyan szám, amelyre a

$$k \le y^0 \le k+Q \text{ és } G(k) = G(k+Q).$$



6.3. ábra: A $G(y)$ függvény képe.

Ha a 6.*3. ábra* szerint egy Q hosszúságú, vízszintes egyenest illesztünk a konvexgörbére úgy, hogy az egyenes két végpontja görbén fekszik, akkor y^0-tól balra a k az az abszcissza érték, ahol az egyenes ráül a görbére. Vegyük észre, hogy ha a kezdőkészlet (x) az R_1 sávban fekszik, akkor Q-t, ha az R_2-ben, akkor $2Q$-t, stb. kell rendelni.

Megjegyezzük, hogy minden periódusban (végesen sok és végtelen periódus estén is) ugyanazt a k paramétert használjuk. A végtelen esetben természetesen az utolsó periódusra nem kell kikötni semmit, sem a maradványról, sem a hiányról.

6.4.5 Folyamatos készletfigyelésű modell rögzített utánpótlási idővel

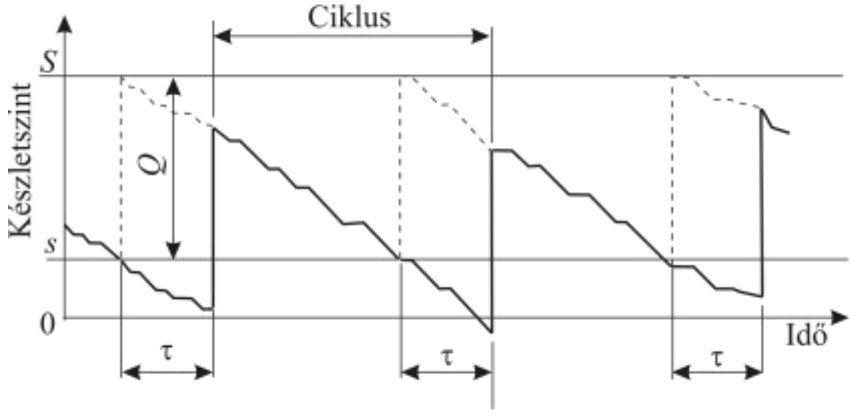
A 4. fejezetben ismertettük a determinisztikus, folyamatos készletfigyelésű modelleket, amelyeket gazdaságos tételnagyságú modelleknek is neveznek. Ezekben a modellekben azt feltételeztük, hogy keresletet folytonos, azaz a készlet egy állandó paraméter (μ) szerint egyenletesen csökken. Azért neveztük ezeket folyamatos készletfigyelésű modellnek, mert a készletnagyságot bármely pillanatban ismerjük, és a rendelést bármikor feladható, amint a készlet eléri az újrarendelési pontot. Ez a rendelési eljárás lényegesen különbözik a 6. fejezetben sztochasztikus kereslettel, valamint a periodikus készletfigyeléssel jellemezett modellekben alkalmazott eljárástól. A továbbiakban a gazdaságos tételnagyságú modellhez hasonló modellt ismerhetünk meg azzal a különbséggel, hogy a kereslet sztochasztikus, és (s, S) típusú politikát alkalmazunk [30]. A 2. fejezetben ezt a mechanizmust csillapításos működési politikának neveztük, amelynek fő jellemzője, hogy amikor a készletszint s-re csökken, akkor $Q=S-s$ mennyiséget rendelünk, azaz S-re töltjük fel a készletet.

A keresletet követő készletmodell leírása a következő. A rendelés feladása és a szállítás befejezése közötti időtartam, az utánpótlási idő rögzített τ hosszúságú (6.*4. ábra*), és a τ időtartam alatt a D kereslet folytonos valószínűségi változó $\varphi_D(\xi)$ sűrűségfüggvénnyel. Feltételezzük, hogy a közepes kereslet $\mu\,\tau$, azaz

$$E(D) = \mu\tau,$$

ahol μ az időegységre eső várható kereslet.

Amikor a készlet eléri az s szintet, akkor $Q=S-s$ mennyiséget rendelünk, és a készlet τ. idő alatt S-re töltődik fel. Ha túlkereslet miatt hiány keletkezik, akkor azt a következő feltöltésből elégítjük ki, de ezt hiányköltséggel büntetjük.



6.4. ábra: Folyamatos készletfigyelés állandó utánpótlási idővel

A készletváltozást az idő függvényében a 6*.4. ábra* mutatja. Vegyük észre, hogy ez a diagram ciklusok sorozataként is felfogható, ahol egy ciklus akkor kezdődik, amikor a rendelést leszállítják, és a következő szállítás előtt fejeződik be. Ha a kereslet a τ időszak alatt nagy, akkor negatív készletszint, azaz hiány is előfordulhat. A hiányt a következő ciklusban pótolják. A 6*.4. ábrán* a valóságos készletszintet a folytonos vonal, az elvi készletszintet, amely a szállítási idő alatt különbözik a valóságostól, a szaggatott vonal jelzi. A szaggatott vonal által jelzett készletet **készletpozíciónak** nevezik. A készletpozíciót úgy definiálhatjuk, mint a raktáron lévő mennyiség és a megrendelt mennyiség összegéből levonjuk a hiányt pótló utánrendelést. A készletpozíció használata a készletszint mérésére kiküszöböli azt a problémát, amely akkor fordulhatna elő, ha a rendelt mennyiség nem emelné a raktáron lévő készletszintet az újrarendelési pont fölé.

A modellben a következő költségeket vesszük figyelembe: a rendelési költség állandó részét (K), és a rendelt mennyiség árát (cQ) (ezeket a rendelés feladásakor kell fizetni), a készlettartási költséget, amely h Ft időegységenként és darabonként, valamint a hiányköltséget, amely p Ft, minden nem teljesített igény után. Az alkalmazott készletezési politika mellett a feladat meghatározni, milyen s szintnél mekkora Q·mennyiséget kell rendelni ahhoz, hogy az időegységre eső várható összes készletezési költség minimális legyen.

Az időegységre eső várható $C(Q,s)$ összköltség a következőkből tevődik össze: az időegységre eső $E(O_C)$ várható rendelési költség, az időegységre eső $E(H_C)$ várható készlettartási költség, és az időegységre eső $E(S_C)$ várható hiányköltség:

$$C(Q,s) = E(O_C) + E(H_C) + E(S_C)\,.$$

A költségelemek kiszámításakor feltételezzük, hogy egyszerre csak egy rendelés van folyamatban, és az s újrarendelési pont nem negatív. Az első feltevés biztosítja, hogy egy rendelés leszállítása után a rendelkezésre álló készlet mindig az újrarendelési fölé esik, mert különben egyidejűleg több rendelés is futhatna. Ha p/h elég nagy, mint általában a gyakorlatban, akkor ezek a feltevések teljesülnek.

Az időegységre eső $E(O_C)$ várható rendelési költség, egyszerűen a rendelési költség és az időegységre eső várható ciklusszám szorzata. Az egy ciklusra eső rendelési költség:

$$K+cQ.$$

Az időegységre eső **várható ciklusszám** meghatározásához tegyük fel, hogy az időegység az év. Egy ciklus akkor kezdődik, amikor egy rendelést leszállítanak, és éppen a következő szállítás előtt fejeződik be. Tegyük fel, hogy Q=500 db/ciklus, az utánpótlási idő (szállítási csúszás) 1 hónap=1/12 év, az egy hónapra eső átlagos kereslet pedig 100 db/hó, vagyis éves kereslet 1200, tehát μ=1200 db/év. Annak az időnek a várhatóértéke, amely alatt 500 egység fogy a készletből, nyilvánvalóan 500/1200=5/12 év, azaz a várható ciklushossz 5/12 év, és az egy év alatt várható ciklusszám 1200/500=12/5=2,4. Általában a várható ciklushossz Q/μ, és az időegységre eső várható ciklusszám μ/Q, ezért az

$$E(O_C)=\frac{\mu}{Q}(K+cQ).$$

Az időegységre eső $E(H_C)$ várható készlettartási költség egyenlő a h (időegységenként és darabonként várható készlettartási költség) és az egy ciklus alatti átlagos készlet szorzatával. Feltesszük, hogy egy ciklus a tárolás tekintetében jól reprezentálja az egész időhorizontot. A 6.*4. ábráról* látszik, hogy a készlet a ciklus elején Q=S−$\mu\tau$, a ciklus végén s−$\mu\tau$ (feltéve, hogy a negatív készletet elhanyagolhatjuk). Ebből adódóan az egy ciklus alatti átlagos készlet közelítőleg:

$$\frac{(S-\mu\tau)+(s-\mu\tau)}{2}=\frac{S+s-2\mu\tau}{2}=\frac{S-s+2s-2\mu\tau}{2}=\frac{Q}{2}+s-\mu\tau\,,$$

ezért az időegységre eső várható készlettartási költség

$$E(H_C)=h\left(\frac{Q}{2}+s-\mu\tau\right).$$

Az időegységre eső $E(S_C)$ várható hiányköltség az egy ciklusra eső várható hiányköltségnek és a várható ciklusszámnak a szorzata (ez utóbbiról már tudjuk, hogy μ/Q). A ciklusra eső várható hiányköltség éppen p-szerese a τ időszak alatti hiányok várható számának (hiány csak akkor fordulhat elő, ha a készletszint az újrarendelési pont (s) alá csökken), azaz

$$p\int_s^\infty(\xi-s)\varphi_D(\xi)\;d\xi\,,$$

így az

$$E(S_C)=\left[\frac{\mu}{Q}\left(p\int_s^\infty(\xi-s)\varphi_D(\xi)\;d\xi\right)\right].$$

Összegezve a $E(O_C)$, $E(H_C)$ és az $E(S_C)$ értékeit, a

$$C(Q,s)=\frac{\mu K}{Q}+\mu c+h\left(\frac{Q}{2}+s-\mu\tau\right)+\frac{p\mu}{Q}\int_s^\infty(\xi-s)\varphi_D(\xi)\;d\xi$$

Mivel két döntési változó van (Q és s), az optimális értékeket (Q*-ot és s*-ot) a $C(Q,s)$ két változója szerinti minimalizálással kapjuk meg, azaz a két parciális deriváltat nullává tesszük:

$$\frac{\partial C(Q,s)}{\partial Q}=-\frac{\mu K}{Q^2}+\frac{h}{2}-\frac{p\mu\left[\int_s^\infty(\xi-s)\varphi_D(\xi)\;d\xi\right]}{Q^2}=0$$

$$\frac{\partial C(Q,s)}{\partial s}=h-\frac{p\mu\left[\int_s^\infty(\xi-s)\varphi_D(\xi)\;d\xi\right]}{Q}=0$$

Ezekből az egyenletekből:

(1)
$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu\left[K + p\int\limits_{s^*}^{\infty}(\xi - s^*)\varphi_D(\xi)\, d\xi\right]}{h}}$$

(2)
$$\int\limits_{s^*}^{\infty}\varphi_D(\xi)\, d\xi = \frac{hQ^*}{p\mu}.$$

Vegyük észre, hogy Q és s optimális értékei függet1enek a tételek rendelési egységárától, c-től.

Sajnos, explicit formában nem lehet a Q^* és s^* gyököket kiszámítani, meghatározásuk a következő iterációs e1járással lehetséges:

1. Kezdeti lépésként tegyük fel, hogy p nulla és számítsuk ki Q^*-ot az (1)-ből. Vegyük észre, hogy így éppen a determinisztikus gazdaságos tételnagyságú modell (amelyben a hiány nincs megengedve) optimális rendelési tételnagyságával azonos értéket kapunk.

2. Az első lépésben számított Q^*-gal oldjuk meg a (2) egyenletet s^*-ra.

3. A második lépésben kapott s^*-gal számítsuk ki újra a Q^*-t (1)-ből.

4. Ismételjük a 2. és a 3. lépést mindaddig, amíg Q^*, illetve s^* egymás utáni értékei elég közel nem esnek egymáshoz.

Az eljárás gyorsan konvergál a gyökök egzakt értékéhez, ezért a gyakorlatban általában elég néhány lépést végigszámolni.

Minthogy zártalakban az egyenleteket nem lehet megoldani, célszerű néhány speciális keresleteloszlást megvizsgálni. Legyen a sűrűségfüggvény **egyenletes eloszlású** 0 és t között, azaz

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}, & \text{ha } 0 \le \xi \le t, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mivel az

$$\int\limits_{s}^{\infty}\varphi_D(\xi)\, d\xi = 1 - \frac{s}{t},$$

akkor a (2) egyenlet

$$1 - \frac{s^*}{t} = \frac{hQ^*}{p\mu},$$

amelyből az

$$s^* = \frac{t(p\mu - hQ^*)}{p\mu} = t\left(1 - \frac{hQ^*}{p\mu}\right).$$

Továbbá, az (1) egyenletben az

$$\int\limits_{s}^{\infty}(\xi - s)\varphi_D(\xi)\, d\xi = \frac{t}{2} + \frac{s^2}{2t} - s,$$

amit helyettesítve a

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K + \mu pt + \mu ps^{*2}}{h(t - 2\mu ps^*)}} = \sqrt{\frac{\mu}{h}\frac{2K + pt + ps^{*2}}{t - 2ps^*}}.$$

Végül, ha a kereslet sűrűségfüggvénye **exponenciális eloszlású**, azaz ha

$$\int_s^\infty \varphi_D(\xi)\ d\xi = e^{-s/\mu\tau},\ \text{ha}\ \xi>0,$$

akkor a (2) egyenlet arra vezet, hogy az

$$\int_s^\infty \varphi_D(\xi)\ d\xi = e^{-s/\mu\tau},$$

így tehát az

$$s^* = -\mu\tau \ln \frac{hQ^*}{p\mu}.$$

Továbbá az (1) egyenletből az

$$\int_s^\infty (\xi - s)\varphi_D(\xi)\ d\xi = \mu\tau e^{-s/\mu\tau},$$

és a

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K + 2\mu^2 \tau p e^{-s^*/\mu\tau}}{h}} = \sqrt{\frac{2\mu}{h}(K + \mu\tau p e^{-s^*/\mu\tau})}.$$

Mintapélda

Tekintsük a 4. fejezetben tárgyalt ekevas-gyártási példát, amelyben a beállítási költség, K=120000 Ft, az ekevas ára, c=1000 Ft/db, a készlettartási költség, h=30 Ft/hó ekevasanként, a felhasználás, μ=800 db/hó volt. Most azt feltételezzük, hogy a havi kereslet véletlenszerű, eloszlása egyenletes t=0 és 1600 között, a kereslet várható értéke, μ=800 db/hó, az utánpótlási idő pedig τ=1 hónap. A ki nem elégített igény (hiány) büntetése p=200 Ft ekevasanként. Határozzuk meg az optimális rendelési tételnagyságot és az újrarendelési ponthoz tartozó készletszintet.

Az előzőleg kapott eredményeket felhasználva, először az 1. iterációs lépésben a p-t nullának vesszük, akkor a következő Q^* értéket kapjuk:

$$Q^* = \sqrt{\frac{\mu}{h}\frac{2K + pt + ps^{*2}}{t - 2ps^*}} = \sqrt{\frac{2\cdot 800\cdot 120000}{30}} = 2530\ \text{db}.$$

Ezzel a Q^* értékkel kiszámítjuk a 2. lépésben az s^*-ot:

$$s^* = t\left(1 - \frac{hQ^*}{p\mu}\right) = 1600\left(1 - \frac{30\cdot 2530}{200\cdot 800}\right) = 841\,\text{db}.$$

A 3. lépésben, az s^* értéket felhasználva, ismét a Q^*-t számítjuk:

$$Q^* = \sqrt{\frac{800}{30}(2\cdot 120000 + 200\cdot 1600 + 200\cdot 841^2/1600 - 2\cdot 200\cdot 841)} = 2885\,\text{db}.$$

Ezután megismételjük: a 2. lépést, és azt kapjuk, hogy

$$s^* = t\left(1 - \frac{hQ^*}{p\mu}\right) = 1600\left(1 - \frac{30\cdot 2885}{200\cdot 800}\right) = 735\ \text{db}.$$

A további öt iterációs lépés: (Q^*=2983, s^*=705), (Q^*=3011, s^*=697), (Q^*=3020, s^*=694), (Q^*=3023, s^*=693) és (Q^*=3024, s^*=693) eredményekre vezet. Végül is a közelítő optimális rendelési tételnagyság, Q^*=3024, és az újrarendelési pont, s^*=693.

Módosítsuk most úgy a példát, hogy a kereslet legyen exponenciális eloszlású, μ=800 várható értékkel. Az iteráció 1. lépése most is Q^*=2530-at eredményez, amiből a második lépésben az adódik, hogy

$$s^* = -\mu\lambda \ln \frac{hQ^*}{p\mu} = -800 \cdot 1 \cdot \ln \frac{30 \cdot 2530}{200 \cdot 800} = 597\,\mathrm{db}$$

Ezzel az s^*-gal az iteráció 2. lépésében azt kapjuk, hogy a

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu}{h}(K + \mu\lambda p e^{-s^*/\mu\tau})} = \sqrt{\frac{2 \cdot 800}{30}(120000 + 800 \cdot 1 \cdot 200 \cdot e^{-597/8001})} = 3232\,\mathrm{db}.$$

A második és a harmadik lépést ismételve, néhány iteráció után a megoldás: az optimális rendelési tételnagyság, Q^*=3453 db, és az újrarendelési pont, s^*=348 db.

6.4.6 Többtermékes készletezési modellek

Az előzőekben olyan készletezési modellekkel foglalkoztunk, amelyek egy termékféleségre vonatkoztak. A valóságban azonban a legtöbb készletezési rendszerben sokféle termék van egyidejűleg jelen, amelyek különféleképpen hatnak egymásra, például a közös tárolási és költségvetési korlátozásokon, valamint a termékhelyettesítésen keresztül. Az egytermékes modellek eredményei azonban igen fontosak, mert betekintést nyújtanak a többtermékes problémák megoldásaiba, és sokszor még az is lehetséges, hogy egy N-termékes feladatot felbontsunk N darab egytermékes modellek együttesére, anélkül, hogy az optimalitás csorbát szenvedne. (Ez akkor lehetséges, ha a termékekre vonatkozó kereslet és a költségek függetlenek egymástól.) Léteznek eredmények olyan többtermékes modellekre is, amelyek nem bonthatók így fel. Például egyes modellekben egyetlen termék több helyen történő tárolása úgy tekinthető, mint különböző termékek tárolása [30].

Van olyan többtermékes modell is, amely a többperiódusos, beállítási költségnélküli egytermékes modellel analóg. Ez a többtermékes modell N terméket és m különbözőfajta keresletet tartalmaz. A keresletfajták egy periódusban az időbeli felmerülésükkel, termékigényükkel, elfogadható helyettesítésükkel stb. jellemezhetők. A költségekre tett szokásos feltevésekkel az optimális politikát minden egyes termékre meghatározott tételszám jellemzi: ha x_{ik} az i-dik periódusban a k-dik termékből meglévő készlet, akkor y_{ik}-ig kell rendelni, ha $x_{ik}<y_{ik}$ egyébként nem kell rendelni (feltéve, hogy kezdetben $x_{1k}\leq y_{1k}$ minden k-ra).

E modellnek sok hasznos alkalmazása ismert. Például tegyük fel, hogy két terméket készletezünk, és az l-es termék helyettesítheti a 2-est, valamint minden nem teljesített igény elvész. Ha azt a készletezési politikát választjuk, hogy a 2-es termék kielégítetlen igényét az l-es termékkel elégítjük ki (ha ez lehetséges), megkaphatjuk az optimális·politika jellemző számait. Ezt a példát úgy is felfoghatjuk, mint egy termék kétlépcsős készletezési modelljét, ahol a 2. lépcsőn ki nem elégíthető igényt az első lépcsőre küldik át. Egy másik alkalmazás két olyan termékre vonatkozik, amelyek bármelyike helyettesítheti a másikat. A ki nem elégített igény itt is elvész. A készletezési politika szerint bármelyik termék iránti kielégítetlen igényt a másikból elégítjük ki (ha ez lehetséges). Ezt a példát úgy is felfoghatjuk, mint egy termék két helyen történő tárolását, ahol a periódus végén az egyik helyen levő feleslegből (ha van) elégítjük ki a másik helyen levő kielégítetlen igényt (ha van).

A többtermékes készletezési modellek egy másik változata is ismert. Ebben a 2. terméket azért tárolják, hogy az 1. termék előállítását biztosítsák. Például, ha az 1. termék gépkocsi, a 2. lehet a futómű vagy a munkaerő. Az optimális politika megadja az 1. és a 2. termékből az i-dik periódusban termelendő mennyiségeket, amely bizonyos feltételek mellett minimalizálja a költségeket.

6.5. Összefoglalás

A bemutatott készletezési modellek meglehetősen egyszerűek, de jól mutatják az általános készletezési modellek természetét. Továbbá, jól visszatükrözik sok valóságos készletezési probléma tulajdonságait, ezért hasznosak a gyakorlatban is. Például a gazdaságos tételnagyságú formulákat igen széles körben alkalmazzák, bár néha olyan módosítással, hogy sztochasztikus keresletet is figyelembe lehessen venni. A sztochasztikus keresletet is megengedő több-periódusos modellek igen fontosak a követendő politikák jellemzése szempontjából, például tudjuk, hogy ez a politika (*s*, *S*) típusú, noha az *s* és a *S* optimális értékeinek a kiszámítása nehézségekbe ütközhet. Mindazonáltal sok készletezési problémában kikerülhetetlen bonyodalmakkal találkozunk, ilyen például a termékek egymásra hatása. Ismeretes néhány összetett modell az ilyen problémák tárgyalására, de itt még széles a szakadék az elmélet és a gyakorlati alkalmazás között. A készlétezési adatok számítógépes feldolgozása, a tudományos készletmenedzsment alkalmazásával párhuzamosan folyamatosan fejlődik.

6.6. Feladatok

1. feladat

Egy újságárus az újságot 60 Ft-ért szerzi be, és 75 Ft-ért adja el. A hiány miatti költség 75 Ft/db újságonként (mert a hiány pótolása kiskereskedelmi áron történik). A készlettartási költség 0,3 Ft/db. A kereslet eloszlása egyenletes 200 és 300 darab között. Határozzuk meg a beszerzendő újságok optimális számát.

1. feladat megoldása

A feladat az egyperiódusos beállítási költség nélküli sztochasztikus modellel írható le. A példában *c*=60, *p*=75, *h*=0,3, és a kereslet eloszlása egyenletes, amelynek sűrűségfüggvénye:

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } a \le \xi \le b \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad ,$$

mivel *a*=200 és *b*=300, a

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{100}, & \text{ha } 200 \le \xi \le 300 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye, ha $a<\xi<b$

$$\Phi(y^0) = \int_a^{y^0} \varphi_D(\xi) d\xi = \int_{200}^{y^0} \frac{1}{100} d\xi = \left[\frac{\xi}{100}\right]_{200}^{y^0} = \frac{y^0}{100} - 2.$$

Az optimális rendelési tételnagyság (y^0) az az érték, amely kielégíti a

$$\Phi(y^0) = \frac{p-c}{p+h}$$

függvényt. Helyettesítve a *p*, *c* és *h* költségeket, a

$$\Phi(y^0) = \frac{75-60}{75+0,3} = 0,1992.$$

Az eloszlásfüggvény értékét felhasználva, az

$$\frac{y^0}{100} - 2 = 0{,}1992,$$

amelyből az optimális rendelés:

$$y^0 = 100 \cdot (0{,}1992 + 2) = 219{,}92 \,\text{db.}$$

2. feladat

Tegyük fel, hogy egy repülőgép-pótalkatrész iránti D kereslet exponenciális eloszlású, λ=50 várható értékkel, a kereslet sűrűségfüggvénye, így

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\xi/\lambda}, & \text{ha } \xi \ge 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

A repülőgép gyártása egy éven belül megszűnik, ezért célszerű most legyártani az alkatrészek szükséges mennyiséget. A termelési költség most darabonként 300000 Ft (azaz c=300000), de 3000000 Ft lesz a gyártás leállítása után (azaz p=3000000). A készlettartási költség, amelyet a periódus végén megmaradt alkatrészek után kell fizetni, darabonként 90000 Ft. Határozzuk meg a legyártandó alkatrészek számát.

2. feladat megoldása

A feladat modellezésére az egyperiódusos beállítási költség nélküli sztochasztikus modell használható. A kereslet sűrűségfüggvénye:

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{50} e^{-\xi/50}, & \text{ha } \xi \ge 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Mivel a kereslet exponenciális eloszlású, az eloszlásfüggvény:

$$\Phi(y^0) = \int_0^{y^0} \varphi_D(\xi) d\xi = \int_0^{y^0} \frac{1}{50} e^{-\xi/50} d\xi = = 1 - e^{-y^0/50}$$

Az optimális rendelési tételnagyság (y^0) az az érték, amely kielégíti a

$$\Phi(y^0) = \frac{p-c}{p+h}$$

függvényt. Helyettesítve a p, c és h költségeket, a

$$\Phi(y^0) = \frac{3000000 - 300000}{3000000 + 90000} = 0{,}8738.$$

Az eloszlásfüggvény értékét felhasználva, az

$$1 - e^{-y^0/50} = 0{,}8738,$$

amelyből az optimális rendelés:

$$e^{-y^0/50} = 1 - 0{,}8738 = 0{,}1262,$$

$$e^{y^0/50} = \frac{1}{0{,}1262},$$

$$y^0 = 50 \cdot \ln\left(\frac{1}{0{,}1262}\right) = 103{,}49 \text{ db.}$$

3. feladat

Egy pékség naponta lát el élelmiszerüzleteket kenyérrel. A kenyér ára darabonként 120 Ft. A társaság a friss (az eladás napján sütött) kenyeret 180 Ft-ért adja az üzleteknek. Az el nem adott kenyeret visszaszállítják a társaságnak. A társaságnak van egy részlege, amely egy vagy több napnál régebbi kenyeret árusít darabonként 90 Ft-ért. Ez az összeg egyben a készlettartási költséget is jelenti. A ki nem elégített igény miatti költség becsült értéke darabonként 120 Ft. A kereslet egyenletes eloszlású 1000 és 2000 darab között, kérdés, mennyi a naponta sütendő kenyerek optimális száma?

4. feladat

Egy diák, aki operációkutatással foglalkozik, a saját döntéseit szeretné optimalizálni. Most is egy ilyen döntést vizsgál, nevezetesen azt, mennyi pénzt vegyen fel a bankbetétjéből, hogy utazási csekket vásároljon egy nyári amerikai utazáshoz.

Már 360000 Ft-ért vett utazási csekket, de lehet, hogy ez nem lesz elég. A következő táblázat mutatja, hogyan becsülte meg a költségeinek valószínűségi eloszlását:

Költség (ezer Ft)	300	330	360	390	420	450	480	510
Valószínűség	0,05	0,10	0,15	0,25	0,20	0,10	0,10	0,05

Ha történetesen kevesebbet visz, mint kellene, akkor minden 30000 Ft hiány 1 héttel megrövidítené amerikai útját, minthogy minden ott töltött hétre 45000 Ft-ot szánt, az elvesztett hetek 15000 Ft veszteséget jelentenének neki. Viszont minden 30000 Ft után az utazási csekk 300 forintjába kerül. Továbbá minden egyes ilyen az utazás után megmaradt csekk a kamatok (amelyet a bankban levő pénze hozna) elmaradása miatt 600 Ft veszteséget jelent, tehát a diák nem akar túl sok utazási csekket váltani.

Határozzuk meg ezekből az adatokból az optimális döntést arra vonatkozóan, még hány 30000 forintos utazási csekket kell beszereznie.

7. SZTOCHASZTIKUS MODELLEK VIZSGÁLATA SZIMULÁCIÓVAL

Ebben a fejezetben olyan készletezési problémákkal foglalkozunk, ahol a kereslet és az utánpótlási idő egyaránt valószínűségi változó ismert valószínűségi eloszlással.

Az ellátási-lánc rendszer (röviden ellátási-lánc) a termeléstől az értékesítésig terjedő hálózatnak tekinthető, amelyet az entitások áramlása köt össze. E hálózat is csomópontokból és élekből áll. A csomópontok képviselik a szállítókat, gyártókat, elosztókat, nagy- és kiskereskedőket, illetve az ezek termékeit tároló létesítményeket. A csomópontokat összekapcsoló élek az utak, amelyeken árucikkeket szállítanak különféle módon, (közúton, vasúton, légifolyosókon, és így tovább).

A probléma tanulmányozásakor a modellezők jellemzően a következő kulcsfontosságú kimeneti mutatókra koncentrálnak, amelyek összefüggenek a pénzügyi mutatókkal:

Készletezési költségek.
Átlagos igényszint.
Átlagos készletszint és az utánrendelés szintje.
A vevőszolgálat színvonala (kielégített vevőigények aránya, vagy kiszolgálási arány).
Az elveszett eladások aránya és mennyisége.

A jó működés érdekében, az ellátási-láncok irányításához ún. készletezési politikákat alkalmaznak (lásd a *2. fejezetben*), amelyekkel a készletek pótlására szolgáló újrarendeléseket szabályozzák.

A **rendelési időköz** attól függ, hogy a rendeléseket rögzített *t* időközönként kell feladni, vagy a készletutánpótlásról akkor döntünk, amikor a készletszint valamilyen *s* **minimális készletszintre** (újrarendelési pontra) csökken. A **rendelési tétel nagysága** lehet rögzített *Q*, vagy a rendelési tétel akkora mennyiségre szól, hogy a beérkezés után a készlet egy előre meghatározott *S* **maximális készletszintet** ér el. A készletgazdálkodási mechanizmusok ezek kombinációi, így beszélhetünk (*t,Q*), (*t,S*), (*s,Q*) és (*s,S*) mechanizmusokról. Az utóbbi két készletezési mechanizmust a készletszint átlépés elve vezérli. A maximális készletszintnek nevezzük azt, amelyet alulról érünk el, vagy lépünk át, és minimális készletszintnek nevezzük azt, amelyet felülről érünk el, vagy lépünk át. Az iparban a leggyakrabban a következő tipikus készletezési politikákat használják:

(*s, S*) **készletezési politika**: A készlet célszintje (a maximális készlet) *S*, és az újrarendelési pont *s*. A készletfeltöltést (az újrarendelést) azonnal felfüggesztjük, mihelyt a készletszint eléri vagy átlépi a célszintet. A felfüggesztés addig tart, amíg a készlet az újrarendelési pontig vagy az alá nem csökken. Ekkor a készletfeltöltés folytatódik. Például, amikor a beszállító egy termelőüzem, akkor a feltöltés felfüggesztése a termelés leállítását, a feltöltés folytatása pedig a termelés indítását jelenti.

Rendelés *S*-ig készletezési politika: Ez az (*s, S*) készletezési politika speciális esete, ahol $s = S \geq 1$. Más szóval a feltöltést folytatódik, mihelyt a készletszint felülről éri el a célszintet (*S*), vagy az alá csökken.

(*s, Q*) **készletezési politika**: *Q* a rendelési tételnagyság és *s* az újrarendelési pont. Amikor a készletszint az újrarendelési pontra (*s*), vagy az alá csökken, akkor újrarendeléssel a készletszintet *Q* mennyiséggel növeljük.

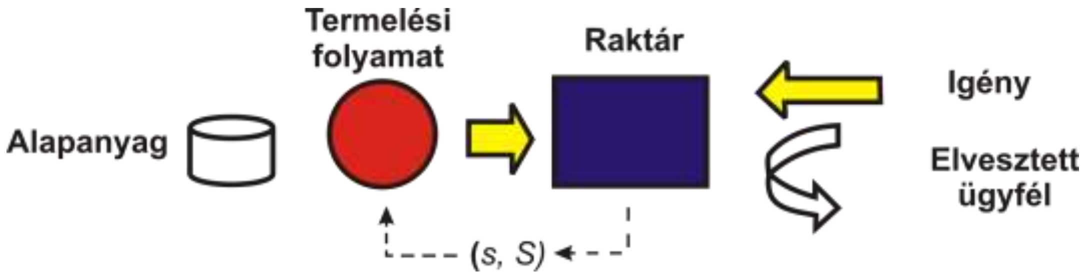
Jellemzően, amikor egy megrendelést feladnak a beszállító felé, akkor a rendelés beérkezéséig időbeni késés jelentkezik, ez az **utánpótlási idő**. Az utánpótlási idő alatti igény annak az igénynek a nagysága, ami gyakorlatilag az utánpótlási időtartama alatt keletkezik, ami jellemzően véletlenszerű, és ami miatt hiány is keletkezhet. Következésképpen, hogy csillapítsák a bizonytalan utánpótlási idő alatti igény hatását, a vállalatok **biztonsági készletet** képeznek, ami egy extrakészlet, a megfelelő vevőszolgálat-színvonal fenntartása érdekében. A vállalatok úgy is határozhatnak, hogy az új megrendeléseket még az előző megrendelés érkezése előtt feladják. A **készletpozíció** a készletszint plusz a megrendelt készlet, mínusz az utánrendelés. Rendelési döntések sokszor a készletpozíción alapulnak és nem a készletszinteken.

7.1. Egytermékes termelési és készletezési rendszer (7.1. modell)

Ebben az alfejezetben egy termelési-készletezési rendszer általános modelljét mutatjuk be, amely egy olyan termelőlétesítményből áll, ami időnként meghibásodik, és amely egy raktárt lát el egy fajta termékkel. Ez az általános modell azt illusztrálja, hogy a készletezési-politika hogyan szabályozza a termék áramlását termelés és raktár között.

7.1.1 A probléma ismertetése

Tekintsünk egy termelési-készletezési rendszert, ahol egyetlen termék gyártása folyik. A rendszer vázlatos működése a *7.1. ábrán* látható. A termelési folyamat nyersanyag forrása az alapanyag tároló, és a termelés eredményeként keletkező késztermékeket (egységeket) a raktárban tárolják. Az ügyfelek (vevők) termékrendeléseikkel (igényeikkel) érkeznek a raktárhoz, és ha egy igény nem teljesen elégíthető ki a raktári készletből, akkor a kielégítetlen igény elveszik.



7.1. ábra: Egy általános termelési-készletezési rendszer

A rendszer működésével kapcsolatban a következő feltevéseket tesszük:

Az alapanyag tárolóban mindig van elegendő nyersanyag, ezért a termelési folyamatban nem jelentkezik hiány.

A termelés 5 termékegységet tartalmazó tételekben (lot-okban) történik, és a tételeket a raktárban helyezik el. Egy tétel (lot) gyártásának a műveleti ideje egyenletes eloszlású, 10 és 20 perc között.

A termelési eljárásban véletlenszerű meghibásodások tapasztalhatók, amelyek bármilyen időpontban jelentkezhetnek A meghibásodások közötti idők exponenciális eloszlásúak 200 perces átlaggal, a javítási időközök normális eloszlásúak 70 perces átlaggal és 30 perces szórással.

A raktárban (s, S) készletezési politikát alkalmaznak, az újrarendelési pont s = 150 egység, a célszint S = 500 egység.

Az ügyfelek (vevők) érkezési időközei egyenletes eloszlásúak 3 és 7 óra között, és az ügyfelek igényei ugyancsak egyenletes eloszlást mutatnak 50 és 100 egység között. A programozás egyszerűsítése érdekében, az igényelt mennyiség bármilyen valós szám lehet az adott tartományban, amit az ANINT(UNIF(50, 100)) **Arena** függvénnyel egész számmá konvertálunk, így az igényelt mennyiségek egész számúak lesznek. Az ügyfél érkezéskor a készletet ellenőrizzük, és ha elegendő készlet van a raktárban, akkor az igényt azonnal kielégítjük. Különben csak részlegesen, és a kielégítetlen igény elveszik.

A nyitókészlet 250, ezért a termelési folyamat a szimuláció kezdetén tétlen.

A rendelési költség két komponense a konstans beállítási költség (független a rendelt mennyiségtől) K=10000 Ft/rendelés és a darabköltség c=100 Ft/db. A fajlagos készlettartási költség h=2 Ft/db/óra és a fajlagos hiányköltség p=8 Ft/db/óra

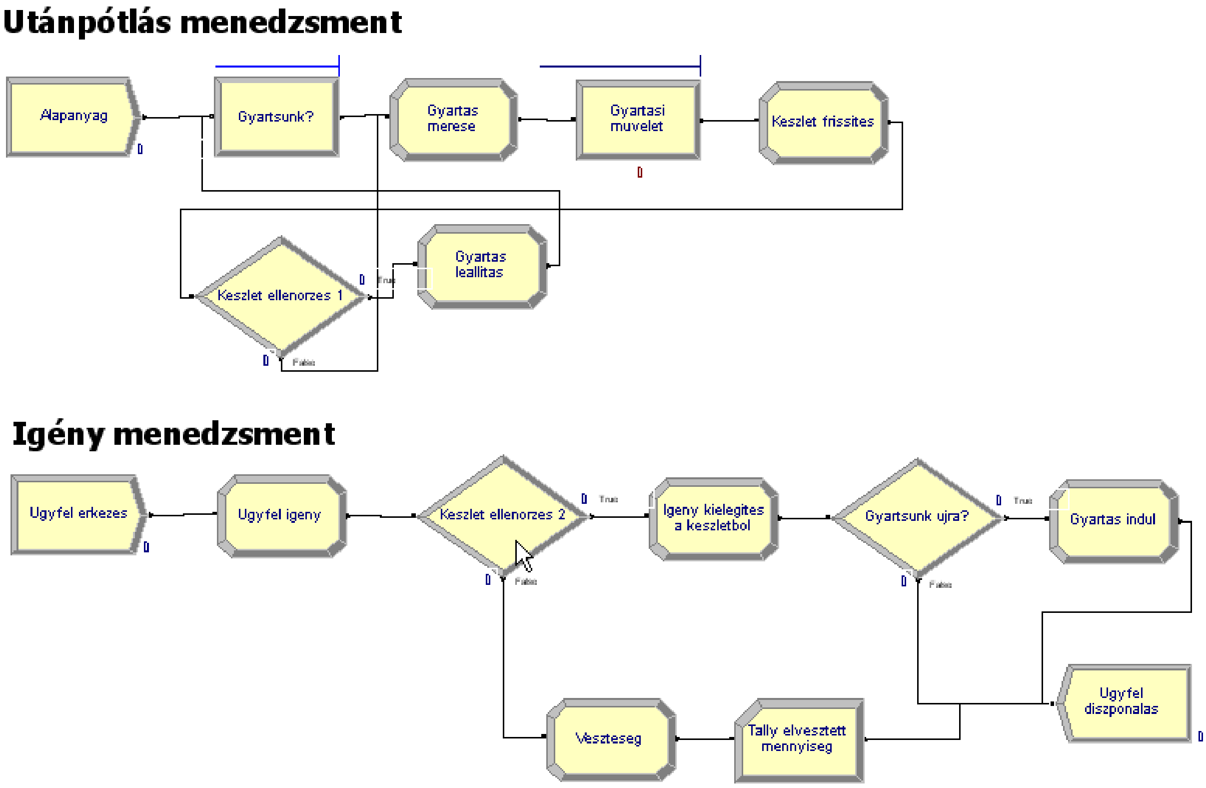
A modellezés eredményeként, következő kimenő paramétereket szeretnénk megismerni:

1. A termelési folyamat kihasználtsága.
2. A termelőeszköz javítási idejének valószínűsége.
3. Az átlagos készletszint a raktárban.
4. Az átlagos igényszint.
5. A nem teljes mértékben kielégített ügyfelek aránya.
6. A nem teljes mértékben kielégített ügyfelekre vonatkoztatott átlagos elvesztett igény.
7. Az egységnyi időre eső átlagos készletezési költség Ft/órában

Az előzőleg részletesen leírt termelési-készletezési probléma lehet, hogy bonyolultnak tűnik, ennek ellenére csak a valóságos ellátási rendszerek durva egyszerűsítésének tekinthető. Azonban az alkalmazott elvek, módszerek kiterjeszthetők olyan valóságos rendszerekre, amelyekben gyakran egyidejűleg több terméket kell kezelni, vagy összetett, többlépcsős termelési/elosztási rendszerekre, amelyekben az egymáshoz kapcsolódó és egymástól függő lépcsőket együttesen kell modellezni.

7.1.2 A probléma Arena modellje

A probléma leírása és tanulmányozása után építettük fel *7.2. ábrán* látható egytermékes termelési-elosztási rendszer **Arena** modelljét.



7.2. ábra: Az egytermékes termelési-készletezési rendszer **Arena** modellje

A modell két szegmensből áll:

Utánpótlás menedzsment szegmens a termékegység entitásokat követi nyomon. Az entitás definíciókat táblázatnézetében a **Basic Process** panelen elérhető **Entity** adatmodulban vizsgálhatjuk és szerkeszthetjük. A modellben a termelési folyamatot a **Process** modul realizálja, amelyben az *Action* mező típusa *Seize Delay Release*. A *Seize* az erőforrást („*Gyartoeszkoz”*) a várakozó „*Anyag Entitas*”-hoz rendeli, amikor az erőforrás felszabadul. A *Delay* szimulálja a gyártást, amelynek a tételnagysága (batch mérete) öt. A gyártás után a *Release* felszabadítja az erőforrást. A „*Keszlet frissites*” nevű **Assign** modulban a pillanatnyi készletet a tételnagysággal (öttel) növeljük, majd a „*Keszlet ellenorzes 1*” nevű **Decide** modulban döntünk a gyártás folytatásáról vagy leállításáról a készletszint nagyságától függően. Ha a készlet nagyobb vagy egyenlő, minta a célszint (S = 500 egység), akkor a gyártást leállítjuk, különben a gyártás folytatódik. A gyártás leállítása addig tart, amíg a készletszint az újrarendelési pontra (s = 150) vagy az alá nem csökken. A vezérléshez a *Gyartas* nevű, 0 és 1 értékű döntési változót használjuk, amelynek az értékét a „*Gyartas leallitas*” nevű **Assign** modulban változtatjuk meg. A változó értékét a „*Gyartsunk?*” nevű **Hold** modulban vizsgáljuk, ha a változó értéke 0, akkor a gyártás áll, és akkor indul újra, amikor a változó értéke 1-re változik. A modellben azt feltételezzük, hogy a nyersanyag korlátlan mennyiségben mindig rendelkezésre áll. A „*Gyartas merese*” nevű **Assign** modulban számláljuk az adott pillanatig legyártott mennyiséget.

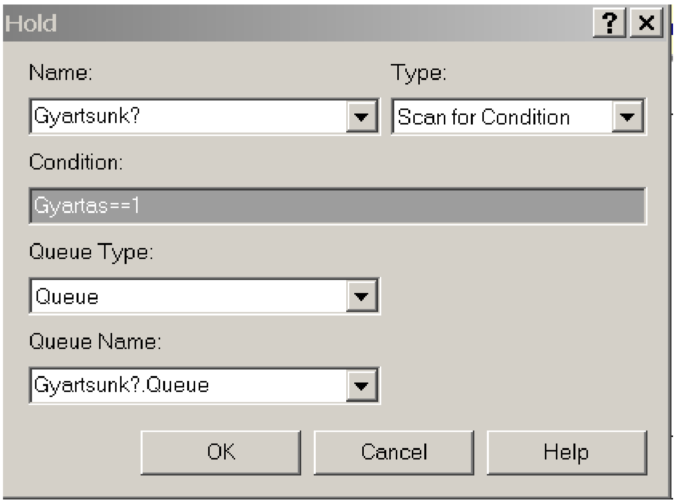
Igénymenedzsment szegmens generálja az ügyfeleket és az igényeiket, valamint változtatja a készletszintet az igények kielégítését követően. A „*Gyartsunk ujra?*” nevű **Decide** modulban ellenőrizzük a készletszintet, és ha a készletszint az újrarendelési pontig (s = 150), vagy az alá csökken, akkor a gyártást újraindítjuk. A ki nem elégített részigényeket, és a részben kielégített ügyfelek számát a „*Veszteseg*” nevű **Assign** modulban frissítjük.

Az input és output adatok mindkét szegmensben vegyesen fordulnak elő. Logikailag a szegmensek input/output-modulokból állnak (változók, erőforrások, statisztika, stb.), beállítják az inputváltozók kezdeti értékeit, statisztikát számolnak, és összefoglaló jelentéseket hoznak létre. A következő részben bemutatjuk a *7.2. ábrán* látható modell kicsit részletesebb vizsgálatát.

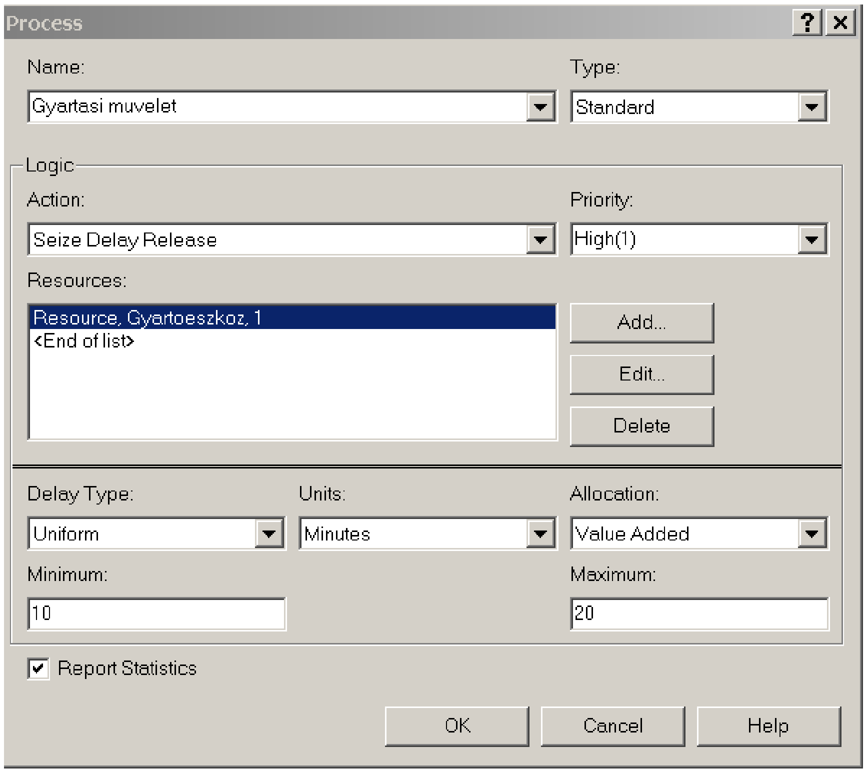
7.1.3 Az utánpótlás menedzsment szegmens

A modell logika felépítését az utánpótlás menedzsment szegmenssel kezdjük. Az ”*Alapanyag*” nevű **Create** modulban létrehozzunk egyetlen „*Anyag Entitas*” nevű kontrol entitást, amely a gyártás (csomagolás) tételenkénti (batching) működését vezérli. A **Hold** modul (amelynek a neve egy sejtelmes kérdés „*Gyartsunk?*”) arra szolgál, hogy indítsa vagy leállítsa a gyártást oly módon, hogy a **Process** modulba igyekvő kontrollentitást megállítja, vagy tovább engedi (*7.3. ábra*). Az **Advanced Process** panelen található **Process** modul (erőforrás lekötés, gyártás, erőforrás felszabadítás) valósítja meg a termelést, amelynek a műveleti idejét, Unif(10, 20) percben adjuk meg. A műveleti idő a korábbi leírás alapján 5 egység csomagolására vonatkozik.

Az „*Alapanyag*” nevű **Create** modulban egyszerűen a 0 időpontban egyetlen entitást („*Anyag Entitas*”) hozunk létre, ezért a *Max Arrivals* mezőbe 1-et írunk, és az érkezési időköz irreleváns. A **Create** modul ezek után inaktívvá válik. Az „*Anyag Entitas*” ezután a modellben kering, és minden kör megfelel egy termelési ciklusnak. Az entitás először a belép a **Hold** modulba („*Gyartsunk?*”), ahol ellenőrizzük a *Gyartas* nevű, 0 és 1 értékű (0=Off és 1=On), döntési változót, amelynek a kezdeti értéke 0. A **Hold** modul egy olyan kapu, amely az entitást a logikai feltétel (*Condition*) teljesülésétől függően (*7.3. ábra*) tovább engedi, vagy blokkolja. Ha a *Gyartas*==1 igaz, és a gyártás folytatódhat, különben az entitás várakozik, és a gyártás szünetel. Miután az entitás felszabadul a „*Gyartas merese*” nevű **Assign** modulba lép, amelyben a „*Gyartott mennyiseg*” nevű változó értékét a „*Batch meret*”-tel növeljük.



7.3. ábra: A „*Gyartsunk?*”nevű **Hold** modul dialógusablaka



7.4. ábra: A „*Gyartasi muvelet*” nevű **Process** modul dialógusablaka

Ezt követően a tovább haladó kontrollentitás belép a **Process** modul sorába, és az erőforrás foglaltságától függően várakozik, vagy azonnal elkezdődik a gyártás. A „*Gyartasi muvelet*” nevű **Process** modul dialógusablakát *7.4. ábra* mutatja. A modul paramétereit a *7.1. táblázat* foglalja össze. A modulhoz tartozó „*Gyartasi muvelet.Queue*” nevű sorban a kontrollentitás arra várakozik, hogy a „*Gyartoeszkoz*” erőforrás egy egysége szabaddá váljon és elkezdődjék a gyártás. Az erőforrás nevét „*Gyartoeszkoz*” és mennyiségét (kapacitását) a *Resource* mező jobboldalán elhelyezett *Add* gombra kattintva adhatjuk meg. Amikor az erőforrás elérhető, akkor azt a legmagasabb prioritású entitás fogja lekötni (*Priority High*(1)) a *Seize* hatására, és amíg a művelet folyik (*Delay*), azaz az erőforrás foglalt, a modul más entitást nem enged belépni. A gyártási művelet után a *Release* felszabadítja az erőforrás egy egységét. Megjegyezzük, egy entitás egyidejűleg akár több elérhető erőforrást is leköthet, és fordítva egy entitás egyidejűleg több lekötött erőforrást is felszabadíthat.

7.1. táblázat

A „*Gyartasi muvelet*” nevű **Process** modul paraméterei

Name Action	Gyartasi muvelet Seize Delay Release
Resource Type Resource Name Quantity	 Resource Gyartoeszkoz 1
Delay Type Units Minimum Maximum	Uniform Minutes 10 20

Resource - Basic Process

	Name	Type	Capacity	Busy / Hour	Idle / Hour	Per Use	StateSet Name	Failures
1	Gyartoeszkoz	Fixed Capacity	1	0.0	0.0	0.0		1 rows

Double-click here to add a new row.

Failures

	Failure Name	Failure Rule
1	Meghibasodas	Preempt

Double-click here to add a new row.

7.5. ábra: A **Resource** modul táblázatnézete felül a **Failures** párbeszédablakkal

Failure - Advanced Process

	Name	Type	Up Time	Up Time Units	Down Time	Down Time Units
1	Meghibasodas	Time	EXPO(200)	Minutes	NORM(70 , 30)	Minutes

Double-click here to add a new row.

7.6. ábra: A **Failure** adatmodul táblázat nézete

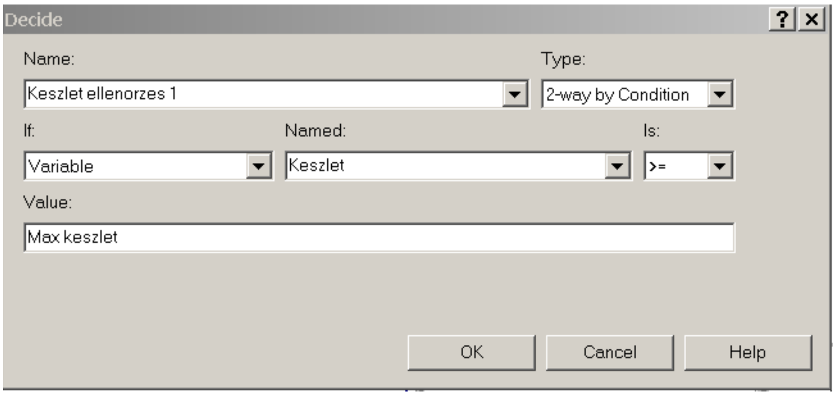
A **Resource** adatmodul táblázatnézetében a korábban már definiált „*Gyartoeszkoz*” nevű erőforrás a *7.5 ábra* felső részén látható. A *Failures* mezőhöz tartozó **Failures** ablakban, az ábra alján, adjuk meg a meghibásodások nevét: „*Meghibasodas*”. A „*Meghibasodas*” nevű hibát részletesen a **Failure** adatmodulban definiáljuk (*7.6. ábra*)**.** Itt adjuk meg a meghibásodások közötti időt (*Up Time*) és a hiba kijavításának az időtartamát (*Down Time*).

A raktári készletszintet a *Keszlet* nevű változó tartalmazza, amelynek a kezdeti értéke 250. Amikor a kontrollentitás belép a „*Keszlet frissites*” nevű **Assign** modulba, akkor a *Keszlet* változó értékét a *Batch meret*-tel, azaz öttel növeljük, vagyis a raktári készletszint öt egységgel növekszik.

Az **Assign** modult elhagyó kontrollentitás a „*Keszlet ellenorzes 1*” nevű **Decide** modul felé halad, amelynek a dialógusablaka a *7.7. ábrán* látható. Itt megvizsgáljuk, hogy a készletszint elérte-e a célszintet (*Max keszlet*). A vizsgálat két kimenete:

(1) Ha a készlet nagyobb vagy egyenlő, mint a célkészlet (*Max keszlet*), akkor a kontrollentitás a következő „*Gyartas leallitas*” nevű **Assign** modul felé mozog, amelyben a *Gyartas* nevű változó értékét 0-ra állítjuk, ami a gyártás felfüggesztését jelenti.

(2) Különben a kontrollentitás a *False* ágon lép ki és a **Hold** modul mögött belép a **Process** modulba, vagyis a gyártás folytatódik.



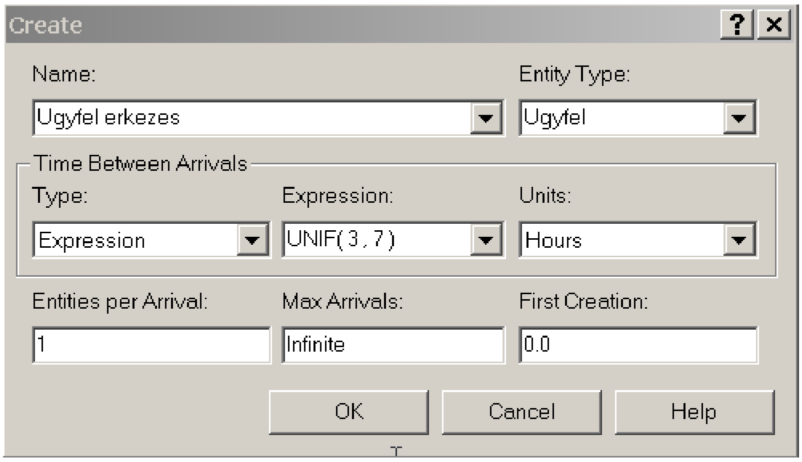
7.7. ábra: Az „*Keszlet ellenorzes 1*” nevű **Decide** modul dialógusablaka

Normál esetben egy entitás átmenetileg tartózkodik a rendszerben, létrejön és végül a **Dispose** modulon keresztül távozik. A kontrollentitás („*Anyag entitas*”) azonban folyamatosan keringhet a rendszerben, eljátszva az új nyersanyag érkezését, mivel a „*Gyartasi muvelet*” nevű modulban soha nem jelentkezik késés a nyersanyaghiány miatt. Ez a modellezési eszköz logikailag egyenlő az entitás diszponálásával és ismételt létrehozásával. Azonban számítástechnikai szempontból sokkal hatékonyabb, mivel extra számítási erőfeszítéseket takarít meg, és így a szimuláció futása gyorsabb lesz. Ajánlatos összehasonlítani kontrollentitással futó modellt a hagyományos megoldással, a sebességbeli különbség a logikailag korrekt optimalizálásnak köszönhetően érzékelhető lesz. Fontos megjegyezni, ha a gyártási műveletben hiány jelentkezhet, akkor az alkalmazott megoldás nem megengedett. Ilyenkor a szimuláció futása alatt „*Anyag entitas*”-t diszponálni kell, és új entitást kell létrehozni.

7.1.4 Az igénymenedzsment szegmens

Ebben az alfejezetben az igény menedzsment szegmens (*7.2. ábra*) logikai felépítésével foglalkozunk. Az ügyféligény forrása az „*Ugyfel erkezes*” nevű **Create** modul, amelynek dialógus ablak a *7.8. ábrán* látható.

A vevők érkezése véletlenszerű, az érkezési időköz elosztása pedig egyenletes eloszlású, *Unif* (3, 7). Mindenegyes érkezés egy-egy ügyfélentitásnak („*Ugyfel*”) felel meg, amelyekhez saját attribútum halmazt (*Igeny, Elvesztett mennyiseg*) rendelünk. Érkezés után az ügyfélentitás először belép az „*Ugyfel igeny*” nevű **Assign** modulba, ahol a véletlenszerű, egyenletes eloszlású *Igeny* attribútumot, amelynek az értéke: *Unif*(50, 100), hozzárendeljük az entitáshoz. A modulban definiált további változókat a *7.2. táblázat* tartalmazza.



7.8. ábra: „*Ugyfel erkezes*” nevű **Create** modul dialógusablaka

7.2. táblázat

Az „*Ugyfel igeny*” nevű **Assign** modul paraméterei

Name	Ugyfel igeny
Type Attribute Name New Value	Attribute Igeny UNIF(50, 100)
Type Variable Name New Value	Variable Pillanatnyi igeny Igeny
Type Variable Name New Value	Variable Osszes ugyfel Osszes ugyfel + 1
Type Variable Name New Value	Variable Osszes igeny Osszes igeny + Igeny

Az ügyfélentitás tovább halad a „*Keszlet ellenorzes 2*” nevű **Decide** modul felé (*7.3. táblázat*), ahol ellenőrizzük, hogy a raktárkészlet elegendő-e az ügyféligény kielégítéséhez. A vizsgálat két kimenetet eredményez:

(1) Ha a *Keszlet* változó értéke nagyobb vagy egyenlő az *Igeny* attribútum értékével, akkor az ügyféligény kielégíthető, és az ügyfélentitás a *True* oldalon hagyja el a **Decide** modult, és lép be „*Igeny kielegites a keszletbol*” nevű **Assign** modulba, ahol a raktárkészletet az ügyfél igényével csökkentjük. Ezt követően az entitás „*Gyartsunk ujra?*” nevű **Decide** modulba lép (*7.4. táblázat*). Itt megvizsgáljuk, hogy a *Keszlet* változó értéke elérte-e *Ujrarendelesi pont* változó értékét. Amikor az ügyfélentitás belép az „*Gyartas indul*” nevű **Assign** modulba, akkor a „*Gyartas*” nevű döntési változó értékét 1-re változtatjuk, ami a ”*Gyartsunk?*” nevű **Hold** modulban feltartott kontrollentitást felszabadítja, azaz valójában folytatódik a termelési eljárás a gyártás. Végül az ügyfélentitás az „*Ugyfel diszponalas*” nevű **Dispose** modulon keresztül elhagyja a rendszert.

7.3. táblázat

A „*Keszlet ellenorzes 2*” nevű **Decide** modul paraméterei

Name	Keszlet ellenorzes 2
Type	2-way by Condition
If	Variable
Value	Keszlet ≥ Igeny

7.4. táblázat

A „*Gyartsunk ujra?*” nevű **Decide** modul paraméterei

Name	Gyartsunk ujra?
Type	2-way by Condition
If	Variable
Value	Keszlet ≤ Ujrarendelesi pont

(2) Ha a „*Keszlet ellenorzes 2*” nevű **Decide** modulban a *Keszlet* változó értéke szigorúan kisebb, mint az *Igeny* attribútum értéke, akkor az ügyféligény csak részlegesen vagy egyáltalán nem elégíthető ki. A *False* ágon távozó ügyfélentitás belép az „*Veszteseg*„ nevű **Assign** modulba, ahol a „*Keszlet*” változó értékét 0-ra csökkentjük, frissítjük a többi változó értékét is (*7.5. táblázat*).

Az ügyfélentitás ezután belép a “*Tally elvesztett mennyiseg*” nevű **Record** modulba, ahol az egy ügyfélre eső nem teljesen kielégített igényt („*Elvesztett mennyiseg*”) számláljuk. Végül az ügyfélentitás az „*Ugyfel diszponalas*” **Dispose** modulon keresztül kilép a rendszerből.

7.5. táblázat

A „*Veszteseg*” nevű **Assign** modul paraméterei

Name	Veszteseg
Type Variable Name New Value	Variable Elvesztett ugyfel Elvesztett ugyfel + 1
Type Attribute Name New Value	Attribute Elvesztett mennyiseg Igeny – Keszlet
Type Variable Name New Value	Variable Osszes elvesztett mennyiseg Osszes elvesztett mennyiseg + Elvesztett mennyiseg
Type Variable Name New Value	Variable Keszlet 0
Type Variable Name New Value	Variable Gyartas 1

A modellben fontos szerepet játszó, korábban definiált felhasználói változókat a **Basic Process** panel **Variable** moduljában ellenőrizhetjük, illetve állíthatjuk be. A modulra kattintva megjeleníthető a modul *7.9. ábrán* látható táblázatnézete.

Variable - Basic Process

	Name	Rows	Columns	Clear Option	Initial Values	Report Statistics
1	Keszlet			System	1 rows	☐
2	Gyartas			System	1 rows	☐
3	Osszes ugyfel			System	0 rows	☐
4	Elvesztett ugyfel			System	0 rows	☐
5	Batch meret			System	1 rows	☐
6	Ujrarendelesi pont			System	1 rows	☐
7	Max keszlet			System	1 rows	☐
8	Osszes igeny			System	0 rows	☐
9	Fajlagos gyartasi koltseg			System	1 rows	☐
10	Fajlagos keszlettartasi koltseg			System	1 rows	☐
11	Gyartott mennyiseg			System	1 rows	☐
12	Inditasok szama			System	1 rows	☐
13	Fajlagos inditasi koltseg			System	1 rows	☐
14	Ciklusido			System	0 rows	☐
15	Ciklus kezdet			System	0 rows	☐
16	Pillanatnyi igeny			System	0 rows	☐
17	Fajlagos hianykoltseg			System	1 rows	☐
18	Osszes elvesztett mennyiseg			System	0 rows	☐

Double-click here to add a new row.

7.9. ábra: A **Variable** adatmodul párbeszédablaka táblázatnézetben

7.1.5 Statisztikák gyűjtése

A termelési-készletezési modell **Statistic** adatmoduljának párbeszédablaka táblázatnézetben a *7.10. ábrán* látható.

Statistic - Advanced Process

	Name	Type	Expression	Report Label
1	Atlagos keszletszint	Time-Persistent	Keszlet	Atlagos keszletszint
2	Folyamat allapot	Frequency		Folyamat allapot
3	Gyartas aktiv	Time-Persistent	Gyartas==1	Gyartas aktiv
4	Elvesztett ugyfel per osszes ugyfel	Output	Elvesztett ugyfel/Osszes ugyfel	Elvesztett ugyfel per osszes ugyfel
5	Atlagos igeny per ugyfel	Output	Osszes igeny/Osszes ugyfel	Atlagos igeny per ugyfel
6	Egysegnyi idore eso gyartasi koltseg per ora	Output	Gyartott mennyiseg*Fajlagos gyartasi koltseg/TFIN	Egysegnyi idore eso gyartasi koltseg per o
7	Egysegnyi idore eso keszlettartasi koltseg per	Time-Persistent	Fajlagos keszlettartasi koltseg*Keszlet	Egysegnyi idore eso keszlettartasi koltseg
8	Egysegnyi idore eso inditasi koltseg per ora	Output	Fajlagos inditasi koltseg*Inditasok szama/TFIN	Egysegnyi idore eso inditasi koltseg per or
9	Egysegnyi idore eso hianykoltseg per ora	Output	Osszes elvesztett mennyiseg*Fajlagos	Egysegnyi idore eso hianykoltseg per ora
10	Egysegnyi idore eso keszletezesi koltseg per	Output	OVALUE(Egysegnyi idore eso inditasi koltseg per	Egysegnyi idore eso keszletezesi koltseg
11	Atlagos ciklus ido ora	Time-Persistent	Ciklusido	Atlagos ciklus ido ora
12	Atlagos igenyszint	Time-Persistent	Pillanatnyi igeny	Atlagos igenyszint
13	Osszes erkezo ugyfel	Output	Osszes ugyfel	Osszes erkezo ugyfel
14	Reszlegesen kiszolgalt ugyfel	Output	Elvesztett ugyfel	Reszlegesen kiszolgalt ugyfel
15	Elvesztett mennyiseg per osszes igeny	Output	Osszes elvesztett mennyiseg/Osszes igeny	Elvesztett mennyiseg per osszes igeny

Double-click here to add a new row.

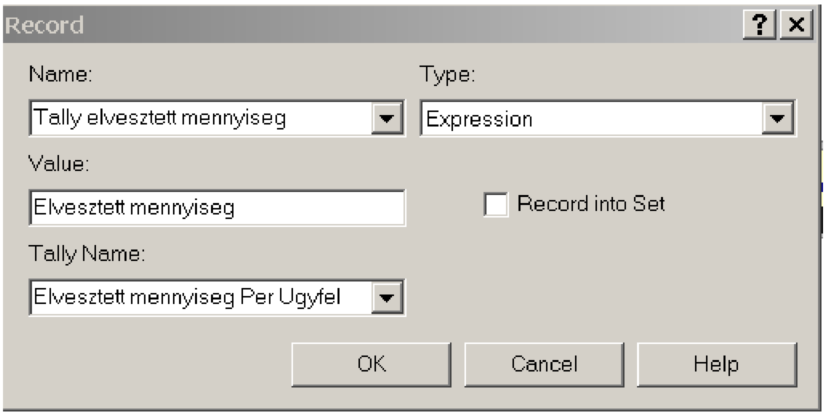
7.10. ábra: A **Statistic** adatmodul párbeszédablaka táblázatnézetben

A táblázatban egyebek mellett Time-Persistent típusú statisztikák láthatók: („Atlagos keszletszint”, „Gyartas aktiv”, „Egysegnyi idore eso keszlettartasi koltseg per ora”, „Atlagos ciklus ido ora”, „Atlagos igenyszint”). A készletszintet jellemző statisztikai kimenete 95%-os megbízhatósági szinten tartalmazza a modell futása alatt megfigyelt készletszint átlagos, a minimális és maximális értékeit. A „Gyartas aktiv” nevű statisztika annak az időtartamnak a valószínűségét méri, amikor a Gyartas nevű változó értéke 1, azaz a gyártás működik. E statisztikának azért van létjogosultsága, mert a gyártás különböző okok miatt leállhat. A készletszinttel arányos egységnyi időre eső készlettartási költség számítható a „*Egysegnyi idore eso keszlettartasi koltseg per ora*” statisztikával. Emlékezzünk arra, hogy ez a Time-Persistent eljárás segítségével tetszőleges mennyiség időben átlagolt valószínűségét tudjuk megbecsülni beleértve a közös valószínűséget. A statisztikák gyűjtésére hatással van a Variable adatmodul Report Statistics oszlopának állapota, amelyben a statisztika gyűjtését be- és kikapcsolhatjuk.

A *7.10. ábrán* látható táblázat tartalmazza a „*Folyamat allapot*” nevű *Frequency* típusú statisztikát is, amely a gyártási folyamat állapotainak a valószínűségét méri, gyakorlatilag a gyártás működik (*busy*), vagy nem működik (*down*) állapotok gyakoriságát. A modellben a tételen (*idle*) állapotot nem kell definiálni.

A „*Elvesztett ugyfel per osszes ugyfel*” *Output* típusú statisztikát (*7.10. ábra*) arra használjuk, hogy kiszámítsuk az összes ügyfélhez viszonyítva azoknak az ügyfeleknek a százalékos arányát, akiknek az igényét nem teljesítettük teljes mértékben. Az *Expression* mezőben ennek megfelelően két változó hányadosa: *Elvesztett ugyfel*/*Osszes ugyfel* szerepel. Ugyancsak *Output* statisztikát használunk a költségkomponensek (egységnyi időre eső indítási, gyártási, készlettartási, hiányköltségek), valamint az egységnyi időre eső teljes készletezési költség számítására. A statisztika az összes érkező, a részlegesen kiszolgált ügyfelek számát és az elvesztett mennyiség / összes igény arányát is megjeleníti.

A *7.11. ábra* a „*Tally elveszett mennyiseg*” nevű **Record** modul párbeszédablakát mutatja. Amikor az ügyfél entitás belép ebbe a modulba az *Expression*, esetünkben az „*Elvesztett mennyiseg”* nevű attribútum kiértékelődik, amelynek az eredménye számlálás. A modell futásának végén a riportban a Σ*Elvesztett mennyiseg* és a veszteséget szenvedett ügyfelek számának a hányadosa jelenik meg, azaz az átlagos veszteség. Kezeljük óvatosan ezt a statisztikát, mivel számlálás csak akkor történik, amikor egy ügyfelet nem tudtunk teljesen kielégíteni, ezért az átlag (ún. feltételhez kötött átlag) csak azokra az ügyfelekre vonatkozik, akiknél veszteség jelentkezik. Világos, hogy a Σ*Elvesztett* *mennyiseg/Osszes ugyfel* átlag (feltételhez nem kötött átlag) kisebb szám, mint a feltételhez kötött átlag.



7.11. ábra: A „*Tally elveszett mennyiseg*" nevű **Record** modul párbeszédablaka

7.1.6 A szimuláció kimenetei

A *7.12. ábra* szemlélteti a 20.000 óra (több mint két év) hosszúságú szimulációs futás eredményeit. Az egytermékes termelési-készletezési modell működését jellemző megfigyelt eredmények a gyakorlat szempontjából is nagyon tanulságosak.

A *Tally* szekcióban kijelzett *Elvesztett mennyiseg Per Ugyfel* kifejezés szerint a veszteséget szenvedett ügyfelekre vonatkoztatott átlagos veszteség (ki nem elégített mennyiség) 22,1273 termékegység. A *Half Width* oszlopban látható érték (1,47788) a 95%-os konfidencia-intervallum fele.

A *Time Persistent* szekcióban látható *Atlagos keszletszint* változó *Maximum* oszlopából (504,58 egység) az olvasható ki, hogy a pillanatnyi készletszint esetenként meghaladja a célszintet (*S*=500). Ez azonban csak ritkán fordult elő, mivel a *Gyartas* változó (ugyancsak a *Time Persistent* szekcióban) az idő 98,68 %-ban egyenlő volt 1-gyel, vagyis a termelés működött. A készletszint az idő jelentős hányadában alacsony volt, az átlagos készlet 160,54 egység alig magasabb, mint az újrarendelési pont (*s*=150 egység). A *7.13. ábrán* látható, hogy a készletszint változása sokkal nagyobb, mint az 50 és 100 db között változó igényszinté.

Az *Output* típusú *Elvesztett ugyfel per osszes ugyfel* statisztika szerint azoknak az ügyfeleknek az aránya, akik csak részben lettek kielégítve, vagy egyáltalán nem 12,402 %, és az elvesztett mennyiségnek az összes igényhez viszonyított aránya 3,53 %.

A készletezés költségelemei közül az időegységre eső készlettartási költség (321,09 Ft/óra) *Time Persistent* típusú statisztika, az időegységre eső indítási költség (6 Ft/óra), gyártási költség (1459,48 Ft/óra), hiányköltség (4,27 Ft/óra) pedig *Output* típusú. A költségelemek összegeként számított készletezési költség 1790,84 Ft/óra. A költségelemek között a legnagyobb hányadot a gyártási és a készlettartási költségek képviselik. Ezek közül az adott szituációban a gyártási költségre a készletezési politikának nincs hatása, annál inkább a készlettartási költségre, amely az átlagos készletszint függvénye.

Végül, a *Frequencies* szekció mutatja termelési folyamat (BUSY, FAILED és IDLE) állapotainak a valószínűségeit. Ezek rendre, 72,98 % (az erőforrás kihasználtság), 25,98 % (az állásidő valószínűsége) és 1,03 % (a tételen állapot valószínűsége). Vegyük észre, hogy az átlagos működési idő (3,37 óra =202,2 perc) és az átlagos állásidő (1,19 óra =71,4 perc) nagyon közel áll az elméleti értékhez. Az állásidő valószínűsége (25,98 %) egyenlő az állásidő - a ciklushossz várhatóértékének a hányadosával). Emlékeztetőül, a meghibásodások közötti idők exponenciális eloszlásúak 200 perces átlaggal, a javítási időközök normális eloszlásúak 70 perces átlaggal és 30 perces szórással.

19:39:54 **User Specified** november 28, 2010

Egytermékes készletezés Replications: 1

Replication 1 Start Time: 0,00 Stop Time: 20 000,00 Time Units: Hours

Tally

Expression	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Elvesztett mennyiseg Per Ugyfel	22.1273	1,47788	0.01385769	75.3473

Time Persistent

Time Persistent	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Atlagos ciklus ido ora	980.64	(Insufficient)	0	4,140.61
Atlagos igenyszint	75.2076		0	99.98
Atlagos keszletszint	160.54	17,47022	0	504.58
Egysegnyi idore eso keszlettartasi koltseg per ora	321.09	34,94044	0	1,009.17
Gyartas aktiv	0.9868	(Insufficient)	0	1.0000

Output

Output	Value
Atlagos igeny per ugyfel	75.2909
Egysegnyi idore eso gyartasi koltseg per ora	1,459.48
Egysegnyi idore eso hianykoltseg per ora	4.2750
Egysegnyi idore eso inditasi koltseg per ora	6.0000
Egysegnyi idore eso keszletezesi koltseg per ora	1,790.84
Elvesztett mennyiseg per osszes igeny	0.03533718
Elvesztett ugyfel per osszes ugyfel	0.1202
Osszes erkezo ugyfel	4,017.00
Reszlegesen kiszolgalt ugyfel	483.00

19:29:29 **Frequencies** november 28, 2010

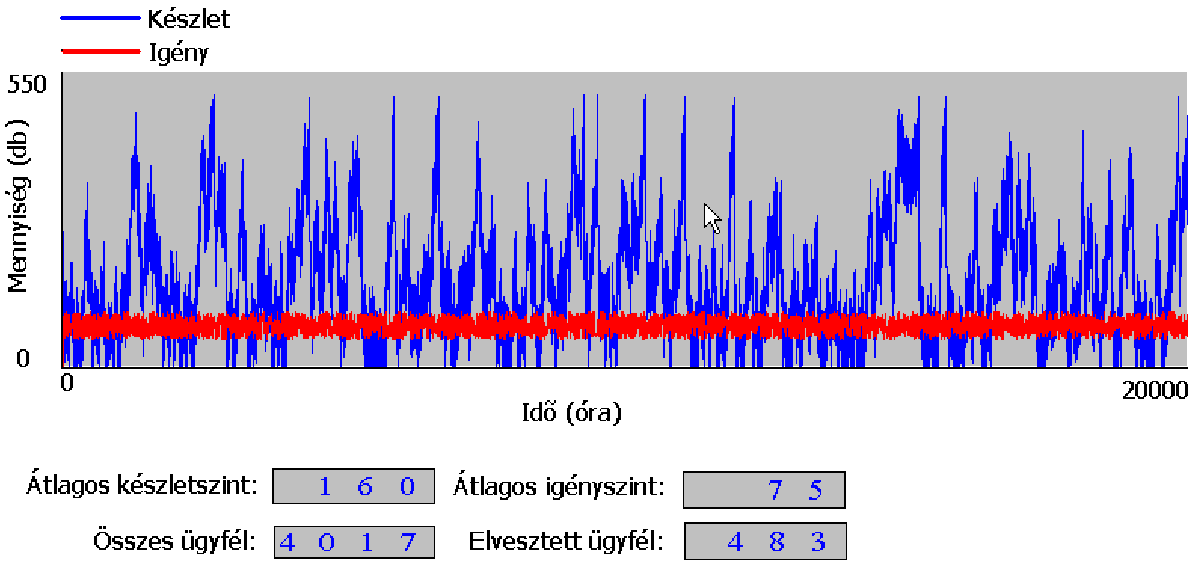
Egytermékes készletezés Replications: 1

Replication 1 Start Time: 0,00 Stop Time: 20 000,00 Time Units: Hours

Folyamat allapot	Number Obs	Average Time	Standard Percent	Restricted Percent
BUSY	4,332	3.3694	72.98	72,98
FAILED	4,368	1.1897	25.98	25,98
IDLE	60	3.4493	1.03	1,03

7.12. ábra: Az egytermékes termelési-készletezési modell szimulációjának eredményei

A *7.13. ábrán* látható statisztikai outputból további információk olvashatók ki, de ezeket nem részletezzük (a szimulációs eredmények analízisének hiányzó részleteit az olvasóra bízzuk).



7.13. ábra: A készlet- és az igényszint változása az idő függvényében

7.1.7 Modellkísérletek és analízis

Ahogyan korábban említettük az SCM célja egyensúlyt keresni a rendszerköltségek és a vevői elégedettség között. Ismert, hogy maga a szimuláció nem oldja meg ezt a problémát, azonban a bemeneti paramétereket célirányosan változtatva megfigyelhetjük a kimenetek változását [9]. Ugyanakkor előnyt jelent, hogy amíg a klasszikus determinisztikus készletezési modellek csak költség optimalizálásra alkalmasak, addig a szimulációs modellel egyidejűleg vizsgálhatjuk a költségek és a vevői elégedettség változásait. Például közismert, hogy az újrarendelési pont csökkentésétől a készletezési költségek csökkenését várhatjuk. A kérdés természetesen az, hogy meddig csökkenthető az újrarendelési pont anélkül, hogy a vevői elégedettséget jellemző *Elvesztett ugyfel per osszes ugyfel* arány ne romoljon.

7.6. táblázat

A termelési-készletezési rendszer költséganalízise

Újra-rendelési pont [db]	Készlettartási költség [Ft/óra]	Hiányköltség [Ft/óra]	Indítási költség [Ft/óra]	Készletezési költség [Ft/óra]	Veszteség-arány* [%]	Átlagos ciklusidő [óra]	Gyártás aktív [%]
50	349,87	3,21	6,0	1819,30	9,89	1314,49	98,25
75	288,09	4,20	4,0	1753,72	12,80	1532,36	98,91
100	296,68	3,75	3,5	1763,49	11,63	2477,92	99,02
125	303,74	4,35	4,0	1769,84	12,64	2261,50	98,94
150	321,09	4,27	6,0	1790,84	12,02	980,64	98,68

* Elvesztett ügyfél per összes ügyfél

A kísérletben az újrarendelési pontot 50 és 150 db között változtattuk 25 db-os lépésközzel, és a kapott eredményeket a *7.6. táblázatban* foglaltuk össze. (A vizsgált tartomány felsőhatára az eredeti újrarendelés pont s=150 db.) Az újrarendelési pont növelése 50-től 100 db-ig a készletezési költség csökkenését és a gyártókapacitás kihasználtságának a javulást eredményezi, elhanyagolható veszteségarány változás mellett. Megjegyezzük, az eredeti újrarendelési ponthoz tartozó veszteségarány 12,02 % is 11,63 %-ra csökkent, azaz javult a kiszolgálás színvonala. A táblázat alapján az s=100 db nagyságú újrarendelési pont (a táblázat kiemelt sora) kvázi optimumnak tekinthető, mivel s>100 db esetén a költség növekszik, vevőkiszolgálás és a gyártóeszköz kihasználtság pedig romlik. Ebből az egyszerű vizsgálatból azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az újrarendelési pont helyes megválasztásával csökkenthetjük a költségeinket és javíthatjuk a vevőkiszolgálás színvonalát.

9:10:53 **User Specified** december 1, 2010

Egytermékes készletezés Replications: 1

Replication 1 Start Time: 0,00 Stop Time: 20 000,00 Time Units: Hours

Tally

Expression	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Elvesztett mennyiseg Per Ugyfel	20.7322	(Insufficient)	0.01301487	79.0225

Time Persistent

Time Persistent	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Atlagos ciklus ido ora	682.79	(Insufficient)	0	2,463.01
Atlagos igenyszint	75.1385		0	99.98
Atlagos keszletszint	195.07	17,69823	0	505.00
Egysegnyi idore eso keszlettartasi koltseg per ora	390.14	35,39647	0	1,010.00
Gyartas aktiv	0.9767	(Insufficient)	0	1.0000

Output

Output	Value
Atlagos igeny per ugyfel	75.1256
Egysegnyi idore eso gyartasi koltseg per ora	1,470.28
Egysegnyi idore eso hianykoltseg per ora	2.1396
Egysegnyi idore eso inditasi koltseg per ora	10.5000
Egysegnyi idore eso keszletezesi koltseg per ora	1,873.05
Elvesztett mennyiseg per osszes igeny	0.01785348
Elvesztett ugyfel per osszes ugyfel	0.06469408
Osszes erkezo ugyfel	3,988.00
Reszlegesen kiszolgalt ugyfel	258.00

10:12:26 **Frequencies** december 01, 2010

Egytermékes készletezés Replications: 1

Replication 1 Start Time: 0,00 Stop Time: 20 000,00 Time Units: Hours

Folyamat allapot	Number Obs	Average Time	Standard Percent	Restricted Percent
BUSY	4,439	3.3143	73.56	73,56
FAILED	4,522	1.0909	24.66	24,66
IDLE	124	2.8614	1.77	1,77

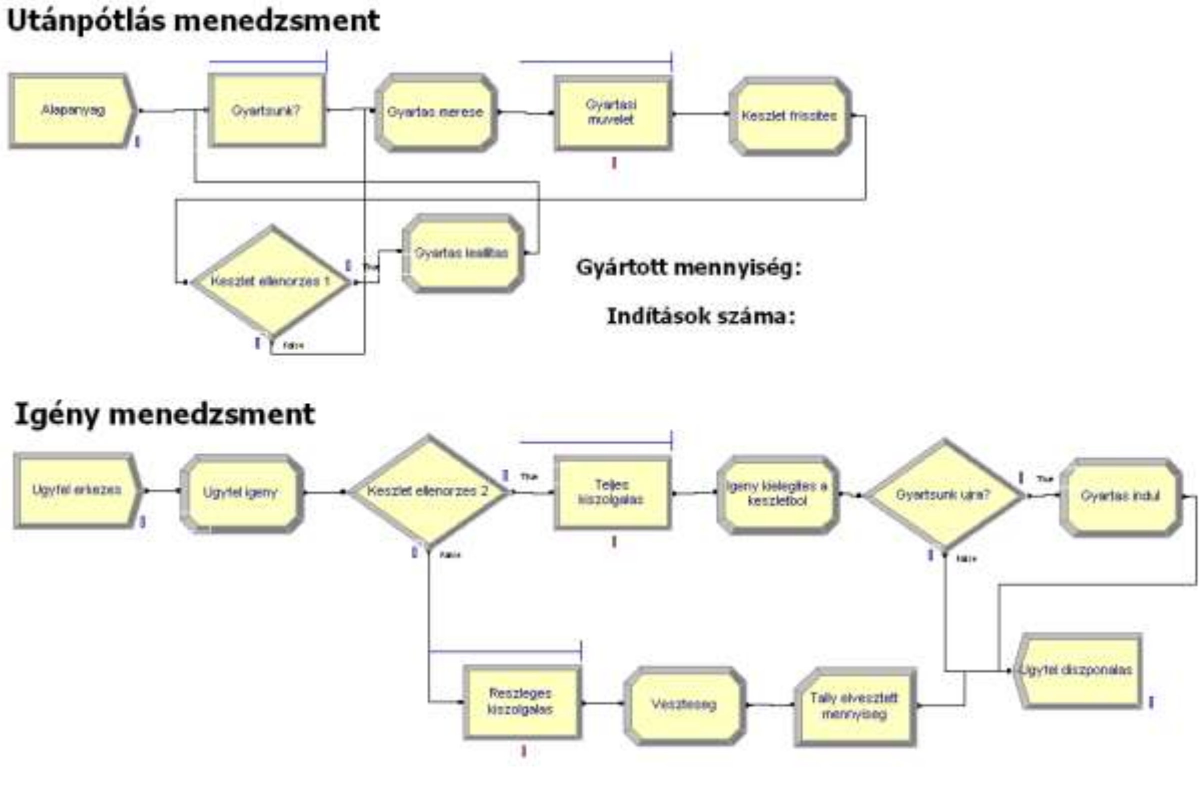
7.14. ábra: A csökkentett állásidejű egytermékes termelési-készletezési modell szimulációjának eredményei

A második kísérletünk a vevőkiszolgálás színvonalának javítására, azaz a teljesen kiszolgált vevői igények valószínűségének a növelésére irányul. Az előző kísérletben megfelelő nagyságúnak talált újrarendelési ponthoz (s=100) tartozó veszteségarány elfogadható (11,63 %), de javításra szorul. A kérdés most, hogyan módosítsuk a rendszert ahhoz, hogy a veszteség valószínűségét elfogadható szintre csökkentsük.

A gyakorlatban, a készletorientált rendszerekben, amilyen az általunk vizsgált rendszer is, a kiszolgálási színvonal javítás egyetlen útjának általában a készletszint növelését tekintik. A *7.6. táblázatból* azonban kiolvasható, hogy az újrarendelési pont növelése a készletezési költség emelkedését eredményezi, ezért a veszteség arány csökkentésére most más utat keresünk. A *7.14. ábrán* a módosított termelési-készletezési modell szimulációs eredményei láthatók, amelyben a normál eloszlású javítási idő várhatóértékét 65 percre és a szórását pedig 25 perc csökkentettük. A karbantartási tevékenység módosításának köszönhető javítási idő csökkenés a meghibásodás valószínűségét 25,98 %-ról 24,66 %-ra csökkenti, ami 5 % körüli változást jelent (lásd a *Frequencies* szekciót a *7.12. ábrák, 7.14. ábrákon*). A részlegesen, illetve teljesen kielégítetlen igények aránya pedig 11,63 %-ról 6,47 %-ra csökken. Ez a csökkenés több mint 44 %-os javulást eredményez a kiszolgálási színvonalban. A bemutatott vizsgálat arra a konklúzióra vezet, hogy a kiszolgálási színvonal szignifikáns javítása inkább a termelési folyamat javításával érhető el, mint az újrarendelési politika módosításával.

7.1.8 Kiszolgálási idővel módosított egytermékes termelési-készletezési rendszer (7.2. modell)

A *7.1. modellben* a rendszerbe érkező ügyfeleket, ha a készletszint megengedte, azonnal, késedelem nélkül kiszolgáltuk, vagyis azt feltételeztük, hogy a kiszolgálási kapacitás végtelen nagy és a kiszolgálási idő elhanyagolható. Sokszor azonban a kiszolgálás időtartama jelentős lehet, amit nem lehet figyelmen kívül hagyni, mivel növeli az ügyfelek rendszerben tartózkodási idejét.



7.15. ábra: Az egytermékes termelési-készletezési rendszer kiszolgálási idővel

A kiszolgálási idő kezelésére átalakított modell folyamatábra nézete a *7.15. ábrán* látható, amely a *7.1. modelltől* annyiban különbözik, hogy az igénymenedzsment szegmensbe két új **Process** modult („*Teljes kiszolgalas*” és „*Reszleges kiszolgalas*”) illesztettünk a „*Keszlet ellenorzes* 2” nevű **Decide** modul után. E modulok paramétereit a *7.7* és *7.8. táblázatok* tartalmazzák. Mindkét modulban az „*Arukiadó*” nevű erőforrás végzi a kiszolgálást, amelynek a mennyisége 1.

15:48:20 **User Specified** december 1, 2010

Egytermékes készletezés Replications: 1

Replication 1 Start Time: 0,00 Stop Time: 20 000,00 Time Units: Hours

Tally

Expression	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Elvesztett mennyiseg Per Ugyfel	8.0241	1,34954	-73	128.32

Time Persistent

Time Persistent	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Atlagos ciklus ido ora	1,676.66	(Insufficient)	0	6,647.96
Atlagos igenyszint	75.4947		0	99.99
Atlagos keszletszint	140.48	15,49030	-63	504.90
Egysegnyi idore eso keszlettartasi koltseg per ora	280.96	30,98060	-126	1,009.80
Gyartas aktiv	0.9904	(Insufficient)	0	1.0000

Output

Output	Value
Atlagos igeny per ugyfel	75.5100
Egysegnyi idore eso gyartasi koltseg per ora	1,459.23
Egysegnyi idore eso hianykoltseg per ora	3.9446
Egysegnyi idore eso inditasi koltseg per ora	4.0000
Egysegnyi idore eso keszletezesi koltseg per ora	1,748.13
Elvesztett mennyiseg per osszes igeny	0.03267441
Elvesztett ugyfel per osszes ugyfel	0.3075
Osszes elvesztett mennyiseg darab	9,861.57
Osszes erkezo ugyfel	3,997.00
Osszes gyartott mennyiseg darab	291,845.00
Reszlegesen kiszolgalt ugyfel	1,229.00

7.16. ábra: A kiszolgálási idővel kiegészített egytermékes termelési-készletezési modell szimulációjának eredményei

A kiszolgálási idő arányos az igényelt mennyiséggel, ezért a számításához új változót definiáltunk a **Variable** adatmodulban „*Fajlagos kiszolgalasi ido*” néven, amelynek az értéke konstans, 2 perc/db. A kifejezésként (*Expression*) megadott kiszolgálási idő értelemszerűen az ügyfél igényének és a fajlagos kiszolgálási időnek a szorzata (*7.7. táblázat*). A részlegesen kielégített ügyfelek kiszolgálási ideje, tekintettel arra, hogy az igényük csak a pillanatnyi készlet erejéig lesz kielégítve, a készlet és a fajlagos kiszolgálási idő a szorzata (*7.8. táblázat*). A modell többi input változója megegyezik az eredeti *7.1. modell* változóival, így az eredmények a *7.12. ábrán* közölt eredményekkel hasonlíthatók össze.

7.7. táblázat

A „*Teljes kiszolgalas*” nevű **Process** modul paraméterei

Name Action	Teljes kiszolgalas Seize Delay Release
Resource Type Resource Name Quantity	 Resource Arukiado 1
Delay Type Units Expression	Expression Minutes Igeny * Fajlagos kiszolgalasi ido

7.8. táblázat

A „*Reszleges kiszolgalas*” nevű **Process** modul paraméterei

Name Action	Reszleges kiszolgalas Seize Delay Release
Resource Type Resource Name Quantity	 Resource Arukiado 1
Delay Type Units Expression	Expression Minutes Keszlet * Fajlagos kiszolgalasi ido

A szimuláció futásának eredményei a *7.16. ábrán* látható riportban olvashatók. A leglényegesebb változás, hogy a hosszabb átfutási idő miatt a szimulációs idő alatt kiszolgált ügyfelek száma 4017-ről 3997-re csökkent. Az *Output* típusú *Elvesztett ugyfel per osszes ugyfel* statisztika 12,02 %-ról 30,75 %-ra változott, vagyis a vevő kiszolgálás színvonala jelentős mértékben romlott. Ezen úgy segíthetünk, hogy a kiszolgálási időt az árukiadók számának növelésével csökkentjük, például 1 árukiadó helyett kettőt alkalmazunk (ezt a kísérletet az olvasóra bízzuk). További észrevehető különbség, hogy a készletezési költség 1790,84 Ft/óráról 1748,13 Ft/órára csökkent, ami az alacsonyabb átlagos készletszintnek (140,48 db) köszönhető.

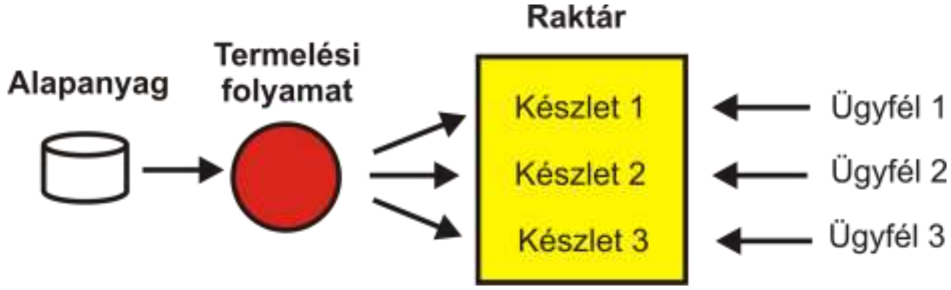
7.2. Többtermékes termelési és készletezési rendszer (7.3. modell)

Ebben a szakaszban továbbfejlesztjük a *7.1 szakaszban* megismert egytermékes termelési és készletezési rendszert többtermékes rendszerré. Az új rendszer is a nem pótolható hiány elvén működik, azaz a kielégítetlen igények elvesznek.

7.2.1 A probléma leírása

A továbbfejlesztett rendszer a *7.17. ábrán* látható. A termelőüzem háromféle (1, 2, és 3) terméket állít elő három megkülönböztetett vonalon érkező ügyfelek ellátására. A terméktípusokat 1, 2, és 3 számokkal jelöljük, illetve különböztetjük meg egymástól. A termelőüzem lot-okban meghatározott tételnagyságokat termel, és a készletszinttől függően átáll az egyik terméktípus gyártásáról a másikra. A termelésben az 1 típusú termék rendelkezik a legmagasabb és a 3 típusú a legalacsonyabb prioritással.

A termelési folyamat anyagellátását egy, az ábrán látható, alapanyag-tároló biztosítja, és a végtermékeket a raktárban tárolják. Az ügyfelek a raktárhoz különböző nagyságú igényekkel érkeznek, és ha az igény teljes mértékben nem elégíthető ki, akkor a kielégítetlen hányad veszteséget, pótolhatatlan hiányt jelent. Minden terméktípushoz a *7.9. táblázatba* foglalt egyedi paraméterek tartoznak. A modellezés során a következő feltételezésekkel élünk:



7.17. ábra: Többtermékes termelési-készletezési modell három termékkel

1. A alapanyag tárolóban mindig elegendő anyag áll rendelkezésre, így a termelés anyaghiány miatt soha nem áll le.

2. A termelés lot-okban történik, amelynek a mérete 5 termékegység, és a végtermék lot-tok a raktárban nyernek elhelyezést. Egy lot előállításának időtartama determinisztikus (*7.9. táblázat*).

7.9. táblázat

A háromtermékes termelési-készletezési rendszer paraméterei

Termék típus	Célszint	Újrarendelési pont	Kezdőkészlet	Műveleti idő [óra]	Igények érkezési időközei [óra]	Igények mennyisége
1	100	50	75	1	Exp(16)	UNIF(4,10)
2	200	100	150	0,6	Exp(8)	UNIF(10,15)
3	300	150	200	0,3	Exp(4)	UNIF(20,30)

A termelési folyamatot véletlen meghibásodás jellemzi, amely akkor jelentkezik, amikor a termelőeszköz működik (*Busy*). A meghibásodási időközök exponenciális eloszlásúak 200 perces középértékkel, a javítási idő normál eloszlású 70 perces középértékkel és 30 perces szórással (megjegyezzük negatív javítási idő is generálódhat, ilyenkor addig generálunk új mintát, amíg nem negatív értéket kapunk).

A raktár (*s*, *S*) készletezési politikát alkalmaz minden terméknél. Megjegyezzük, hogy aktuálisan az erőforrás kapacitása megoszlik a háromféle termék között. Az erőforrás azonban csak akkor rendelhető egy másik termékhez, amikor a termelési folyamat áll. A termékek prioritása következtében az erőforrást a két magasabb prioritású termék többször is lekötheti, mielőtt a 3 típusú termékre sor kerülne. Megjegyezzük, hogy más termékváltási politika is alkalmazható, mint például a pillanatnyi termék gyártásának befejezésekor váltás történik, azaz a pillanatnyi termék gyártása nem folytatódhat.

A következő statisztikákat 100.000 óra szimulációs időre vonatkoztatva szeretnénk megbecsülni:

Az erőforrás kihasználását termékenként.

Az erőforrás leállásának valószínűségét.

Az átlagos készletszintet termékenként.

A teljesen ki nem elégített ügyfelek százalékos arányát termékenként.

A teljesen ki nem elégített ügyfelekre vonatkoztatott átlagos veszteség mennyiségét termékenként.

7.2.2 Az Arena modell

A jelenlegi modell a korábban megismert egytermékes modell továbbfejlesztett változata, ezért a felépítése nagyon hasonló a *7.2. ábrán* látható struktúrához. Ennek megfelelően az új modell is két szegmensből az utánpótlás menedzsment és az igénymenedzsment szegmensből épül fel. Az előbbi szegmens úgy módosul, hogy alkalmas több termék megosztott tárolására. A különböző terméktípusok tételeit generáló termékentitás itt is folyamatosan cirkulál a szegmensben, ellenőrzi a készleteket, és amikor szükséges indítja vagy megállítja a gyártást. Az igénymenedzsment szegmens módosítása a különböző típusú ügyfelek és igényeik generálását teszi lehetővé. A szegmens modellezi a készlethiányt és inicializálja a termelést terméktípusonként, amikor az szükséges. A következő szakaszban részletesen megvizsgáljuk az új modell mindkét szegmensének a logikai felépítését.

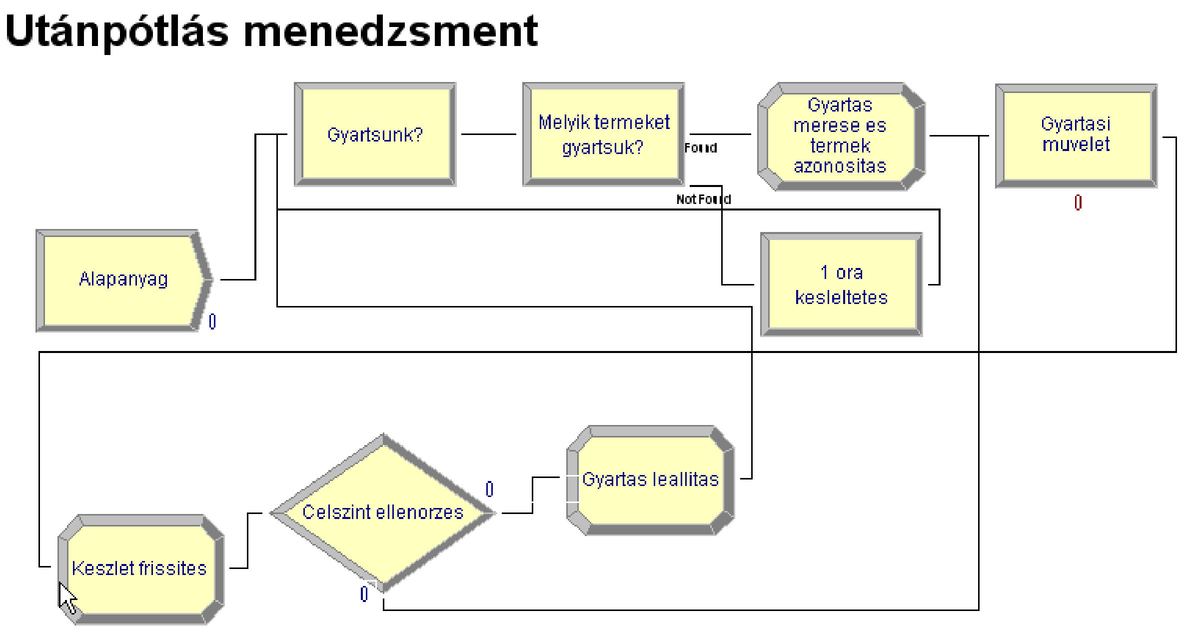
7.2.3 Az utánpótlás menedzsment szegmens

A termelési (gyártási) tevékenységet modellező módosított utánpótlás menedzsment a *7.18. ábrán* látható.

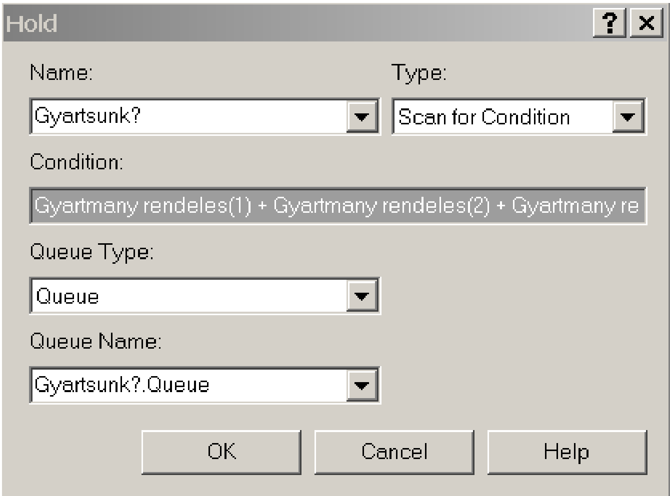
Az „*Alapanyag*” nevű **Create** modul pontosan úgy működik, mint a korábbi modellben, a modulban létrehozott egyetlen entitás vezérli valamennyi terméktípus gyártását. A szegmensben folyamatosan cirkuláló „*Anyag entitas*”-t a „*Gyartsunk?*” nevű **Hold** modul feltartóztatja, és akkor engedi tovább, ha a

$$\textit{Gyartmany rendeles}(1) + \textit{Gyartmany rendeles}(2) + \textit{Gyartmany rendeles}(3) > 0$$

feltétel teljesül. A feltételt a *7.19. ábrán* látható modulban a *Condition* mezőben írjuk elő. A *Gyartmany rendeles*(k), k = 1,2,3 vektor elemei 1 és 0 értéket vehetnek fel. Az értékek jelzik az adott terméktípus állapotát, azaz, hogy a terméktípus gyártását le kell állítani vagy indítani kell. Pontosabban a *Gyartmany rendeles*(k) = 1 azt jelenti, hogy a készlet az újrarendelési pont alá csökkent és a gyártást indítani kell, *Gyartmany rendeles*(k) = 0 pedig azt, hogy a készlet meghaladta a célszintet és a gyártást le kell állítani. Ha a logikai kifejezés a *Condition* mezőben igaz, akkor az azt jelenti, hogy legalább egy terméktípus gyártására szükség van.

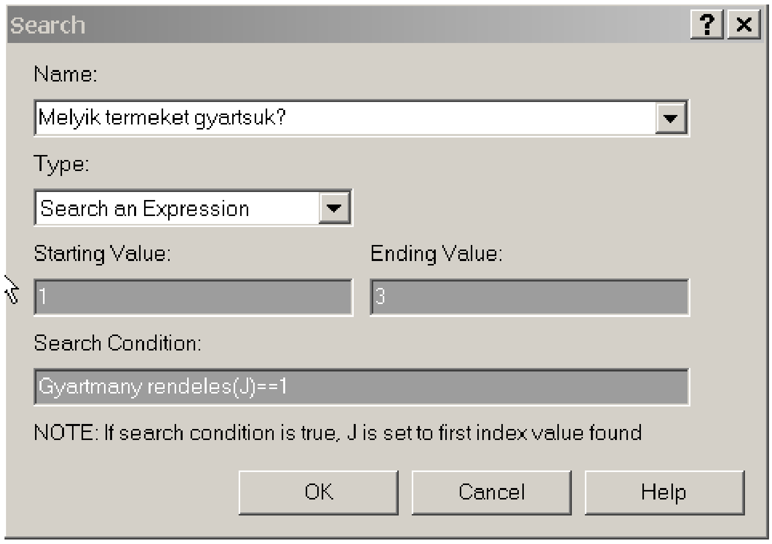


7.18. ábra: Többtermékes termelési-készletezési modell utánpótlás menedzsment szegmense három termékkel



7.19. ábra: A „*Gyartsunk?*” nevű **Hold** modul dialógusablaka

Ha a gyártás aktuálissá vált, akkor arról kell dönteni, hogy melyik terméktípust gyártsuk. A döntés meghozatalához a cirkuláló „*Anyag entitas*” belép a *7.20. ábrán* látható, „*Melyik termeket gyartsuk?*” nevű **Search** modulba. A modulba belépő entitás elindít egy *Search an Expression* típusú keresést. A Search Condition mezőben megadott kifejezés (*Gyartmany rendeles*(*J*)==1) határait és a keresés sorrendjét a Starting Value és az Ending Value mezőkben megadott indexek értékei határozzák meg. A **Search** modul azt a terméktípust fogja választani, amelynél a feltétel elsőként teljesül. Ez azt jelenti, hogy a kisebb indexű terméktípusok prioritást élveznek a nagyobb indexűekkel szemben.

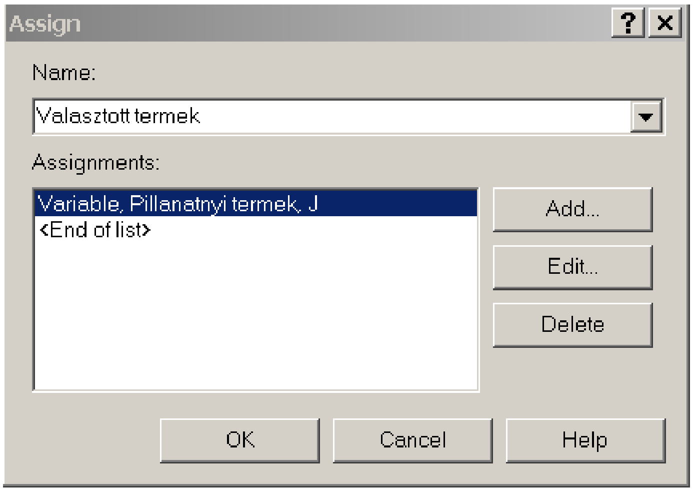


7.20. ábra: A „*Melyik termeket gyartsuk?*” nevű **Search** modul dialógusablaka

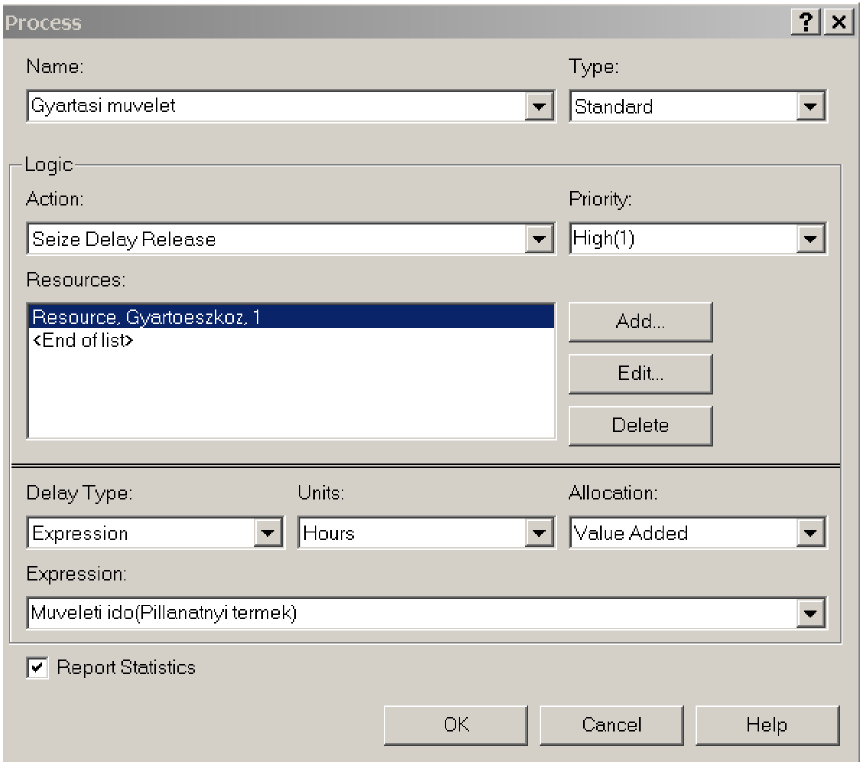
A Type mezőben (*7.20. ábra*) többfajta keresés közül választhatunk (*Search a Batch, Search a Queue, Search an Expression*). Például a modellező kereshet egy sorban vagy egy batch-ben egy entitást, amely valamilyen adott attribútum értékkel rendelkezik, vagy egy kifejezést, amelynek az értéke egyenlő egy adott értékkel. Ha a válaszként kapott **Arena** változó *J* pozitív, akkor a keresés eredményes volt, ha a válasz *J*=0, akkor nem találtunk a feltételnek megfelelő entitást vagy kifejezést.

Esetünkben a keresés feltétele *Gyartmany rendeles*(*J*)==1, és a keresés tartománya *k*=1,2, 3. Sikeres keresés eredményeként azt az első **Arena** változót (*J*) kapjuk válaszként, amelynél a *Gyartmany rendeles*(*J*)==1 feltétel teljesül. A *J*= 0 válasz azt jelenti, hogy a keresés eredménytelen volt. Emlékezzünk arra, hogy a probléma leírásban a terméktípusok gyártásának prioritását úgy definiáltuk, hogy kisebb indexű termékeknek adtunk nagyobb prioritást. Következésképpen a keresésnél először a magasabb prioritású terméktípusokat vizsgáljuk, azaz a kisebb indexszámúakat.

A keresés befejezését követően a cirkuláló entitás belép a „*Valasztott termek*” nevű **Assign** modulba, amelynek a dialógusablakát a *7.21. ábra* szemlélteti. Itt az „*Anyag entitas*” megjegyzi, hogy melyik terméktípust kell gyártani. Ez úgy történik, hogy a „*Pillanatnyi termek*” változó értékéhez hozzárendeljük *J* változó értékét, amely az előző modulban megkeresett terméktípus indexe. Megjegyezzük, a globális tulajdonsággal bíró „*Pillanatnyi termek*” változó használata itt azért megfelelő, mivel az utánpótlás menedzsment szegmensben egyetlen entitás mozog. Ha több entitás keringene a szegmensben, akkor a „*Pillanatnyi termek*” változó helyett az adott entitáshoz rendelt attribútumot kellene definiálni, azért hogy az adott entitás megőrizze a hozzátartozó értéket.



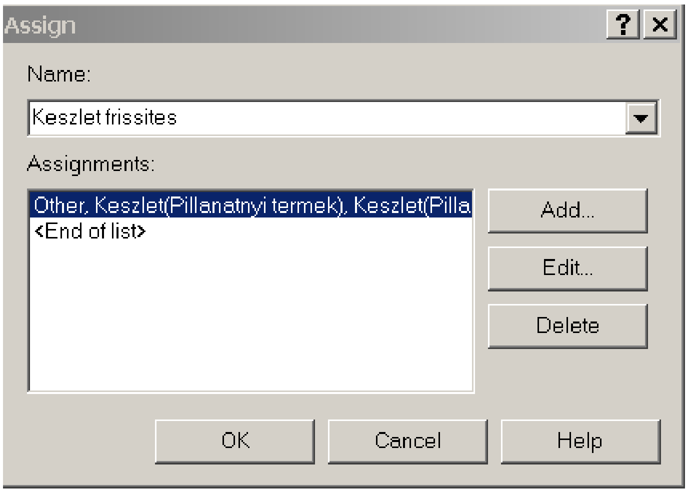
7.21. ábra: A „*Valasztott termek*” nevű **Assign** modul dialógusablaka



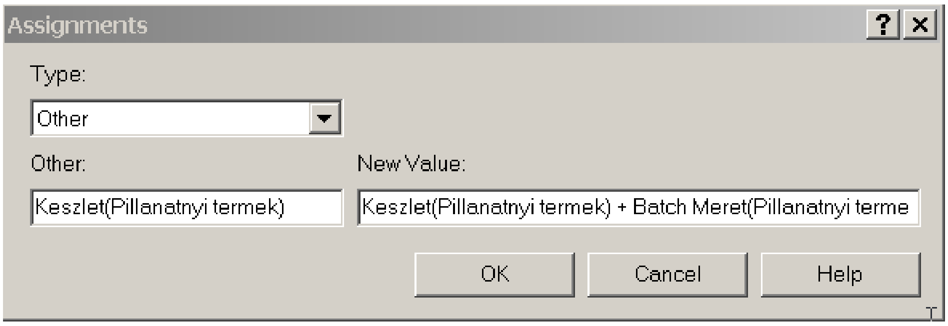
7.22. ábra: A „*Gyartasi muvelet*” nevű **Process** modul dialógusablaka

Ezt követően az „*Anyag entitas*” a „*Gyartasi muvelet*” nevű **Process** modulba és áthalad standard *Seize-Delay-Release* tevékenység sorozaton, amelyek az erőforrás lekötést, a kiválasztott termék gyártását és az erőforrás felszabadítását modellezik. Amíg a *Seize* és

Release tevékenységek teljesen azonosan működnek, mint az előző modellben, addig a *Delay* tevékenységhez a terméktípustól függő műveleti időt (a *7.9. táblázatban* megadottak szerint) definiáltunk (*7.22. ábra*). A megfelelő műveleti időt a „*Muveleti ido*(*Pillanatnyi termek*)” nevű vektorban tároljuk, amelynek az indexe a terméktípus.



7.23. ábra: A „*Keszlet frissites*” nevű **Assign** modul dialógusablaka



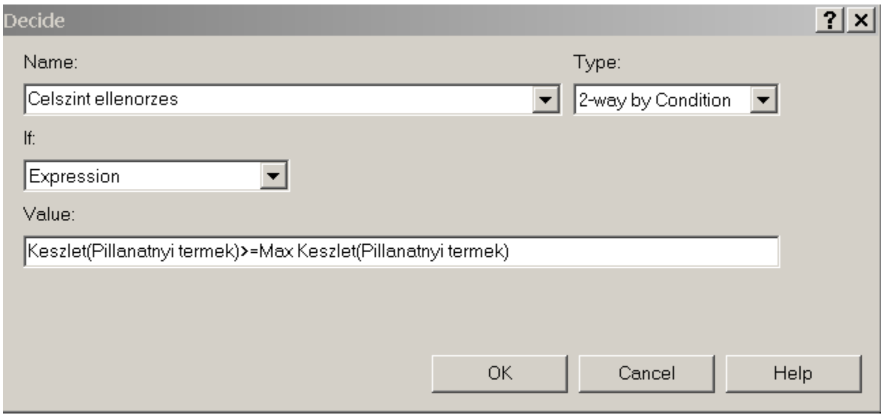
7.24. ábra: A „*Keszlet frissites*” nevű **Assign** modul **Assignments** mezejének dialógusablaka

Amikor egy tétel (batch) gyártása befejeződik, akkor a tételt a raktárban kell elhelyezni. Ez úgy valósul meg, hogy az anyagentitás belép a „*Keszlet frissites*” **Assign** modulba, amelynek a dialógusablaka a *7.23. ábrán* látható. A terméktípusok készletszintjeit a „*Keszlet(Pillanatnyi termek)*” nevű vektor tárolja, amelynek az indexe ugyancsak a terméktípus. Hasonló módon, a terméktípusok tételnagyságait a „*Batch Meret(Pillanatnyi termek)*” nevű vektor elemi tartalmazzák. A gyártott terméktípus készletfrissítéséhez a készletet egyszerűen a megnöveljük a terméktípus tételnagyságával. Az *Edit* gombra kattintva (*7.23. ábra*) megjelenik a *7.24. ábrán* látható hozzárendelés:

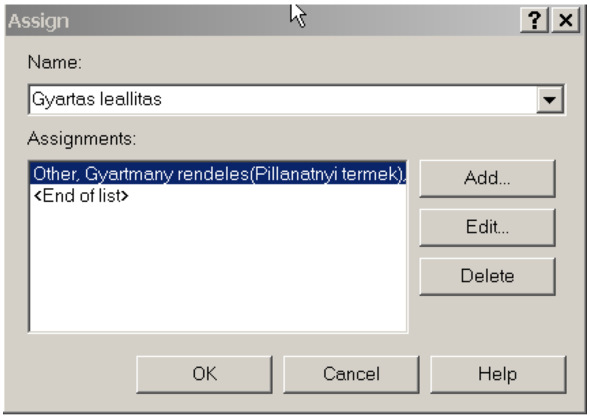
Keszlet(*Pillanatnyi termek*)= *Keszlet*(*Pillanatnyi termek*) + *Batch Meret*(*Pillanatnyi termek*).

A mező típusa *Other* jelzi, hogy egy vektor elemhez rendelünk értéket. Az **Arena** újabb verzióiban a vektorelemek hozzárendelése más formában is megvalósítható.

Ennél a pontnál az anyagentitásnak ellenőriznie kell, hogy a pillanatnyilag gyártott termék mennyisége elérte-e a maximális készletet jelentő célszintet, amit a „*Celszint ellenorzes*” nevű **Decide** modulban végzünk el (*7.25. ábra*). Megjegyezzük, a terméktípusok célszintjeit „*Max Keszlet*(*k*)” nevű háromelemű vektorban tároljuk. Az anyagentitás ellenőrzi a pillanatnyi terméktípus célszintjét, és ha az elérte vagy átlépte azt, akkor az anyagentitás a **Decide** modul *True* ágán lép ki a „*Gyartas leallitas*” nevű **Assign** modul felé (*7.26. ábra*). Ebben az anyagentitás leállítja a pillanatnyi terméktípus gyártását olyan módon, hogy a „*Gyartmany rendeles*(*Pillanatnyi termek*)” vektorelemhez 0 értéket rendel.



7.25. ábra: A „*Celszint ellenorzes*” nevű **Decide** modul dialógusablaka



7.26. ábra: A „*Gyartas leallitas*” nevű **Assign** modul dialógusablaka

Ezután az anyagentitás visszatér a „*Gyartsunk?*” nevű **Hold** modulba, hogy ismét meghatározza, melyik terméktípust kell a következő ciklusban gyártani.

Ha azonban a pillanatnyi termék célszintjét nem értük el, akkor az anyagentitás a „*Celszint ellenorzes*” nevű **Decide** modul *False* ágán lép ki és visszatér a „*Gyartasi muvelet*” nevű **Process** modulhoz (*7.18. ábra*) és terméktípus váltás nélkül elkezdődik a pillanatnyi termék újabb tételének a gyártása.

Failure - Advanced Process

	Name	Type	Up Time	Up Time Units	Down Time	Down Time Units	Uptime in this State only
1	Veletlen meghibasodas	Time	EXPO(200)	Minutes	NORM(70, 30)	Minutes	BUSY

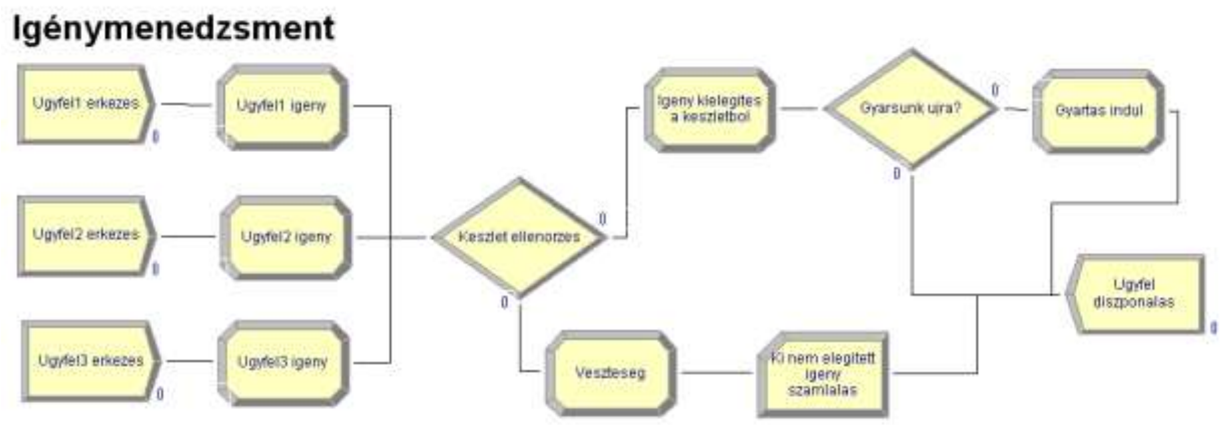
Double-click here to add a new row.

7.27. ábra: A **Failure** modul dialógustáblája

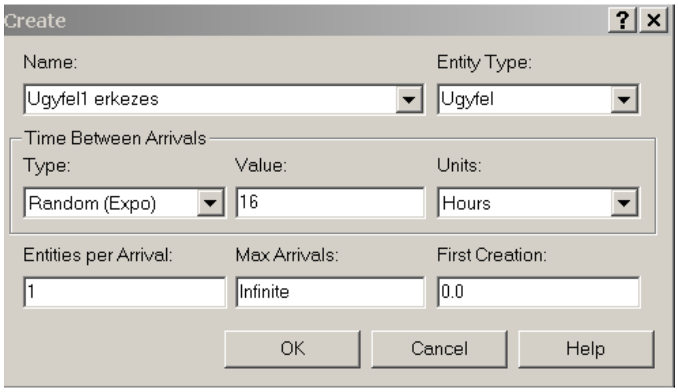
Végül térjünk vissza a gyártóeszköz (erőforrás) tapasztalat szerinti meghibásodásához, amely csak *busy* állapotban fordulhat elő. Ez a megszorítás táblázatnézetben szerkeszthető **Failure** modul dialógustáblájában specifikálható (*7.27. ábra*). Itt az Uptime in this State only mezőben a *BUSY* azt jelzi, hogy a gyártóeszköz csak akkor hibásodik meg, ha működik. Ezzel szemben, ha a mezőt üresen hagyjuk, akkor a meghibásodás bármikor bekövetkezhet, akkor is, ha tétlen, mivel a meghibásodási folyamat folytonos.

7.2.4 Az igénymenedzsment szegmens

A módosított igénymenedzsment szegmens folyamatábráját a *7.28. ábra* mutatja be, amely az igények érkezését modellezi a termelési és készletezési rendszerben. Ebben a modellben az érkezési folyamatot három **Create** modul reprezentálja az ábra baloldalán.



7.28. ábra: Többtermékes termelési-készletezési modell igénymenedzsment szegmense három termékkel



7.29. ábra: Az „*Ugyfel1 erkezes*” nevű **Create** modul dialógusablaka

Az első **Create** modul dialógus ablaka a *7.29. ábrán* látható, amely az első terméktípusra igényt tartó „*Ugyfel*” entitást generálja. A további **Create** modulok paraméteri a *7.10.* és a *7.11. táblázatokban* találhatók.

7.10. táblázat

Az „*Ugyfel2 erkezes*” nevű **Create** modul paraméterei

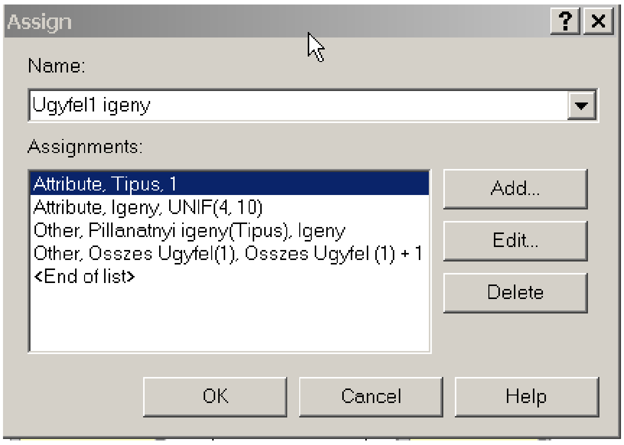
Name	Ugyfel2 erkezes
Entity Type	Ugyfel
Type Value Units	Random(Expo) 8 Hours

Hasonlóan, a három terméktípus igénylésének folyamatát is három **Assign** modul modellezi, ahol az igényelt terméktípust és az igényelt mennyiséget attribútumaként rendeljük az „*Ugyfel*” entitáshoz. Az attribútumok nevei: „*Tipus*” illetve „*Igeny*”. Az „*Ugyfel1 igeny*” nevű **Assign** modul a *7.30. ábrán* látható, amely az ügyféligényt rendel az 1 jelű terméktípushoz. Ebben a modulban a terméktípust az ügyfélentitás „*Tipus*”, és az igény nagyságát az ügyfélentitás „*Igeny*” nevű attribútumaihoz rendeljük. Az igény nagysága egyenletes eloszlású, a *7.9. táblázatban* megadott paraméterekkel.

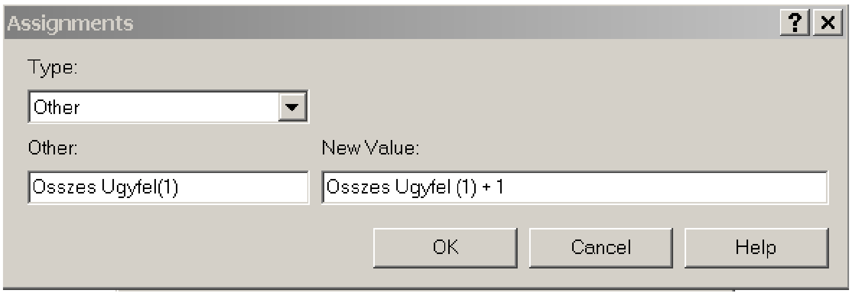
7.11. táblázat

Az „*Ugyfel2 erkezes*” nevű **Create** modul paraméterei

Name	Ugyfel2 erkezes
Entity Type	Ugyfel
Type Value Units	Random(Expo) 8 Hours



7.30. ábra: A „*Ugyfel1 igeny*” nevű **Assign** modul dialógusablaka



7.31. ábra: Az „*Osszes Ugyfel*(*k*)” vektort deklarálása az **Assignments** dialógusablakban

Ezenkívül, a modell az „*Osszes Ugyfel*(*k*)” nevű vektorban ügyféltípusonként nyilvántartja, illetve számlálja az összes érkező ügyfelet. A megfelelő vektorelemet az érkezés alkalmával 1-el növeli. A harmadik hozzárendelés részletei a *7.31. ábrán* láthatók, ahol „*Osszes Ugyfel*(1)” nevű vektorelem értékét 1-gyel növeljük. Itt a *Type* mezőben ismét az *Other* opciót használtuk az új **Arena** verziókban használható *Variable Array* (1*D*) opció helyett.

Az „*Ugyfel2 igeny*” é s az *Ugyfel3 igeny* nevű **Assign** modulok paramétereit a *7.13.* és *7.14. táblázatok* tartalmazzák.

Ezután az ügyfélentitás ellenőrzi, hogy a raktárban rendelkezésre áll-e az igényelt terméktípusból az igényelt mennyiség, azaz az ügyfél igénye kielégíthető-e. Az ellenőrzés a „*Keszlet ellenorzes*” nevű **Decide** modulban történik, amelynek a párbeszédablaka a *7.32. ábrán* látható.

7.13. táblázat

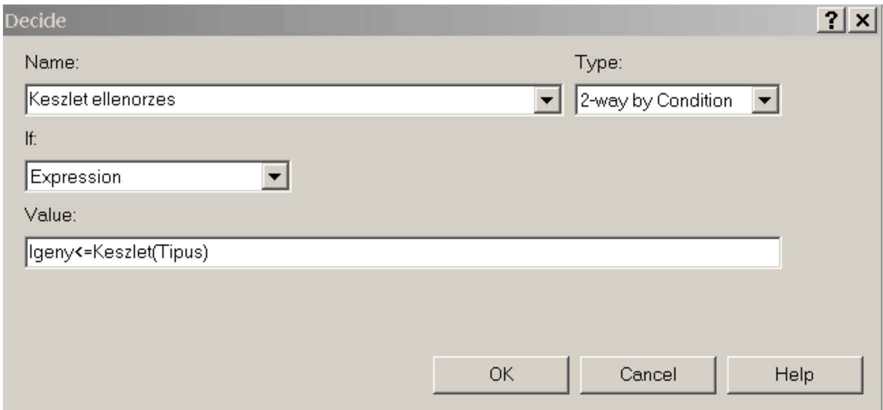
Az „*Ugyfel2 igeny*” nevű **Assign** modul paraméterei

Name	Ugyfel2 igeny
Type Attribute Name New Value	Attribute Tipus 1
Type Attribute Name New Value	Attribute Igeny UNIF(10, 15)
Type Other Name New Value	Other Pillanatnyi igeny(Tipus) Igeny
Type Variable Name New Value	Other Osszes Ugyfel (2) Osszes Ugyfel (2) + 1

7.14. táblázat

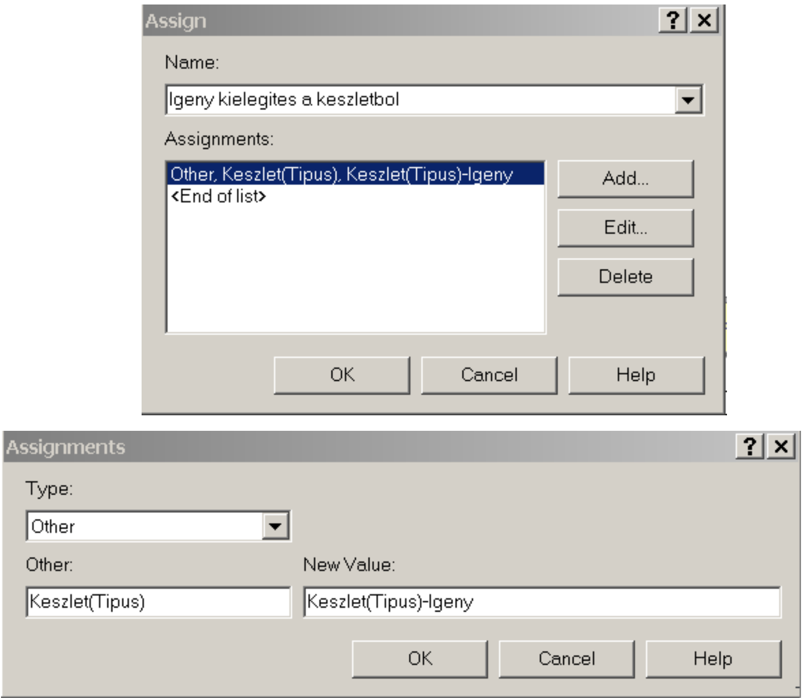
Az „*Ugyfel3 igeny*” nevű **Assign** modul paraméterei

Name	Ugyfel3 igeny
Type Attribute Name New Value	Attribute Tipus 1
Type Attribute Name New Value	Attribute Igeny UNIF(20, 30)
Type Other Name New Value	Other Pillanatnyi igeny(Tipus) Igeny
Type Variable Name New Value	Other Osszes Ugyfel (3) Osszes Ugyfel (3) + 1



7.32. ábra: A „*Keszlet ellenorzes*” nevű **Decide** modul dialógusablaka

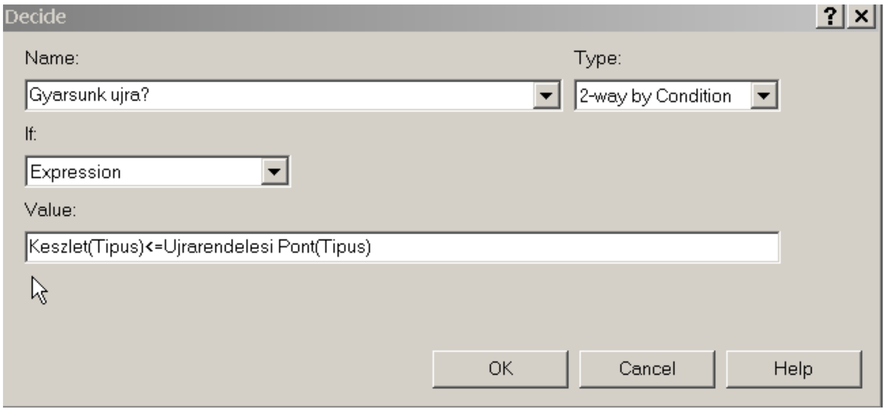
A vizsgálat két lehetséges eredménye: (1) a készletszint nem elegendően nagy a beérkezett igény kielégítéséhez, (2) a rendelkezésre álló készlet elegendően nagy. A továbbiakban leírjuk a két lehetséges esetből levezethető eredményt.



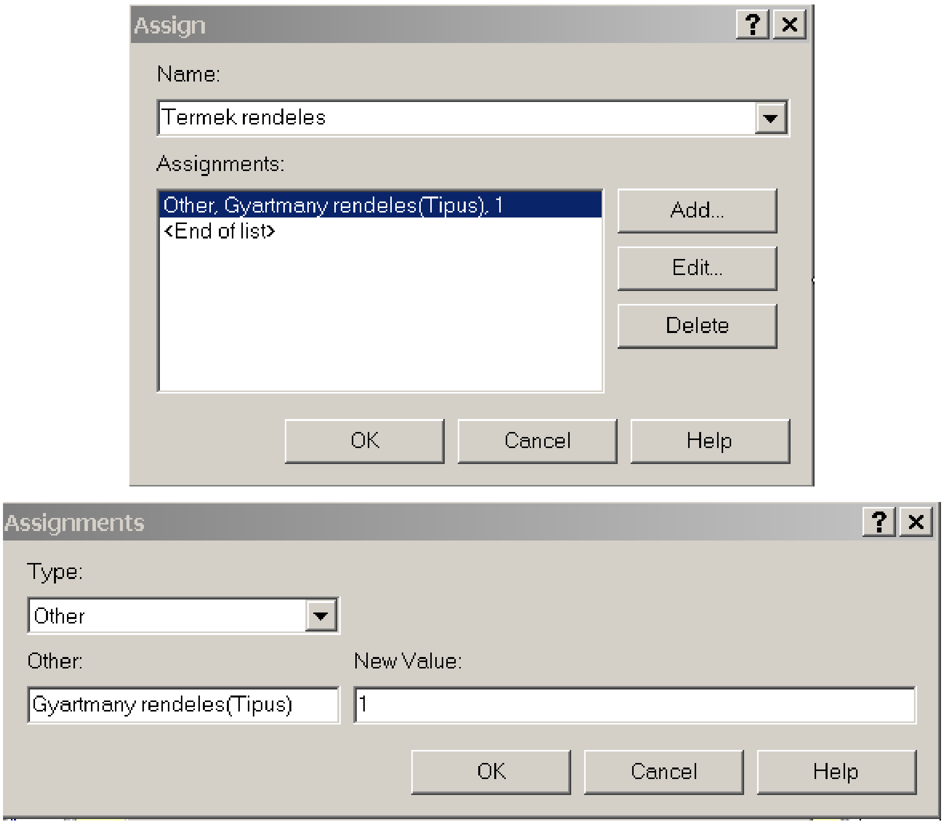
7.33. ábra: Az „*Igeny kielegites a keszletbol*” nevű **Assign** modul dialógusablaka

Tekintsük először azt az esetet, amikor a raktári készlet elegendő. Az elegendő termékmennyiség elérhetőségének feltétele a *Value* mezőben látható, ahol vegyük észre, hogy a terméktípusra vonatkozó információt az ügyfélentitás „*Tipus*” nevű attribútumában tároljuk. Ha a raktárban a készlet elegendő nagyságú, akkor a pillanatnyi ügyfél igénye ki lesz elégítve. Ebben az esetben az ügyfélentitás a *True* ágon hagyja el a modult és belép a „*Igeny kielegites a keszletbol*” nevű **Assign** modulba, ahol a megfelelő készlettípus mennyiségét csökkentjük az igénnyel. Ennek a modulnak a párbeszédablaka a *7.33. ábra* felső részén látható, amelyhez az *Edit* gombbal megnyitható, az ábra alsó részén elhelyezkedő **Assignments** dialógusablak kapcsolódik.

Az ügyfélentitás következő állomása a „*Gyarsunk ujra?*” nevű **Decide** modul, ahol megvizsgáljuk, hogy a készletszint az újrarendelési pont alá csökkent-e, amihez a *7.34. ábrán* a *Value* mezőben olvasható logikai kifejezést használjuk. Vegyük észre, hogy a *Value* mezőben a logikai kifejezés két vektorelem értékét, az igényelt terméktípus készletszintjét és a terméktípus újrarendelési pontját hasonlítja össze.

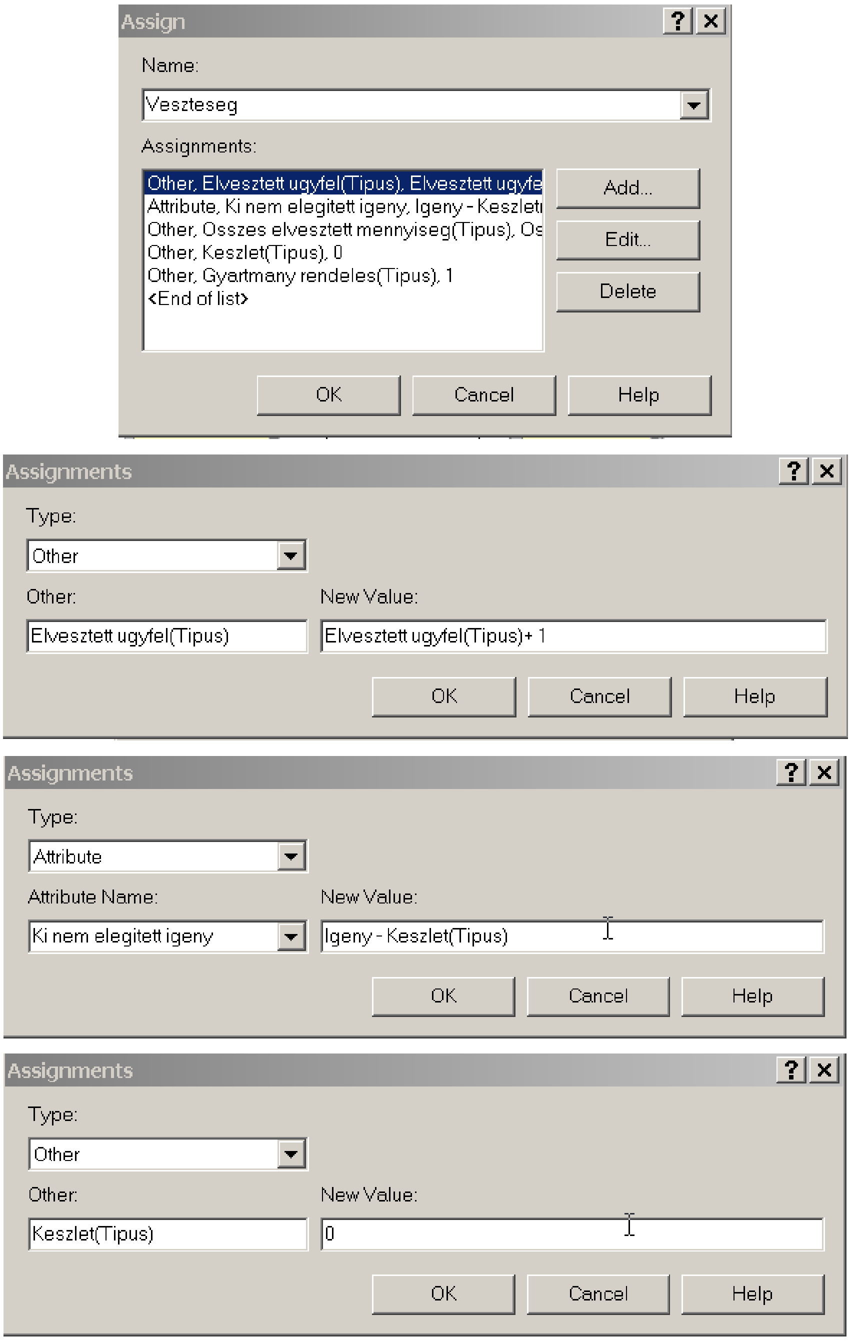


7.34. ábra: A „*Gyarsunk ujra?*” nevű **Decide** modul dialógusablaka



7.35. ábra: A „*Termek rendeles*” nevű **Assign** modul dialógusablaka

A *True* ágon távozó ügyfélentitás a „*Termek rendeles*” nevű **Assign** modulba lép (*7.35. ábra*), ahol inicializálja a „*Gyartmany rendeles*(*Tipus*)” vektorelemet (*7.35. ábra* alsó fele). A „*Gyartmany rendeles*(*Tipus*)” inicializálása egyszerűen azt jelenti, hogy a vektorelemhez 1 értéket rendelünk, amely azt jelzi, hogy a terméktípus készlete az újrarendelési pont alá csökkent, azaz hiányos. Az inicializálás eredményeként a terméktípus iránti gyártási igény időben jelezve lesz a gyártás felé, amely a prioritási sorrendnek megfelelően gondoskodik a terméktípus készletének a pótlásáról. Megjegyezzük, a vektorelemekhez a hiányperiódus alatt többször is hozzárendelhetjük az 1 értéket. Mivel ezek a hozzárendelések redundánsak (új információt nem tartalmaznak), ezért ártalmatlanok, a modell állapotának korrekt kezelését nem befolyásolják. Végül a leírt műveletek végrehajtása után az ügyfélentitás belép az „*Ugyfel diszponalas*” nevű **Dispose** modulba és elhagyja a modellt (*7.28. ábra*).



7.36. ábra: A „*Veszteseg*” nevű **Assign** modul dialógusablaka

A „*Gyarsunk ujra?*” nevű **Decide** modul *False* ágán kilépő ügyfélentitás közvetlen a **Dispose** modulba lép és távozik a szegmensből (*7.28. ábra*).

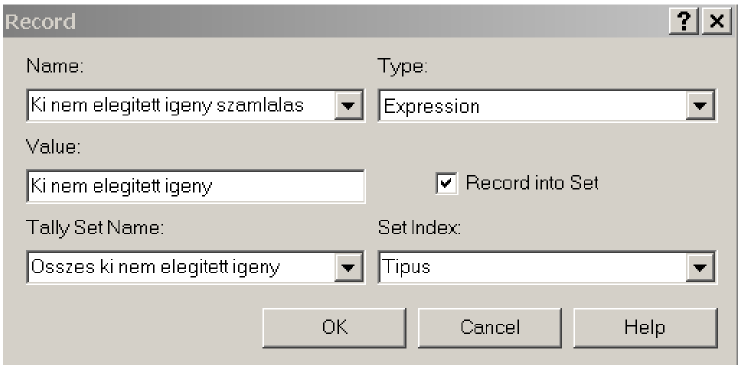
Most tekintsük azt az esetet, amikor a raktárkészlet („*Keszlet*(*Tipus*)") nem elegendő az ügyféligény kielégítéséhez, és ami azt eredményezi, hogy az ügyfél igényének egy hányada vagy a teljes igény elveszik, ami nemcsak az ügyfélnek, hanem a termelőnek is veszteséget jelent. Az ügyfél entitás ekkor a A „*Keszlet ellenorzes*" nevű **Decide** modul *False* ágán lép ki, és belép a „*Veszteseg*" nevű, öt hozzárendelést tartalmazó **Assign** modulba, amelynek a dialógus ablakát a *7.36 ábra* szemlélteti. Az első hozzárendelés a „*Elvesztett ugyfel(Tipus)*" vektorelem értékét növeli 1-gyel, azaz terméktípusonként számlálja a ki nem elégített ügyfeleket. A második hozzárendelés az elvesztett mennyiséget:

Igeny–Keszlet(*Tipus*)

rendeli az ügyfélentitás „*Ki nem elegitett igeny*" nevű attribútumához. A hozzárendelésből az is kiolvasható, hogy az ügyfél a *Keszlet*(*Tipus*) vektorelem értékének megfelelő mennyiséggel távozik. A harmadik hozzárendelés az összes elvesztett mennyiséget kumulálja:

Osszes elvesztett mennyiseg(*Tipus*)=*Osszes elvesztett mennyiseg*(*Tipus*)
+*Ki nem elegitett igeny*.

A negyedik hozzárendelés a terméktípus készletszintjét 0-ra csökkenti, és végül az ötödik hozzárendelés a „*Gyartmany rendeles*(*Tipus*)" vektorelemhez 1 értéket rendel, amely azt jelzi, hogy a terméktípus készlete 0-ra, az újrarendelési pont alá csökkent. Megjegyezzük, hogy értelemszerűen a hozzárendelések sorrendje nem változtatható meg.



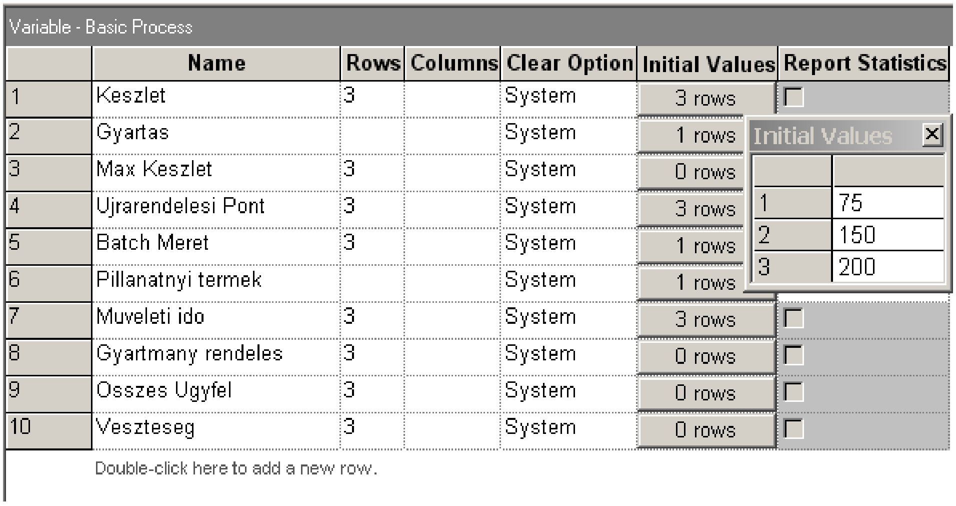
7.37. ábra: A „*Ki nem elegitett igeny szamlalas*" nevű **Record** modul dialógusablaka

Az ügyfélentitás ezután „*Ki nem elegitett igeny szamlalas*" nevű **Record** modulba lép be (*7.37. ábra*), ahol a *Value* mezőben megadott „*Ki nem elegitett igeny*" nevű attribútum értékét ügyféltípusonként kumuláljuk a *Tally Set Name* mezőben megadott „*Osszes ki nem elegitett igeny*" nevű háromelemű halmazban. Végül az ügyfélentitás a „*Ugyfel diszponalas*" nevű **Dispose** modulon keresztül távozik a szegmensből.

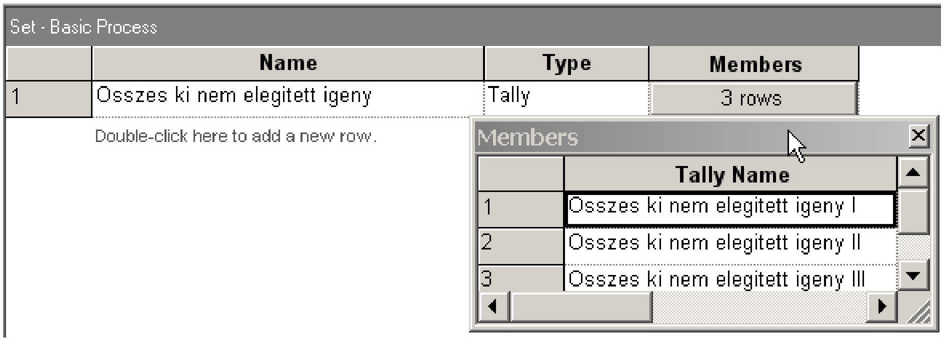
7.2.5 A modell inputparaméterei és statisztikái

Ebben a szakaszban a modell inputparamétereit és statisztikáit ismertetjük részletesen. Emlékezzünk arra, hogy az összes inputparamétert, beleértve a vektorokat is a **Basic Process** panelen elérhető **Variable** adatmodulban deklarálhatjuk.

A **Variable** adatmodul táblázatnézetben a *7.38. ábrán* látható a „*Keszlet*" változó kezdeti értékeivel. A változók dimenzióját (az elemek számát) az *Initial Values* mezőben a sorok száma jelzi. Például az első sorban a 3 *rows* azt jelenti, hogy a „*Keszlet*" nevű változó egy háromdimenziós vektor. A 0 *rows* azt jelzi, hogy a változónak nincs kezdeti értéke, az 1 *rows* pedig azt jelenti, hogy a változó egy közönséges 1 dimenziós változó. Az *n rows*, (*n*>1) *n* dimenziós vektorváltozót definiál. A *Clear Option* mezőben a *System* azt jelenti, hogy a szimuláció megszakításakor vagy az ismétlések kezdetekor a rendszer visszaállítja a kezdeti értékeket. Az egydimenziós változók statisztikáinak opcionális gyűjtését teszi elérhetővé a *Report Statistics* oszlopban látható négyzet bekapcsolása. A vektorváltozók statisztikáinak gyűjtésére a **Statistic** adatmodul alkalmas, amit később bemutatunk.



7.38. ábra: A **Variable** adatmodul táblázatnézetben a „*Keszlet*” nevű vektorváltozó kezdeti értékeivel



7.39. ábra: A **Set** (fent) és a kapcsolódó **Members** (lent) adatmodulok táblázatnézetben a *Tally* típusú „*Osszes ki nem elegitett igeny*” statisztikához

Emlékezzünk vissza, hogy a „*Ki nem elegitett igeny szamlalas*” nevű **Record** modulban a terméktípusonkénti (1, 2 és 3) összes ki nem elégített igény követésére *Set* (halmaz) típusú változót használtunk. Ehhez a háromdimenziós, „*Osszes ki nem elegitett igeny*” nevű *Set* típusú adatokat a **Basic Process** panelen található **Set** adatmodulban deklaráltuk (*7.39. ábra*).

7.40. ábra: A **Statistic** adatmodul táblázatnézetben a felhasználói statisztikák gyűjteményével

Amint már tudjuk, specifikus, a felhasználó által definiált statisztikai gyűjtemény a **Statistic** adatmodulban hozható létre (*7.40. ábra*). Itt újdonságot jelent, ezért jegyezzük meg, hogy a vektorváltozók statisztikáit elemenként külön-külön kell megadni. A terméktípusonkénti „*Raktari keszlet I, II* és *III*” *Time-Persistent* típusú statisztikák az időben átlagos raktárkészletet jellemzik, ugyanakkor a „*Folyamat allapot” Frequency* típusú statisztika. A „*Veszteseg szazalek I, II,* és *III*” a szimuláció végén számított *Output* típusú statisztika. Végül a „*Osszes ki nem elegitett igeny I, II és III*” a ki nem elégített ügyfelek számára vetített átlagot mutató *Tally* típusú statisztikák.

7.2.6. A szimuláció eredményei

A *7.41. ábra* a 100.000 óra hosszúságú szimuláció eredményeit mutatja. A **Frequencies** riportot vizsgálva a „*Beszerzes muvelet*” nevű erőforrás állapotának statisztikáit. Az erőforrás az idő 64%-ban volt *Busy*, azaz működött, 14%-ban volt *Idle*, azaz várakozott és 22%-ban volt *Failed*, azaz meghibásodás miatt állt.

13:23:14 **Frequencies** január 04, 2011

Többtermékes termelési Replications: 1

Replication 1 Start Time: 0,00 Stop Time: 100 000,00 Time Units: Hours

Folyamat allapot	Number Obs	Average Time	Standard Percent	Restricted Percent
BUSY	19,206	3.2950	63.28	63,28
FAILED	18,322	1.1762	21.55	21,55
IDLE	1,180	12.8522	15.17	15,17

13:21:31 **User Specified** január 4, 2011

Többtermékes termelési Replications: 1

Replication 1 Start Time: 0,00 Stop Time: 100 000,00 Time Units: Hours

Time Persistent

Time Persistent	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Gyartmany rendeles aktiv I	0.1973	0,008653471	0	1.0000
Gyartmany rendeles aktiv II	0.3711	0,011958004	0	1.0000
Gyartmany rendeles aktiv III	0.6287	0,009541857	0	1.0000
Raktari keszlet I	73.9237		0	105.00
Raktari keszlet II	137.73	1,46919	0	205.00
Raktari keszlet III	180.41	2,53026	0	305.00

Output

Output	Value
Veszteseg szazalek I	0.00095801
Veszteseg szazalek II	0.00905231
Veszteseg szazalek III	0.05890094

Other

None	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Osszes ki nem elegitett igeny I	5.0939	(Insufficient)	2.9405	9.2637
Osszes ki nem elegitett igeny II	9.8118	(Insufficient)	0.9008	14.9991
Osszes ki nem elegitett igeny III	19.2961		0.02894693	29.9972

7.41. ábra: A többtermékes termelési-készletezési rendszer szimulációjának eredményei

Megjegyezzük, ha az erőforrás hibája („*Veletlen meghibasodas*") a bármely állapotban előfordulhatna, nemcsak a *Busy* állapotban, akkor a javítási idő (*Failed* állapot) valószínűsége növekedne, és az *Idle* állapot valószínűsége csökkenne. A *Busy* állapot valószínűsége nem változna, mivel az erőforrás terhelése nem változik.

A terméktípusonkénti várakozási idő, amit a „*Gyartmany rendeles aktiv*" statisztika jellemez, a terméktípus prioritásától függően változik. A várakozási időhányad (várakozási idő/az összes idő) az 1 típusnál 20%, a 2 típusnál 38% és a 3 típusnál 63%. Amint az várható volt, a legkisebb prioritású terméktípus várakozott a legtöbbet, mivel a „*Beszerzes muvelet*" nevű erőforrást ritkábban tudta lekötni, mint a nagyobb prioritású termékek.

A terméktípusonkénti „*Raktári készlet*" mutatja, hogy az átlagos készletszint minden terméktípusnál az újrarendelési ponthoz közeli, ami azt jelzi, hogy az igények csak az erőforrás folyamatosan működésével elégíthetők ki. Ez nagyban a meghibásodásoknak köszönhető, illetve a *Failed* állapot nagy valószínűségének. A jelenséget alátámasztja az is, hogy minimum készletszint minden terméktípusnál 0, amiből arra következtethetünk, hogy időnként hiány jelentkezik. A készlethiány nagyságát terméktípusonként az Output szekcióban a „*Veszteseg szazalek*", a mennyiségét pedig az Other szekcióban az „*Osszes ki nem elegitett igeny*" jellemzi.

Az előző példához hasonlóan, a rendszer működése többféle módon javítható. Ismét felhívjuk a figyelmet a karbantartás fontosságára, és a javítási idő csökkentésére. Végül, hogy elkerüljük az alacsony prioritású terméktípus túlzott mellőzését, a terméktípusok közötti váltásokat korlátok előírásával szabályozhatjuk.

8. Matematikai emlékeztető

8.1. Mátrixszámítás

Egy **mátrix** számok táblázatos elrendezése. Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 0 & -15 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

egy 3x2-es („háromszor kettes") mátrix, ami azt jelenti, hogy olyan téglalap alakú elrendezés, amelyben három sor és két oszlop van. (A mátrixokat a könyvben kövér nagybetűkkel jelöljük.) A táblázatos elrendezésben szereplő számokat a mátrix elemeinek hívjuk. Például a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Egy 2x3-as mátrix, amelynek elemei 2, 3, 1, 0 −1, és 4. Általános formában egy nxm-es mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{bmatrix} = \left\| a_{ij} \right\|,$$

ahol a_{11}, a_{12},…a_{nm}, jelöli a mátrix elemeit, amelyek száma nxm. A mátrixot gyakran röviden $\left\| a_{ij} \right\|$-vel jelöljük, ahol a_{ij} a mátrix i-edik sorában és a j-edik oszlopában álló elem minden i=1, 2,…n és j=1, 2,…m esetén.

A mátrixok között fontos szerepet játszanak azok a speciális mátrixok, amelyeknek csak egyetlen sora vagy egyetlen oszlopa van, ezeket **vektoroknak** nevezzük. A vektorok lehetnek sor- és oszlopvektorok. A sorvektor

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n],$$

alakú, az oszlopvektor pedig

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

A vektorokat kövér kisbetűkkel jelöljük. Ha jelezni akarjuk, hány eleme van a vektornak, akkor n-dimenziós vektort, röviden n-vektornak mondjuk. Például az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

neve 4-vektor.

A mátrixok nem számok, ezért nincs eleve adott összegük, szorzatuk. Alkalmazásokban azonban sokszor kívánatos, hogy a mátrixokon értelmezzünk olyan műveleteket, amelyek hasonlítanak a számok körében végzett műveletekre. A mátrixok tipikus alkalmazási területe a lineáris algebra. Például az

(8.1.)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_1 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_1 + a_{33}x_1 = b_3 \end{aligned}$$

három ismeretlent tartalmazó és három egyenletből álló egyenletrendszer a_{ij}, x_j és b_j értékei mátrixok alakjában a következő formában írható:

(8.2.)
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Ha ezt a kifejezésmódot egy igen egyszerű szorzási szabállyal kapcsoljuk össze, az $\|a_{ij}\|$ i-edik sorának és az $\|x_j\|$ j-edik oszlopának elemeit összeszorozzuk, és a szorzatokat összeadjuk, akkor a (8.1.) egyenleteket kapjuk. Ezt a szabályt tetszőleges sorú és oszlopú mátrixra általánosíthatjuk azzal a feltétellel, hogy a baloldali mátrix oszlopainak a száma egyenlő a jobboldali mátrix sorainak a számával.

8.1.1 Két mátrix egyenlő

Tegyük fel, hogy **A**=$\|a_{ij}\|$ és **B**=$\|b_{ij}\|$ két olyan mátrix, amelyeknek külön-külön ugyanannyi soruk és ugyanannyi oszlopuk van. Azt mondjuk, hogy **A** és **B** egyenlő

(8.3.) **A**=**B**,

akkor, ha minden megfelelő elemük egyenlő (a_{ij}=b_{ij} minden i és j esetén).

8.1.2 Mátrixok összeadása és kivonása

Az **A** és a **B** mátrix összegét úgy képezzük, hogy összeadjuk a mátrixok megfelelő elemeit:

(8.4.) **A**+**B**=**C,**

ahol

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Például:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 & 11 \\ -11 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 12 \\ -11 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Hasonlóképpen a különbségre az

(8.5.) **A**−**B** =**A**+(−1)**B**=**C**,

ahol

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

Például:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & -8 & -11 \\ 11 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -10 \\ 11 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.1.3 Mátrixok szorzása skalárral

Egy mátrixot úgy szorzunk meg egy λ számmal, hogy minden elemét megszorozzuk λ-val:

(8.6.) $$\lambda\mathbf{A}=\mathbf{B},$$

ahol:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Például:

$$5\cdot\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 5 \\ 0 & -5 & 20 \end{bmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy a skalárral való szorzást kivéve (ahol csak egy mátrix szerepel) a műveleteket csak akkor értelmezhetjük, ha a két mátrix a soraikat és oszlopaikat tekintve ugyanolyan méretű. A műveletek igen egyszerűek, mert csak: az elemek közötti szokásos aritmetikai műveleteket kell elvégezni.

8.1.4 Mátrixok szorzása mátrixszal

A mátrixok szorzása nagyon fontos művelet, amely az eddigieknél sokkal bonyolultabb.

(8.7.) $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{C},$$

ahol:

(8.8.) $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m_A} a_{ik}\, b_{kj}\,.$$

Az **A** és a **B** mátrix szorzata az a **C** mátrix, amelynek az *i*-edik sorában és *j*-edik oszlopában álló elemet úgy kapjuk meg, hogy az **A** mátrix *i*-edik sorában levő minden elemet megszorozzuk a **B** mátrix *j*-edik oszlopában álló megfelelő elemmel, és aztán ezeket a szorzatokat összeadjuk. Ezért a mátrixok közötti szorzásnak akkor és csak akkor van értelme, ha az **A** mátrixnak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora a **B** mátrixnak ($m_A=n_B$). Tehát, ha **A** n_Axm_A-es mátrix, **B** pedig n_Bxm_B-es mátrix, akkor a szorzatuk, a **C** mátrix n_Axm_B-es mátrix:

Például:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot3+2\cdot2 & 1\cdot1+2\cdot5 \\ 4\cdot3+0\cdot2 & 4\cdot1+0\cdot5 \\ 2\cdot3+3\cdot2 & 2\cdot1+3\cdot5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 12 & 4 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}$$

Értelemszerűen, fordított sorrendben nem szorozhatjuk össze ezeket a mátrixokat, a

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

nincs értelmezve. Jegyezzük meg, hogy ha mind **AB**-nek mind **BA**-nak van értelme, kevés kivételtől eltekintve az

(8.9.) $$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Tehát a mátrixok szorzása a tulajdonságait tekintve lényegesen különbözik a számok szorzásának a tulajdonságaitól. Hogy megértsük, miért éppen így definiáltuk a mátrixok szorzatát, tekintsük ismét a (8.1.) egyenletrendszert.

Ezt mátrixalakban sokkal tömörebben is felírhatjuk:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b},$$

ahol:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

A mátrixok szorzatát ezért vezettük be a leírt módon. Jegyezzük meg jól, hogy mátrixok osztását nem értelmezzük.

Bár a mátrixszorzás az aritmetikai szorzás bizonyos tulajdonságaival nem rendelkezik, a mátrixműveletek eleget tesznek az alábbi szabályoknak:

(8.10.1.) $$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A},$$

(8.10.2.) $$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}),$$

(8.10.3.) $$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC},$$

(8.10.4.) $$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C},$$

ha a mátrixok méretei lehetővé teszik a jelzett műveletek végrehajtását.

8.1.5 A mátrixok egész számú hatványai

Az egészszámú hatványozás a mátrixszorzásra vezethető vissza. Például

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{AA}.$$

Ha n és m egész kitevő, akkor az

(8.11.) $$\mathbf{A}^n= \mathbf{AA}\ldots\mathbf{A},$$

(8.12.) $$\mathbf{A}^n\mathbf{A}^m=\mathbf{A}^m\mathbf{A}^n=\mathbf{A}^{n+m}.$$

8.1.6 Transzponált mátrix

A transzponálás egy olyan mátrixművelet, amelynek nincs aritmetikai analógiája Ez nem más, mint az oszlopok és sorok felcserélése, ami sokszor hasznos a szorzás kívánt sorrendű elvégzése szempontjából.

Az **A** mátrix transzponáltját $\mathbf{A}^\mathrm{T}$-vel jelöljük, és ha

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

akkor az

$$\mathbf{A}^\mathrm{T}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

8.1.7 Zérus mátrix

A **0** zérus mátrix a 0 számmal analóg mátrix. A **0** zérus mátrixnak minden eleme 0, például a

$$\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bármilyen **A** mátrixra

(8.13.) $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$, $\mathbf{A}-\mathbf{A}=\mathbf{0}$, $\mathbf{0}\mathbf{A}=\mathbf{0}=\mathbf{A}\mathbf{0}$,

ahol a **0** zérus mátrix olyan méretű, hogy a műveletek elvégezhetők.

8.1.8 Egységmátrix

A 0 és az 1 olyan számok, amelyek különleges szerepet játszanak az aritmetikában. Analóg módon vannak különleges mátrixok, amelyek hasonló szerepet játszanak a mátrixok körében. Az l-es számmal analóg az **E** **egységmátrix**. Az egységmátrix egy négyzetes mátrix, amelynek a főátló kivételével minden eleme nulla. A főátló a bal fent induló és jobbra lefelé tartó átló, amelynek elemei 1-gyel egyenlők. Az

(8.14.) $\mathbf{A}=\mathbf{E}$,

ahol az

(8.15.) $$a_{ij}=\begin{cases}0, & \text{ha } i\neq j\\ 1, & \text{ha } i=j\end{cases}.$$

Például:

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Az **E** sorainak és oszlopainak számát tetszőlegesen rögzíthetjük. Az **E** azért analóg az l-es számmal, mert bármilyen **A** mátrixra

(8.16.) $\mathbf{E}\mathbf{A}=\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{E}$,

ahol **E** minden esetben olyan méretű, hogy a szorzásoknak van értelmük.

8.1.9 Konjugált mátrix

Az adott négyzetes mátrix (**A**) transzponált mátrixának ($\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$) aldeterminánsaival alkotott négyzetes mátrix. Jelölése: $\mathbf{A}^{*}$.

Példa

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ -2 & 4 & 2\end{bmatrix}.$$

Az **A** transzponáltja:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

A konjugált mátrix az aldeterminánsokkal:

$$\mathbf{A}^{*}=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}3 & -2\\ 0 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

A konjugált mátrix:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -8 & 4 & -2 \\ 12 & -10 & -3 \end{bmatrix}$$

8.1.10 A mátrix inverze

A **B** mátrix az **A** mátrix inverze, ha

(8.17.) $$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}.$$

Az inverz mátrix jelölése

(8.18.) $$\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}.$$

A négyzetes mátrix inverzét a következőképpen írhatjuk fel:

(8.19.) $$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|},$$

ahol: az $\mathbf{A}^*$ az **A** mátrix konjugáltja, és $|\mathbf{A}|$ az **A** mátrix determinánsa. Az $\mathbf{A}^{-1}$ meghatározását a következő sorrendben végezzük, kiszámítjuk az $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^*$ mátrixokat, majd az $|\mathbf{A}|$ E=$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^*$ összefüggésből az $|\mathbf{A}|$ determinánst, és végül az $\mathbf{A}^{-1}$–et. Például:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -12 & -6 & 12 \\ -10 & 3 & -22 \\ 6 & -21 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}|\mathbf{E} = \mathbf{AA}^* = \begin{bmatrix} -96 & 0 & 0 \\ 0 & -96 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-96}\begin{bmatrix} -12 & -6 & 12 \\ -10 & 3 & -22 \\ 6 & -21 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1250 & 0{,}06250 & -0{,}1250 \\ 0{,}1042 & -0{,}03125 & 0{,}2292 \\ -0{,}0625 & 0{,}21875 & 0{,}0625 \end{bmatrix}$$

Megjegyezzük az inverz mátrix számítására léteznek más, kényelmesebb számítási módszerek is.

8.1.11 A mátrix felbontása részmátrixokra

Egyes esetekben célszerű egy mátrixot néhány kisebb blokkra, részmátrixra felbontani. Például egy 3x4 -és mátrix felbontása a következő lehet:

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{33} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

ahol a részmátrixok:

$$\mathbf{A}_{12}=\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21}=\begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22}=\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Ekkor a műveleteket részmátrixonként végezhetjük, ha a blokk mérete olyan, hogy a műveletet megengedi.

Például, ha a 4xl-es **B** mátrixot úgy osztjuk blokkokra, hogy

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

akkor az **AB** szorzat

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_1+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_{21}b_1+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix}.$$

A részmátrixokra bontás egyik fontos alkalmazása, hogy lehetővé teszi egy *m*x*n*-es mátrix *n* sorvektorra vagy *m* oszlopvektorra bontását. A mátrix tulajdonságai e vektorok a segítségével vizsgálhatók. Ennek bemutatására, tekintsük egy ugyanolyan típusú (oszlop-, vagy sor-) *n*-vektoroknak az $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m$ halmazát.

Definíció: A vektorok $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m$ halmazát lineárisan összefüggőnek nevezzük, ha vannak olyan c_1, $c_2,\ldots,c_\mathrm{m}$ számok, nem mind nulla, hogy

(8.20.) $$c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2+\ldots+c_m\mathbf{x}_m=\mathbf{0}.$$

Egyébként a vektorok lineárisan függetlenek.

Például, ha *m*=3 és

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{x}_3=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Az összefüggőség meghatározásához a

$$\begin{gathered} c_1+2c_3=0 \\ c_1+c_2+5c_3=0 \\ c_1+c_2+5c_3=0 \\ c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2+c_3\mathbf{x}_3=\mathbf{0} \end{gathered}$$

egyenletrendszert kell megoldani. Az első egyenletből a

$$\frac{c_1}{c_3}=-2, \text{ illetve a } c_1=-2c_3$$

Az utóbbi eredményt a második egyenletbe helyettesítve a

$$-2c_3 + c_2 + 5c_3 = c_2 + 3c_3 = 0,$$

$$\frac{c_2}{c_3} = -3.$$

Az utolsó egyenletet c_3-al elosztva, a

$$\frac{c_1}{c_3}\mathbf{x}_1 + \frac{c_2}{c_3}\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = \mathbf{0},$$

és az előző eredményeket helyettesítve, a

$$2\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = \mathbf{0},$$

amelyből az

$$\mathbf{x}_3 = 2\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2.$$

Tehát $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ lineárisan összefüggők, mivel az egyiket ki lehet fejezni a többiek lineáris kombinációjaként. Ha viszont az

$$\mathbf{x}_3 = [2 \quad 5 \quad 6].$$

lenne, akkor $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ is lineárisan független lenne.

Definíció: Vektorok egy halmazának a **rangja** a halmazból választható lineárisan független vektorok maximális száma.

Az előbbi példában az $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ vektorok rangja 2 volt, majd az $\mathbf{x}_3$ megváltoztatása után 3 lett.

Definíció: A vektorok egy halmazának **bázisa** a halmazból vett olyan lineárisan független vektorok, amelyek lineáris kombinációjaként a halmaz minden eleme előállítható (azaz a halmaz minden vektora a bázisvektorok számszorosainak az összege).

Az előbbi példában, mielőtt $\mathbf{x}_3$-at megváltoztattuk, $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ bázisa a $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ halmaznak.

1. Tétel: Vektorok egy halmazából választott r lineárisan független vektor akkor és csak akkor bázisa a halmaznak, ha a halmaz rangja r.

Ezekből a vektorokra vonatkozó eredményekből a mátrixokra is származtathatunk bizonyos fontos tudnivalókat.

Definíció: Egy mátrix **sorrangja** a mátrix sorvektoraiból álló halmaz rangja. A mátrix **oszloprangja** a mátrix oszlopvektoraiból álló halmaz rangja.

Például az előbbi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix sorrangjáról megállapítottuk, hogy 2. Meg lehet mutatni, hogy az oszloprangja is 2. Ez nem véletlen, amint a következő eredmény mutatja.

2. Tétel: Bármely mátrix sorrangja és oszloprangja megegyezik egymással. Ezért csak: a mátrixok rangjától beszélünk.

Az utolsó fogalom, amelyet meg kell beszülnünk, a mátrixok inverze. Tudjuk, hogy minden nem nulla k számnak van inverze, azaz reciproka, $k^{-1}=1/k$, amellyel

$$kk^{-1} = k^{-1}k = 1.$$

Van-e ennek analógiája a mátrixok körében? Vagyis igaz-e, hogy bármely nem nulla **A** mátrix esetén létezik $\mathbf{A}^{-1}$ mátrix, amellyel

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$$

Ha **A** nem négyzetes (azaz sorainak és oszlopainak a száma különböző), akkor a válasz mindig nem, mert $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$ különböző méretűek lennének, tehát nem lehetnének egyenlők egymással. Ha viszont **A** négyzetes, akkor a válasz az, hogy bizonyos feltételek mellett a kérdésre pozitív válasz adható, amint azt az *8.3. tételben* látni fogjuk.

Definíció: Egy mátrixot **nem szingulárisnak** nevezünk, ha rangja megegyezik a sorainak és oszlopainak számával. Egyébként a mátrix **szinguláris**.

A definíció szerint csak négyzetes mátrix lehet nem szinguláris. Hasznos módszert nyújt a mátrixok nem szingularitásának a vizsgálatára az a tény, hogy egy mátrix pontosan akkor nem szinguláris, ha determinánsa nem nulla.

3. Tétel:

a) Ha **A** nem szinguláris, akkor létezik egy egyértelműen meghatározott nem szinguláris $\mathbf{A}^{-1}$ mátrix, az **A** inverze, amellyel $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

b) Ha **A** nem szinguláris és **B** olyan mátrix, hogy **AB**=**E** vagy **BA**=**E**, akkor **B**=$\mathbf{A}^{-1}$.

c) Csak nem szinguláris mátrixnak van inverze.

Példaként tekintsük az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

mátrixot. Az **A** rangja 2, tehát a mátrix nem szinguláris. Ezért **A**-nak van inverze, amely történetesen

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 1 & -5\end{bmatrix}$$

Ezért az

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -4\\ 1 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\cdot 1-4\cdot 1 & 5\cdot(-4)+(-4)\cdot(-5)\\ 1\cdot 1+(-1)\cdot 1 & 1\cdot(-4)+(-1)(-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

és az

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 5-4\cdot 1 & 1\cdot(-4)+(-4)\cdot(-1)\\ 1\cdot 5+(-5)\cdot 1 & 1\cdot(-4)+(-5)(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

A mátrixműveletek elvégzése kézi számolással a módszertől függetlenül mindig munkaigényesek, ezért a számításhoz célszerű számítógép programot használni. A sokak számára elérhető Excel program mátrixfüggvényei:

MDETERM(tömb): Egy tömb mátrix-determinánsát számítja ki.

MSZORZAT(tömb1;tömb2): Két tömb mátrix-szorzatát adja meg. Eredményként olyan tömböt ad, amely ugyanannyi sort tartalmaz, mint a tömb1 és ugyanannyi oszlopot, mint a tömb2.

INVERZ.MÁTRIX(tömb): Egy tömbben található mátrix inverz mátrixát adja eredményül.

8.2. A valószínűség és a valószínűségi változó fogalma

8.2.1 A valószínűség fogalma

Ha valamely E esemény megfigyelésére N számú kísérletet végzünk, és a kísérletben az E esemény bekövetkezéseinek a száma (más szóval a gyakorisága) n, akkor a

$$p = P(E) = \frac{n}{N}$$

hányadost az E esemény **valószínűségének**, más szóval **relatív gyakoriságának** nevezzük.

Az E esemény kiegészítő valószínűsége:

$$q = 1 - p = \frac{N-n}{N}.$$

Bármely esemény valószínűsége 0 és 1 közé esik. A lehetetlen eseménynek 0, a bizonyosnak az 1 valószínűség felel meg.

8.2.2 Feltételes valószínűség

Az A esemény megvalósulásának valószínűségét, azon feltétel mellett, hogy a B esemény megvalósul, feltételes valószínűségnek nevezzük. Ezt a következőképpen jelöljük:

$$P(A|B),$$

és többnyire így olvassuk: „az A esemény, feltéve, hogy a B bekövetkezett”.

Szemben az A eseménynek a B eseményre vonatkoztatott feltételes valószínűségével gyakran használjuk az A valószínűsége helyett az A „a priori” valószínűsége kifejezést. Ilyen módon azt a tényt húzzuk alá, hogy nem foglalkozunk valamely más esemény megvalósulásával.

8.2.3 Valószínűségek összeadása és szorzása

Annak valószínűsége, hogy bizonyos egymást kizáró A és/vagy B (A egyedül, B egyedül, vagy A és B együttesen) események valamelyike bekövetkezik, az A és B **események valószínűségének összegével** egyenlő:

$$P(A+B)$$

Legyen például egy dobozban 5 fekete, 3 fehér és 2 piros golyó. Annak valószínűsége, hogy a dobozba vaktában benyúlva fehér golyót emelünk ki 3/10=0,3. A piros golyó kiemelésének valószínűsége 2/10=0,2. Annak valószínűsége, hogy pirosat vagy fehéret 0,2+0,3= 0,5.

Események együttesének valószínűsége:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Ha az események kölcsönösen kizárják egymást, azaz

$$P(A+B) = 0,$$

akkor

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Annak valószínűsége, hogy bizonyos együtt is bekövetkezhető A és B események mindegyike bekövetkezik (együttesen valósul meg), a szóban forgó **valószínűségek szorzatával** egyenlő:

$$P(AB)$$

Az összetett valószínűségek összefüggése:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Az előző példában annak valószínűsége, hogy a dobozba egymásután, vaktában kétszer belenyúlva először fehéret, majd piros golyót emelünk ki, ha az először kihúzott golyó visszatesszük 0,3·0,2= 0,06. Ha nem tesszük vissza az először kihúzott golyót, akkor 0,3·2/9=0,067.

8.2.4 A valószínűségi változó

Ha valamely ξ változó a következő értékeket veheti fel:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

rendre az alábbi valószínűségekkel:

$$p(x_1), p(x_2) \ldots, p(x_n),$$

ahol

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1,$$

akkor (diszkrét) **valószínűségi változónak** nevezzük, ξ-vel jelöljük, lehetséges értékeit pedig x_i-vel.

Egy teljes eseményrendszer elemi eseményeihez rendelt ξ valószínűségi változó **diszkrét** eloszlású, ha a lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Például, ha két kockával való dobásnál a dobott számok összegét vizsgáljuk, akkor az elemi események száma véges: 6^2=36. A valószínűségi változó legyen a dobott számok összege $\xi=i+k$ (i az egyik, és k a másik kockán látható pontok száma), ami szintén véges:

$$\xi=i+k=2, 3, 4, \ldots, 12.$$

A dobott számok összege tehát diszkrét valószínűségi változó.

Egy teljes eseményrendszer elemi eseményeihez rendelt ξ valószínségi változó **folytonos** eloszlású, ha lehetséges értékei folytonosan töltenek ki egy vagy több véges intervallumot, vagy a teljes $(-\infty, +\infty)$ intervallumot.

Például folytonos valószínűségi változóhoz jutunk, ha egy R sugarú kör alakú céltáblára lövünk (feltételezve, hogy a céltáblát eltaláljuk), és a becsapódás helyét vizsgáljuk. Ennél a kísérletnél az elemi események száma (a céltábla pontjainak a számossága) nem megszámlálható. A valószínűségi változó (ξ) lehetséges értékei legyenek a találat helyének a középponttól való távolsága r. Az r értékek a $[0;R]$ intervallum pontjai, ugyancsak nem megszámlálhatóak, ezért a $\xi=r$ folytonos valószínűségi változó.

A valószínűségi változó értelmezéséből következik, hogy ha ξ egy valószínűségi változó, akkor annak konstanssal való szorzata, négyzete, négyzetgyöke, stb. ugyancsak valószínűségi változó. Tehát, ha ξ valószínűségi változó, akkor annak bármely valós függvénye

$$\eta=g(\xi)$$

is valószínűségi változó.

Ugyancsak a valószínűségi változó értelmezéséből következik, hogy két vagy több valószínűségi változó összege, szorzata vagy hányados stb. is valószínűségi változó. Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók, akkor ezek bármely n változós valós függvénye

$$\eta=g(\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_n)$$

is valószínűségi változó.

8.2.5 A valószínűségeloszlás és a sűrűségfüggvény

Ahhoz, hogy egy valószínűségi változó teljesen jellemezve legyen, ismernünk kell az általa felvehető értékek (x_i) összességét, valamint a felvehető értékek előfordulásának valószínűségét $p(x_i)$.

Diszkrét valószínűségi változó esetén ezeket meg is tudjuk határozni. A ξ diszkrét valószínűségi változó minden egyes x_i értékéhez tartozik egy

$$p_i = p(x_i) = P(\xi = x_i)$$

valószínűség.

Folytonos valószínűségi változó esetén azonban általában bármely x_i értékre a $P(\xi=x_i)=0$, így csak azt tudjuk megmondani, hogy a ξ valószínűségi változó milyen valószínűséggel esik az $[x_i; x_i+\Delta x_i]$ intervallumba.

Ennek megfelelően diszkrét valószínűségi változó esetén a valószínűségi változóról a **valószínűségeloszlás**, folytonos valószínűségi változó esetén a **sűrűségfüggvény** ad közelebbi felvilágosítást.

Diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlása

Definíció. Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, amely véges számú vagy megszámolhatóan végtelen $x_1, x_2,\ldots,x_n$ lehetséges értékeket rendre $p_1, p_2,\ldots,p_n$ valószínűségekkel veszi fel, akkor az összetartozó

$$(x_i; p_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

számpárok összességét a ξ diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlásának nevezzük, amennyiben eleget tesz a következő feltételeknek:

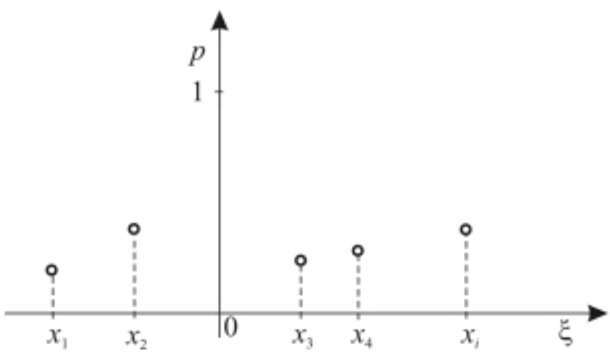
(1) tetszőleges i-re:

$$0 \le p_i \le 1,$$

(2) mivel egy teljes eseményrendszer elemi eseményeihez rendelt számértékek $x_1, x_2,\ldots,x_n$, szükségképpen

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P(\xi = x_i) = 1.$$

Bármely diszkrét valószínűségi változó esetén teljesül az (1) és (2) feltétel, és megfordítva, ha ezek teljesülnek, akkor van olyan diszkrét valószínűségi változó, amelynek eloszlása a éppen az adott $(x_i; p_i)$ számpárokhoz vezet.



8.1. ábra: Diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlása

Ha ismert egy ξ diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlása, a $(x_i; p_i)$ számpárok összessége, akkor annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó lehetséges értékei a valós számegyenes $[a;b]$ intervallumába esnek, megegyezik az $[a;b]$ intervallumba eső valószínűségi változókhoz tartozó valószínűségek összegével. Vagyis, ha a valószínűségi változóknak az $[a;b]$-beli lehetséges véges számú értékei x_j, $x_{j+1},\ldots,x_{j+m}$, akkor a

$$P(a \leq \xi \leq b) = \sum_{i=j}^{j+m} p_i \ .$$

A diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlás grafikonját a *8.1. ábra* szemlélteti. Azt az x_1 értéket, amelyhez a legnagyobb valószínűség tartozik, a változó **legvalószínűbb értékének** nevezzük.

Folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

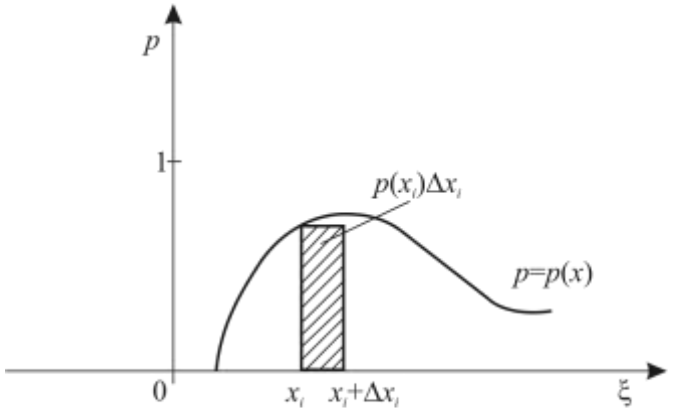
Amennyiben ξ folytonos valószínűségi változó, a valószínűségi változó tetszőleges $\xi=x_i$ értékére $p_i=P(\xi=x_i)=0$. A ξ folytonos valószínűségi változó minden x_i értékéhez tehát nem rendelhető $p_i \neq 0$ valószínűség. Helyette a ξ folytonos valószínűségi változóhoz egy, a valós számok halmazán értelmezett folytonos (illetve véges számú hely kivételével folytonos) $y=p(x)$ függvényt rendelünk. Ennek az a tulajdonsága, hogy ha a valószínűségi változó bármely x_i helyét tartalmazó Δx_i intervallum hosszát megszorozzuk $p(x_i)$-vel, ez a szorzat közelítőleg megadja annak a valószínűségét, hogy a ξ valószínűségi változó az $[x_i; x_i+\Delta x_i]$ intervallumba esik (*8.2. ábra*), azaz a

$$p(x_i)\Delta x_i \approx P(x_i \leq \xi \leq x_i + \Delta x_i)$$

illetve a

$$p(x_i) \approx \frac{P(x_i \leq \xi \leq x_i + \Delta x_i)}{\Delta x_i}.$$

A közelítés annál jobb, minél kisebb Δx_i, és amennyiben a jobb oldali hányadosnak létezik határértéke, az ily módon értelmezett $p(x)$ függvényt a ξ valószínűségi változó **sűrűségeloszlásának** vagy röviden **sűrűségfüggvényének** nevezzük. Az értelmezésből következik, hogy a sűrűségfüggvény olyan függvény, amelynek értéke nem valószínűség. hanem olyan számérték, amelyhez az ún. „átlagvalószínűség” közeledik, ha Δx_i minden határon túl csökken.



8.2. ábra: Folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

Definíció. Ha ξ folytonos valószínűségi változó, amely meghatározott valószínűséggel esik a valós számegyenes bármely interval1umára, akkor a folytonos (illetve véges számú elsőfajú szakadási hely kivételével folytonos) $y=p(x)$ függvényt a ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezzük, amennyiben az eleget tesz a következő feltételeknek:

(1) a valós számegyenes bármely x értékére a

$$p(x) \geq 0,$$

(2)) tetszőleges $a < b$ valós számokra az

$$\int_a^b p(x)dx = P(a \leq \xi \leq b),$$

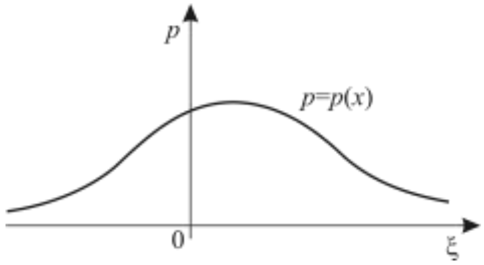
(3) a teljes valós számegyenesre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

Minden folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye eleget tesz e kikötéseknek és viszont: minden olyan, a valós számegyenesen értelmezett függvény, amely eleget tesz az (1), (2) és (3) feltételeknek, felfogható egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvényének.

Megjegyzés. A folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye megfelel a diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlásának. Ez az analógia jól szemléltethető a sűrűségfüggvény geometriai interpretációja alapján. Ugyanis:

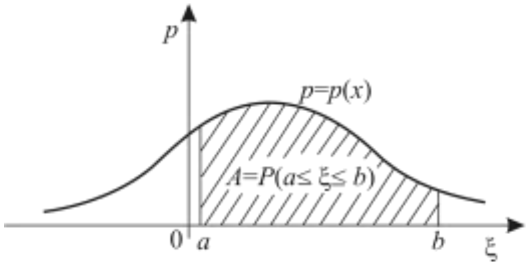
(1) A $p(x)$ sűrűségfüggvény nem negatív függvény, ami azt jelenti, hogy görbéje mindenütt a valós tengely fölött helyezkedik el (*8.3. ábra*). Ez felel meg annak a feltételnek, hogy diszkrét valószínűségi változó esetén a valószínűségi változó minden lehetséges értékéhez pozitív valószínűség tartozik.



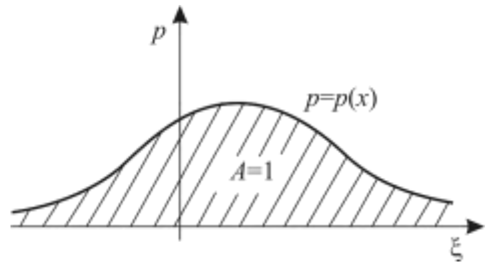
8.3. ábra

(2) $$\int_a^b p(x)dx = P(a \leq \xi \leq b)$$

azt jelenti, hogy a sűrűségfüggvény görbéjének [a;b] intervallumbeli görbe alatti területének mérőszáma megadja annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó az [a;bl intervallumba esik (*8.4. ábra*). Ez felel meg annak a feltételnek, hogy diszkrét valószínűségi változó esetén annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó az [a;b] intervallumba esik, megegyezik az intervallumbeli valószínűségi változók lehetséges értékeihez tartozó valószínűségek összegével.



8.4. ábra



8.5. ábra

(3) A sűrűségfüggvény $(-\infty, +\infty)$ intervallumbeli integrálja: egyenlő 1-gyel (*8.5. ábra*). Ez felel meg annak a feltételnek, hogy diszkrét valószínűségi változó esetén:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P(\xi = x_i) = 1.$$

8.2.6 Valószínűségi változók eloszlásfüggvénye

A valószínűségi változók igen sokféle típusúak lehetnek. A sok különböző típusú valószínűségi változó értékének véletlen ingadozásának egyöntetű tárgyalása érdekében, bevezetjük az ún. **eloszlásfüggvén**y fogalmát.

Definíció. Tetszőleges ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a valós x-ek halmazán értelmezett

$$F(\mathrm{x}) = P(\xi<x)$$

függvény, amely megadja annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó x-nél kisebb értéket vesz fel.

Az eloszlásfüggvények diszkrét és folytonos valószínűségi változó esetén analóg tulajdonságúak. Éspedig:

(1) $F(x)$ monoton nem csökkenő,

(2) minden x pontban balról folytonos,

(3) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1, \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Az (1), (2), (3) feltétel minden eloszlásfüggvényre teljesül, és viszont, minden (1), (2), (3) feltételnek eleget tevő függvény eloszlásfüggvénynek tekinthető.

Ha már ismerjük az $F(x)$ eloszlásfüggvényt x minden értékére, akkor meg tudjuk határozni annak a valószínűségét, hogy ξ az $[a;b]$ intervallumba esik (a és b valós számok), mégpedig

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$$

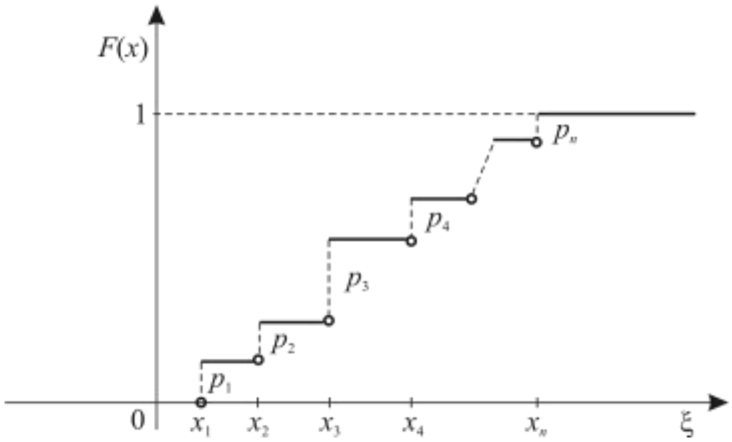
Az eloszlásfüggvény mindezen tulajdonságait diszkrét és folytonos változó esetén külön igazoljuk.

Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

Ha ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó, mely az $x_1, x_2,\ldots,x_n$ lehetséges értékeit $p_1, p_2,\ldots,p_n$, pozitív valószínűségekkel veszi fel (8.*6. ábra*), akkor eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \sum_{x_i<x} P(\xi = x_i) = \sum_{x_i<x} p_i$$

Vagyis az eloszlásfüggvény értéke egy tetszőleges x helyen megegyezik a valószínűségi változó x-nél kisebb értékeihez tartozó valószínűségeinek összegével.



8.6. ábra: Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

1. Tétel. Ha egy ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, akkor annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó a lehetséges értékeket tartalmazó $[a;b]$ intervallumba esik, azaz

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$$

2. Tétel. A véges sok értéket felvevő diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye monoton nem csökkenő, balról folytonos, lépcsős (szakaszonként konstans) függvény, amelynek ugráshelyei a valószínűségi változó lehetséges értékei: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (az x_i-ket növekvő sorrendben írtuk le), ugrásainak nagysága pedig a $p_1, p_2, \ldots, p_n$, valószínűségek (*8.6. ábra*), így

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \xi \le x_1 \\ \sum_{i=1}^{k} p_i, & \text{ha}\, x_k < \xi \le x_{k+1} \\ 1, & \text{ha} \quad \xi \ge x_n \end{cases}.$$

Mindezek alapján egy véges sok értéket felvevő diszkrét valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényének görbéje a *8.6. ábrán* látható alakot veszi fel.

Megjegyzések.

(1) Ha a diszkrét valószínűségi változó nem véges, hanem megszámlálható sok értéket vesz fel, akkor lehet, hogy az eloszlásfüggvény nem lépcsős függvény. Ugyanis előfordulhat, a valószínűségi változó lehetséges értékei mindenütt sűrűn helyezkednek el, sehol sincs olyan intervallum, amelyben az eloszlásfüggvény konstans volna.

(2) Minthogy diszkrét eloszlású valószínűségi változó esetén a valószínűségi változó minden lehetséges x_i értékéhez tartozik egy p_i valószínűség, azért itt az eloszlásfüggvény helyett célszerűbb a

$$p_i = P(\xi = x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots$$

valószínűségeloszlással dolgozni. A p_i számok meghatározzák az eloszlásfüggvényt és megfordítva, ha ismerjük az eloszlásfüggvényt, akkor annak ugrásai megadják a p_i számokat.

Folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

A folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvényére is érvényes a

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$$

reláció, amely a sűrűségfüggvény felhasználásával

$$F(b) - F(a) = \int_a^b p(x)\, dx.$$

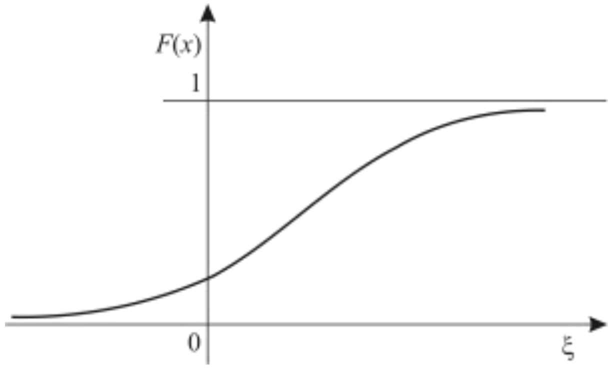
A sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény értelmezéséből következik, hogy a $p(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\, dt,$$

amelynek következménye a következő tétel.

1. Tétel. Ha a ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye mindenütt (vagy véges sok ugráshely kivételével) folytonos, akkor $p(x)$ folytonossági helyein a

$p(x) = F'(x)$.



8.7. ábra: Folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

2. Tétel. Egy folytonos (ill. véges számú ugráshely kivételével folytonos) $p(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$ (*8.7. ábra*) monoton, nemcsökkenő, folytonos függvény, amelynek határértéke $x \to -\infty$ esetén 0, és $x \to +\infty$ esetén 1, azaz

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

Két valószínűségi változó együttes eloszlása

Ha ξ és η ugyanazon a H halmazon értelmezett valószínűségi változók, akkor azok együttes eloszlása, a $\zeta=(\xi, \eta)$ kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó eloszlása, az összes

$$(\xi,\eta) \in H$$

számpárok, illetve pontok és a hozzá tartozó

$$P(\xi,\eta)$$

valószínűségek eloszlása.

Az együttes eloszlás diszkrét, ha a $\zeta=(\xi, \eta)$ síkvektor, illetve a végpontjainak megfelelő síkbeli pont csak véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket vehet fel. Belátható ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy a ξ és η valószínűségi változók különkülön diszkrétek legyenek. Tehát ha ξ lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, η lehetséges értékei $y_1, y_2, \ldots$, akkor a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó lehetséges értékei az (x_i, y_j) értékek között vannak, ahol $i, j = 1,2,\ldots$ ξ. A

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = r_{ij}, \qquad i, j = 1,2,\ldots$$

valószínűségek meghatározzák a (ξ, η) diszkrét valószínűségi vektorváltozó eloszlását, mégpedig

$$P(\xi,\eta) \in H = \sum_{(x_i, y_j) \in H} r_{ij}$$

A (ξ, η) vektorváltozó r_{ik} együttes valószínűségei segítségével meghatározható, külön-külön a ξ és η változók valószínűségei is. Éspedig alkalmazva a

$$P(\xi = x_i) = p_i \text{, és a } P(\eta = y_j) = q_j$$

jelöléseket, a

$$\sum_{j=1}^{\infty} r_{ij} = p_i \text{, és a } \sum_{i=1}^{\infty} r_{ij} = q_j \,.$$

Az együttes eloszlás folytonos, ha van olyan (legfeljebb véges számú görbe pontjai kivételével) folytonos $p(x, y)$ függvény, amely a következő tulajdonságú:

(1) Az (xy) síkon mindenütt

$$p(x, y) \geq 0 \,.$$

(2) Az (xy) sík bármely H tartományán

$$P[(\xi,\eta) \in H] = \iint_H p(x, y)\, dx\, dy \,.$$

(3) A teljes (xy) síkon

$$\int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, dx\, dy = 1 \,.$$

Bebizonyítható, ha van ilyen $p(x,y)$ függvény, akkor csak egy ilyen van, és ezt a függvényt a ξ és η valószínűségi változók **együttes sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Minden folytonos kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye eleget tesz az (1), (2) és(3) feltételeknek, és megfordítva: minden olyan (a valós számsíkon értelmezett) kétváltozós függvény, amely eleget tesz az 1), (2) és(3) feltételeknek, egy folytonos kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényének tekinthető.

A (ξ, η) vektorváltozó $p(xy)$ együttes sűrűségfüggvénye meghatározza a folytonos valószínűségi vektorváltozó eloszlását, mégpedig

$$P[(\xi,\eta) \in H] = \iint_H p(x, y)\, dx\, dy$$

Ha ξ és η együttes eloszlása folytonos, akkor ξ és η külön-külön is folytonos eloszlásúak és sűrűségfüggvényeik:

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, dy \,,$$

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, dx \,.$$

Két valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvénye

Ugyanazon a halmazon értelmezett ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye az (xy) síkon értelmezett azon $F(x,y)$ függvény, amely a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó bármely lehetséges (x, y) értékére megadja annak a valószínűségét, hogy a ξ változó x-nél és ugyanakkor az η változó y-nál kisebb értéket vesz fel. Vagyis

$$F(x,y)=P(\xi<x,\eta<y).$$

Az együttes eloszlásfüggvény diszkrét esetben:

$$F(x,y)=\sum_{j=-\infty}^{y}\sum_{i=-\infty}^{x}r_{ij},$$

Az együttes eloszlásfüggvény folytonos esetben:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}p(x,y)\,dx\,dy$$

ahol $p(x,y)$ az együttes eloszlás sűrűségfüggvénye.

Az együttes eloszlásfüggvényből parciális deriválással az együttes sűrűségfüggvény meghatározható:

$$p(xy)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Az együttes eloszlásfüggvény tulajdonságai:

(1) Az $F(x, y)$ függvény x és y változók monoton nem csökkenő függvénye.

(2) Ha x és y közül legalább az egyik a $-\infty$-hez tart, akkor

$$\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0, \text{ és } \lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,$$

ha x és y mindegyike a ∞-hez tart, akkor

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}F(x,y)=1.$$

(3) Az $F(x,y)$ függvény ún. vegyes második differenciája a

$$P(x\le\xi<x+\Delta x,\ y\le\eta<y+\Delta y)=F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x+\Delta x,\ y)-F(x,\ y+\Delta y)-F(x,y)$$

reláció miatt nemnegatív érték.

Minden kétdimenziós eloszlásfüggvény eleget tesz az (1), (2) és (3) feltételeknek, és megfordítva: minden kétváltozós függvény, amely rendelkezik az (1), (2) és (3) tulajdonságokkal, felfogható kétdimenziós eloszlásfüggvénynek.

Ha ismertek a $\zeta=(\xi,\eta)$ kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvényei, akkor meghatározhatók e vektor komponenseinek, ξ-nek és η-nak mint közönséges (egydimenziós) valószínűségi változóknak az eloszlásfüggvényei is. Ugyanis legyen a ζ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye $F(x,y)$, és létezzen ennek folytonos sűrűségfüggvénye $p(x,y)$, akkor ξ eloszlásfüggvényét $F_1(x)$-szel, η eloszlásfüggvényét $F_2(y)$-nal, jelölve nyilvánvaló, hogy

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dx\right]dy$$

$$F_2(y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dy\right]dx$$

A valószínűségi változó függvénye

Ha $y=f(x)$ egy bizonyos függvény, akkor $Y=f(\xi)$ az ξ valószínűségi változó függvénye és maga is valószínűségi változó. Az ξ valószínűségi változó Y függvénye várható értékének nevezzük a következőt:

$$M(Y) = M[f(\xi)] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)p(x_i).$$

Valószínűségi függvénynek nevezzük azt a $p(\xi)$ függvényt, amely a $p(x_1)$, $p(x_2)$,...,$p(x_n)$ diszkrét értékeket veszi fel. A következő felírásmódot is használjuk:

$$p(x_i) = P(\xi = x_i).$$

Valószínűségi eloszlásfüggvény:

$$F(x_i) = P(\xi = x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i).$$

Kiegészítő (komplementáris) eloszlásnak nevezzük a következő függvényt:

$$P(\xi > x) = 1 - P(\xi \le x).$$

8.2.7 Valószínűségi változók függetlensége

Két valószínűségi változót függetlennek nevezünk, ha a hozzájuk tartozó teljes eseményrendszerek függetlenek. Ez az értelmezés teljesen megfelel annak a természetes felfogásnak, hogy két valószínűségi változót akkor nevezünk függetlennek, ha az a tény, hogy az egyik egy meghatározott értéket vesz fel, az nem befolyásolja a másik véletlen ingadozását.

Definíció. A ξ és η valószínűségi változók függetlenek, ha tetszőleges $a \le b$ és $c \le d$ számpárok esetén:

$$P(a \le \xi \le b, c \le \eta \le d) = P(a \le \xi \le b)P(c \le \eta \le d).$$

Ez a definíció kiterjeszthető több valószínűségi változó esetére is.

Definíció. A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha tetszőleges $a_i \le b_i$ ($i=1,2,...,n$) számok esetén

$$P(a_1 \le \xi_1 \le b_1, a_2 \le \xi_2 \le b_2, ..., a_n \le \xi_n \le b_n) = \prod_{i=1}^{n} P(a_i \le \xi_i \le b_i).$$

Könnyen belátható, hogy az n független valószínűségi változó közül tetszőlegesen kiválasztott $s \le n$ valószínűségi változó is független. Viszont az n független valószínűségi változó páronkénti függetlenségéből még nem következik azok teljes függetlensége.

A valószínűségi változók függetlenségére megadott e definíciók tetszőleges valószínűségi változóra érvényesek. Megadhatók azonban ezzel ekvivalens definíciók külön diszkrét és külön folytonos valószínűségi változóra.

Diszkrét valószínűségi változók függetlensége

Definíció. A ξ és η diszkrét valószínűségi változók függetlenek, ha i és j minden lehetséges értékére teljesülnek a

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j)$$

összefüggések.

Tehát két független valószínűségi változó együttes eloszlását ξ és η eloszlása meghatározza. Ez a definíció általánosítható több diszkrét valószínűségi változó esetére is.

Definíció. A $\xi_1, \xi_2,\dots,\xi_n$ diszkrét valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha lehetséges értékeik bármely $x_{k1}, x_{k2},...,x_{kn}$ rendszerére fennáll a

$$P(\xi_1 = x_{k1}, \xi_2 = x_{k2},...,\xi_n = x_{kn}) = \prod_{j=1}^{n} P(\xi_j = x_{kj})$$

összefüggés.

Folytonos valószínűségi változók függetlensége

Definíció. A ξ és η folytonos valószínűségi változók függetlenek, ha minden valós x és y számra

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$$

vagyis. ha ξ és η kétdimenziós eloszlásfüggvénye megegyezik a ξ és η változók eloszlásfüggvényeinek szorzatával, azaz

$$F(x,y) = F_1(x,y)F_2(x,y).$$

Hasonlóan értelmezhető több valószínűségi változó függetlensége is.

Definíció. A $\xi_1, \xi_2,\dots,\xi_n$, folytonos valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha az x_1, $x_2,...,x_n$ valós számok bármely rendszerére érvényes a

$$P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2,...,\xi_n = x_n) = \prod_{j=1}^{n} P(\xi_j = x_j),$$

illetve az

$$F(\xi_1, \xi_2,...,\xi_n) = \prod_{j=1}^{n} F_{\xi\, j}(x),$$

reláció,.ahol $F(\xi_1, \xi_2,\dots,\xi_n)$ a $\xi_1, \xi_2,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye, $F_{\xi\, j}(x)$ pedig a ξ_j valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

A következőkben bizonyítás nélkül közlünk a független valószínűségi változókra vonatkozó néhány (a későbbiek során felhasználásra kerülő) tételt.

1. Tétel. Egy konstans, vagyis egy olyan valószínűségi változó, mely egyetlen értéket vesz fel, minden valószínűségi változótói független.

2. Tétel. Ha $\xi_1, \xi_2,\dots,\xi_n$ független valószínűségi változók, és $g_1(x)$, $g_2(x)$,...,$g_n(x)$, az x valós változó folytonos függvényei, akkor az $\eta_1=g_1(\xi_1)$, $\eta_2=g_2(\xi_2)$,...,$\eta_n=g_n(\xi_n)$ valószínűségi változók is függetlenek.

Ennek a tételnek speciális esete, ha $\xi_1, \xi_2,\dots,\xi_n$ független valószínűségi változók, akkor az $\eta_i=a_i\xi_i+b_i$ (i=1,2,...,n) valószínűségi változók is függetlenek. (a_i és b_i tetszőleges konstansok.)

3. Tétel. Ha a $\xi_1, \xi_2,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, és mindegyiknek létezik sűrűségfüggvénye, akkor

$$p(x_1, x_2,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$$

ahol: $p(x_1, x_2,...,x_n)$ $\xi_1, \xi_2,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye, $p_i(x_i)$ pedig a ξ_i valószínűségi változó (i= 1, 2,...,n) sűrűségfüggvénye.

E tétel megfordítása is igaz. Ha a

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$$

reláció fennáll, akkor a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek.

8.2.8 Valószínűségi változó várható értéke

A valószínűség számítás és alkalmazásai szempontjából fontos szerepük van a valószínűségi változóra jellemző bizonyos konstansoknak, melyek a valószínűségi változó eloszlása, illetve eloszlásfüggvénye segítségével határozhatók meg. E konstansok közül, amelyek a valószínűségi változó általános, kvantitatív jellemzésére szolgálnak, különösen fontosak a matematikai várható érték, a szórás és a különböző rendű momentumok.

A diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Egy ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek $x_1, x_2, ..., x_N$, a megfelelő valószínűségek pedig $p_1, p_2, ..., p_N$, (i=1, 2,...,N). Végezzünk N független megfigyelést ξ értékére! Ha N nagy szám, akkor a valószínűségi változó jelentése szerint, körülbelül Np_1 esetben lesz $\xi=x_1$, Np_2 esetben $\xi=x_2$, és így tovább. Képezzük az N megfigyelés során megállapított ξ értékek számtani közepét, erre közelítőleg az

$$\frac{Np_1 \cdot x_1 + Np_2 \cdot x_{21} + ... + Np_N \cdot x_N}{N} = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i$$

érték adódik. Ez nem más, mint a valószínűségi változó lehetséges értékeinek a megfelelő valószínűségekkel súlyozott számtani közepe. (Ugyanis a valószínűségekkel súlyozott számtani közép

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i} = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i \text{ , mivel } \sum_{i=1}^{N} p_i \approx 1 .$$

$\sum_{i=1}^{N} p_i x_i$, tehát olyan számérték, amely körül a valószínűségi változó megfigyelt értékeinek számtani közepe ingadozik.

Definicló. Ha a ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, ..., x_N$, és a megfelelő valószínűségek $p_1, p_2, ..., p_N$, akkor a valószínűségi változó várható értéke

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i$$

feltéve, hogy a tagok száma véges vagy pedig a jobb oldalon álló sor abszolút konvergens.

A folytonos valószínűségi változó várható értéke

A folytonos valószínűségi változó várható értékét a diszkrét valószínűségi változó várható értékéhez hasonló módon határozzuk meg.

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó, melynek $p(x)$ sűrűségfüggvénye folytonos (illetve véges számú ugráshely kivételével folytonos). Végezzünk ξ értékére sok független megfigyelést. A sűrűségfüggvény értelmezéséből következik, hogy annak a valószínűsége, hogy ez az érték az $(x_i; x_i+\Delta x_i)$ intervallumba esik:

$$P(x \le \xi \le x + \Delta x) \approx p(x_i)\Delta x_i .$$

A megfigyelt értékeknek a $p(x_i)\Delta x_i$ valószínűségekkel súlyozott számtani közepe közelítőleg

$$\frac{\sum_i x_i p(x_i)\Delta x_i}{\sum_i p(x_i)\Delta x_i}$$

Ez a közelítés annál jobb, minél kisebb Δx_i. Ez indokolja folytonos valószínűségi változó esetén a valószínűségi változó várható értékének, mint a valószínűségekkel súlyozott értékek számtani közepének, következő értelmezését.

Definíció. Ha a ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. $p(x)$ folytonos, illetve véges számú ugráshely kivételével folytonos, akkor várható értéke:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\, dx,$$

feltéve, hogy a jobb oldali impróprius integrál konvergens.

Megjegyzések

(1) A ξ valószínűségi változó megfigyelt értékeiből képezett középértéknek az $M(\xi)$ várható érték körüli ingadozására a nagy számok törvénye utal. Egyelőre csak megjegyezzük, hogy a középérték és a várható érték között hasonló a kapcsolat, mint egy esemény relatív gyakorisága és annak valószínűsége között.

(2) Az $M(\xi)$ várható érték csak ξ eloszlásától függ, így beszélhetünk ξ eloszlásának várható értékéről is.

(3) Nem minden valószínűségi változónak van várható értéke.

Diszkrét valószínűségi változó esetén, ha ξ végtelen sok értéket vehet fel, akkor az $M(\xi)$ véges érték nem biztos, hogy létezik. Például legyenek ξ lehetséges értékei:

$$\xi = 2, 2^2, 2^3, \ldots,$$

és a megfelelő valószínűségek:

$$p = \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots$$

Ehhez a valószínűség eloszláshoz tartozó várható érték nem létezik, mert a

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \frac{1}{2^i}$$

végtelen sor divergens.

Folytonos valószínűségi változó esetén sem mindig létezik várható érték.

Többdimenziós valószínűségi változó várhatóérték-vektora

Ha a $\boldsymbol{\zeta}= \xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_n)$ n dimenziós valószínűségi vektorváltozó eloszlása ismert, akkor koordinátái $M(\xi_i)$ várható értéke (i=1,2,...,n) is ismert. Ezek a várható értékek egy vektor koordinátáiként foghatók fel. Ezt az $M(\boldsymbol{\zeta})=(M(\xi_1),\ldots,M(\xi_n))$ vektort nevezzük a $\boldsymbol{\zeta}$ valószínűségi vektorváltozó **várhatóérték-vektorának**.

Definíció. A $\boldsymbol{\zeta}= \xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó várhatóérték-vektora

$$M(\boldsymbol{\zeta})=(M(\xi_1), M(\xi_2),\ldots,M(\xi_n)),$$

ahol $M(\xi_1)$, $M(\xi_2)$,...,$M(\xi_n)$ a vektorváltozó koordinátáinak várható értéke. Speciálisan, ha

$$\zeta=(\xi, \eta),$$

akkor

$$M(\zeta)=(M(\xi), M(\eta)).$$

8.2.9 A valószínűségi változó szórása

A valószínűségi változó várható értéke még nem jellemzi egyértelműen a valószínűségi változót, annak eloszlását. Különböző eloszlásoknak is lehet azonos várható értéke, viszont különböző várható értékű valószínűségi változók is rendelkezhetnek egyéb azonos tulajdonságokkal.

E tulajdonságok közül egyik legfontosabb a valószínűségi változó várható érték körüli ingadozása, vagyis a valószínűségi változó által ténylegesen felvett értéknek a várható értéktől való eltérése, a várható érték körüli szórása. Így tehát egyik feladat olyan számadat bevezetése, amely alkalmas módon jellemzi a valószínűségi változó ingadozásának, szórásának mértékét.

Kézenfekvő volna ezen ingadozás mérőszámaként a valószínűségi változó és saját várható értéke különbségének a várható értékét, a

$$H(\xi)=M(\xi-M(\xi))$$

értéket bevezetni. Ez azonban minden valószínűségi változó esetén nulla. Ugyanis $M(\xi)$ konstans volta miatt, a várható értékre vonatkozó 4. tétel értelmében

$$M(\xi-M(\xi))=M(\xi)-M(\xi)=0.$$

Ezért az $M(\xi-M(\xi))$ nem alkalmas a várható érték körüli ingadozás mérésére.

A valószínűségi változó várható értéktől való eltérése abszolút értékének várható értéke az ún. **várható eltérés**:

$$E(\xi)=M(|\xi-M(\xi)|)$$

már általában nullától különböző érték. Ez az érték jól tájékoztat az eltérés nagyságáról, és így alkalmas az ingadozás mérésére. Mégsem szokás használni, mert az abszolút érték miatt számítástechnikailag nehézkes.

Az ingadozás mértékszámaként leggyakrabban a fogalmilag valamivel mesterkéltebb, de számítástechnikailag egyszerűbb és matematikai szempontból előnyös ún. **szórást** használjuk, amelynek értelmezése a következő.

Definíció. Tetszőleges ξ valószínűségi változó szórása, $D(\xi)$ a valószínűségi változó és várható értéke eltérése négyzetének várható értékéből vont pozitív négyzetgyök (feltéve, hogy ez véges érték). Vagyis

$$D(\xi)=+\sqrt{M([\xi-M(\xi)]^2)}$$

A $D(\xi)$ szórás tehát mindig nemnegatív számérték, amely csak akkor nulla, ha $P(\xi=c)=1$, ahol c tetszőleges konstans.

A szórás, illetve a szórásnégyzet meghatározásának egyszerűsítésére szolgál a következő két tétel.

1. Tétel. Ha egy ξ valószínűségi változó $D(\xi)$ szórása létezik és 0-tól különböző, akkor a szórásnégyzet megegyezik a változó négyzetének várható értéke és a változó várható értéke négyzetének különbségével. Vagyis

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2.$$

E tétel következménye a 2. tétel.

2. Tétel. Bármely valószínűségi változó négyzetének várható értéke nagyobb, mint a változó várható értékének négyzete

$$M(\xi^2) \geq [M(\xi)]^2.$$

Megjegyzés. Az $M(\xi)$ várható értéket $\bar{x}$-val, a $D(\xi)$ szórást pedig gyakran σ-val jelöljük. Ezekkel a jelölésekkel a szórás, ha a ξ valószínűségi változó lehetséges értékei $\mathrm{x}=x_1, x_2,...,x_n$

$$\sigma_x^2 = M[(\mathrm{x}-\bar{x})^2] = (x_1-\bar{x})^2 p(x_1) + (x_2-\bar{x})^2 p(x_2) + ... + (x_n-\bar{x})^2 p(x_n)$$

A 1. tétel szerint pedig a

$$\sigma_x^2 = M(\bar{x})^2 - [M(x)]^2.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, amely az $x_1, x_2,...,x_n$ lehetséges értékeit $p_1, p_2,...,p_n$ valószínűségekkel veszi fel, és várható értéke $M(\xi)$, akkor szórásnégyzete

$$D^2(\xi) = M([\xi - M(\xi)]^2) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - M(\xi))^2$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló sor konvergens, vagy - az előző tétel felhasználásával:

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i \right)^2$$

amennyiben a jobb oldali sorok konvergensek.

Folytonos valószínűségi változó szórása

Ha ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $p(x)$, akkor szórásnégyzete

$$D^2(\xi) = M([\xi - M(\xi)]^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)(x - M(\xi))^2 dx,$$

feltéve. hogy a jobb oldalon álló improprius integrál létezik. Vagy

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\, dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx \right]^2,$$

amennyiben a jobboldali improprius integrálok léteznek.

Megjegyzés. (1) Nem minden valószínűségi változónak van véges szórása. Diszkrét valószínűségi változó esetén, ha ξ végtelen sok értéket vesz fel, akkor nem biztos, hogy a

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - M(\xi))^2$$

sor konvergens, és így nem biztos, hogy van véges szórása.

Folytonos valószínűségi változónak sincs szórása, ha az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)(x - M(\xi))^2 dx,$$

improprius integrál nem létezik.

(2) Egyszerűbb számítás miatt szokás a valószínűségi változókat úgy transzformálni, hogy az új változó várható értéke 0, szórása 1 legyen. Az ily módon transzformált valószínűségi változót **standard valószínűségi változónak** nevezzük.

Definíció. Standard valószínűségi változó az olyan változó, amelynek várható értéke 0 és szórása 1.

Tétel. Tetszőleges, nem nulla szórású ξ valószínűségi változóból standard valószínűségi változó képezhető, ha vesszük a valószínűségi változó várható értéktől való eltérésének és szórásának hányadosát. Ha ξ tetszőleges valószínűségi változó, akkor

$$\xi^* = \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}$$

standard valószínűségi változó.

Többdimenziós valószínűségi változó szórása

A $\boldsymbol{\zeta}=(\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_n)$ n-dimenziós valószínűségi vektorváltozó várható érték körüli ingadozását nyilván nem lehet egyetlen számmal jellemezni. Az ingadozásról a $D(\xi_i)$ (i=1, 2,...,n) ingadozások bizonyos felvilágosítást adnak ugyan, de ez hiányos, mert a $D(\xi_i)$ értékek csak a koordinátatengelyekre való vetületek ingadozását jellemzik, a koordinátatengelyek választása pedig önkényes. Sokkal jobb mérték kapható $\boldsymbol{\zeta}$ ingadozására, ha $\boldsymbol{\zeta}$ egy tetszőleges egyenesre való vetületének ingadozását vizsgáljuk.

Legyen $m_i=M(\xi_i)$ és P_0 az $(m_1, m_2,\ldots,m_n)$ koordinátákkal megadott pont, továbbá legyen g egy tetszőleges P_0 ponton áthaladó egyenes $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$ iránykoszinuszokkal ($\alpha_1,\ldots, \alpha_n$ tehát valós számok, és $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$). Képezzük a

$$\zeta_g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\xi_i - m_i)$$

valószínűségi változót! Ennek szórásnégyzete

$$D^2(\zeta_g) = M(\zeta_g^2)$$

mivel $M(\zeta_g) = 0$. Bevezetve a

$$D_{ij} = M[(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j)],$$

jelölést, ezzel

$$D^2(\zeta_g) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}\alpha_i\alpha_j\,.$$

Megjegyzés. D_{ij}-t a ξ_i és. ξ_j valószínűségi változók kovarianciájának szokás nevezni. A D_{ij} együtthatókkal a $\boldsymbol{\zeta}$ valószínűségi vektorváltozó. tetszőleges egyenesre való vetületének szórása kiszámítható, és így $\boldsymbol{\zeta}$ ingadozása jellemezhető a

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \ldots & D_{1n} \\ \vdots & & & \\ . & & & \\ D_{n1} & D_{n2} & \ldots & D_{nn} \end{bmatrix}$$

ún. szórásmátrixszal, ahol a főátlóban levő D_{ij} számértékek az egyes változók szórásnégyzetei. (Feltételezzük, hogy e mátrix determinánsa $|\mathbf{D}| > 0$, ugyanis a $D^2(\zeta_g)$ értelmezése miatt a $|\mathbf{D}|$ determináns mindig nemnegatív, a $|\mathbf{D}| = 0$ elfajult esetet pedig kizárjuk.) Speciálisan, ha $\boldsymbol{\zeta}=(\xi,\eta)$ kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó, akkor (ingadozása a

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{2} \end{bmatrix}$$

szórásmátrixszal jellemezhető, ahol

$D_{11} = D^2(\xi)$ a ξ változó szórásnégyzete,

$D_{22} = D^2(\eta)$ az η változó szórásnégyzete,

$D_{12} = D_{21} = M[(\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))]$ a ξ és η változók kovarianciája.

A szórásra vonatkozó néhány tétel

A következőkben a szórásra vonatkozó néhány tételt ismertetünk. Ezek rávilágítanak a szórás olyan tulajdonságaira. melyek alapján a szórás előnyben részesül minden más ingadozásjellemzővel szemben (például várható eltérés stb.).

1. Tétel. Egy konstans szórása nulla. Vagyis

$$D^2(c) = 0.$$

2. Tétel. Két független valószínűségi változó összegének szórásnégyzete megegyezik a két valószínűségi változó szórásnégyzetének összegével. Vagyis

$$D^2(\xi + \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta),$$

illetve

$$D(\xi + \eta) = \sqrt{D^2(\xi) + D^2(\eta)}\,.$$

3. Tétel. Véges sok, páronként független valószínűségi változó összegének szórásnégyzete megegyezik az egyes változók szórásnégyzetének összegével. Vagyis

$$D^2(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = D^2(\xi_1) + D^2(\xi_2) + ... + D^2(\xi_n),$$

röviden

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D^2(\xi_i)\,,$$

illetve

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D^2(\xi_i)}\,.$$

4. Tétel. Konstans szorzó abszolút értéke kiemelhető szórásjele alól

$D(c\xi) = |c| D(\xi)$.

5. Tétel. Véges sok, páronként független $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változó és $c_1, c_2, \ldots, c_n$ konstans esetén

$$D^2(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + ... + c_n\xi_n) = c_1^2 D^2(\xi_1) + c_2^2 D^2(\xi_2) + ... c_n^2 D^2(\xi_n)\,,$$

röviden

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D^2(\xi_i),$$

illetve

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 D^2(\xi_i)}.$$

6. Tétel. A szórás értékét a valószínűségi változóhoz adott konstans nem befolyásolja. Vagyis

$$D(c+\xi) = D(\xi).$$

IRODALOMJEGYZÉK

1. Arrow, J. S. Karlin-H. Scarf: Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford Univ. Press. Stanford, Calif., 1958.

2. Ballou R. H.: Business Logistics Management. Prentice-Hall International Inc. 1992.

3. Benkő J.: Logisztikai tervezés. (Mezőgazdasági alkalmazásokkal) Dinasztia Kiadó, Budapest, 2000. 199 p.

4. Benkő J.: Solution of Periodic Review Inventory Model with General Constrains. Hungarian Agricultural Engineering 15/2002 62-64 p.

5. Benkő J.: Periodikus készletfigyelésű modell megoldása dinamikus programozással általános feltételek mellett. Logisztikai évkönyv 2002 (Szerk.: Knoll I.), Magyar Közlekedési Kiadó, Budapest, 2002. 33-38 p.

6. Benkő J.: A Just In Time költségek elemzése. EU Working Papers (BGF szakmai folyóirata), VI: évf. 1. sz. 2003., Budapest 2003. 1-11 p.

7. Benkő J.: Modeling Stochastic Inventory Policy with Simulation. Research & Development, Mechanical Engineering Letters, Szent István University, Gödöllő, Volume 4 (2010) 190-200 p., HU ISSN 2060-3789

8. Benkő J.: Logisztika I. Szent István Egyetemi Kiadó, Gödöllő, 2011.

9. Benkő J.: Ellátási-láncok modellezése szimulációval. Logisztikai évkönyv 2011. (Szerk: Bokor Z.), MLE, Budapest 2011. 13-18 p., ISSN 1218-3849

10. Benkő J.: Kanban szabályozású gyártási rendszerek modellezése szimulációval. Logisztikai évkönyv 2012. (Szerk: Bokor Z.), MLE, Budapest 2012. 15-22 p., ISSN 1218-3849

11. Benkő J.: Logisztikai folyamatok szimulációja. (egyetemi jegyzet, második bővített kiadás) Szent István Egyetemi Kiadó, Gödöllő, 2012. 264 p.

12. Brown, R. G.: Decision Rules for Inventory Management. -Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967.

13. Buchan, J.-E. Koenigsberg: Scientific Inventory Management, Prentice-Hall, Englewood, Cliffs, N. J., 1963.

14. Buffa, E. S.: Modern Production/Operations Management, 6th ed., Wiley, New York, 1980

15. Buffa, E. S-J. G. Miller: Production-Inventory Systems: Planning and Control, 3d ed. Richard, D. Irwin, Homewood, Ill., 1979.

16. Cselényi J.-Illés B.: Logisztikai rendszerek I., Miskolci Egyetemi Kiadó, 2004.

17. Chikán A.: Készletezési modellek. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1983.

18. Éltető Ö.-Meszéna Gy.-Ziermann M.: Sztochasztikus módszerek és modellek. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1982.

19. Gillett, B. E.: Introduction to Operation Research. A Computer-Oriented Algorithmic Approach. McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1976.

20. Hadly, G.-T. Whitin: Analysis of Inventory Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.

21. Hax, A.-D. Candea: Production and Inventory Management, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1984.

22. Hillier, F. S.-Lieberman, G. J.: Introduction to Operation Research. McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1990.

23. Johnson, L. A.-D. C. Montgomery: Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control, Wiley, New York, 1974.

24. Kaufmann, A.: Az operációkutatás módszerei és modelljei. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.

25. Kaufmann, A.: Az optimális programozás. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.

26. Kelton, W. D.-Sadowski, R., P.-Sturrock, D. T.: Simulation with Arena. Mc Graw Hill Higher Education, 2004.

27. Peterson, R.-E. A. Silver: Decision Systems for Inventory Management and Production Planning, Wiley, New York, 1979.

28. Prezenszki J.: Logisztika (Bevezető fejezetek). BME, Mérnöktovábbképző Intézet, Budapest, 1995.

29. Prezenszki J.: Logisztika II (Módszerek, eljárások). Logisztikai Fejlesztési Központ, Budapest, 1999.

30. Rejtő M.-PachZs.P.-Révész P.: Matematika. Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 1972.

31. Starr, M. -D. Miller: Inventory Control: Theory and Practice. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.

32. Tersine, R. J. Principles of Inventory and Materials Management. North Holland, Elsevier Science Publishing Co., Inc. 1988.

33. Veinott, A. F.: The Optimal Inventory Policy for Batch Orderings. Operation Research, 13 (3), 424-432 p. 1965.