



SZENT ISTVÁN
EGYETEM

BENKŐ JÁNOS

Logisztikai tervezés



Logisztika
Oktatásért és
Kutatásért
Alapítvány



Szent István Egyetemi Kiadó

Dr. Benkő János
egyetemi tanár

LOGISZTIKAI TERVEZÉS



Szent István Egyetemi Kiadó

Ez a kiadvány a Logisztika Oktatásért és Kutatásért Alapítvány támogatásával készült
A Szent István Egyetemen tankönyvként javasolt kiadvány

Írta:

Dr. Benkő János

egyetemi tanár, a közgazdaságtudomány kandidátusa

Lektorálta:

Dr. Galántai Aurél

egyetemi tanár, a matematikai tudomány kandidátusa

Dr. Husti István

egyetemi tanár, a mezőgazdasági tudomány doktora

*Minden jog fenntartva. A könyv egészét vagy részleteit a Szerző engedélye nélkül bármilyen formában
vagy eszközzel reprodukálni, tárolni és közölni tilos.*

© Benkő János 2018

ISBN 978-963-269-614-0

Kiadja a Szent István Egyetemi Kiadó
2103 Gödöllő, Páter K. u. 1.
Felelős kiadó: Dr. Tózsér János, rektor
Kiadóvezető: Lajos Mihály, igazgató
Szerkesztette: dr. Benkő János

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ	9
1. LOGISZTIKAI ALAPFOGALMAK	11
1.1. A logisztika definíciója	11
1.2. Logisztika és a vállalati rendszer.....	12
1.3. A logisztika területei	13
1.4. A logisztika a vállalati menedzsmentben.....	15
1.5. Ellenőrző kérdések	16
Jegyzetek, kérdések.....	16
2. LOGISZTIKA A VÁLLALATI INFORMÁCIÓS ÉS IRÁNYÍTÁSI RENDSZERBEN	17
2.1. Alapfogalmak	17
2.2. Az információs rendszer funkciói, eszközei és feladatai	19
2.3. Az információs bázis kialakítása.....	21
2.4. A logisztikai információs rendszer működése	24
2.5. Ellenőrző kérdések	27
Jegyzetek, kérdések.....	27
3. A TERVEZÉS MÓDSZEREI ÉS MODELLJEI.....	29
3.1. Logisztika, operációkutatás és számítástechnika	29
3.2. A matematikai modellezésről	30
3.3. A tervezés fázisai	32
3.4. Ellenőrző kérdések	33
Jegyzetek, kérdések.....	34
4. A SZÁLLÍTÁSI FELADAT	35
4.1. A Vogel-Korda-féle eljárás	36
4.2. A korlátozás és szétválasztás módszerének alkalmazása.....	39
4.3. A disztribúciós módszer	43
4.3.1 Az indulóprogram előállítása	44
4.3.2 Optimalitás vizsgálat	45
4.3.3 A bázismegoldás javítása	46
4.4. A magyar módszer.....	48
4.4.1 A hozzárendelési feladat megoldása magyar módszerrel	51
4.4.2 A szállítási feladat megoldása magyar módszerrel.....	53
4.5. Alkalmazások	57
4.5.1 A gabonafelvásárlás modellje	57
4.5.2 Az áruehelyezés optimalizálása a gabonaiparban [16].....	60
4.5.3 Átrakási probléma	65
4.5.4 Objektumok optimális elhelyezése	67
4.5.5 Nyereségmaximalizálás	69
4.5.6 Optimális gépterhelés.....	71
4.6. Ellenőrző kérdések	74
Jegyzetek, kérdések.....	74

5. A KÖRUTAZÁSI FELADAT	75
5.1. Little, Murty, Sweeney és Karel algoritmus 76	76
5.2. A szekvenciális optimalizációs módszer..... 81	81
5.2.1 A postakocsi probléma..... 81	81
5.2.2 A körutazási feladat megoldása dinamikus programozással 85	85
5.3. Alkalmazások..... 88	88
5.4. Ellenőrző kérdések..... 90	90
Jegyzetek, kérdések..... 90	90
6. JÁRATSZERKESZTÉSI FELADATOK	91
6.1. Járatszerkesztés az üres menetek költségének minimalizálásával 91	91
6.2. Járókapacitással korlátozott egycentrumos járatszerkesztés 95	95
6.2.1 A klasszikus megoldás 98	98
6.2.2. A megoldás visszavezetése maximális súlyú körutak keresésére..... 105	105
6.3. Ellenőrző kérdések..... 112	112
Jegyzetek, kérdések..... 112	112
7. TELEPÍTÉSI ELMÉLET.....	113
7.1. A telepítési problémák csoportosítása..... 113	113
7.2. Egykörzetes centrumkeresés kötött telephellyel..... 114	114
7.3. Egykörzetes centrumkeresés részben kötött telephellyel 115	115
7.4. Egykörzetes centrumkeresés szabad telephelyválasztással 118	118
7.5. Többkörzetes centrumkeresés kötetlen centrumkapacitásokkal és szabad telephelyválasztással.. 120	120
7.6. Többkörzetes centrumkeresés korlátozott centrumkapacitásokkal és szabad telephelyválasztással123	123
7.7. Többkörzetes centrumkeresés kötött centrumkapacitásokkal és szabad telephelyválasztással 124	124
7.8. Többtermékes raktárak telepítése..... 127	127
7.9. Ellenőrző kérdések..... 132	132
Jegyzetek, kérdések..... 132	132
8. HÁLÓZATI ANALÍZIS ÉS HÁLÓTERVEZÉS.....	133
8.1. A hálózatok terminológiája..... 133	133
8.2. Mintapélda..... 136	136
8.3. A legrövidebb út a hálózaton 136	136
8.3.1 Algoritmus a legrövidebb út probléma megoldására 137	137
8.3.2 Dijkstra algoritmus..... 138	138
8.3.3 Alkalmazások..... 140	140
8.4. A minimális költségű feszítőfa..... 141	141
8.4.1 Algoritmus a minimális költségű feszítőfa meghatározására 142	142
8.4.2 Minimális költségű feszítőfa kijelölése az illeszkedési mátrixszal 144	144
8.4.3 Minimális költségű feszítőfa kijelölése a Kruskal algoritmussal 146	146
8.5. A maximális folyam problémája 147	147
8.5.1 A maximális folyam probléma algoritmus 149	149
8.5.2 Maximális folyam - minimális vágás 151	151
8.6. A minimális költségű folyam 152	152
8.6.1 A hálózati szimplex-módszer alapjai 154	154
8.6.2 Kapcsolat a lehetséges bázismegoldás és a lehetséges feszítőfa között 155	155
8.6.3 Eljárás a bázismegoldás előállítására..... 156	156
8.6.4 Az eljárás alkalmazása..... 158	158
8.6.5 A bázismegoldás javítása a hálózati szimplex módszerrel..... 160	160

8.6.6 Speciális esetek	164
8.7. A hálótervezés	165
8.7.1 A tevékenység-háló felépítése és szerkesztése	166
8.7.2 A CPM módszer	169
8.7.3 A PERT módszer	172
8.7.4 A Microsoft Project alkalmazása	174
8.8. Petri hálók	182
8.8.1 A Petri hálók elmélete és terminológiája	183
8.8.2 Alapvető tulajdonságok	185
8.8.3 Az időzített Petri hálók	186
8.8.4 Az esemény gráfok	186
8.8.5 A műhelyrendszerű termelés Petri háló modellje	189
8.8.6 A műhelyrendszerű termelés működésének elemzése	192
8.8.7 A műhelyrendszerű gyártás optimálisvezérlése	196
8.8.8 A modell alkalmazhatósága	209
8.9. Ellenőrző kérdések	210
Jegyzetek, kérdések	210
9. SORBANÁLLÁSI ELMÉLET	211
9.1. A sorbanállási elmélet alapjai	211
9.1.1 Egy egyszerű sorbanállási folyamat	213
9.1.2 Terminológia és jelölések	213
9.2. Példák a valódi sorbanállási rendszerekre	215
9.3. Az exponenciális eloszlás szerepe	215
9.4. A születési-halálozási folyamat	220
9.5. A születési-halálozási folyamatra visszavezethető modellek	225
9.5.1 Az M/M/s modell	225
9.5.2 Az M/M/1 modell összefüggései	226
9.5.3 Az M/M/s modell összefüggései	229
9.5.4 Az M/M/s modell véges sorral	232
9.5.5 Az M/M/1/K modell összefüggései	232
9.5.6 Az M/M/s/K ($s > 1$) modell összefüggései	233
9.6. Nem-exponenciális eloszlású sorbanállási modellek	234
9.6.1 Az M/G/1 modell	235
9.6.2 Az M/D/s modell	235
9.7. Ellenőrző kérdések	236
Jegyzetek, kérdések	237
10. KÉSZLETEZÉSI ELMÉLET	239
10.1. A készletezési modellek elemei	240
10.2. Folyamatos készletfigyelés, egyenletes igény	243
10.2.1 A hiány nem megengedett	244
10.2.2 A hiány megengedett	245
10.2.3 Véges feltöltési kapacitás és a hiány nem megengedett	249
10.2.4 Véges feltöltési kapacitás és a hiány megengedett	252
10.2.5 A rendelési tétele nagyság figyelembevétele, és a hiány nem megengedett	257
10.2.6 Megjegyzések a gazdaságos tétel nagyságú modellekhez	260
10.3. Periodikus készletfigyelés, változó igény	260
10.3.1 Megoldás dinamikus programozással	261
10.3.2 A megoldás egyszerűsítése	265

10.3.3 Megoldás dinamikus programozással általános feltételek mellett.....	268
10.3.4 Megoldás egészértékű lineáris programozással	272
10.4. Sztochasztikus modellek	274
10.4.1 Egyperiódusos modell beállítási költség nélkül	274
10.4.2. Egyperiódusos modell beállítási költséggel	281
10.4.3. Kétperiódusos készletezési modell beállítási költség nélkül.....	284
10.4.4 Többperiódusos modellek.....	287
10.4.5 Többtermékes készletezési modellek.....	295
10.5. Összefoglalás	298
10.6. Ellenőrző kérdések.....	298
Jegyzetek, kérdések.....	299
11. A VÁRHATÓ IGÉNYEK ELŐREJELZÉSE	301
11.1. A függetlenigények meghatározása előrejelzéssel	302
11.1.1 Kísérleti módszerek	303
11.1.2 Véleményalkotás.....	304
11.1.3 Idősor analízis.....	306
11.1.4 Okozati módszerek	322
11.1.4 Összefoglalás	326
11.2. A függőigények meghatározása	329
11.2.1 Anyagnormák.....	330
11.2.2 Szubjektív (becslő) eljárások	331
11.2.3 Felhasználás orientált eljárások	331
11.2.4 Programorientált anyagszükséglet tervezés.....	335
11.2.5 A gyártástervezési és - irányítási rendszerek	339
11.3. Ellenőrző kérdések.....	342
Jegyzetek, kérdések.....	343
12. LOGISZTIKAI RENDSZEREK SZIMULÁCIÓJA.....	345
12.1. Mit jelent a szimuláció?	345
12.2. A modell felállítása és működés.....	346
12.3. Véletlen számok és a valószínűségi eloszlásokból vett véletlen megfigyelések generálása	348
12.4. A szimulációs programok működése	350
12.4.1 Mintapépítés.....	351
12.4.2 A Taylor II. szimulátor	351
12.4.3 Mintapépítés modellezése a Taylor II. szimulátorral.....	353
12.4.4 Az Arena szimulátor	357
12.4.5 A mintapépítés modellezése Arena szimulátorral.....	360
12.5. Az alkalmazási lehetőségekről	371
12.6. Ellenőrző kérdések.....	372
Jegyzetek, kérdések.....	372
13. MATEMATIKAI EMLÉKEZTETŐ	373
13.1. Mátrixszámítás	373
13.1.1 Két mátrix egyenlő.....	374
13.1.2 Mátrixok összeadása és kivonása.....	374
13.1.3 Mátrixok szorzása skalárral	375
13.1.4 Mátrixok szorzása mátrixszal	375
13.1.5 A mátrixok egész számú hatványai	376

13.1.6 Transzponált mátrix	376
13.1.7 Zérus mátrix	376
13.1.8 Egységmátrix.....	377
13.1.9 Konjugált mátrix	377
13.1.10 A mátrix inverze.....	378
13.1.11 A mátrix felbontása részmátrixokra	379
13.2. A valószínűség és a valószínűségi változó fogalma	382
13.2.1 A valószínűség fogalma	382
13.2.2 Feltételes valószínűség.....	382
13.2.3 Valószínűségek összeadása és szorzása	382
13.2.4 A valószínűségi változó	383
13.2.5 A valószínűségeloszlás és a sűrűségfüggvény	384
13.2.6 Valószínűségi változók eloszlásfüggvénye	387
13.2.7 Valószínűségi változók függetlensége.....	392
13.2.8 Valószínűségi változó várhatóértéke.....	394
13.2.9 A valószínűségi változó szórása.....	396
IRODALOMJEGYZÉK.....	401

ELŐSZÓ

A termelés és az elosztás költségeinek csökkentésére irányuló erőfeszítések egyik fontos területe és eszköze a logisztika. A különböző ágazatokhoz tartozó vállalatok igyekeznek mindent megtenni annak érdekében, hogy a nyersanyaglelőhelyektől a fogyasztókig terjedő anyagáramlást közel optimálisan alakítsák ki. Ennek okai elsősorban gazdasági jellegűek és a belföldi, valamint a nemzetközi árucseré strukturális változásaival magyarázhatók. A változások néhány fontosabb jellemzője: a termékek differenciálódása, a beszerzési és az értékesítési piacok dinamikus változása, a tömegárúk és készletek forgalmának a csökkenése, az anyag- és termékáramok növekedése. A kis sorozatnagyságú termelés, a nagyobb termékválaszték, az egyedi igények kielégítése szigorú követelményeket, nagyfokú rugalmasságot támasztanak az anyagellátási és elosztási rendszerekkel szemben. Ezért az említett rendszereket és a velük összefüggő kérdéseket átfogó logisztika minden fejlett országban előtérbe került. A logisztikával kapcsolatos ismeretek, tapasztalatok széles körben, így Magyarországon is terjednek.

A könyv célja a logisztikai folyamatok tervezéséhez alapvető ismereteket nyújtani a 4M elvnek megfelelően, ami biztosítja az áruválasztékot a megfelelő mennyiségben, a megfelelő időben, a megfelelő minőségben és a megfelelő helyen a lehető legkisebb költséggel. Ezt a célt a könyv a szállítás, az anyagmozgatás és a készletezés tervezésben alkalmazható matematikai modellek bemutatásával, illetve megismertetésével kívánja elérni. A tananyaggal szemben megfogalmazható minimális elvárás, hogy a logisztikai döntések előkészítésében közreműködő gyakorló szakemberek tudományos érdeklődését ráirányítsa a modellekben rejlő lehetőségekre és korlátokra. A maximális elvárás viszont az is lehet, hogy a tananyag elsajátítása után az Olvasó önállóan is képes legyen problémákat megfogalmazni, megoldani, vagy javaslatot tenni a lehetséges megoldásra.

A logisztikai tervezés, mint a műszaki és ökonómiai tudományok határterületén mozgó diszciplína elsősorban a matematikára, a közgazdaságtanra és a műszaki alapismeretekre támaszkodik. A tananyag megértése nem igényel túl mély alaptárgyi előképzettséget, azonban némi jártasságot feltételez a lineáris algebrában, a valószínűség számításban, a matematikai programozásban és a számítástechnikában.

A szerteágazó ismeretanyagból a gyakorlat számára fontosnak ítélt módszerek, eljárások összeválogatása nem volt könnyű feladat. Fejtörést okozott az is, hogy a tananyag tárgyalása során mennyire szabad elvont elméleti fejtegetésekbe bonyolódni, és ezzel az Olvasót összezavarni. Talán sikerült olyan közéleti találatot találni, ami nem sérti a matematikusokat, ugyanakkor nem tűnik túlzottan eleminek sem. A modelleket, eljárásokat igyekeztem gyakorlatiasan megfogalmazni és esettanulmányokkal, példákkal bőségesen illusztrálni.

Befejezésül köszönetem fejezem ki mindazoknak, akik e könyv megjelenését valamilyen formában elősegítették. Köszönet illeti munkatársaimat és hallgatóimat, akik hasznos tanácsaikkal és megjegyzéseikkel ösztönöztek a tananyag csiszolására; a lektorokat, dr. Galántai Aurél és dr. Husti István professzorokat a kézirat gondos átnézéséért és hasznos észrevételeikért; a Logisztika Oktatásért Kutatásért Alapítvány alapítóit, akiknek támogatása nélkül a kézirat nem készülhetett volna el.

Gödöllő, 2018. február 10.

A SZERZŐ

1. LOGISZTIKAI ALAPFOGALMAK

Ahhoz, hogy később azonosíthassuk a logisztikai tervezés körében megoldandó problémákat, röviden áttekintjük a legfontosabb logisztikai alapfogalmakat és feladatokat, valamint meghatározzuk azt a külső és belső környezetet (rendszer), ahol a logisztika működik, illetve vázoljuk a logisztika és a környezete közötti kapcsolatokat.

Lényegében a logisztika három területét (beszerzés, termelés, elosztás) integráló ellátási-lánc (SMC) a küldetését úgy teljesíti, hogy egyensúlyt keres rendszerköltségek és a vevői elégedettség között. Ezt a következő ellátási-lánc elemek:

- (1) az ellátási-lánc csomópontjait felölelő szállítók, gyártók, raktárak, és boltok;
- (2) a csomópontokat összekapcsoló szállítási hálózat;
- (3) az ellátási-lánc csomópontjai közötti adatcserét lehetővé tevő, az ellátási-lánc tervezését és a napi operációk lebonyolítását támogató informatika-infrastruktúra;
- (4) az anyagáramokat és a készletmenedzsmentet irányító módszerek és algoritmusok

költséghatékony integrációjával és koordinációjával oldja meg.

Elméletileg közelítve, az ellátási-láncok lényegében lépcsősen rendezett, ellátó hálózati struktúrák, előre, visszafelé és mindkét irányban áramló összetevőkkel. A nyersanyagok, alkatrészek, termékek, stb. a főáram irányában mozognak, a pénzmozgások ellentétes irányúak, és végül az információk mindkét irányban áramlanak. Ennek ellenére, az ellátási-láncokban az entitásáramlások iránya nincs szigorúan meghatározva, mert például a hibás termékek visszafelé mozoghatnak javításra, vagy előfordulhat, hogy az átutalt pénzt valamilyen oknál fogva vissza kell fizetni.

Az alapvető **ellátási-lánc lépcsők** a következők:

1. A **beszerzési lépcső** nyersanyagokkal vagy alkatrészekkel látja el a gyártást.
2. A **termelési lépcső** a nyersanyagokat és az alkatrészeket késztermékké alakítja át.
3. Az **elosztási lépcső** az elosztási hálózathoz áll: raktárak, az elosztó központok, szállítási létesítmények, amelyek késztermékeket mozgatnak a kereskedőkhöz.
4. A **kereskedelmi lépcső** értékesíti a termékeket a végfelhasználóknak (vevőknek).

Gyakorlatban a komplex **ellátási-láncok széles tartományt ölelnek fel** az egyszerű ellátási-láncoktól, ahol mindegyik lépcső egyetlen csomópont, a bonyolultakig, ahol mindegyik lépcső önmaga is egy bonyolult hálózat, amely több csomópontból és élből áll. Például a termelési lépcső lehet hierarchikus, amelyben a beszállító üzemek alkatrészekkel látják el az alkatrészeket bonyolultabb félkész vagy végtermékekké összeszerelő integrátor üzemet. Az elosztóhálózatok hasonlóan nagyszámú hierarchikusan szervezett objektumot integrálhatnak az elosztó központtól a nagykereskedelmi raktáron át a kiskereskedelmi raktárig. Az is tény, hogy az ellátási-lánc átlépheti a nemzeti határokat és kiterjedhet több kontinensre.

1.1. A logisztika definíciója

Bármilyen vállalatról vagy szervezetről legyen is szó, a benne zajló folyamatok között anyagi természetűek is előfordulnak. Van ahol ezek az anyagi folyamatok, áramlások a vállalat küldetésének hordozói, ilyenek a szállítási vállalatok, és van olyan szervezet, ahol az anyagi folyamatoknak csak kiegészítő funkciói vannak, pl. egy kórház, ahol az anyagáramlás nem tartozik a tevékenység lényegéhez. A vállalat működéséhez azonban nemcsak a belső, hanem a külső, egymás közötti anyagi jellegű kapcsolatok is hozzátartoznak. A vállalatok e folyamatokon keresztül kapcsolódnak be a gazdaság egészének anyagi vérkeringésébe.

Az **anyag folyamatok** a tér és az idő szakaszosan folytonos függvényei. A szakadások alapvető oka a termelés szakosodása az adott régió gazdasági adottságainak megfelelően, ami helyben és időben különbségeket eredményez a termelésben, ugyanakkor a kereslet nagyobb hányada sem ott jelentkezik, ahol az árut megtermelik. Mindezek miatt az anyagokat, félkész- és késztermékeket az egyik helyről el kell juttatni a másikkra. Ha azt akarjuk, hogy a szakadási pontokon a kapacitás különbségek miatt ne legyenek fennakadások, fel kell halmozni a termékek bizonyos készletét.

Az **anyagáramok**, a **készletek**, és az ezeket mozgásba hozó **információk** áramlásának vizsgálata, elemzése, irányítása önálló tudomány, amit logisztikának neveznek. A logisztikai menedzsment egy olyan unikum, amely az egyik legújabb és ugyanakkor az egyik legrégebb vállalati tevékenység. A logisztikai folyamatok: *elosztás, szállítás, anyagmozgatás, raktározás, készletgazdálkodás, kommunikáció stb.* a termelés szakosodása óta ismertek. Nehéz lenne olyan termelési vagy marketingtevékenységet találni, amely ne igényelne, vagy korábban ne igényelt volna logisztikai támogatást. Napjainkban tehát nem a folyamatok jelentik az újdonságot, hanem a logisztika szó mögött rejlő filozófia, ami a logisztika folyamatok irányításának integrált, rendszerszemléletű közelítése az ellátás, termelés és elosztás költségeinek csökkentése érdekében.

A logisztika az összes mozgattal és tárolással kapcsolatos tevékenységet integrálja, amelyek egyrészt elősegítik a termékek áramlását a nyersanyaglelőhelyektől a végső felhasználásig, másrészt az információk áramlását, amelyek mozgásba hozzák a terméket azzal a céllal, hogy biztosítsák a megfelelő szintű és elfogadható költségű áruellátást. A logisztika tehát az áruk (anyagok, félkész- és késztermékek, szolgáltatások) mozgattásának, tárolásának, készletezésének stratégiája a beszerzéstől a fogyasztásig. Feladata: biztosítani az áruvázlatot a megfelelő mennyiségben, a megfelelő időben, a megfelelő minőségben és a megfelelő helyen a lehető legkisebb költséggel. Ez jelenti az áruk áramoltattását a termelő vagy feldolgozó helyekre, beleértve ebbe az üzemen belüli mozgásokat is, és a késztermékek eljuttattását a fogyasztókhoz a disztribúciós csatornákon keresztül.

1.2. Logisztika és a vállalati rendszer

A logisztika helyének azonosítása és rendszerbeli szerepének megvilágítása szükségessé teszi a **gazdasági szervezet** mint rendszer fogalmának a bevezetését.

A gazdasági szervezetek legfontosabb jellemzői:

- olyan rendszerek, amelyek meghatározott gazdasági célok elérése érdekében működnek, társadalmi szükségletek határozzák meg kialakulásukat, működésüket és megszűnésüket, a munkamegosztás révén anyagi és szellemi erőforrások koordinálásával jönnek létre és működnek,
- emberi társulások, ezért a legfontosabb elemük az ember,
- belső vezérlőfunkciójukat a vezetés gyakorolja.

A gazdasági szervezeteket csoportosíthatjuk az **ellátott feladat szerint** (mezőgazdasági, építőipari stb. szervezetek), valamint a **gazdaságban elfoglalt helyzetük szerint**. Az utóbbi ismerv alapján beszélünk makro- és mikrogazdasági szervezetekről. A második kategóriába tartoznak a számunkra legfontosabb vállalatok.

A gazdasági szervezetek lényegéből fakad, hogy működésük során, különböző belső és külső hatások következtében, folytonos változásokon mennek keresztül, amit a bennük végbemenő számszerűsíthető állapotváltozásokkal lehet kifejezni. Pl., ha egy termelő vállalat működését egy rövid időszakban vizsgáljuk, számos állapotváltozást tapasztalunk: anyagok beszállítása, raktározása, felhasználása, gépek meghibásodása, új gépek beállítása, a munkaerő létszámvál-

tozása, új termék gyártása stb. Az állapotváltozások sorozatai folyamatokat alkotnak. A logisztika rendszerbeli szerepének tisztázásához célszerű ezeket a folyamatokat két alrendszerbe sorolni, reál- és irányítási szférába.

A **reálszférában** zajló folyamatok a rendszer főfolyamatai, amelyek során a szükséges erőforrások bekerülnek a rendszerbe, ezeket a célkitűzéseknek megfelelően átalakítják, majd az átalakítás eredményeként létrehozott termékek kikerülnek a rendszerből.

A bonyolult, gyakran sztochasztikus viselkedésű gazdasági folyamatok összehangolása, működtetése, fenntartása és továbbfejlesztése az irányítási szférában működő vezetés feladata. A **vezetés funkciói**: kezdeményezés, információszerzés, tervezés, szervezés, döntés, ellenőrzés, értékelés stb. Ezek közül, mint legfontosabb a döntés emelhető ki, ugyanis az összehangolt működés megteremtése, fenntartása és továbbfejlesztése döntések sorozatán keresztül valósul meg. A többi funkció csak a döntések megalapozását szolgálja. A döntés nem más, mint a különböző alternatív cselekvési lehetőségek közül történő választás, amit csak megfelelő információk birtokában lehet meghozni.

Az **irányítási szférában** tehát különböző vezetési és a vezetést segítő folyamatok játszódnak le, amelyek a gazdasági rendszer (pl. vállalat) működését hivatottak biztosítani. Az irányítási szféra bemenetei a reálszférából és a környezetből beáramló információk (a rendszerbe belépő anyagokról, energiáról, munkaerőről, a kilépő termékekről, illetve vevőkről, szállítókról, piaci viszonyokról stb.). Kimenetei a reálszférába, illetve a környezetbe kiáramló információk (stratégiai, taktikai tervek, utasítások, a vevők tájékoztatása a termékválasztékról, minőségről stb.).

A logisztikai rendszer a reál- és az irányítási szférában működő alrendszer, amely gondoskodik a termeléshez szükséges anyagok, termékek, energiák és információk rendszeren belüli és kívüli mozgatásáról. Elvontan értelmezve, a termelés és a fogyasztás különböző helyei olyan pontoknak tekinthetők, ahova, illetve ahonnan anyagok, termékek áramlanak be és ki. Az anyagi áramlás realizálása a logisztikai alrendszer egyik feladata, amely a reálszférában gyakorlatilag három fizikai művelettel: rakodás, szállítás, tárolás (RST folyamatok) valósítható meg. Az RST folyamatok a logisztika anyagáramlást megvalósító alapfolyamatai, amit ún. kiegészítő folyamatok (csomagolás, komissiózás, egységrakomány-képzés és -bontás, ellenőrzés) tesznek teljessé. A logisztikai alrendszer azonban nemcsak ezeket a műveleteket, hanem azokat az anyagáramlással kapcsolatos információs folyamatokat, az irányítási szférában hozott tudományosan megalapozott intézkedéseket is jelenti, amelyek az anyagi folyamatok költségeinek minimalizálásával csökkentik a termelés összes költségét. A logisztikai alrendszer tehát nagyon sok ponton kapcsolódik a vállalat egyéb alrendszereihez és a környezetéhez.

1.3. A logisztika területei

A logisztika egy gazdasági szervezetnél a termeléshez szükséges anyagok és félkész-termékek, valamint a kimenő oldalon a késztermékek áramoltatását, tárolását, illetve ezek menedzsmentjét jelenti.

A logisztikai folyamatok úgy is tekinthetők, mint a termelés kezdő és befejező műveletei: az anyagok, alkatrészek szállítása a beszerzési helyekről a feldolgozás vagy felhasználás helyére, illetve a feldolgozott termékek mozgatása az elosztás vagy fogyasztás helyére. Az ipari és a mezőgazdasági termelésben a logisztikai operációk nagyon sokféle vállalatban belüli és kívüli mozgatást jelenthetnek, amelyek végpontjai a további ipari felhasználók, viszonteladók, nagykereskedelmi vállalatok, kiskereskedők, vagy a piac egyéb közvetítői.

A logisztikát a szakirodalom három nagy területre osztja fel: *anyagellátási, termelési és elosz-*

tási logisztika [28], amelyekhez különböző anyagi és információs folyamatok kapcsolódnak (1.1. ábra).

	Anyagellátás	Termelés	Disztribúció
Anyagi folyamat	beszállítás, anyagmozgatás stb.	anyag, félkész és késztermék raktározás; anyagmozgatás	csomagolás, anyagmozgatás, kiszállítás stb.
Információs folyamat	tervezés, beszerzés, rendelés, ellenőrzés, kínálat nyilvántartás	készletgazdálkodás, termelésprogramozás, raktári nyilvántartás stb.	vevőszolgálati tevékenység, vevő és rendelés nyilvántartás

1.1. ábra. A logisztikai tevékenységek csoportosítása

Az **ellátási logisztika** (anyagellátás) azért felelős, hogy a szervezet főtevékenységéhez szükséges alap-, segéd-, és üzemanyagok, alkatrészek a 4 M-elvnek megfelelően rendelkezésre álljanak. Ez jelenti az áruk (anyagok, félkész-és késztermékek) beszerzését, rendelését, a különböző földrajzi pontok közötti mozgatását a beszerzés helyétől a gyártó vagy feldolgozó helyig, illetve a beszerzési helytől a nagykereskedelmi vagy kiskereskedelmi raktárig. Az ellátási logisztika **feladatai**: az alkalmas anyagellátási stratégiák megválasztása, a beszerzés helyétől a vállalatig terjedő anyagáramlás és az ehhez kapcsolódó információáramlás tervezése, szervezése, irányítása és ellenőrzése.

A szervezettől függően az anyagellátási folyamat elnevezése különböző lehet. A gépiparban és a mezőgazdasági üzemekben általában *anyag- és alkatrészellátásról* beszélnek, az élelmiszeriparban a *felvásárlás* kifejezés honosodott meg, a nagy- és kiskereskedelemben a *beszerzés* kifejezés használatos. A későbbiekben általánosan az anyagellátás kifejezést használjuk. Hasonlóan az anyag szót is szélesebben értelmezzük, ami jelenthet alapanyagot, alkatrészt, félkész-terméket. A termék alatt pedig a készterméket értjük. Így az anyagáramlás az input áramot és a belső mozgásokat jelenti, míg a termékek áramlása az outputáramlást az üzemtől a vevőig. Alapvető különbség az anyag és a termék között, hogy a termék esetében a gyártás vagy az összeszerelés következményeként valamilyen érték adódik az anyag értékéhez.

Az anyagellátás, hasonlóan a később részletezett disztribúcióhoz, úgy tekinthető, mint a kívánt anyagválaszték elérhetőségének biztosítása a megfelelő helyen és időben. Amíg azonban a disztribúció a vállalaton kívüli mozgásokat, addig az anyagellátás a belső folyamatokat: termelést, gyártást, szerelést stb. is támogatja. E tekintetben egy integrált termelési láncban ugyanaz a szállítási folyamat az egyik üzemnél disztribúciót, a másikon pedig anyagellátást jelent.

A **termelési logisztika** az alapanyag-raktártól a termelési folyamat különböző fázisain át a késztermék-raktárig terjedő anyagáramlást, tárolást tervezi, szervezi és irányítja. **Feladatai**: a bemenő oldalon az anyagok, a kimenő oldalon a késztermékek készletezése, tárolása, megővése; az üzemek és munkahelyek közötti anyagmozgatási, tárolási feladatok megoldása; a munkahelyek kiszolgálása; termelésközi készletekkel való gazdálkodás. A termelési logisztika tehát az anyagok és késztermékek vállalatban belüli mozgásáért, tárolásáért és készletezéséért felelős. A készletgazdálkodás egyrészt az anyagok és termékek üzemben belüli mozgását követi, adminisztrálja, másrészt a termelési vagy értékesítési program ismeretében gondoskodik a raktári készletek optimális szintjéről.

A termelési logisztika körébe tartozó belső áramlásoknak van egy olyan lényeges sajátossága,

ami megkülönbözteti az anyagellátástól és a disztribúciótól, mégpedig az, hogy amíg az anyagellátásnak és a disztribúciónak mindig szembe kell néznie a piac bizonytalanságaival, addig a belső áramlások teljesen vállalati kontroll alatt tarthatók. A külső bizonytalansági tényezők, a véletlenszerű vevői döntések, az anyagihiány stb. a belső folyamatokat jelentő termelési logisztikából kiküszöbölhetők. Ilyen módon a belső anyag- és információáramok bizonyos fókig befelé és kifelé irányuló mozgásoktól.

Az **elosztási logisztika** (fizikai disztribúció) felelős azért, hogy a termelőhelyről a fogyasztóhoz kerüljön a késztermék. **Feladata** a késztermék raktártól a felhasználókig, fogyasztókig terjedő termék- és információáramlás tervezése, szervezése, irányítása és ellenőrzése.

A vevő vagy fogyasztó a marketingcsatorna utolsó állomása. A termékek elérhetőségének biztosítása a marketingtörekvések alapvető része. Ha ugyanis a termék megfelelő mennyisége és választéka a megfelelő helyen nincs biztosítva, az veszélyeztetheti a teljes marketingtevékenységet. Ez azt jelenti, hogy a disztribúciót, mint a vevő helyben és időben való kiszolgálóját a marketing egyenrangú partnerének kell tekinteni. A disztribúció tehát egy olyan híd, amely fizikailag köti össze a termelőt a vevővel. A fejlett piacgazdasággal rendelkező országokban a marketingrendszerek támogatására sokféle disztribúciós rendszert alkalmaznak a vállalatok. Lényegében ezek a rendszerek kapcsolják össze a gyártókat, a nagykereskedőket, a kiskereskedőket és a vevőket a marketingcsatornákon keresztül, és gondoskodnak a termékek elérhetőségéről.

1.4. A logisztika a vállalati menedzsmentben

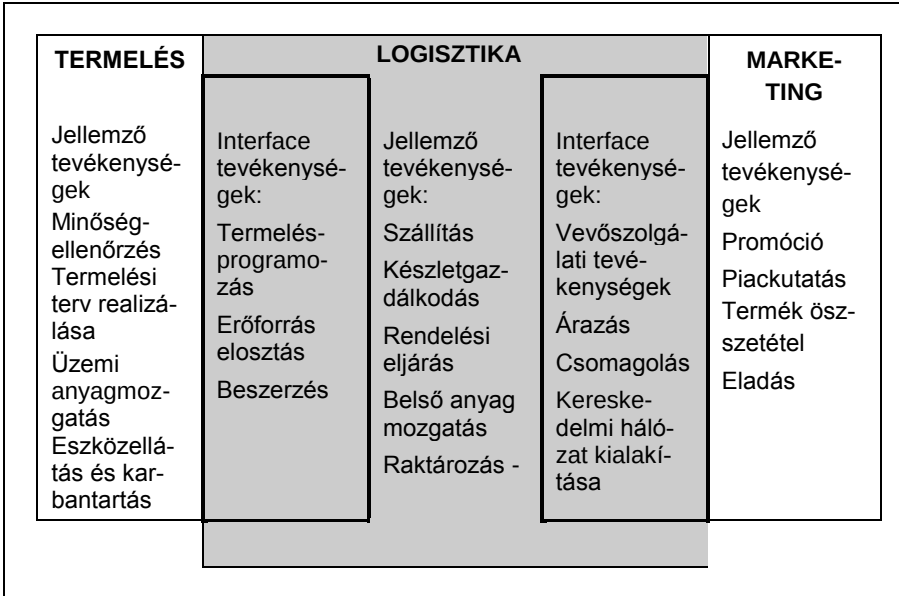
A logisztikai költségek a vállalat működési költségeinek jelentős hányadát teszik ki. Egyes becslések szerint elérhetik a termelési költségek 20-25%-át, ami döntően befolyásolhatja a vállalat versenyképességét. Ezt a tényt a fejlett országokban már a '70-es évek elején felismerték, és jelentős erőfeszítéseket tettek a logisztikai költségek csökkentése érdekében.

A korábbi években az üzleti tevékenységek fókuszában a termelés és a marketing állt, nem tulajdonítottak jelentőséget a fizikai elosztásnak. *P. Converse* [28] ismert marketingprofesszor meg is jegyezte, az üzleti életnek nagy árat kellett fizetnie azért, mert több figyelmet szentelt a beszerzésnek és az értékesítésnek, mint a fizikai elosztásnak.

A logisztika hatékony működésének feltétele a logisztikai rendszer irányítására, ellenőrzésére alkalmas önálló szervezeti egység, az ún. **logisztikai részleg** (osztály, csoport stb.) létrehozása. A termelési és a marketingmenedzsment mellett a legfelsőbb szinten is megjelenő önálló logisztikai menedzsment kialakítása sok esetben ellenállásba ütközik. Az új vezetési szemlélet ugyanis nemcsak a vállalati tevékenységek irányításáért felelős szervezet struktúrájának átalakítását jelenti, hanem szükségszerűen maga után vonja a hatáskörök megosztását is. A korábban kizárólagosan a termelési vagy a marketingmenedzsment alá rendelt tevékenységeket újra kell csoportosítani, és bizonyos tevékenységekért a logisztikai menedzsmentet kell felelőssé tenni.

A legmodernebb szemlélet szerint, mint azt már említettük, az integrált logisztika hatáskörébe tartozik az anyagellátás, a készletgazdálkodás és a fizikai elosztás, illetve az ezekhez szorosan kapcsolódó szállítás, raktározás és rakodás. Természetesen az önállóság nem öncélú, hanem a bemenő oldalon a termelés, a kimenő oldalon pedig a fogyasztó hatékonyabb kiszolgálását jelenti csökkenő összköltség mellett. Ennek előfeltétele a termeléssel és a marketinggel való szoros együttműködés, az információk áramlását biztosító csatornák kiépítése. Ez általában a legfelsőbb irányítás hatáskörébe tartozó ún. *interface* tevékenységeken keresztül valósul meg [28] (1.2. ábra). Például ilyen tevékenység a termelés és a logisztika között a termelésprogramozás, a termeléshez szükséges anyagok és eszközök felmérése, vagy a marketing és a lo-

gisztika között a vevőszolgálati tevékenység, az árpolitika.



1.2. ábra. A logisztikai tevékenységek kapcsolata a szervezet egyéb tevékenységeivel

1.5. Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse a termelés szakosodásának következményeit!
2. Sorolja fel a logisztika által integrált folyamatokat!
3. Mi a logisztika definíciója és feladata?
4. Jellemezze a gazdasági szervezeteket, mit jelent a reál- és az irányítási szféra!
5. Sorolja fel a vezetés feladatait!
6. Hol helyezkedik el a logisztika a gazdasági szervezetekben?
7. Melyek a logisztika alap- és kiegészítő folyamatai?
8. Sorolja fel a logisztika területeit!
9. Ismertesse az ellátási logisztika feladatait!
10. Ismertesse a termelési logisztika feladatait!
11. Ismertesse az elosztási logisztika feladatait!
12. Milyen strukturális és hatásköri változásokat von maga után a logisztikai szemlélet terjedése?
13. Ismertesse a logisztikai tevékenységek kapcsolatát a szervezet egyéb tevékenységeivel!

Jegyzetek, kérdések

2. LOGISZTIKA A VÁLLALATI INFORMÁCIÓS ÉS IRÁNYÍTÁSI RENDSZERBEN

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, miként támogatja a menedzsment információs rendszer (MIR) a logisztikai rendszer tervezését és irányítását. Ehhez tisztázzuk az információs rendszer fogalmát, meghatározzuk az adatok eredetét és forrásait, áttekintjük az adatfeldolgozás folyamatait. Végül megvizsgáljuk, hogy az információ milyen formában a leghasznosabb a logisztikával foglalkozók számára.

Már régen felismerték, hogy a tervezés és irányítás hatékonysága szorosan összefügg az elérhető információk mennyiségével, formájával és pontosságával. A számítógépek megjelenésével és gyors elterjedésével az információ-feldolgozás folyamata forradalmian megváltozott. Az adatokat manuális módszerekkel tároló, rendező és feldolgozó rendszereket lassan felváltják a gondosan felépített számítógépes integrált vállalatirányítási rendszerek [28].

2.1. Alapfogalmak

Az információ, az információs rendszer és ezzel összefüggésben a számítógép rendszerbeli szerepét az első fejezetben definiált gazdasági szervezeten belül mutatjuk be. Az irányítási szférában különböző vezetési és a vezetést segítő folyamatok játszódnak le, amelyek a gazdasági szervezet (pl. vállalat) működését hivatottak biztosítani. Az irányítási szféra bemenetei a reálszférából és a környezetből beáramló, kimenetei a reálszférába illetve a környezetbe kiáramló információk. Az információ ezért a vezetési döntések szempontjából központi helyet foglal el.

Az **információn** olyan jeleket vagy jelsorozatokat értünk, amelyek a rendszerben vagy annak környezetében végbement változásokról ismereteket tartalmaznak. Megjelenési formáját tekintve az információ lehet adat vagy hír. Az **adat** a rendszerben vagy annak környezetében végbenő állapotváltozásokról rögzített, sokszor számszerűsített ismeret. A **hír** a különböző eseményekről, állapotokról szóló jelzés, ami nem mindig rögzített.

Az információt három szempontból értelmezhetjük: formailag (szintaktikailag), tartalmilag (szemantikailag) és alkalmazási szempontból (pragmatikailag).

A gazdasági szervezetekben az információk egy része közvetlen forrásból, más része adatfeldolgozás útján jön létre. Az adatfeldolgozás eredményességének megítélésekor az információ gyakorlati felhasználhatósága a döntő. Csak az tekinthető információnak a feldolgozott adatok közül, amely eleget tesz a rendszer követelményeinek, vagyis szükség van rá, elegendő mennyiségben és megfelelő időben áll rendelkezésre. Ha ezek a követelmények teljesülnek, akkor az információ **pragmatikusnak** tekinthető.

Az is világos, hogy adatfeldolgozás előtt előre meg kell határozni a pragmatikus információk körét. A kérdés azonban, hogyan lehet ezekhez az információkhoz hozzájutni. Általában modellezéssel. Fontos, hogy a modell hűen tükrözze a rendszerben fennálló valóságos körülményeket ezért megalkotásakor az információ tartalmi (**szemantikus**) oldala kerül előtérbe.

A pragmatikus információk gyakran feldolgozás eredményeként keletkeznek, ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az adatokon bizonyos műveleteket (rendezés, konvertálás, továbbítás stb.) kell végezni. Ilyenkor lényegtelen az információ tartalma és felhasználhatósága, csupán a feldolgozhatósága a fontos. A jelentésétől megfosztott információt nevezzük **szintaktikus** információnak vagy adatnak.

A számítógép vagy a **számítógép-rendszer** nem azonos az információs rendszerrel. A kettő viszonyában az információs rendszer az elsődleges. A számítógép csupán egy technikai eszköz, amelynek rendeltetése kiszolgálni az információs rendszert, esetleg más rendszereket. Számos

tapasztalat bizonyítja, hogy az alkalmazott technikai eszközök korszerűsége nem mindig jelenti az általa kiszolgált rendszer korszerűségét. Akadnak olyan szervezetek, melyeknek információs rendszere gondosan szervezett, annak ellenére, hogy nem használnak bonyolult technikai eszközöket és fordítva.

A számítógép-rendszeren belül további alrendszereket lehet megkülönböztetni: ezek a hardver, a szoftver és az orgver.

A **hardver** maga a gép, melynek komponensei az adatfeldolgozás alapvető funkcióinak megfelelően különülnek el: adatbevitel, adattárolás, számítás, vezérlés és adatkivitel egységei.

A **szoftver** a számítógép intellektuális része, amely lehetővé teszi a fizikai részek (hardver) működését. Szűkebb értelemben az operációs rendszer programjait és rutinjait foglalja magában, tágabb értelemben a felhasználói programokat is. Az utóbbiak lehetnek adatbázis-kezelő, statisztikai, matematikai, operációkutatási, termelésirányítási stb. programcsomagok, vagy speciális célú felhasználói programok.

A számítógéppel összefüggésben egy harmadik elemet is említene az **orgvert**, amelybe a felhasználó által igénybe vett szabványosított szervezési módszerek és technikák tartoznak. Az orgver tágabb értelemben azokat a megfontolásokat, intézkedéseket jelenti, amelyek azt célozzák, hogy a szervezet kiépüljön, megvalósuljon és az új körülményekhez állandóan alkalmazkodjon. Szűkebb értelemben a számítógéprendszernek az a része, amely lehetővé teszi a felhasználó számára, hogy a számítógéprendszert beillessze az adott gazdasági környezetbe.

A gazdasági rendszerek és a bennük zajló folyamatok irányítását nemcsak az összetevők nagy száma, hanem gyakran a folyamatok sztochasztikus volta is nehezíti. A rendszer adott beavatkozásokra adott válaszait, reakcióit csak bizonyos valószínűséggel lehet megítélni. A vezetés feladata ezeknek a bizonytalanságoknak a csökkentése. Ehhez először meg kell vizsgálni, hogy adott feltételek mellett mi a valószínűsége annak, hogy meghatározott bemenetek a kívánt kimeneteket eredményezik, másodsor információkat kell szerezni arról, milyen beavatkozásokkal érhetjük el, hogy kimenetek az elképzeléseink szerint realizálódjanak. A valóságban természetesen mindez nem ilyen egyszerű, nem véletlen, hogy a vezetést gyakran művészetként említik.

A gazdasági szervezet összehangolt működéséhez a vezetésnek folyamatosan figyelemmel kell kísérnie a rendszerben és környezetében végbemenő változásokat, majd a tényleges és a kívánt helyzet összehasonlítása után döntenie kell a szükséges beavatkozásokról. Ezt a feladatot olyan információfolyamatok segítségével tudja teljesíteni, amelyek követik (leképezik) a reálszférában végbemenő folyamatokat, valamint a környezeti változásokat. A reálfolyamatokat tükröző és a környezetből áramló információk többsége csak bizonyos átalakítás után válik pragmatikus információvá. Ezen információk felhasználás előtt bekerülnek az adatfeldolgozó alrendszerbe, ahol gondoskodni kell az adatként megjelenő információk összegyűjtéséről, továbbításáról, tárolásáról, rendezéséről és szelektálásáról. Az elmondottakból az is következik, hogy a vezetés információigényének kielégítéséhez szervezett, szabályozott információáramlást kell létrehozni. A rendszer meghatározott pontjain végzett feldolgozási műveleteket követően az információkat el kell juttatni a vezetés különböző szintjeire.

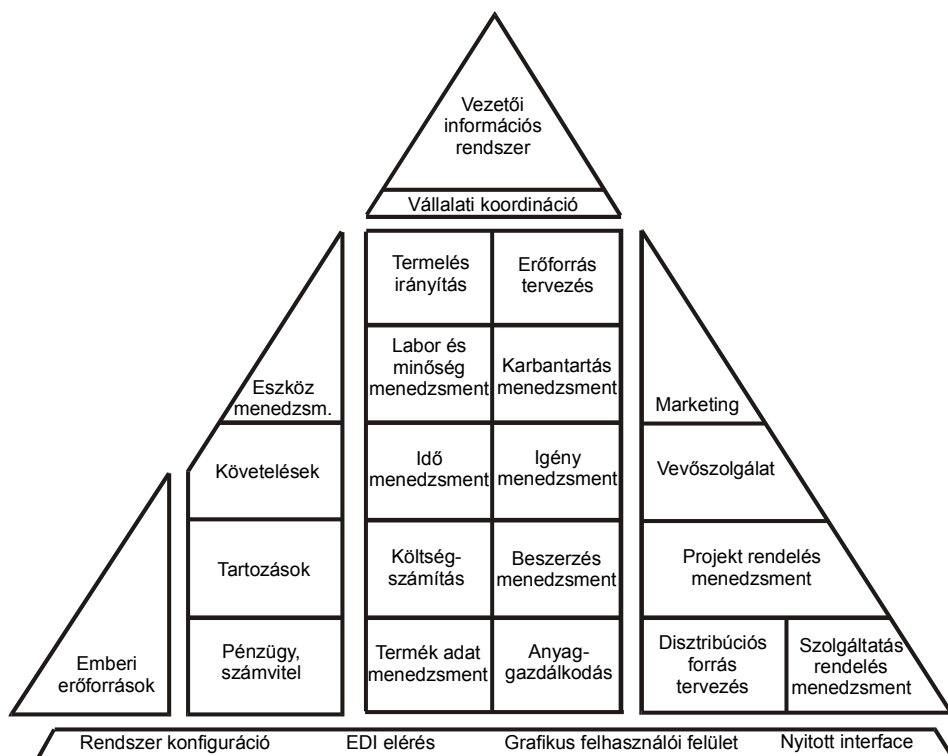
Összefoglalva: **az információs rendszer részének tekintjük:** az adott alrendszerrel kapcsolatban meghatározott információkat, a szabályozott információáramokat, az adatokat feldolgozó állomásokat és a felhasználói szinteket. Hangsúlyoznunk kell azonban, hogy a pragmatikus információk – akár közvetlen forrásból, akár adatfeldolgozásból keletkeznek – csak az ember (vezető vagy felhasználó) közvetítésével jönnek létre. Az információ feldolgozására egyedül az ember képes, aki a gép által előállított jelsorozatokot képes értelmezni.

2.2. Az információs rendszer funkciói, eszközei és feladatai

Az információs rendszert G. Davis a következők szerint definiálja: A **menedzsment információs rendszer** egy integrált ember-gép rendszer, amely információval látja el a szervezet vezető és döntéshozó testületeit. A rendszert számítógépes hardver- és szoftvertámogatás, kézi beavatkozás, vezetési, döntési modellek és adatbázis jellemzik [28].

A manuális és a számítógépes rendszerek funkciójukat és felépítésüket illetően alapvetően egyformák. Mégis azt kell mondanunk, hogy napjainkban a vállalati rendszer, ezen belül a logisztikai rendszer információigényének csak a számítógéppel támogatott ún. integrált vállalatirányítási rendszerek felelnek meg.

Integrált vállalatirányítási rendszernek nevezzük azokat az üzleti célra fejlesztett informatikai rendszereket, amelyek képesek egy vállalat funkcionális működési területeinek nagy részét lefedni. Általában alkalmasak a pénzügyi, a számviteli, az emberi erőforrás kezelési, az értékesítési, a termelési, a logisztikai (beszerzés, szállítás, anyag- és készletgazdálkodás) folyamatok kezelésére, illetve e területek információinak rendszerezésére. Integrált rendszerről akkor beszélhetünk, ha az egyes szakterületeken képződő információk a többi szakterület számára is hozzáférhetők, azaz érvényesül az egyszeri adatbevitel elve. Például egy vevői rendelés esetében bevitt információk automatikusan kiváltják a megfelelő tranzakciókat a rendszer más területein, például az anyagszükséglet tervezésben, a termelésirányításban stb.

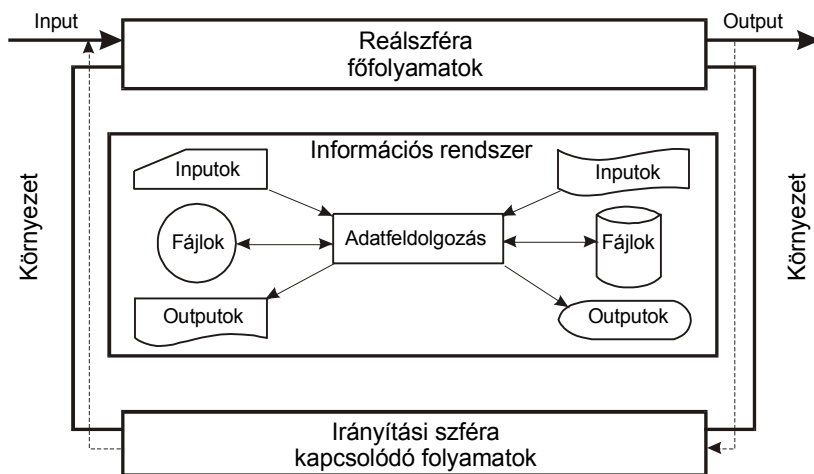


2.1. ábra. Egy integrált vállalatirányítási rendszer felépítése (MOVEX-piramis)

A jól felépített rendszer szolgáltatásai lehetővé teszik, hogy a vezetés gyors és pontos információk birtokában hozzon döntéseket. (Példaként a svéd Intentia által fejlesztett, MOVEX nevű rendszer felépítését és alapjellemzőit mutatjuk be a 2.1. ábrán).

Az információs rendszer egyik fontos jellemzője, hogy képes információ megszerzési és fel-

használási helye között **a hír vagy adat továbbításra**. A rendszer kiszolgálására különféle adatfeldolgozó és kommunikációs eszközöket lehet igénybe venni. A szóbeli érintkezések (személyesen, telefonon), a levelezés, a telex, e-mail, a különböző írásbeli jelentések, feljegyzések, emlékeztetők, mint kommunikációs lehetőségek, valamennyi információs rendszerben megtalálhatók. Kisméretű szervezetekben elképzelhető, hogy ezekkel ki is merül az információs rendszer eszköztára. A gazdasági szervezetek többsége azonban a legkülönbözőbb gépi eszközöket (pénztár-, sokszorosító-, könyvelőgépeket) veszi igénybe a rendszeren belüli adatfeldolgozási feladatok végrehajtására, amelyek csúcsát ma a műholdakkal is összekapcsolható számítógépek és a számítógépes hálózatok jelentik.



2.2. ábra. Integrált vállalatirányítási rendszer működése

A másik fontos jellemző **a rendszer tárolási funkciója**. Az adatok gyűjtésének, hozzáférhetőségének és azok felhasználásának időpontja nem mindig egyezik meg, így az információs rendszernek tárolókapacitással kell rendelkeznie.

Amint a 2.2. ábra mutatja az információs rendszer három egymástól jól elhatárolható funkciót lát el, annak ellenére, hogy a rendszer eszközei gyakran fizikailag is kapcsolódnak egymáshoz. Ezek az input, adatfeldolgozó, valamint az output funkció.

Az **input** a forrásadatok összegyűjtését, szelektálását, valamint azok bevitelét jelenti a rendszer feldolgozóegységébe különböző eszközök, adatátviteli módok segítségével.

Az információs rendszer szíve az **adatfeldolgozó**, az adatbázissal, az adatbázis-kezelő és az adatelemző programokkal. A rendszer számításokat végző és tároló része általában nagy kapacitású, gyors számítógépre alapozott. Amikor a számítógépeket először bevezették üzleti életbe, akkor azokat főként az ügyviteli tevékenységek gépesítésére alkalmazták, pl. vásárlók számláinak kiállítására, könyvelésre. Mára a rendelések, a szállítási okmányok, fuvarlevelek elkészítése, nyilvántartása általánossá vált, ami segíti a logisztikai menedzsmentet az anyagáramok követésében és elemzésében. Az adatfeldolgozás legtöbbször az adatok relatíve egyszerű átalakítását jelenti, annak érdekében, hogy azok valamilyen más formába jelenjenek meg (fuvarlevelek, számlák stb.).

A logisztikai vezetés céljainak megvalósításához szükséges adatok sok forrásból, sokféle formában érkeznek. Az **adatbázis-kezelő** elsődleges feladata az adatok rendszerezése és tárolása. Az adatbázis illetéktelenektől védett, de karbantartható (módosítható, törölhető) rekordokból felépített adatfájlokból áll. Az adatelérés, visszakeresés időigénye a nyers vagy csak kismértékben módosított adatok esetén leginkább az adatbázis-kezelő képességeitől és a számítógép sebességétől függ.

gétől függ. A rendszer ezen képességeit használja ki az a szállítványozó, aki fuvarozási tarifákat keres ki számítógépes listából, vagy az a menedzser, aki a rendeléseket ellenőrzi komputer segítségével. Gyorsaság, pontosság és kényelem azok az előnyök, amelyekhez az információ hatékony kezelésével juthatunk.

Az **adatelemző** modulok az információs rendszer legintelligensebb részei. A rendszer számos matematikai és statisztikai modellt tartalmazhat. Ezek a modellek bonyolultabb tervezési és vezetési problémák megoldására is választ adnak. A feladatok köre széles, telepítési, járatszerkesztési, útvonal-tervezési feladatok, de ide sorolható a kereslet-előrejelzés is. Néhány gyakori kérdés: hol kell elhelyezni egy áruházlánc újabb tagját, melyik fuvarozási formát válasszuk, milyen útvonalakon közelítsük meg a vevőinket, milyen lesz a kereslet a következő hónapban bizonyos termékre?

Az információs rendszer és egyben az adatáramlás utolsó állomása az **output**. A kimeneti információ általában több fajta és különböző formájú. A leggyakoribb forma a jelentés vagy lista, ami tartalmát tekintve lehet: statisztikai összefoglaló a költségről vagy teljesítményről; a leltárral vagy a rendelésekkel összefüggő jelentés; összehasonlító elemzés a tervezett és a megvalósított teljesítményekről. Az alkalmazások gyakoriságát tekintve a második helyen az okmányok, dokumentumok állnak, mint pl. fuvarlevelek, szállítási okmányok, számlák. Végül a kimenet lehet matematikai és statisztikai modellekből származó eredmény, adatelemzés.

A bemenetek, a feldolgozási képesség és a kimenetek az információs rendszer kulcsjellemzői. Vizsgáljuk meg ezeket részletesebben a logisztikai menedzsment igényeivel közelebbi összefüggésben.

2.3. Az információbázis kialakítása

A logisztikai információs rendszer kialakítása a logisztikai menedzser feladata. Az információk gyűjtése előtt felvetődő kérdések: *milyen adatokat kell összegyűjteni, hol vannak ezek forrásai, milyen gyakran fogjuk ezeket használni?*

Milyen adatokat? Általában elmondható, hogy igen nagy az átfedés a marketing, a termelés, a pénzügyek és a logisztika információigénye között. Ugyanakkor a vezetés is olyan kiterjedt adathalmazra tarthat igényt, amit teljes egészében nem lenne praktikus listázható formában megtartani. Ezért megőrzés előtt szelektálni kell az adatokat a szerint, hogy azok az egész szervezet számára fontosak és az információs rendszerbe illenek, vagy csak perifériális információkat hordoznak.

Például az anyagmozgatási feladat megfogalmazásakor az első lépés a feladat tárgyának, a mozgató termékeknek a minőségi és mennyiségi jellemzése. A mozgató termék tulajdonságai és mennyisége behatárolják az alkalmazható anyagmozgatási módszereket.

Vannak olyan követelmények, amelyek a megoldandó feladat helyszínével kapcsolatosak. Egyes anyagmozgatási igényeket egyszeri tevékenységgel, másokat a tevékenységek ismétlésével lehet kielégíteni. Az ezzel kapcsolatos követelmények az anyagmozgatási intenzitásból és az anyagmozgatás gyakoriságából jutnak kifejezésre. A feladat meghatározását sok esetben munkavédelmi, környezetvédelmi stb. előírások, rendeletek is befolyásolják. A nagyon sokféle információ közül a legfontosabbakat az alábbiakban foglaljuk össze.

A termelési folyamatokról beszerzendő adatok a következők:

- a termelési terv fő mutatói (termékek jegyzéke, a termékekből ki bocsátott volumen [t/év], [db/év]),
- a termelési technológiák leírása (a műveletek sorrendje, a termeléshez szükséges anyagok száma és mennyisége, az anyagmozgatási igények jelentkezésének volumene és időpontja, az alkalmazott gépek teljesítménye stb.),

a termelési folyamatok térbeli elhelyezkedése (az üzemek mérete, az üzemek és tárolóhelyek távolságai, az úthálózat minősége stb.).

A helyszíni építészeti adottságokra vonatkozóan megállapítandó információk:

a termelőhelyek, feldolgozóüzemek, tárolók stb. telepítése és elrendezése,

a rendelkezésre álló épületek jellemzői (alapterület, belmagasság, pillérosztás, földem teherbírás, padlóburkolat, kapuk és átjárók méretei, rakodók mérete és teherbírása, műszaki állapot, bővíthetőség stb.).

Milyen forrásokból? Azok a források, amelyekből adatokat gyűjthetünk, legalább annyira szerteágazóak mint maguk az adatok. Ennek ellenére az adatok forrásai négy területre szűkíthetők: (1) rendelések, számlák és egyéb üzemi nyilvántartások, (2) termelési tervek, belső feljegyzések, (3) külső források, (4) menedzsment. A legtöbb információ ezeken a helyeken könnyen elérhető. Ezért a költséges kutatások előtt először ezeket kell megvizsgálni.

(1) A megrendelés- és számlanyilvántartó az elsődleges logisztikai információforrás, mert tartalmazza a vásárlókra és a mennyiségekre vonatkozó alapvető adatokat. Tipikus adatok a megrendeléseket illetően: a vásárló telephelye (vagy lakhelye); a termék megnevezése; a termék mennyisége; a termék ára; a megrendelés dátuma. A számlák tartalmazhatják a szállítási időpontot, ami különösen hasznos lehet a tervezés és irányítás számára. A napi munka során használt egyéb bizonylatok is potenciális adatforrásként foghatók fel. Fuvarszámlák, menetlevelek, számlák csak néhány az információforrások közül, amelyekből megállapítható a szállítmány alakja, mérete, a szállítás módja.

(2) A termelési folyamatokra és a helyszíni építészeti adottságokra vonatkozó információk gyűjthetők az üzemben rendelkezésre álló bizonylatokból, termelési tervekből és rajzokból. Az anyagmozgatás pillanatnyi helyzetét jellemző adatok egyik része (pl. az anyagmozgató gépek száma, műszaki paraméterei stb.) ugyancsak rendelkezésre áll.

Nagyon értékes információhoz juthatunk közvetlenül a vállalat belső dokumentumaiból. Költséginformáció, a szállítókról készített statisztika, személyzeti adatok stb. tartoznak ehhez az információforráshoz. A belső feljegyzések gyakran érintetlenek, kitűnő információforrások. Általában ezek az adatok különböző helyeken találhatók, és nincsenek a logisztikai döntéshozatal számára megfelelően rendezve. Így például a raktárkészlet változása bármely termékre elérhető a vállalat belső adatainak felhasználásával. Ha azonban adatokat kell gyűjtenünk a pénzügyi, termelési (raktári helyek, anyagkezelési költségek), marketing (termék iránti kereslet), szállítás és a vásárlások (mennyiség-ár kapcsolat) oldaláról is, akkor több forrást is igénybe kell vennünk.

(3) Sok információt tartalmazhatnak különböző közlönyök, statisztikai kiadványok is. Szállítók és versenytársak gyakran bocsátanak ki értékes információt a hírnevük javítása érdekében. Vállalatok gyakran fognak össze a kutatások támogatására, információcserére, hiszen ez közös érdekük. Szaklapok, kereskedelmi magazinok közlik e kutatások, felmérések eredményeit. Ez csak néhány szervezeten kívüli forrás, amit adatgyűjtéshez használhatunk.

(4) Menedzsment tagjai gyakran értékes információforrásként szolgálhatnak. A jövőbeni eladások trendje, a versenyképesség megőrzése érdekében követett stratégia, a beszerzendő anyagok elérhetősége csak néhány példa az így megszerezhető információk sorából. A döntő információk nem a vállalati adathalmazban, számítógépes listákon, könyvtárakban találhatók. Azokat az emberi agyaktól kell előszedni. A vállalati vezetés, a belső konzultások, specialisták közel vannak az információforrásokhoz, így később maguk is azokká válhatnak.

Bizonyos adatok csak megfigyelésekkel, elemzésekkel állapíthatók meg. A megfigyeléseket igénylő alapinformációk feltárásának módja lehet teljes adatfelvételen alapuló, vagy reprezentá-

tív vizsgálat.

A teljes adatfelvételen alapuló vizsgálat egy meghatározott időtartam alatt az összes műveletek, mozgatások megfigyelését jelenti. Csak akkor célszerű alkalmazni, ha nagyon pontos adatokra van szükség, és nem igényel túl nagy ráfordítást.

A reprezentatív (statisztikai mintavételes) vizsgálat lehetővé teszi az adatfelvételi munkaráfordítás csökkentését. Az információk pontossága a mintaelemek számának megválasztásával tetszőlegesen beállítható. A vizsgálat elméleti kérdései a korábbi tanulmányokból ismertek, ezért ezekkel nem foglalkozunk, csupán néhány példát említünk az alkalmazási lehetőségek szemléltetésére.

A reprezentatív mintavételes megfigyelést célszerű használni az anyagmozgató gépek idő és teherbírás szerinti kihasználtságának a meghatározására, a betakarító gépek anyagmozgatás miatti várakozási idejének az elemzésére, a kiszolgálási folyamatok paramétereinek (érkezési ráta, kiszolgálási ráta, forgalomintenzitás stb.) meghatározására.

A reprezentatív módszer az üzemi nyilvántartásban szereplő adatok feldolgozásakor is használható. Előfordulhat, hogy az információhalmaz nagysága a teljes feldolgozást nem teszi lehetővé.

Mely adatokat szükséges számítógépen tárolni, manuálisan lejegyezni, és melyek azok, amelyekre nincs szükségünk? A számítógépek tárolókapacitásának folyamatos növekedésével ezek a kérdések egyre fontosabbá válnak, mivel természetes az a tendencia, hogy lényegtelen adatokat is tárolni akarjuk, csak azért, mert van elegendő tárolókapacitásunk. Az információ tartalmát és fontosságát a következő szempontok alapján ítéltethetjük meg: (1) az információ mennyire lényeges a döntéshozatalhoz; (2) milyen gyorsan kell visszakeresni az információt, és (3) milyen gyakran kell azt előhívni.

Az információkkal és adatokkal szemben támasztott igényeket a meghozandó döntések határozzák meg. Mivel a logisztikai döntések gyakoriságukat illetően eltérőek. Általában igény, hogy a gyakori döntések adatai gyorsan elérhetők legyenek, ami elsősorban a tárolás és a keresés módjától, valamint a rendezettség fokától függ. A gyors adatelérésnek azonban ára van, minél hozzáférhetőbb az információ, annál költségesebb a tárolás.

A kulcsadatokat legkönnyebben a logisztikai rendszer felépítése és a feladatok fontossága alapján azonosíthatjuk. Egy adott esetben az időre, a helyre, a körülményekre vonatkozó adatokat a menedzsernek vagy az elemzőnek kell rangsorolnia. A legfontosabb adatokat számítógépen tárolhatjuk. A kevésbé fontos adatokat mikrofilmen vagy kartonokon rögzíthetjük. A többi adatot egyszerűen összegyűjthetjük az eredeti forrásokból, amikor szükségünk van rájuk. Az adatok rangsorolásának egyfajta módja a következő lehet.

Kereslet-előrejelzés, készletszabályozás, fuvarszámla-elkészítés, szállítási idők megtervezése, költségelemzés stb. elkészítése csak néhány azok közül, amelyek gyakoriak és könnyen elérhető információkat igényelnek. Ilyen információra naponta többször is szükség lehet.

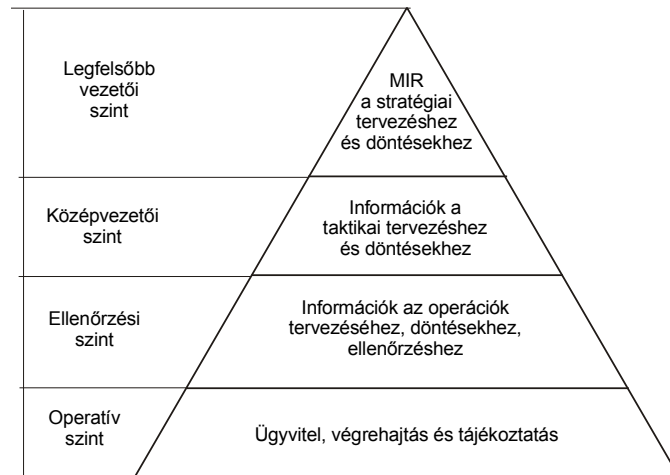
Az olyan tevékenységek mint a raktárlétesítés és -telepítés, anyagmozgató gép szükséglet felmérése stb. legfeljebb évente egyszer esedékesek. Az ezekhez szükséges információt a vállalati dokumentumok, feljegyzések tartalmazzák.

Végül a ritka tervezési és ellenőrzési tevékenységek, mint pl. saját raktár építése vagy a saját szállítóeszközök felülvizsgálata, rendszerint nem igényelnek rendezett és karbantartott információkat, mivel a szükséges adatok elsődleges forrásokból generálhatók.

Az információtárolás során követhetjük ezt a háromszintes rendezést, vagy ABC-analízissel rangsoroljuk az adatokat, ha arra egyáltalán szükség van. Az ABC-analízis segítséget nyújthat a tárolókapacitás megtervezéséhez is [24].

2.4. A logisztikai információs rendszer működése

A Logisztikai Információs Rendszer (LIR) a Menedzsment Információs Rendszer (MIR) alrendszere. A LIR biztosítja mindazokat az információkat, amelyek a logisztikai menedzsment számára szükségesek. A logisztikai irányítás szintjeinek megfelelően ezek az információk négy csoportba sorolhatók (2.3. ábra).



2.3. ábra. Az információs rendszer alkalmazásának szintjei

A piramis legalacsonyabb szintjén az **ügyviteli és tájékoztatási folyamatok** működnek. Itt említhetők: a rendelések nyilvántartása és elkészítése, a vevők nyilvántartása és tájékoztatása, a raktárkészlet karbantartás, számlázás, a szállítási okmányok kiállítása, szállítási tarifák lekérdezése stb. Ezek a műveletek óránként többször is előfordulnak, és ennek megfelelően nagyon gyakori az információs rendszer igénybevétele. Ezért ezen a szinten az információáramlás sebessége igen fontos. A kezelőszemélyzet, mint pl. rendelésbonyolítók, szállítmányszervezők stb. rendszeres használói az információs rendszernek.

A második szint az **ellenőrzés** és az **irányítás** első vonala. Itt a közvetlen munkairányítók gondoskodnak az áruelhelyezésről, a helyes térkihasználásról, ellenőrzik a rendelési és leltári nyilvántartást, felügyelik munkafolyamatokat, biztosítják azok folyamatosságát. Például egy gépjárműpark vezetőjének a szállítások teljesítéséhez, a határidők betartásához rendelkeznie kell emberekkel, a szükséges eszközökkel, alkatrészekkel és természetesen információkkal. Az irányításhoz és tervezéshez itt naponta új információkra van szükség.

A harmadik szint a **taktikai tervezés és irányítás** szintje. Ez a vezetés kiterjesztése az ellenőrzés szintjére, ahol az ismétlődő, rutinszerű szervezési és tervezési problémák viszonylag gyakran, évente többször, de nem naponta fordulnak elő. A leltárkészlet ellenőrzés és a szállítók értékelése, a fuvarozók kiválasztása, a raktárkihasználás és a szezonális szállítási illetve raktárhely igények megtervezése tartoznak a taktikai tervezés és irányítás körébe. E feladatok ellátása középvezetőket igényel, ilyenek pl. a raktározással, az elosztással és szállítással foglalkozó vezetők.

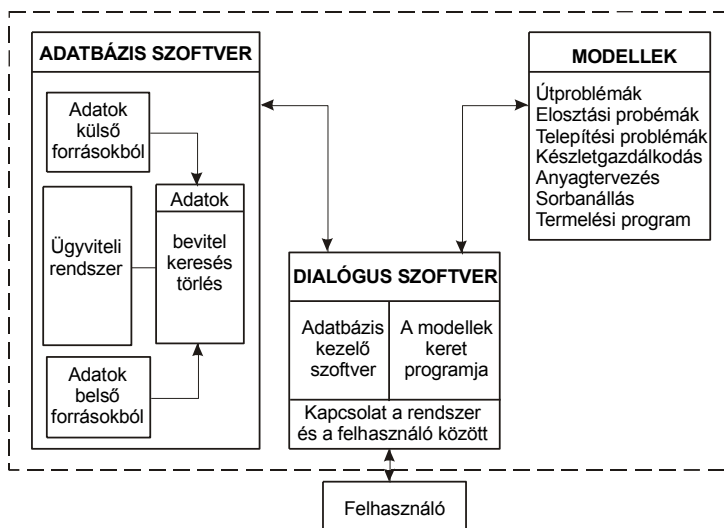
A legfelső szint feladata a **stratégiai** tervezés, a célok, a politikák és a végrehajtás módjának meghatározása, a logisztikai szervezet struktúrájának kialakítása, az ellátás-elosztás feladataihoz szükséges források biztosítása. Az információáramlás sebessége itt ritkán meghatározó, és az információs rendszer közvetlen elérése sem kritérium. A tervezésnek ezen szintjén elegendő az offline kapcsolat a számítógéppel, amely szelektált, célra orientált információt szolgáltat a döntésekhez.

A **Logisztikai Információs Rendszer (LIR)** alkalmazási területei három csoportba sorolhatók: ügyviteli rendszer, döntés-előkészítő rendszer (DER) és a kiértékelő-ellenőrző rendszer. Az **ügyviteli rendszerrel** szemben követelmény a logisztikai folyamatok napi működtetése. Az ügyviteli rendszer lefedi a rutinszerű logisztikai tevékenységeket. A számítógéppel támogatott döntés-előkészítő rendszer segíti a logisztikai menedzsert az operációs és tervezési döntések meghozatalában. A kiértékelési-ellenőrzési rendszer szintetizálja a kritikus eseményeket és tanácsokat ad a működési tervvel összefüggő döntésekhez, ugyanakkor olyan információkat szolgáltat, amelyek lehetővé teszik a megvalósított és a tervezett célok összehasonlítását.

Az ügyviteli rendszer **feladata** a napi logisztikai műveletek végrehajtása. Tipikus ügyviteli feladatok a megrendelések és fuvarozás bonyolítása, a készletek ellenőrzése, és az ezekkel kapcsolatos könyvelés. A rendszer átfogja a teljes logisztikai rendszert, beleértve az anyagellátást, a termeléstámogatást és a disztribúciót.

A számítástechnika fejlődése ösztönözte és ösztönzi a vezetői döntések hatékonyságát javító, számítógéppel segített tervezést és döntést. A mikroszámítógépek elterjedésének köszönhetően a **döntés-előkészítő rendszerek** a vezetés egyre hasznosabb és gyakorlatiasabb eszközévé válnak. A döntés-előkészítő rendszer (DER) egy interaktív számítógépes rendszer, amely a döntéshozókat segítő adatbázist és az analitikus modelleket foglalja magában.

A DER segítségével speciális karakterisztikájú problémák oldhatók meg. Ezek főbb jellemzői: dinamikusan változó helyzet, korlátozott időtartam a megoldásra, folytonosan változó adatok azonos elvek szerinti feldolgozása, komplex, az emberi agy képességeit meghaladó feladatok.



2.4. ábra. Logisztikai döntés-előkészítő rendszer

Dinamikus problémák esetében a megválaszolandó kérdések állandóan változnak, egyrészt azért, mert a vezető szemlélete és elképzelése változik, másrészt azért, mert maguk a feladatok is változnak. A megoldásra rendelkezésre álló idő akkor korlátozott, amikor a válaszadás időtartama kritikus, vagyis gyorsan kell döntést hozni. A dinamikus, folyton változó adatbázis szinte minden rendszer jellemzője. Ezek rutinszerű kiértékelése, ellenőrzése tipikus számítógépes probléma. A komplex, nagy feladatokban a változók nagy száma és azok bonyolult kölcsönhatásai teszik szükségessé a komputer és a speciális modellek alkalmazását. A DER tipikus területe az ügyviteli rendszer és az információs rendszer más részei közötti kölcsönhatások vizsgálata a vezetői tevékenységek támogatása érdekében.

A DER alkalmazásának előnyei a következők: (1) költségek, a szolgáltatások és a gazdaságosság alakulásának áttekinthetősége, (2) a logisztikai rendszer tökéletesítéséhez szükséges lépések azonosíthatósága, (3) az adatbázis állandó fejleszthetősége, (4) gyors válaszok a "mi a teendő, ha" kérdésekre.

A logisztikai DER felépítését a 2.4. ábra illusztrálja. A rendszer fő moduljai az adatbázis-kezelő az adatbázissal, a modellek és az ezekkel kapcsolatot teremtő dialógus-szoftver.

A modelleket tartalmazó alrendszer célja útmutatást nyújtani a vezetői döntésekhez. Az ideális modellek rugalmasan alkalmazhatók különböző döntési szituációkban. A logisztikai modellek fajtáit és jellemzőit részletesen tárgyaljuk a további fejezetekben.

Az adatbázist tartalmazó modul feladata a döntési folyamatok támogatása az adatok információként használható formába rendezésével. Az adatbázis speciális logisztikai fájlokat és külső adatokat tartalmaz. A logisztikai adatok általában az ügyviteli rendszerből generálhatók. A külső információk forrásokból származó adatok olyanok, amelyek relevánsak a logisztikai döntéselőkészítő rendszerrel. Ezek a külső adatok általában elérhetők a MIR-ben. A logisztikai DER adatbázisától elvárható, hogy (1) képes legyen a különböző forrásokból származó adatok egyesítésére, (2) tegye lehetővé az adatok gyors bővítését, törlését és módosítását, (3) az adatokat áttekinthető és könnyen érthető formában jelenítse meg, (4) rendelkezzen teljes körű adatmanipuláló funkcióval, és (5) rugalmasan biztosítsa a speciális adatfájlok felépítését.

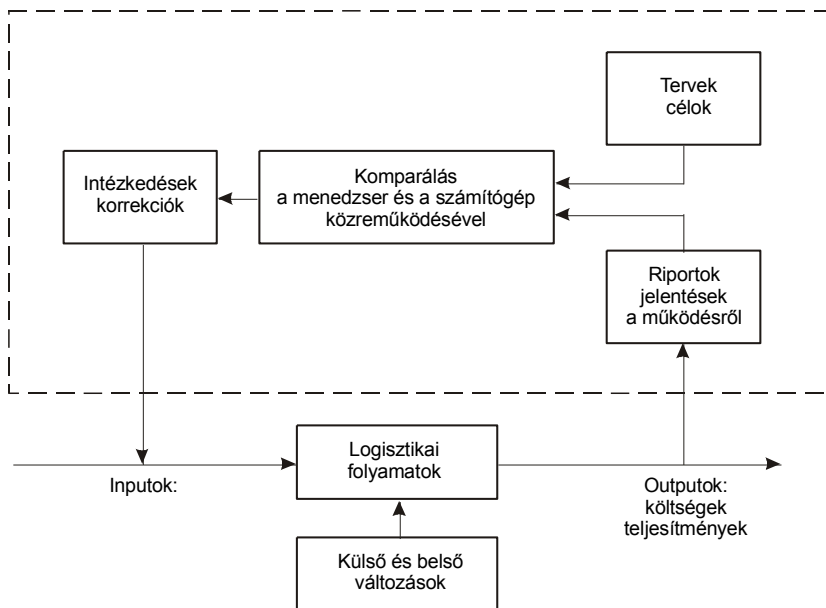
A dialógus-szoftver teremt kapcsolatot a döntéselőkészítő rendszer és a felhasználó között. A jó dialógus-szoftver párbeszédés formában vezeti a felhasználót a döntési folyamatban. Az alapelvek: tegyük az adatelőkészítést mechanikussá, a modellek használatát pedig olyan egyszerűvé, amennyire csak lehet. Ezen kívül a dialógus-szoftver segítse a felhasználót a lehetőségek azonosításában és a megoldások kiértékelésében. A legfejlettebb szoftverek az ún. szakértői rendszerek mesterséges intelligenciáknak tekinthetők. A szakértői rendszer a feldolgozott tapasztalatokra építve képes kérdéseket feltenni és válaszolni, majdnem gondolkodni, és így elvezetni a felhasználót a legjobb megoldáshoz. Amíg a szakértői rendszerek az orvosi gyakorlatban már általánosan használt eszközök, addig a logisztikában csak elvétve találkozunk velük.

A **kiértékelési-ellenőrzési rendszer** (kontrolling) a kulcs a vezetés operatív terveinek következetes megvalósításához. A folyamatok figyelemmel kísérésének javítása, a műveletek hatékonyságának kiértékelése és az ellenőrzése segíti a szervezetet a logisztikai célok elérése érdekében kifejtett erőfeszítéseiben.

Általános értelemben és funkcionális szempontból a kontrolling a vezetés alrendszere, amely a tervezést, az ellenőrzést és az információellátást koordinálja. A vezetés támasza: lehetővé teszi, hogy célirányosan, a környezeti változásokhoz igazodva irányítsa a vállalatot [84].

A kiértékelési-ellenőrzési rendszer funkciói: (1) riportokra, könyvvizsgálatokra és megfigyelésekre támaszkodva méri a végrehajtás eredményességét, (2) összeveti a terveket és a megvalósítást, (3) felhívja a figyelmet a korrekciók szükségességére. Ezt a folyamatot mutatja be a 2.5. ábra.

A végrehajtás eredményességének mérése gyakorlatilag a teljesítmények és a költségek mérését jelenti. A **teljesítmények** mérésére az adott logisztikai tevékenységet jellemző mennyiségi és minőségi mutatószám-rendszert célszerű kidolgozni. A saját logisztikai **költségek** komponensei a teljesítmények létrehozásában közreműködő elemek (anyagmozgató gépek, járművek, tároló berendezések, raktárak stb.) üzemeltetési költségei (energia-, javítási, karbantartási költségek, amortizáció, leköttött tőke kamata stb.) és a munkabérek, illetve azok járulékai. Külső logisztikai szolgáltatások igénybevétele esetén a szolgáltatás díja.



2.5. ábra. Logisztikai kiértékelő-ellenőrző (kontrolling) rendszer

A kiértékelő-ellenőrző rendszer tartalmaz egy prototípus rendszert, amellyel a logisztikai rendszer termelékenysége, hasznossága és a teljesítménye összevethető. A számítógéppel támogatott kiértékelési és ellenőrzési rendszer célja az irányítási folyamatok automatizált szabályozása.

2.5. Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse az információ fogalmát és értelmezési formáit!
2. Ismertesse az információs- és a számítógép-rendszer kapcsolatát!
3. Mi a különbség a hardver, a szoftver és az orgver között?
4. Melyek az információs rendszer részei?
5. Mit nevezünk integrált vállalatirányítási rendszernek?
6. Melyek az információs rendszer főbb funkciói?
7. Rendszerezze a logisztikai rendszer szempontjából fontos információkat!
8. Ismertesse a logisztikai információk forrásait!
9. Milyen megfontolások alapján dönti el, hogy az információt számítógépen vagy más módon tárolja?
10. Ismertesse a logisztikai információs rendszer szintjeit!
11. Ismertesse a logisztikai információs rendszer alkalmazási területeit!
12. Milyen modulokat tartalmaz a döntés-előkészítő rendszer?
13. Mi a kiértékelési-ellenőrzési rendszer (kontrolling) célja, melyek a feladatai?

Jegyzetek, kérdések

3. A TERVEZÉS MÓDSZEREI ÉS MODELLJEI

A piac, a műszaki fejlődés és a környezeti feltételek változásai miatt a vállalatok versenyképességüket csak folyamatos fejlesztéssel tudják megőrizni, amelynek része a logisztikai rendszer fejlesztése is. A cél, a gyakoriság és tartalom alapján a logisztikai fejlesztés feladatai három szinten valósíthatók meg: stratégiai, taktikai és operatív szinten.

Stratégiai szinten magát a logisztikai rendszert alakítjuk ki, vagyis a stratégiai fejlesztés a teljes rendszert átfogó, hosszabb távra szóló koncepciók megfogalmazását és megvalósítását jelenti. A **taktikai fejlesztés** feladata a rendelkezésre álló erőforrások optimális kihasználása. Végül az **operációtervezés** általában a napi feladatok megoldására irányul. Az ide sorolható feladatok köre rendkívül széles, magában foglalja a termelési folyamat vertikumának különböző pontjain igényként jelentkező logisztikai szolgáltatások teljes körét, amelyek az anyagellátással, készletgazdálkodással és az elosztással összefüggő napi problémák. A logisztikai rendszer sikeres működésének feltétele az említett három tervezési szint összhangjának megteremtése, vagyis minden szinten a legelőnyösebb megoldások alkalmazása.

Minden logisztikai fejlesztési vagy tervezési feladat többé-kevésbé egyedi jellegű, amely során figyelembe kell venni a mindenkori helyi adottságokat, feltételeket, előírásokat. Például a logisztikai stratégiákat a mindenkori vállalati stratégiából kell levezetni. A logisztika szolgáltató funkciójából következik, hogy a fejlesztés általában több vállalati területet érint, ezért már a célok meghatározásába be kell vonni az érintett részlegek képviselőit, és a tervezésben érvényesíteni kell a rendszerszemléletet.

A fejlesztés, a vállalati logisztikai rendszer összetettségéből adódóan, általában az anyagáramlás és tárolás egyes szakaszait megvalósító alrendszerre lebontva történik [84]. Ilyen alrendszerek:

- a vállalati anyagellátást és az elosztást biztosító be- és kiszállító rendszer,
- a szállítójárművek kirakását és megrakását végző rakodógép rendszer,
- az alap- segéd- és üzemanyagokat, valamint a késztermékeket tároló raktári rendszerek,
- a munkahelyeket kiszolgáló anyagmozgató rendszer,
- a hulladékkezelés anyagmozgató és tároló rendszerei.

A fejlesztés irányulhat a meglévő rendszer korszerűsítésére (a szűk-keresztmetszetek megszüntetésére; a készletek, az utánpótlási idő, a költségek stb. csökkentésére; a logisztikai szolgáltatás színvonalának a növelésére) vagy új rendszer tervezésére. A fejlesztés fontosabb lépései: (1) a fejlesztési célok meghatározása, (2) a tervezés, (3) a kivitelezés, (4) üzembe helyezés, próbaüzem.

A fejlesztésbe a logisztikai szakemberek mellett célszerű gépész, építész szaktervezőket, építész, épületgépész, villamos kivitelezőket, informatikai és jogi szakembereket is bevonni.

3.1. Logisztika, operációkutatás és számítástechnika

Bármely döntéshozatalt igénylő logisztikai probléma bizonyos szempontból operációkutatási problémának tekinthető. Bár operációkutatási problémák az ember teremtése óta léteznek, a II. Világháborúig a mai értelemben vett modern operációkutatás nem létezett.

A **döntéshozatal módszere** csak az utóbbi 50 évben változott meg lényegesen. Az operációkutatás elnevezés valószínűleg a Nagy-Britanniában működő "research in military operations" program nevéből származik. Ennek keretében még a háború kezdetén különböző szakterületek specialistáiból létrehoztak egy csoportot Anglia katonai védelmének kidolgozására. A csoport feladata volt többek között a légierő és az újonnan kifejlesztett radar együttes alkalmazásának tanulmányozása. A háború után a katonai operációk sikeres irányításának köszönhetően az ope-

rációkutatás gyorsan elterjedt az ipar és a közigazgatás minden területén, és az 50-es évek elején az USA-ban az operációkutatást már önálló tudományágként említették.

Trefethen [97] **az operációkutatás sikerét** a következőkkel magyarázza. A II. Világháború utáni gyors fejlődés hatására a termelés és a fogyasztás különböző területein a folyamatok annyira változatossá és összetetté váltak, hogy a vezetés elvesztette a kontrollt felettük. Ez a vezetést az irányítási funkciók megosztására sarkallta. Újabb és újabb osztályok alakultak, ami végül oda vezetett, hogy –tekintet nélkül mások érdekeire– minden osztály vagy csoport csak a saját problémáival foglalkozott. A teljes körű hatékonyság visszaállítása drasztikus és gyors intézkedéseket követelt. A vezetés támogatására gyorsan kialakultak a különböző szakterületek specialistáiból álló operációkutatási csoportok, azzal a céllal, hogy az elszigetelt egységek tevékenységének fontosságát figyelembe véve összehangolják az egész szervezet (rendszer) optimális működését.

A problémák rendszerszemléletű közelítése azonban nem jelenti azt, hogy a kutatásnak a legáltalánosabban megfogalmazott, mindent átfogó problémákat kellene megoldania. Bár kívánatos lenne, de ez a gyakorlatban ritkán valósítható meg. A gyakorlatban rendszerint a részproblémákat csak külön-külön lehet megoldani. Ez a megállapítás vonatkozik a logisztikai operációk tervezésére is. **A könyvben bemutatott módszerek, modellek jól definiált részproblémák megoldására alkalmasak**, ami természetesen nem jelenti a teljes rendszer optimumára való törekvés elvetését. Az utóbbi érvényesítése és megvalósítása a vezetők feladata, akik az operációkutatók által előkészített megoldások alapján döntést hoznak.

A könyv anyaga, a logisztikai operációk tervezése szorosan kötődik az operációkutatáshoz. A kapcsolat kölcsönös, mert a logisztika nem kis mértékben járult hozzá az operációkutatás fejlődéséhez, de ugyanakkor sok területen hasznosítja az operációkutatás eredményeit. Bizonyos, időközben általánossá vált modellek eredetileg valamilyen logisztikai operáció optimalizálásával összefüggésben merültek fel. Itt említhető a szállítási feladat, a különböző hálózati problémák (pl. a legrövidebb út a hálózaton, a készletezési modellek stb.) Ugyanakkor vannak olyan operációkutatási modellek, amelyek más területeken fogalmazódtak meg, és csak később kerültek a logisztikai tervezés eszköztárába, pl. a születési-halálozási folyamat modellje, amely nagyon sok sorbanállási modell alapja. E szoros kapcsolatból egyértelműen következik, hogy a problémák megoldásának lépései, módszerei, eszközei sok tekintetben azonosak. Amikor operációkutatásról beszélünk, akkor abba mindig beleértjük a logisztikai operációk tervezését is, és az általános megállapításokat a logisztikai alkalmazásokra is érvényesnek tekintjük.

Az operációkutatás és a logisztika nagyon sokat köszönhet a számítástechnika gyors fejlődésének. Például *Dantzig* a lineáris programozás elméleti alapjait már 1947-ben lefektette, de gyakorlati alkalmazására csak 1950 végén kerülhetett sor, amikor a számítógépek megjelenése azt lehetővé tette. Igaz, más okokból, de hasonló gondok gátolták a hazai kibontakozást is. Itthon is a számítástechnikai eszközök korlátozott elérhetősége akadályozta az elméleti eredmények gyakorlati alkalmazását. Nem túlzás azt állítani, hogy a számítógép az operációtervezés alapeszköze mind a fejlesztés, mind az implementálás fázisában. Azt is mondhatjuk, hogy az operációkutatás a számítógépek nélkül csak a könyves polcok számára írt elméleti tudomány lenne.

3.2. A matematikai modellezésről

A modell szón igen sokféle dolgot értenek, ezért nem árt, ha egy kis kitérőt teszünk, tisztázzuk az alapfogalmakat és meghatározzuk, hogy a logisztikai operációk tervezésekor mit nevezünk modellnek.

A modellek megalkotása során öt fontos alapfogalmat kell megkülönböztetni:

- a valóságban működő (gazdasági, biológiai, fizikai stb.) rendszer,
- a kísérleti keret vagy környezet,

a rendszer bázismodellje,
az egyszerűsített modellek,
a virtuális valóságot életre keltő gép.

A **valóságos rendszer** nem más, mint a megfigyelhető adatok forrása, amely adatok lehetnek input, output, valamint további megfigyelhető vagy nem megfigyelhető adatok.

A **kísérleti keret** meghatározza a valódi rendszer vizsgálatának körülményeit, tehát azt a módot, ahogy a megfigyelt adatokat mérhetjük. Egy modell érvényessége általában csak egy kísérleti kerethez viszonyítva értelmezhető. A modell érvényes, ha az adott kísérleti keretben megfigyelt adatok megfelelnek a modell által szolgáltatott adatoknak.

A **bázismodell** egy képzeletbeli, tökéletes modell, amely bármely kísérleti keretben hűen tükrözi a valóságos rendszert.

Az **egyszerűsített modell** a bázismodellből származtatott és csak az adott kísérleti keret esetén érvényes leegyszerűsített leírás.

A **virtuális valóságot életre keltő gép** ma a számítógép, amely képes arra, hogy a leegyszerűsített modell segítségével szimulálja a valódi rendszert. A számítógépen generálhatók a valódi rendszer input-output párpai lépésről-lépésre, és kísérletek végezhetők a valódi rendszer megfigyelésére, annak változtatása nélkül.

A modellezéssel kapcsolatban még egy fontos, a gyakorlatban bevált hipotézist is meg kell említenünk. Ez a hipotézis azt mondja ki, hogy a dinamikus rendszerek és azok egyes részei a környezetükből kiragadva modellezhetők.

A modellezés lényege, annak meghatározása, hogy az input adatok hatására, hogyan változnak meg a rendszer pillanatnyi állapotát leíró változók, illetve az output adatok. Ebből viszont világosan következik, hogy a logisztikai operációk, mint alrendszerek egyszerűsített modelljei csak matematikai modellek lehetnek.

A **gazdasági rendszerek modellezésének célja** általában valamilyen gazdasági optimum megkeresése. Feltételezzük, hogy szeretnénk megismerni egy adott probléma optimális megoldását. Ahhoz, hogy megoldást kapjunk, rendszerint a leghasznosabb és legkényelmesebb a problémát matematikai alakban leírni, ha az egyáltalán lehetséges. A probléma matematikai leírását vagy reprezentációját nevezzük matematikai modellnek. Általában a matematikai modell kezelése sokkal könnyebb, mint az eredeti, nem matematikai formáé. Ha az adott probléma matematikai modellje akár analitikusan, akár numerikusan megoldható, akkor a megoldás alkalmazható az eredeti problémára, feltéve, hogy a matematikai modell jó reprezentációja a problémának.

Sok problémát számos különböző modellel lehet leírni, de mindig van egy megfelelőbb modell, mint a többi. Az elmúlt 40 évben különböző problémák leírására számos eljárás, modell vált ismertté. Például a lineáris programozás, a dinamikus programozás, a készletezési és sorbanállási modellek megoldása készen elérhető. Így, ha az adott problémát lehet modellezni egy bizonyos típusú lineáris programozási modellel, akkor az eljárás és a megoldás is azonnal elérhető. **Az operációtervezés feladata meghatározni a probléma legmegfelelőbb matematikai modelljét, majd vagy egy ismert eljárást használni, vagy új eljárást kifejleszteni a megoldásra.**

Lehetséges, hogy az adott probléma matematikai modelljét nem lehet felépíteni. Más esetben a matematikai modell rendelkezésre áll, de a megoldásra nincs elérhető egzakt eljárás, vagy a modell nem alkalmas számítógépes megoldásra, mert olyan nagy a memória- vagy műveletigénye. Ebben a helyzetben következetes alternatíva az intuitív vagy **heurisztikus közelítés**. Ez a közelítés sikeresen alkalmazható anélkül, hogy megfogalmaznánk az egzakt matematikai modellt. Ugyanakkor ezek a módszerek sok esetben a matematikai modellek közelítő vagy egzakt meg-

oldását adják. Nagyon gyakran heurisztikus módszerrel sokkal gyorsabban elérhető közelítő vagy egzakt megoldást, mint a numerikus eljárással. Például a hozzárendelési probléma megfogalmazható lineáris programozási feladatként, de a magyar módszer sokkal gyorsabban vezet az optimális megoldáshoz.

Végül, ha a probléma olyan komplex, hogy nem lehet adekvátan modellezni, vagy a modellt nem lehet heurisztikusan megoldani, akkor még a **szimulációhoz** folyamodhatunk. Természetesen a szimuláció nem ad választ minden problémára, azonban érdemei vitathatatlanok a nagy problémák, a komplex rendszerek tanulmányozásában, ahol a komponensek erősen összefüggőek.

3.3. A tervezés fázisai

Mint már kifejtettük, a logisztikai operációtervezés célja a döntés-előkészítés. A döntési folyamaton belül az eredményeket hasznosító vezetőknek kell felvetnie a döntési feladatot és meghoznia a döntést. A probléma felvetése és a döntéshozatal közötti döntéselőkészítő munka elvégzése képezi az operációtervezéssel foglalkozó csoport feladatát. A logisztikai operációk tervezésekor bármely más operációkutatási feladathoz hasonlóan az elvégzendő munka fázisokra bontható. A munkafázisok tartalmának, logikai sorrendjének ismerete a sikeres döntéselőkészítés alapja, ezért a továbbiakban röviden ismertetjük a fázisokat.

Az irodalom *Churchman*, *Ackoff* és *Arnoff*, [34], valamint *Hillier* és *Lieberman* [47] az operációkutatás hat fázisát különbözteti meg:

- a probléma elemzése és megfogalmazása,
- a matematikai modell megszerkesztése,
- a modellből a megoldás levezetése,
- a modell és a megoldás tesztelése, ellenőrzése,
- a megoldás ellenőrzésének a megalapozása,
- a megoldás implementálása, bevezetése.

Nem mintha a fázisok fontossága között különbséget lehetne tenni, inkább terjedelmi megfontolásokból, és a képzési célhoz igazodva később **a könyvben az első három fázissal foglalkozunk elsődlegesen.**

A **problémaelemzés** az operációkutatás egyik legfontosabb, nagy körültekintést igénylő szakasza, mivel elnagyolása veszélyezteti a további munka sikerét. Alapos elemzés hiányában előfordulhat a lényeges elemek figyelmen kívül hagyása, de még a gazdasági célkitűzés helytelen megfogalmazása is. A problémaelemzés lépései a következők:

- a feladat értelmezése, megfogalmazásának pontosítása,
- az elemzéshez szükséges információk, adatok gyűjtése.

A feladat értelmezéséhez tartozik a gazdasági cél pontos meghatározása, a más feladatokkal való kapcsolat tisztázása, az alkalmazhatóság körének pontosítása. Az alkalmazhatóság vonatkozhat egy vagy több gazdasági objektumra és egyszeri vagy ismétlődő döntési szituációra. Ettől függően kell a modell kidolgozásakor az általános és specifikus érvényű megoldásokat súlyozni.

Az elemzés mélységét a feladat nagysága szabja meg. Egyszerűbb esetben egyetlen döntés megalapozása, összetettebb esetben döntések sorozatának az előkészítése, bonyolult esetben pedig egy egész irányítási rendszer működtetése a cél.

A **modellszerkesztés** célja a probléma megoldására alkalmas egyszerűsített matematikai modell kialakítása, ami jelentheti új modellek kifejlesztését, vagy ismert általános modellek adaptálását. Egy ilyen modell általában funkcionális összefüggéseket tartalmaz a vizsgált rendszer célértékei és a rendszert meghatározó paraméterek között.

A harmadik fázis a **számítógépes megoldás**, amely további lépésekre bontható:

- a megoldás algoritmusának kidolgozása,
- az algoritmus működéséhez szükséges adatbázis létrehozása,
- az adatbázis-kezelő és az algoritmus szerint működő program elkészítése,
- a program futtatása.

A felsoroltak közül az első három általában egyszeri feladatot jelent, míg a negyedik tetszés szerinti számban, az igénynek megfelelően ismételhető.

A **modellellenőrzés**. Miután megépítettük és lefuttattuk a modellünk első változatát, ellenőrizni (*verifikálni*) kell a „kódolás” hibamentességét és megerősíteni (*validálni*), hogy a koncepcionális (fogalmi) modell megfelel a valóságos rendszernek. A verifikálás a modell helyes működésének, a validálás pedig a modell érvényességének vizsgálatára irányul. A vizsgálattal a második és a harmadik fázis munkáját ellenőrizzük. Ennek módszere az irodalom szerint lehet logikai vagy empirikus vizsgálat, valamint szubjektív megítélés [1]. A gyakorlatban azonban bármely olyan módszer használható, amely alapján megállapítható a modell és a valóság közötti különbség, valamint a modellből nyert számszerű eredmények helyessége. Lényegében a validálás során a következő kérdésekre keresünk választ:

- helyesen választottuk-e meg az alkalmazott matematikai módszert, a vele járó egyszerűsítő feltételezéseket elfogadhatjuk-e,
- a rendszer valamennyi fontos elemét szerepeltettük-e a modell változói között,
- a számszerű eredmények megfelelnek-e a valóságnak.

A kidolgozott és ellenőrzött modell gyakorlati hasznosításának, és az eredmények közlésének módja a modell jellegétől függ. A korábban kialakult gyakorlat szerint az eredmények és azok értékelése valamilyen tanulmány vagy dokumentáció formájában jelenik meg. Ezek terjedelme és tartalma a kutatók munkáját is igyekszik tükrözni, ezért a tanulmányban nemcsak a döntéshez szükséges eredményeket közlik, hanem az operációkutatás munkafázisainak leírását is. Ez a gyakorlat a specifikus döntési szituációkra kidolgozott modellek esetén elfogadható. Abban az esetben azonban, ha valamely modell ismétlődő döntési szituációkra készült, akkor célszerűbb a modellhez használatiutasítás-szerű dokumentációt adni, amely az alkalmazhatóság körének leírásán túl minden olyan információt tartalmaz, amely a modell használatához és az eredmények kiértékeléséhez szükséges.

A **modell implementálása**, első gyakorlati alkalmazása rendszerint a kutatók közreműködésével történik. Ez azért is szerencsés, mert a gondosan ellenőrzött modellnél is jelentkezhetnek problémák, amelyek így gyorsan elháríthatók. Ugyanakkor ilyenkor lehetőség van az esetleges hiányosságok, a korábban nem jelzett alkalmazói igények feltárására is. Természetesen a módosítások igénye nemcsak az első alkalmazás során, hanem később is felmerülhet, amikor például megváltozik a termelés technológiája vagy az irányítás szervezete. Fontos szempont, hogy amennyiben a modell működtetését teljesen a felhasználóra bízuk, akkor e változtatásokra nézve is megfelelő útmutatásokat tartalmazzon a dokumentáció.

3.4. Ellenőrző kérdések

1. Mit jelent a stratégiai, taktikai és operatív szintű tervezés?
2. Ismertesse a logisztikai fejlesztés és tervezés sajátosságait!
3. Mire irányulhat a logisztikai fejlesztés?
4. Honnan származik az operációkutatás, mi volt a sikerének titka?
5. Ismertesse az operációkutatás és a logisztikai operációtervezés kapcsolatát!
6. Mit értünk modell alatt az operációtervezésben, definiálja a következő fogalmakat: valóságban működő rendszer, kísérleti keret, rendszer bázis modellje, egyszerűsített modell, virtuális

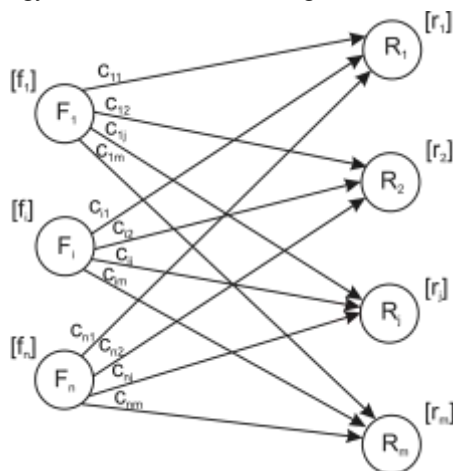
valóságot életre keltő gép.

7. Mi a gazdasági rendszerek modellezésének célja?
8. Mi az operációtervezés feladata?
9. Melyek a feladat megoldás lehetőségei?
10. Ismertesse a tervezés fázisait!

Jegyzetek, kérdések

4. A SZÁLLÍTÁSI FELADAT

A szállítási feladat klasszikus megfogalmazása a következő. Adott n számú $F_1, F_2, \dots, F_n$ feladó, akik $f_1, f_2, \dots, f_n$ mennyiségű homogén termékkel rendelkeznek, valamint m számú $R_1, R_2, \dots, R_m$ megrendelő, akik $r_1, r_2, \dots, r_m$ mennyiséget igényelnek a szóban forgó termékből. Jelentse c_{ij} azt a fajlagos szállítási költséget, amelybe az egységnyi termék szállítása kerül, ha azt az i -edik feladótól a j -edik megrendelőhöz szállítjuk (4.1. ábra). A cél a megrendelők igényét úgy kielégíteni, hogy a szállítás összes költsége minimális legyen.



4.1. ábra. A szállítási feladat modellje

Ha x_{ij} az i -edik feladótól a j -edik megrendelőhöz szállítandó mennyiséget jelenti, akkor a feladatot a következő formában írhatjuk fel:

$$(4.1) \quad x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (j = 1, \dots, m),$$

$$(4.2) \quad \sum_j x_{ij} = f_i,$$

$$(4.3) \quad \sum_i x_{ij} = r_j,$$

$$(4.4) \quad \sum_i f_i = \sum_j r_j,$$

$$(4.5) \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = z \rightarrow \min.$$

A modell felírása után tekintsük a feltételek jelentését:

A (4.1) feltétel azt jelenti, hogy a szállítás egyirányú a feladóktól a megrendelők felé.

A (4.2) feltétel szerint a feladók készletét el kell szállítani.

A (4.3) feltételben kikötjük, hogy a megrendelők igényét ki kell elégíteni.

A (4.4) feltétel értelmében a feladók készlete egyenlő a megrendelők igényével.

A (4.5) lineáris függvényben foglalmazzuk meg a célt. (Az összes szállítási költség akkor minimális, ha a fajlagos költségek és a szállított mennyiségek szorzatainak összege minimális.)

A gyakorlatban az alapmodell (4.4) feltétele ritkán teljesül, azaz a $\sum_i f_i \neq \sum_j r_j$. Ilyenkor a (4.2) és (4.3) feltételekben az egyenletek helyett csak egyenlőtlenségek követelhetők meg:

ha a $\sum_i f_i > \sum_j r_j$, akkor $\sum_j x_{ij} \leq f_i$,

ha a $\sum_i f_i < \sum_j r_j$, akkor $\sum_i x_{ij} \leq r_j$.

Ezek a formák fiktív feladó vagy megrendelő beiktatásával könnyen visszavezethetők az alapmodellre. A létező és a fiktív feladók, illetve megrendelők viszonylatához $c_{ij}=0$ értékű fajlagos költséget rendelünk, a (4.4) feltételt pedig a úgy biztosítjuk, hogy a fiktív feladót $\sum_j r_j - \sum_i f_i$ készlettel, a fiktív megrendelőt $\sum_i f_i - \sum_j r_j$ igénnyel szerepeltetjük.

A gyakorlati problémák megoldása során előfordulhat olyan kikötés is, hogy bizonyos feladók nem szállíthatnak bizonyos megrendelőknek. Ezeket a korlátozásokat az alapmodell változtatása nélkül úgy vehetjük figyelembe, hogy a tiltott relációkhoz $c_{ij}=\infty$ fajlagos költséget rendelünk. A gyakorlatban a tiltott relációk költsége: $c_{ij}=M$, ahol M sokkal nagyobb, mint a többi c_{ij} elem. Az M -mel jelölt mennyiséget szokás tiltótarifának nevezni.

A tiltótarifát alkalmazzuk akkor is, amikor a feladók készlete nagyobb, mint a megrendelők igénye, és valamely feladónál nem maradhat készlet. Ezt biztosan úgy érhetjük el, hogy a kitüntetett feladó nem szállíthat a fiktív megrendelőnek. Fordított esetben, amikor a megrendelők igénye a nagyobb, és valamely megrendelő igénye elsőbbséget élvez, akkor a fiktív feladó nem szállíthat az elsőbbséget élvező megrendelőnek. A tiltótarifa alkalmazásának lehetőségeit a gyakorlati problémák megfogalmazásakor részletesen bemutatjuk.

Feltétlen említést érdemel, hogy a klasszikus formában, az anyagmozgatásban használatos kifejezésekkel megfogalmazott modell nagyon sokoldalúan alkalmazható más problémák megoldására is. Ezért talán helyesebb az irodalomban kevésbé elterjedt **elosztási feladat** elnevezés, a megtévesztő szállítási feladat helyett. Említést érdemel az elosztási feladatoknak a **hozzárendelési feladat** néven ismert csoportja, amikor is $t_i=r_j=1$ minden i,j -re és $n=m$. Ilyen feladat megoldása merül fel akkor, amikor n számú különböző anyagmozgatási műveletet kell hozzárendelni n számú, különböző műszaki paraméterrel jellemezhető gép-hez, és a munka elvégzésére fordított a költség minimalizálása a cél.

A c_{ij} fajlagos szállítási költséget eddig hallgatólagosan állandónak tekintettük. A gyakorlatban azonban előfordulhat, hogy c_{ij} az x_{ij} lineáris vagy kvadratikus függvénye. Ilyen jellegű feladatokkal nem foglalkozunk, de megemlítjük, hogy ezek megoldására is hatékony algoritmusok állnak rendelkezésre [55]. Végül megjegyezzük, a modell maximumfeladatok megoldására is alkalmas. A cél megfordítását úgy érhetjük el, hogy a c_{ij} fajlagos költség-elemeket -1 -gyel szorozzuk.

A szállítási feladat megoldására több heurisztikus és egzakt eredményt szolgáltató módszert ismerünk. A közelítő módszerek egyrészt az optimumhoz közeli bázismegoldást adnak az egzakt eljárásokhoz, másrészt kézi számolás esetén kevesebb munkával szolgáltatnak a gyakorlat számára elfogadható eredményt. Ezért mindkét területről bemutatunk algoritmusokat. Ezeket a közérthetőség kedvéért egy példa megoldásával párhuzamosan ismertetjük.

4.1. A Vogel-Korda-féle eljárás

A heurisztikus eljárások közül az egyik leghatékonyabb és az egyik legismertebb a *Vogel-Korda-féle* módszer. A módszer bemutatásához tekintsük a következő példát.

Legyen a feladók száma $n=3$, a készletük $f_i=[50,40,30]$. A megrendelők száma $m=4$, igényük $r_j=[40,10,60,10]$. A fajlagos szállítási költségek mátrixa:

$$C = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Az első lépés a költségmátrix redukálása. Ha a mátrix mindegyik sorának elemeiből levonjuk a sorban található legkisebb elemet, majd az így kapott mátrix mindegyik oszlopának elemeiből levonjuk az oszlopban található legkisebb elemet, akkor olyan költségmátrixhoz jutunk, amelyhez ugyanazon optimális megoldás tartozik, mint az eredetihez.

Legyen p_i az i -edik sor, q_j pedig a j -edik oszlop legkisebb eleme, azaz

$$p_i = \min\{c_{ij} \mid j=1,2,\dots,m\},$$

$$q_j = \min\{c_{ij} - p_i \mid i=1,2,\dots,n\},$$

akkor a redukált mátrix elemei:

$$c'_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j.$$

Ezt helyettesítsük a (4.5) célfüggvénybe:

$$z = \sum_i \sum_j (c'_{ij} + p_i + q_j) x_{ij}$$

$$z = \sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} + \sum_i \sum_j p_i x_{ij} + \sum_i \sum_j q_j x_{ij}$$

$$z = \sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} + \sum_i p_i (\sum_j x_{ij}) + \sum_j q_j (\sum_i x_{ij})$$

Felhasználva a (2) és (3) összefüggéseket a

$$(4.6) \quad z = \sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} + \sum_i p_i f_i + \sum_j q_j r_j.$$

Ezzel z célfüggvényt az x_{ij} -től függő és attól független részekre bontottuk, és a redukcióra vonatkozó állításunkat bizonyítottuk.

Írjuk fel ezek után a példánkat táblázatos formában, majd hajtsuk végre a redukciót.

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i
F_1	6	4	1	5	50
F_2	2	1	3	8	40
F_3	1	2	1	1	30
r_j	40	10	60	10	

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i
F_1	5	3	0	4	50
F_2	1	0	2	7	40
F_3	0	1	0	0	30
r_j	40	10	60	10	

A következő lépés a költségelemek rangsorolása az ún. **differenciák** alapján. A differenciákat úgy számíthatjuk ki, hogy minden oszlopban és sorban vesszük a minimális elemek különbségét. A sorokban:

$$3-0=3,$$

$$1-0=1,$$

$$0-0=0.$$

Az oszlopokban:

$$1-0=1,$$

$$1-0=1,$$

$$0-0=0,$$

$$4-0=4.$$

Ha az előző táblázatunkat kiegészítjük a differenciákkal, akkor a következő táblázatot nyerjük:

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i	
F_1	5	3	0	4	50	3
F_2	1	0	2	7	40	1
F_3	0	1	0	0	30	0
r_j	40	10	60	10		
	1	1	0	4		

A differenciák alapján dönthetünk arról, hogy melyik sorban illetve oszlopban kezdjük a programozást. Azt a sort, illetve oszlopot részesítjük előnyben, amelyikhez a legnagyobb differencia tartozik. Esetünkben ez egyértelműen a 4. oszlop. Ha a differenciák halmazában nincs egyértelműen maximális elem, akkor a legnagyobb differenciákhoz tartozó sorok illetve oszlopok közül szabadon választhatunk.

A kiválasztott sor vagy oszlop minimális elemére a lehető legnagyobb mennyiséget programozzuk. Azt a sort, illetve oszlopot elhagyjuk, ahol a készlet 0-ra csökken, és újra kiszámítjuk a differenciákat. A leírt eljárást ezt követően addig folytatjuk, amíg az összes feladó készletét, illetve megrendelő igényét szét nem osztottuk. Az eljárás lépéseit a következő táblázatokban nyomon követhetjük.

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i	
F_1	5	3	0	4	50	3
F_2	1	0	2	7	40	1
F_3	0	1	0	0 ¹⁰	20	0
r_j	40	10	60	0		
	1	1	0	4		

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i	
F_1	5	3	0 ⁵⁰		0	3
F_2	1	0	2		40	1
F_3	0	1	0		20	0
r_j	40	10	10			
	1	1	0			

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i	
F_1						
F_2	1	0	2		40	1
F_3	0	1	0 ¹⁰		10	0
r_j	40	10	0			
	1	1	2			

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i	
F_1						
F_2	1	0^{10}			30	1
F_3	0	1			10	1
r_j	40	0				
	1	1				

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i	
F_1						
F_2	1^{30}				0	0
F_3	0^{10}				0	0
r_j	0					
	1					

A megoldás:

$$x_{13}=50, x_{21}=30, x_{22}=10, x_{31}=10, x_{33}=10, x_{34}=10.$$

A célfüggvény értéke:

$$z = 1 \cdot 50 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 = 150,$$

ami, mint később látni fogjuk, az optimális megoldás is. Természetesen nagyobb volumenű feladatoknál ez nem mindig következik be, csupán abban lehetünk biztosak, hogy az optimumhoz közeli megoldást kapunk.

4.1. példa: Oldjuk meg a következő szállítási feladatokat a *Vogel-Korda* módszerrel:

a)

1	0	2	6	60
3	5	1	9	30
2	7	6	0	90
50	40	50	40	

b)

-2	-4	0	10
-3	-5	0	60
-10	-6	M	200
110	100	60	

4.2. A korlátozás és szétválasztás módszerének alkalmazása

Az optimumszámítás területén már a múlt század közepén előtérbe kerültek az ún. *kombinatorikus* módszerek. Ezek közé sorolható a korlátozás és szétválasztás. A továbbiakban ennek gyakorlati alkalmazását mutatjuk be a szállítási feladaton [12].

Mivel a szállítási probléma minimumfeladat, a korlátozási tevékenységnél **alsó korlátot** állapítunk meg, a szétválasztásnál pedig a legkisebb alsó korlátot vesszük figyelembe. Az összes megoldások halmazára alsó becslést úgy nyerünk, hogy az előző pontban bemutatott módon redukáljuk a C költségmátrixot. A (4.6) alapján könnyű belátni, hogy a redukció nagysága:

$$\sum_i p_i f + \sum_j q_j r_j,$$

a célfüggvényben:

$$z = \sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} + \sum_i p_i f + \sum_j q_j r_j$$

bekövetkezett változásokat mutatja. Az is belátható, hogy a $c'_{ij} \geq 0$ miatt a redukció mértékénél kisebb értékű megoldás nem található, ezért az összes megoldások halmazához alsó korlátként a

$$z_0 = \sum_i p_i f_i + \sum_j q_j r_j$$

összeget rendeljük.

Szétválasztási kritériumnak tekintjük az összes $c'_{ij} = 0$ elemre kiszámított

$$r_{ij} = \min \left\{ (c'_{ik} | k=1,2,\dots,j-1, j+1,\dots,m) f_i + (c'_{kj} | k=1,2,\dots,i-1, i+1,\dots,n) r_j \right\}$$

összegek halmazából a maximálist, azaz a szétválasztási kritérium

$$R_{ij} = \max \{ r_{ij} \}.$$

Ez gyakorlatilag azt jelenti, valamennyi $c'_{ij} = 0$ elemre megvizsgáljuk, hogy milyen mértékben növekedne a z célfüggvény, ha a vizsgált helyet tartalmazó megoldásokat kizárnánk a megoldások halmazából, majd ezek közül azt választjuk, amelynek a kizárása a legnagyobb célfüggvény növekedést eredményezi. Maga az eljárás nagyon egyszerű, az R_{ij} -nek megfelelő $c_{ij}=0$ helyére $c_{ij}=M$ -t írunk, ami R_{ij} redukciót tesz lehetővé. Mielőtt azonban ezt megtennénk, megvizsgáljuk, hogy milyen mértékben növekedne a célfüggvény akkor, ha a kiválasztott ij viszonylatra a lehető legnagyobb mennyiséget programoznánk. Ezt úgy hajtjuk végre, hogy a kiválasztott helyre a lehető legnagyobb mennyiséget programozzuk, majd azt a sort vagy oszlopot, ahol 0-ra csökkent a készlet, elhagyjuk. Ezt követően redukáljuk a maradék költségmátrixot. Az így elérhető redukció:

$$R'_{ij} = \sum_i p_i f_i + \sum_j q_j r_j,$$

Most már eldönthetjük, hogy a szétválasztási kritérium alapján kiválasztott viszonylat kizárása ($x_{ij}=0$), vagy bevonása ($x_{ij}>0$) kedvezőbb-e számunkra. Így gyakorlatilag az összes megoldások halmazát kettéválasztjuk. Az elsőbe tartoznak azok, amelyek nem tartalmazzák, a másodikba pedig azok, amelyek tartalmazzák az ij viszonylatot.

Ha az $R'_{ij} > R_{ij}$, akkor az ij helyet tartalmazó megoldásokat kizárjuk. A $c_{ij}=M$ lesz, redukáljuk a költségmátrixot, és kiszámítjuk az új mátrixhoz tartozó alsó korlátot:

$$z_1 = z_0 + R_{ij}.$$

Ha az $R'_{ij} \leq R_{ij}$, akkor az ij viszonylatra programozunk. Elhagyjuk azt a sort vagy oszlopot, ahol 0-ra csökkent a készlet, redukáljuk a költségmátrixot, és kiszámítjuk az új mátrixhoz tartozó alsó korlátot:

$$z_1 = z_0 + R'_{ij}.$$

Ezt követően a leírtakat addig ismételjük, amíg az összes készletet el nem osztjuk. A továbbiakban alkalmazzuk az eljárást az előző pontban megismert példa megoldására.

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i
F_1	6	4	1	5	50
F_2	2	1	3	8	40
F_3	1	2	1	1	30
r_j	40	10	60	10	

Redukáljuk a költségmátrixot:

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i
F_1	5	3	0	4	50
F_2	1	0	2	7	40
F_3	0	1	0	0	30
r_j	40	10	60	10	

A redukció mértéke, amely egyben az alsó korlát is:

$$z_0 = 1 \cdot 50 + 1 \cdot 40 + 1 \cdot 30 = 120.$$

Határozzuk meg a szétválasztási kritériumot! Az r_{ij} összegek:

$$r_{13} = 3 \cdot 50 + 0 = 150, r_{22} = 1 \cdot 40 + 1 \cdot 10 = 50, r_{31} = 0 + 1 \cdot 40 = 40, r_{33} = 0 + 0 = 0, r_{34} = 0 + 4 \cdot 10 = 40,$$

amelyekből az

$$R_{ij} = \max\{r_{ij}\} = R_{13} = 150.$$

Az 1-3 viszonylat kizárása tehát 150-nel növeli a célfüggvény értékét. Most nézzük meg, hogy az 1-3-viszonylat bevonása milyen növekedést eredményez. Az 1-3 helyre programozható maximális mennyiség 50 egység, így az első sor készlete 0-ra csökken, ezért az első sort elhagyjuk, és redukáljuk a megmaradó C'_1 költségmátrixot. A lépések a táblázatokban követhetők.

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i
F_1	5	3	0 ⁵⁰	4	0
F_2	1	0	2	7	40
F_3	0	1	0	0	30
r_j	40	10	10	10	

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i
F_1					
F_2	1	0	2	7	40
F_3	0	1	0	0	30
r_j	40	10	10	10	

Az elérhető redukció:

$$R'_{13} = 0.$$

Mivel az $R'_{13} < R_{13}$, az $x_{13} = 50$, a C'_1 mátrixot bontjuk tovább, a hozzá tartozó alsó korlát

$$z_1 = z_0 + R'_{13} = 120.$$

Ezután határozzuk meg a C'_1 költségmátrixhoz tartozó szétválasztási kritériumot:

$$r_{22} = 1 \cdot 40 + 1 \cdot 10 = 50, r_{31} = 0 + 1 \cdot 40 = 40, r_{33} = 0 + 2 \cdot 10 = 20, r_{34} = 0 + 7 \cdot 10 = 70.$$

$$R_{ij} = \max\{r_{ij}\} = R_{34} = 70$$

A további lépéseket kommentár nélkül közöljük.

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i
F_1					
F_2	1	0	2	7	40
F_3	0	1	0	0 ¹⁰	20
r_j	40	10	10	0	

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i
F_1					
F_2	1	0	2		40
F_3	0	1	0		20
r_j	40	10	10		

$$R'_{34} = 0, R'_{34} < R_{34}, x_{34} = 10$$

$$z_2 = z_1 + R'_{34} = 120.$$

A C'_2 mátrixhoz tartozó szétválasztási kritérium:

$$r_{22} = 1 \cdot 40 + 1 \cdot 10 = 50, r_{31} = 0 + 1 \cdot 40 = 40, r_{33} = 0 + 2 \cdot 10 = 20.$$

$$R_{ij} = \max\{r_{ij}\} = R_{22} = 50$$

	R_1	R_2		R_3	R_4	f_i
F_1						
F_2	1	0 ¹⁰		2		30
F_3	0	1		0		20
r_j	40	0		10		

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i
F_1					
F_2	0		1		30
F_3	0		0		20
r_j	40		10		

$$R'_{22} = 30, R'_{22} < R_{22}, x_{22} = 10,$$

$$z_3 = z_2 + R'_{22} = 150.$$

A C'_3 mátrixhoz tartozó szétválasztási kritérium:

$$r_{21} = 1 \cdot 30 + 0 = 30, r_{31} = 0 + 0 = 0, r_{33} = 0 + 1 \cdot 10 = 10.$$

$$R_{ij} = \max\{r_{ij}\} = R_{21} = 30$$

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i
F_1					
F_2	0 ³⁰		1		0
F_3	0		0		20
r_j	10		10		

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i
F_1					
F_2					
F_3	0		0		20
r_j	10		10		

$$R'_{21} = 0, R'_{21} < R_{21}, x_{21} = 30,$$

$$z_4 = z_3 + R'_{21} = 150.$$

Az utolsó sorban a szétosztás már egyértelmű, és a 0 elemek miatt a célfüggvény értéke sem változik.

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i
F_1					
F_2					
F_3	0^{10}		0^{10}		0
r_j	0		0		

$$x_{31} = 10, x_{33} = 10,$$

$$z = z_4 = 150.$$

A megoldás:

$$x_{13} = 50, x_{21} = 30, x_{22} = 10, x_{31} = 10, x_{33} = 10, x_{34} = 10.$$

A célfüggvény értéke:

$$z = 1 \cdot 50 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 = 150.$$

Az eredményeket összehasonlítva a *Vogel-Korda*-féle eljárással kapott eredményekkel megállapíthatjuk, hogy a korlátozás szétválasztás is optimumot adott. Természetesen az optimumban ennél az eljárásnál sem lehetünk biztosak.

4.2. példa: Oldjuk meg a következő szállítási feladatot a korlátozás és szétválasztás módszerével:

2	M	0	5	70
3	7	15	M	100
M	0	M	6	200
50	150	50	150	

4.3. A disztribúciós módszer

A szállítási feladat egzakt megoldásai között kitüntetett szerepe van a lineáris programozásban általánosan alkalmazható *szimplex-módszernek*, amely a korábbi tanulmányokból ismeretes. A szimplex-táblába foglalt modellből ugyanis egyértelműen látható a feladat speciális struktúrája. Ez lehetővé teszi a szimplex algoritmusnál kisebb számítás és memóriaigényű eljárások alkalmazását, nevezetesen a *magyar* és a *disztribúciós módszert*.

A (4.2), (4.3) feltételek és a (4.5) célfüggvény alapján az előző pontban megfogalmazott példát **szimplex-táblába** foglalhatjuk (4.1. táblázat).

A (4.2) és (4.3) feltételek egy $m+n$ egyenletből álló egyenletrendszert határoznak meg, ahol az ismeretlenek száma $m \cdot n$. A táblából látható, hogy egy olyan lineáris programozási feladattal állunk szemben, ahol a feltételi egyenletek csak 0 és 1 együtthatójú x_{ij} tagokat tartalmaznak, és az együtthatómátrix oszlopvektorai, az e_i n elemű és az e_j m elemű egységvektorok.

A tábla alapján belátható az is, hogy a feladat duál párja, ha u_i -vel és v_j -vel jelöljük a **duálváltozókat**:

$$(4.7) \quad u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i=1, \dots, n; j=1, \dots, m)$$

$$(4.8) \quad \sum_i f_i u_i + \sum_j r_j v_j = z \rightarrow \max.$$

A feladat felépítése lehetővé teszi, hogy a szimplex-tábla helyett az ún. **disztribúciós táblából** induljunk ki, amely csak a szimplex-tábla peremadatait ($\mathbf{C}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{r}$) tartalmazza. Később látni fogjuk, a disztribúciós táblán kijelölhető a primál feladat egy lehetséges **bázismegoldása**, és elvégezhető a bázismegoldás javítása anélkül, hogy a szimplex-táblán belüli változásokat nyilvántartsunk.

4.1. táblázat

A mintapélda szimplex-táblája

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	
u_1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	50
u_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	40
u_3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	30
v_1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	40
v_2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	10
v_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	60
v_4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	10
	6	4	1	5	2	1	3	8	1	2	1	1	0

A disztribúciós módszer alkalmazásának előfeltétele a (4.4) feltétel teljesülése, ami miatt a szimplex-tábla $n+m$ egyenlete közül csak $n+m-1$ független egymástól. Ebből viszont az következik, hogy a bázismegoldásnak $n+m-1$ eleme van, mivel a kötött ismeretlenek száma megegyezik az együtthatómátrix rangjával. A (4.7) duál feltételek pedig a kötött helyeken egyenlőség formájában teljesülnek. Ezt a megállapításunkat az optimalitás vizsgálat során fel fogjuk használni.

4.3.1 Az indulóprogram előállítás

Az indulóprogram (az első bázismegoldás) előállítására az irodalomban több módszer ismeretes. Többek között a *Vogel-Korda-féle eljárás* is alkalmazható. Itt most a *sor és oszlop minimum módszert* ismertetjük. A módszer bemutatását összekötjük az alkalmazással, ezért írjuk fel ismét a mintapéldánk induló disztribúciós tábláját, amelyben nyomon követhetjük a megoldás lépéseit.

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i
F_1	6	4	1^{50}	5	50
F_2	2^{20}	1^{10}	3	8^{10}	40
F_3	1^{20}	2	1^{10}	1	30
r_j	40	10	60	10	

a) Az f_i és r_j elemek között megkeressük a legnagyobbat. A példában $r_3=60$.

b) A kiválasztott feladó sorában, vagy megrendelő oszlopában megkeressük a legkisebb költségű viszonylatot ($c_{13}=1$), és erre a helyre akkora mennyiséget programozunk, amennyit az f_i és r_j korlátok megengednek. A példában $f_1 < r_3$, így $x_{13}=50$.

c) A programozást a következő legkisebb költségű helyen folytatjuk, miközben betartjuk a következő szabályokat:

Mindig maradunk egy sorban vagy oszlopban, amíg az illető sort vagy oszlopot teljesen ki nem merítettük. A le nem kötött f_i és r_j értékek közül mindig a kisebbet programozzuk.

Ha egyszerre csökken 0-ra a feladó készlete és a megrendelő igénye, akkor a feladatot degenerálnak nevezzük. Ilyenkor a következő legkisebb költségű helyre $x_{ij}=0$ mennyiséget programozunk.

d) A programozást addig folytatjuk, amíg az összes készletet, illetve igényt szét nem osztottuk.

A továbbiakban azokat a helyeket, ahová programoztunk, **kötött helynek**, a többi **szabad-helynek** fogjuk nevezni. Az indulóprogramot a bázis javítása előtt célszerű ellenőrizni. Ha betartottuk a szabályokat, akkor a kötött helyek száma $n+m-1$, és teljesülnek a (4.2), (4.3) feltételek.

A példánk indulóprogramja az elosztás sorrendjében:

$$x_{13}=50, x_{33}=10, x_{31}=20, x_{21}=20, x_{22}=10, x_{24}=10,$$

a célfüggvény pedig $z=210$.

4.3.2 Optimalitás vizsgálat

Az indulóprogram kielégíti a (4.1)-(4.4) feltételeket. A kérdés ezek után már csak az, miként dönthetjük el, hogy a bázismegoldás optimális-e, vagy pedig javítható.

Az optimalitás feltételeit, mint tudjuk a szimplex-módszernél a dualitási tétel határozza meg. Ha a primál megoldás mellett ismernénk a duálváltozók (u_i, v_j) értékeit, akkor egyszerűen dönthetnénk. A disztribúciós táblából a duálváltozók sajnos nem olvashatók ki, de kiszámíthatók, mivel a primálbázisba vont vektorokhoz tartozó duálfeltételek mindig egyenlőség formájában teljesülnek, azaz

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

A továbbiakban az u_i és v_j duálváltozókat a disztribúciós módszernél használatos terminológiának megfelelően **potenciáloknak** nevezzük.

Visszatérve az előzőekhez a potenciálok száma $n+m$, a primálbázisba vont vektorokhoz tartozó duálfeltételek száma $n+m-1$, így egy potenciál értéke szabadon választható, a többi pedig a

$$(4.9) \quad c_{ij} - (u_i + v_j) = 0$$

egyenletekből számítható. Az így meghatározott potenciálokat felhasználva megvizsgáljuk, hogy a szabadhelyekre teljesül-e a (4.7) feltétel, azaz a

$$(4.10) \quad d_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0.$$

Ha található olyan szabadhely, ahol $d_{ij} < 0$, akkor a program javítható. A gyakorlatban a potenciálok a következő tábla alapján számíthatók:

	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1			1		
u_2	2	1		8	
u_3	1		1		

Legyen $u_1=0$, akkor

$$v_3 = c_{13} - u_1 = 1$$

$$u_3 = c_{33} - v_3 = 0$$

$$v_1 = c_{31} - u_3 = 1$$

$$u_2 = c_{21} - v_1 = 1$$

$$v_2 = c_{22} - u_2 = 0$$

$$v_4 = c_{24} - u_2 = 7$$

A kapott értékeket a (4.10)-be helyettesítve:

$$d_{11}=5, d_{12}=4, d_{14}=-2, d_{23}=1, d_{32}=2, d_{34}=-6.$$

Az indulóprogram tehát javítható.

4.3.3 A bázismegoldás javítása

A bázismegoldást úgy javíthatjuk, hogy azt a helyet, amelyhez a legnagyobb abszolút értékű negatív d_{ij} tartozik, bevonjuk a bázisba. A szállítási feladat speciális felépítése egy viszonylag egyszerű, mechanikusan alkalmazható vektorcserére ad lehetőséget. Ennek tárgyalása előtt bevezetjük a **hurok** fogalmát.

Ha a **C** költségmátrix bármelyik elemétől kiindulva bástyamozgással haladunk úgy, hogy ugyanazon sorban és oszlopban csak két elemet érintünk, akkor hurkot kapunk. Bizonyítható,* ha ismert egy bázismegoldás, akkor bármely szabadhelyhez egyértelműen hozzárendelhető egy olyan hurok, amelynek egyik csúcspontja a szóban forgó szabadhely, a többi csúcsa pedig az adott bázismegoldás egy-egy eleme.

Az elmondottak egyszerű eljárást adnak a vektorcserére. Megrajzoljuk a bevonandó szabadhelyhez tartozó hurkot. A hurokban a szabadhelyhez tartozó elemet, majd ezt követően minden másodikat pozitívnak, a többi negatívnak tekintjük. A negatív csúcsokon lévő x_{ij} mennyiségek közül a legkisebbet a negatív csúcsokon álló mennyiségekből levonjuk, a pozitív csúcsokon állókhoz pedig hozzáadjuk. Végül a negatív csúcsok közül azt, amelynél az x_{ij} mennyiség 0-ra csökkent, elhagyjuk a hurokból, de mindig csak egy csúcsot. **Degeneráció** esetén ugyanis több helyen is 0-ra csökkenhet az x_{ij} . A megmaradó hurok csúcspontjai, és az előző bázismegoldás hurkon kívüli elemei alkotják az új bázist.

A hurok megszerkesztéséhez a következő egyszerű eljárás alkalmazható [16]. A bázisba bevonandó helyet tekintsük kötött helynek, majd

- fedjük le azokat a sorokat, amelyekben egy fedetlen kötött hely van,
- fedjük le azokat az oszlopokat, amelyekben egy fedetlen kötött hely van.

Az *a)* és *b)* lépéseket addig ismételjük, amíg újabb sorokat és oszlopokat lehet lefedni. Az eljárás végén a fedetlen kötött helyek és a bevonandó szabadhely alkotják a hurkot.

A leírt eljárást alkalmazzuk a példán. A d_{ij} értékek alapján a 3-4 szabadhelyet kell bevonni a bázisba. A disztribúciós táblán megszerkesztjük a hurkot, amelynek csúcspontjai: 3-4, 3-1, 2-1, 2-4.

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i
F_1	6	4	1^{50}	5	50
F_2	2^{+20}	1^{10}	3	8^{-10}	40
F_3	1^{-20}	2	1^{10}	1^{+*}	30
r_j	40	10	60	10	

* A bázismegoldások feszítőfák, amelyekhez egy élet (nem kötött csúcsot) hozzáadva hurkot kapunk.

A negatív csúcsok között x_{24} a legkisebb, ezt levonjuk a negatív csúcson állókból, és hozzáadjuk a pozitív csúcson állókhöz.

$$x_{34}=0+10=10,$$

$$x_{31}=20-10=10,$$

$$x_{21}=20+10=30,$$

$$x_{24}=10-10=0.$$

Az x_{24} -et elhagyjuk, így az új bázismegoldás:

	R_1	R_2	R_3	R_4	f_i
F_1	6	4	1^{50}	5	50
F_2	2^{30}	1^{10}	3	8	40
F_3	1^{10}	2	1^{10}	1^{10}	30
r_j	40	10	60	10	

$$x_{13}=50, x_{21}=30, x_{22}=10, x_{31}=10, x_{33}=10, x_{34}=10$$

Az optimalitás vizsgálat elvégzése után már valamennyi szabadhelyen a d_{ij} értéke pozitív, vagyis a kapott bázismegoldás optimális. A célfüggvény értéke $z=150$.

A megoldás részletes ismertetése után foglaljuk össze a disztribúciós módszer algoritmusát:

a) A feladatot a (4.4) feltételnek megfelelő alakra hozzuk fiktív megrendelő vagy feladó beállításával.

b) Felírjuk a feladat induló tábláját:

C	f
r	

c) Az előzőekben leírt módon indulóprogramot készítünk, vagyis keresünk egy bázismegoldást.

d) A kötött helyekre felírható $u_i+v_j=c_{ij}$ egyenletrendszer segítségével kiszámítjuk a potenciálokat.

e) A szabadhelyekre írható $d_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j) \geq 0$ feltételek alapján megvizsgáljuk a bázismegoldás optimalitását. Ha a feltétel valamennyi ij párra teljesül, akkor a megoldás optimális.

f) A szabadhelyek közül azt, ahol a d_{ij} negatív és a legnagyobb abszolút értékű, bevonjuk a bázisba. A vektorcserét az ismertetett módon végezzük el. A vektorcsere után visszatérünk a d ponthoz.

4.3 példa: Négy raktár öt fogyasztót lát el. Az egységnyi termék raktározási költsége az egyes raktárakban rendre 30, 40, 30, 50 Ft. A raktárak kapacitása: [3000, 2000, 4000, 3500] egység. A fogyasztók igényei: [2000, 800, 1200, 1000, 1800] egység. A fajlagos szállítási költség az egyes viszonylatokban Ft/egység mértékegységben:

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
R_1	0	20	10	20	30
R_2	30	0	20	10	10
R_3	10	20	0	0	20
R_4	30	20	10	20	0

Határozzuk meg az optimális szállítási programot, továbbá kérdés, hogy megszüntethető-e valamelyik raktár anélkül, hogy a szállítási és raktározási költség növekedne? Alkalmazzuk

a disztribúciós módszert.

4.4. A magyar módszer

A magyar módszert H. W. Kuhn az ún. hozzárendelési probléma megoldására fejlesztette ki [62] *König Dénes* magyar matematikus egyik gráfelméleti tételének felhasználásával [66], amelyet egy másik magyar matematikus *Egerváry Jenő* általánosított [38]. E módszer széles körben felkeltette a matematikusok, és az elosztási problémákkal foglalkozó szakemberek figyelmét, különösen azóta, hogy *Egerváry* megmutatta, a módszer nemcsak a hozzárendelési probléma, hanem a szállítási feladat megoldására is alkalmas.

A *König-Egerváry-féle* tétel általánosan a következők szerint fogalmazható meg: ha az R egy adott $C=[c_{ij}]$ mátrix pontjainak egy nem üres részhalmaza, akkor az R -ben felvehető független pontok maximális száma megegyezik az R összes pontjait lefedő vonalak minimális számával.

A bizonyításnál abból indulnak ki, hogy adottnak tekintik az R -nek egy olyan maximális számú elemet tartalmazó F részhalmazát, amelynek minden eleme független pont. Ha az F pontjainak számát n -nel, az R minden pontját lefedő vonalak számát v -vel jelöljük, akkor fennáll a $v \geq n$ összefüggés. Azt kell tehát csak megmutatni, hogy a v minimális értéke n .

A gyakorlatban rendszerint az R halmazt ismerjük, és feladat az F meghatározása. A következő eljárás a következő:

a) Az adott $C=C^{(0)}$ mátrixból elhagyjuk azokat a vonalakat, amelyeken nincs pontja R -nek. Legyen az így nyert mátrix $C^{(1)}$.

b) A $C^{(1)}$ -ben keresünk olyan vonalat, amelyen csak egy pontja van az R -nek. Ezt a pontot bevesszük a független pontok közé, majd a neki megfelelő két vonalat elhagyva a $C^{(1)}$ -ből az eljárást annyiszor ismételjük, ahányszor csak lehetséges, így bizonyos számú lépés után vagy olyan $C^{(2)}$ mátrixhoz jutunk, amelyben már nincs pontja az R -nek, vagy pedig olyan $C^{(3)}$ mátrixot kapunk, amelynek minden vonalán legalább két R -hez tartozó pont található. Az első esetben a felvett független pontok száma maximális, és a fedővonallrendszer a későbbi ismertetendő módon megrajzolható. A második esetben azonban további lépések szükségesek.

c) A $C^{(3)}$ egyik vonalán felvesszük a független pontok közé az R valamelyik elemét. Ezután a $C^{(3)}$ -ből elhagyjuk a feltételezett független ponthoz tartozó két vonalat, majd az így nyert új mátrixszal az a , b és c lépéseket annyiszor ismételjük, ahányszor csak lehetséges. Az eljárás végén a független pontok olyan halmazához jutunk, amely újabb R -beli ponttal nem bővíthető. Abban azonban nem lehetünk biztosak, hogy a független pontok száma maximális. Ez csak a fedővonallrendszer megszerkesztése után derül ki. Ha egy független pont sem esik a fedővonalak metszéspontjára, akkor a független pontok száma maximális. Ellenkező esetben a független pontok halmazát és a fedővonallrendszert módosítani kell.

A 3. pontban megfogalmazott szállítási feladatban az (5) célfüggvény minimumát keressük a (1)-(4) feltételek mellett. Ha a C költségmátrix soraihoz f_i , oszlopaihoz pedig r_j multiplikatásokat rendelünk, és az így nyert N -ed rendű mátrixot ($N = \sum_i f_i = \sum_j r_j$) B -vel jelöljük, akkor a problémát a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Válasszunk ki a B -ben N független pontot úgy, hogy a megfelelő költségelemek összege minimális legyen. Ha az $f_i=r_j=1$, akkor a C minden sorának és oszlopának multipllicitása 1, és hozzárendelési problémával állunk szemben. Ennek a feladatnak a megoldása egyrészt a *König-Egerváry-féle* tételen alapszik, másrészt azon a tényen, hogy a

$$c'_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j,$$

ahol a

$$p_i = \min\{c_{ij} \mid j=1, 2, \dots, m\},$$

$$q_j = \min\{c_{ij} - p_i \mid i=1, 2, \dots, n\},$$

transzformáció esetén, olyan C' költségmátrixhoz jutunk, amelyhez ugyanaz az optimális megoldás tartozik, mint C -hez. A c'_{ij} -t helyettesítsük a célfüggvénybe:

$$\begin{aligned} z &= \sum_i \sum_j (c'_{ij} + p_i + q_j) x_{ij} = \\ &= \sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} + \sum_i \sum_j p_i x_{ij} + \sum_i \sum_j q_j x_{ij} = \\ &= \sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} + \sum_i p_i (\sum_j x_{ij}) + \sum_j q_j (\sum_i x_{ij}). \end{aligned}$$

Felhasználva a (4.2) és (4.3) összefüggéseket, a

$$z = \sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} + \sum_i p_i f_i + \sum_j q_j r_j.$$

Ezzel a z célfüggvényt az x_{ij} -től függő és attól független részekre bontottuk, és állításunkat bizonyítottuk. A transzformációt, mint már azt említettük, a költségmátrix redukciójának nevezzük.

Legyen

$$z' = \sum_i p_i f_i + \sum_j q_j r_j,$$

akkor a

$$z = \sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} + z'.$$

Könnyen belátható, hogy $c_{ij}, p_i, q_j \geq 0$ kikötés mellett a $z \geq z'$. Ha pedig

$$\min\{\sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij}\} = 0,$$

akkor

$$\min z = z'.$$

Bizonyítható, hogy mindig megadható a redukcióknak egy olyan véges sorozata, ami a fenti minimumra vezet. Alkalmazzuk a

$$c_{ij}^{(1)} = c_{ij} - p_i^{(1)} - q_j^{(1)}$$

redukciót, ahol a

$$p_i^{(1)} = \min\{c_{ij} \mid j=1, 2, \dots, m\} \text{ és } q_j^{(1)} = 0.$$

Ekkor a

$$z = \sum_i \sum_j c_{ij}^{(1)} x_{ij} + z^{(1)},$$

ahol a

$$z^{(1)} = \sum_i p_i^{(1)} f_i.$$

A redukciót hajtsuk végre oszloponként is:

$$c_{ij}^{(2)} = c_{ij} - p_i^{(2)} - q_j^{(2)}$$

ahol a

$$p_i^{(2)} = 0 \text{ és } q_j^{(2)} = \min\{c_{ij} \mid i=1, 2, \dots, n\}.$$

A célfüggvény

$$z = \sum_i \sum_j c_{ij}^{(2)} x_{ij} + z^{(1)} + z^{(2)},$$

ahol a

$$z^{(2)} = \sum_i q_j^{(2)} r_j.$$

A $c_{ij}^{(2)}$ mátrixban található zérus elemek közül az előzőleg leírt módon maximális számú független 0-át választunk ki. Ha ezek száma N , akkor

$$\min \{ \sum_i \sum_j c_{ij}^{(2)} x_{ij} \} = 0,$$

és így

$$\min z = z^{(1)} + z^{(2)}.$$

Ha azonban a független 0-ák száma kisebb, mint N , akkor megrajzoljuk a fedővonalrendszert, majd a le nem fedett elemek közül kiválasztjuk a minimálist. Ez legyen $\varepsilon^{(2)}$. Ezután redukáljuk a $c_{ij}^{(2)}$ költségmátrixot:

$$c_{ij}^{(3)} = c_{ij}^{(2)} - p_i^{(3)} - q_j^{(3)},$$

ahol

$$p_i^{(3)} = \begin{cases} 0, & \text{ha az } i\text{-edik sor fedővonal,} \\ -\varepsilon^{(2)}, & \text{ha az } i\text{-edik sor nem fedővonal.} \end{cases}$$

$$q_j^{(3)} = \begin{cases} 0, & \text{ha a } j\text{-edik oszlop fedővonal,} \\ -\varepsilon^{(2)}, & \text{ha a } j\text{-edik oszlop nem fedővonal.} \end{cases}$$

Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a le nem fedett elemekből levonjuk az $\varepsilon^{(2)}$ -t, az egyszer fedett elemeket változatlanul hagyjuk, a kétszer fedett elemeket pedig $\varepsilon^{(2)}$ -vel növeljük.

A redukció után a célfüggvény:

$$z = \sum_i \sum_j c_{ij}^{(3)} x_{ij} + z^{(1)} + z^{(2)} + z^{(3)}$$

ahol a

$$z^{(3)} = \varepsilon^{(2)} d^{(2)}.$$

A $d^{(2)}$ az N -nek és a független zérusok számának a különbsége.

A $c_{ij}^{(3)}$ mátrixban független zérusokat keresünk, elkészítjük a fedővonalrendszert, majd redukáljuk a mátrixot. E lépéseket addig ismételjük, amíg olyan $c_{ij}^{(r)}$ mátrixot nem kapunk, amelyben a független zérusok száma N . Ekkor

$$z = \sum_i \sum_j c_{ij}^{(r)} x_{ij} + z^{(1)} + z^{(2)} + \dots + z^{(r)} = \min,$$

ahol a

$$\sum_i \sum_j c_{ij}^{(r)} x_{ij} = 0.$$

A módszer matematikai indoklása után tekintsük a hozzárendelési és a szállítási feladat esetén alkalmazható algoritmusokat.

4.4.1 A hozzárendelési feladat megoldása magyar módszerrel

Feltételezzük, hogy adott négy professzor, akik valamennyien képesek előadásokat tartani különböző témakörökből. Tekintettel azonban a professzorok eltérő szakirányultságára, az egyes előadások előkészítéséhez szükséges időtartam professzoronként változó. A tanszékvezető egyéb területeken is szeretné foglalkoztatni a professzorokat, ezért az előadásokat, úgy kívánja elosztani közöttük, hogy azok előkészítése a lehető legkevesebb időt igényelje. Az előadások előkészítéséhez szükséges időtartamokat az a következő táblázat foglalja össze:

Professzor	Lineáris programozás	Sorbanállási elmélet	Dinamikus programozás	Regresszió analízis
Kovács	2	10	9	7
Kiss	15	4	14	8
Fehér	13	14	16	11
Nagy	4	15	13	9

Oldjuk meg a problémát a magyar módszerrel.

1. Ha feladat a célfüggvény maximumának meghatározása, akkor változtassuk meg a költségmátrix minden elemének előjelét.

A minimum feladathoz tartozó költségmátrix:

2	10	9	7
15	4	14	8
13	14	16	11
4	15	13	9

2. Redukáljuk a mátrixot soronként!

				p_i
0	8	7	5	2
11	0	10	4	4
2	3	5	0	11
0	11	9	5	4
				21

3. Redukáljuk a mátrixot oszloponként!

	0	8	2	5	
	11	0	5	4	
	2	3	0	0	
	0	11	4	5	
q_j	0	0	5	0	5

Az összes redukció értéke:

$$z_0 = \sum_i p_i + \sum_j q_j = 21 + 5 = 26.$$

4. Keressük meg azokat a sorokat, amelyekben **független 0 elem** van. (A 0 elem akkor független, ha egyedül álló jelöletlen 0 a szóban forgó sorban.) Ha találtunk ilyen sort, akkor a független 0 elemet jelöljük csillaggal (*). A független 0 elem oszlopában található többi 0

elemet pedig jelöljük meg kereszttel (+). A másodlagosan megjelölt 0-k segítségével megszüntetjük az oszlop aktivitását (ui. egy sorban és oszlopban csak egy 0 elemet jelölhetünk ki). Ismételjük az eljárást addig, amíg a sorokban újabb és újabb független 0 elemet tudunk kijelölni.

0*	8	2	5
11	0*	5	4
2	3	0	0
0 ⁺	11	4	5

5. Keressük meg azokat az oszlopokat, amelyekben független 0 elem van. (A 0 elem akkor független, ha egyedül álló jelöletlen 0 a szóban forgó oszlopban.) Ha találtunk ilyen oszlopot, akkor a független 0 elemet jelöljük csillaggal (*). A független 0 elem sorában található többi 0 elemet pedig jelöljük meg kereszttel (+). A másodlagosan megjelölt 0-k segítségével megszüntetjük a sor aktivitását. Ismételjük az eljárást addig, amíg az oszlopokban újabb és újabb független 0 elemet tudunk kijelölni.

0*	8	2	5
11	0*	5	4
2	3	0*	0 ⁺
0 ⁺	11	4	5

6. Ismételjük a 4. és 5. lépéseket, amíg az eredményre vezet. Ha már nem tudunk új független 0-át kijelölni, akkor a következő három eset fordulhat elő.

- a) minden sorban kijelöltünk egy független 0 elemet,
- b) van olyan sor vagy oszlop, amelyekben legkevesebb két jelnélküli 0 elem van,
- c) nincs jelöletlen 0 elem, de a független nulla elemek száma kevesebb, mint a sorok száma.

7. Ha az a) eset fordul elő, akkor a kijelölés teljes, megkaptuk az optimális megoldást. A b) esetben véletlenszerűen jelöljük meg az egyik jel nélküli 0 elemet csillaggal (*), majd ugyanebben a sorban és oszlopban jelöljük kereszttel (+) a többi jelöletlen nulla elemet, majd térjünk vissza a 4. lépéshez. A harmadik, c) esetben folytassuk az eljárást a 8. lépéssel.

8. Jelöljük meg azokat a sorokat, amelyekben nincs független 0.

9. Jelöljük meg azokat az oszlopokat, amelyek még nincsenek megjelölve, és az oszlopban található olyan 0, amely megjelölt sorban van.

10. Jelöljük meg azokat a sorokat, amelyek még nincsenek megjelölve, és amelyekben a független 0 a megjelölt oszlopban van.

11. Ismételjük a 9. és 10. lépéseket addig, amíg az eredményre vezet.

0*	8	2	5	←
11	0*	5	4	
2	3	0*	0 ⁺	
0 ⁺	11	4	5	←
↑				

12. Fedjük le a meg nem jelölt sorokat és a megjelölt oszlopokat. Ez biztosítja, hogy a 0

elemeket minimális számú **fedővonallal** fedjük le. (Ha nem vétettünk hibát, akkor a fedővonalak száma megegyezik a független 0-k számával.)

0*	8	2	5	←
11	0*	5	4	
2	3	0*	0+	
0+	11	4	5	←
↑				

13. Keressük meg a fedetlen elemek közül a legkisebbet (ε), ez esetünkben $\varepsilon = 2$, majd
 a le nem fedett elemeket csökkentsük ε -nal,
 az egyszer fedett elemeket változatlanul hagyjuk,
 a kétszer fedett elemeket növeljük ε -nal,
 és térjünk vissza a 4. lépéshez.

0	6	0	3
13	0	5	4
4	3	0	0
0	9	2	3

A célfüggvény változása:

$$z_1 = z_0 + \varepsilon(n - f) = 26 + 2 \cdot (4 - 3) = 28,$$

ahol f a független 0 elemek száma.

A 4. lépéstől ismételjük meg az eljárást, ami a következő eredményre vezet:

0+	6	0*	3
13	0*	5	4
4	3	0+	0*
0*	9	2	3

Most a független 0 elemek száma $f=4$, így az eljárás befejeződött. Az optimális megoldás:

$$x_{13}=1, x_{22}=1, x_{34}=1, x_{41}=1,$$

a célfüggvény értéke pedig

$$z = z_1 = 28.$$

4.4.2 A szállítási feladat megoldása magyar módszerrel

Az algoritmus [38] bemutatásához tekintsük a disztribúciós módszernél ismertetett feladatot:

					f_i
	6	4	1	5	50
	2	1	3	8	40
	1	2	1	1	30
r_j	40	10	60	10	

1. Redukáljuk a költségmátrixot soronként és oszloponként:

					f_i	p_i
	5	3	0	4	50	1
	1	0	2	7	40	1
	0	1	0	0	30	1
r_j	40	10	60	10		
q_j	0	0	0	0		

A redukció értéke:

$$z_0 = \sum_i p_i f_i + \sum_j q_j r_j = 120.$$

2. Független 0 elemet keresünk az i -edik sorban. (Független a 0 elem, ha az $f_i > 0$, $r_j > 0$, és a sorban egyedül álló programozható 0.) Ha találtunk ilyen elemet, akkor arra annyit programozunk, amennyit a sor és oszlopkészlet megenged. Itt három eset lehetséges:

Ha az $f_i = r_j$, akkor egyszerre fogy el a sor- és oszlopkészlet. Ilyenkor elhagyjuk az i -edik sort és a j -edik oszlopot, és a következő soron megismételjük a 2. lépést.

Ha az $f_i < r_j$, akkor elfogy a sorkészlet, ekkor az i -edik sort elhagyjuk, és a j -edik oszlopban a 3. lépéssel folytatjuk.

Ha az $f_i > r_j$, akkor elfogy az oszlopkészlet, ekkor a j -edik oszlopot elhagyjuk, és az $i+1$ -edik sorban a 2. lépéssel folytatjuk.

					f_i	
	5	3	0 ⁵⁰	4	50	0
	1	0 ¹⁰	2	7	40	30
	0	1	0 ¹⁰	0	30	20
r_j	40	10	60	10		
	40	0	0	10		

Ha elfogynak a sorok, akkor a 3. lépéssel folytatjuk.

3. Független 0 elemet keresünk a j -edik oszlopban. (Független a 0 elem, ha az $f_i > 0$, $r_j > 0$, és az oszlopban egyedül álló programozható 0.) Ha találtunk ilyen elemet, akkor arra annyit programozunk, amennyit a sor- és oszlopkészlet megenged. Itt három eset lehetséges:

Ha az $f_i = r_j$, akkor egyszerre fogy el a sor- és oszlopkészlet. Ilyenkor elhagyjuk az i -edik sort és a j -edik oszlopot, és a következő oszlopon megismételjük a 3. lépést.

Ha az $f_i < r_j$, akkor elfogy a sorkészlet, ekkor az i -edik sort elhagyjuk, és a $j+1$ -edik oszlopban a 3. lépéssel folytatjuk.

Ha az $f_i > r_j$, akkor elfogy az oszlopkészlet, ekkor a j -edik oszlopot elhagyjuk, és az i -edik sorban a 2. lépéssel folytatjuk.

					f_i	
	5	3	0 ⁵⁰	4	0	0
	1	0 ¹⁰	2	7	30	30
	0 ²⁰	1	0 ¹⁰	0	20	0
r_j	40	0	0	10		
	20	0	0	10		

4. Ismételjük a 2. és 3. lépéseket, amíg az eredményre vezet. Ha már nem találunk több független 0-t, akkor a következő három eset fordulhat elő:

- a) a sor- és oszlopkészleteket sikerült teljesen elosztani,
 b) a sor- és oszlopkészleteket nem sikerült teljesen elosztani, mivel vannak olyan sorok és oszlopok, ahol nem tudtunk egyértelműen független 0 elemet választani,
 c) a sor- és oszlopkészleteket nem sikerült teljesen elosztani, mivel azokban a sorokban és oszlopokban, ahol maradt készlet, nincs programozható független 0 elem.

5. Az a) esetben az elosztás teljes, megkaptuk az optimális megoldást. Ha a b) eset fordul elő, véletlenszerűen kiválasztjuk az egyik programozható 0 elemet és annyit programozunk rá, amennyit a sor- és oszlopkészlet megenged, majd visszatérünk a 2. lépéshez. A c) esetben a 6. lépéssel folytatjuk.

6. Megszerkesztjük a fedővonalrendszert. Ennek lépései a következők:

- a) jelöljük meg azokat a sorokat, amelyekben van elosztatlan készlet,
 b) jelöljük meg azokat az oszlopokat, amelyek még nincsenek megjelölve, és az oszlopban található olyan 0 elem, amely megjelölt sorban van,
 c) jelöljük meg azokat a sorokat, amelyek még nincsenek megjelölve, és amelyekben a független 0 elem megjelölt oszlopban van,
 d) ismételjük a b), c) lépéseket addig, amíg eredményre vezet.

		↓			f_i	
	5	3	0^{50}	4	0	
	1	0^{10}	2	7	30	←
	0^{20}	1	0^{10}	0	0	
r_j	20	0	0	10		

e) fedjük le a meg nem jelölt sorokat és a megjelölt oszlopokat (ha a fedővonalak a független 0 elem felett nem keresztezik egymást, akkor a független 0-kat helyesen választottuk meg), és a 7. lépés szerint redukáljuk a mátrixot.

		↓			f_i	
	5	3	0^{50}	4	0	
	1	0^{10}	2	7	30	←
	0^{20}	1	0^{10}	0	0	
r_j	20	0	0	10		

7. Redukció:

- a) a fedetlen elemek közül megkeressük a legkisebbet, ez legyen ε ,
 b) az ε -t a fedetlen elemekből levonjuk, a kétszer fedett elemekhez pedig hozzáadjuk,
 c) az egyszer fedett elemeket változatlanul hagyjuk, és visszatérünk a 2. lépéshez.

Az $\varepsilon=1$

					f_i
	5	4	0	4	50
	0	0	1	6	40
	0	2	0	0	30
r_j	40	10	60	10	

A célfüggvény változása:

$$z_1 = z_0 + \varepsilon(N - d) = 120 + 1(120 - 90) = 150,$$

ahol az $N=\sum_{i=1}^m f_i=\sum_{j=1}^n r_j$, d pedig a független 0-k száma, vagyis az elosztott készlet.

A 2. és a 3. lépések után megkapjuk az optimális megoldást.

					f_i	
	5	4	0^{50}	4	50	0
	0^{30}	0^{10}	1	6	40	0
	0^{10}	2	0^{10}	0^{10}	30	0
r_j	40	10	60	10		
	0	0	0	0		

$$x_{13}=50; x_{21}=30; x_{22}=10; x_{31}=10; x_{33}=10; x_{34}=10,$$

$$z=z_2=150.$$

4.5. példa: Egy úszócsapat edzőjének össze kell állítania a 4x50 m-es vegyesváltó csapatát. Gondot okoz, hogy öt úszó közül kell kiválasztani a négy úszásnemhez négy úszót, akiknek az 50 méteren elért eredményei a négy úszásnemben következők:

	Kovács	Kiss	Czene	Baross	Józsa
Hát	37,7	32,9	33,8	37,0	35,4
Mell	43,4	33,1	42,2	34,7	41,8
Pillangó	33,3	28,5	38,9	30,4	33,6
Gyors	29,3	26,4	29,6	28,5	31,1

Kezeljük a feladatot hozzárendelési problémaként, és oldjuk meg a magyar módszerrel.

4.6. példa: Egy budapesti fuvarozónak a központi raktárából 4 vidéki vevőt kell ellátnia árukkal. A fuvarozó 5 darab tehergépkocsival rendelkezik. A rakodás és a szállítás költsége a tehergépkocsik különbözősége miatt függ a tehergépkocsi - vevő párosítástól. Ezt a függőséget a következő költségtáblázat mutatja:

	Vevő 1	Vevő 2	Vevő 3	Vevő 4
Tgk. 1	300	500	600	400
Tgk. 2	500	600	400	500
Tgk. 3	400	700	500	600
Tgk. 4	300	600	500	400
Tgk. 5	400	500	600	300

A cél a tehergépkocsik és a vevők párosítása úgy, hogy az összes szállítási költség minimális legyen.

4.7. példa: Oldjuk meg a következő szállítási feladatot a disztribúciós és a magyar módszerrel:

5	5	5	10	2
3	8	8	8	2
4	4	12	12	4
5	5	5	17	4
3	3	3	3	

4.8. példa: Három cementgyár (C_i) négy házgyárat (H_j) lát el cementtel. A cementgyárakban 1 tonna cement termelési költsége rendre 3000, 3100 és 3500 Ft. A házgyárak havi igénye 100, 150, 130 és 140 tonna cement. A cementgyárak kapacitása egyaránt 200 tonna havonként, a cement szállítási költsége pedig Ft/t-ban:

	H_1	H_2	H_3	H_4
C_1	650	630	480	150
C_2	520	460	370	610
C_3	120	180	300	400

Ha a C_1 cementgyár kapacitását teljes mértékben ki kell használni, és egyik cementgyár sem termelhet raktárra, akkor mi lesz az a termelési és szállítási terv, amely minimalizálja az összköltséget? Melyik cementgyár kapacitását kell csökkenteni és mennyivel?

4.9. példa: Oldja meg a következő kétlépcsős elosztási feladatot! Két üveggyár (T_i) éves kapacitása 600 illetve 800 ezer db szabványos üvegpalack. A két készletező vállalat raktárainak (R_j) éves átbecsátóképessége 200 és 400 ezer db üveg. A három fogyasztó (F_k) éves felhasználása 200, 100 és 100 ezer db üveg. A gyárak milyen kapacitással termeljenek, a gyárak mely készletezőknek szállítsanak és mennyit, a fogyasztók mely készletezőktől szerezzenek be szükségletüket, ha az üveggyárak fajlagos termelési költsége:

$$[38, 42] \quad \text{Ft/1000 db,}$$

a fajlagos szállítási költség a gyárak és a készletezők között (Ft/1000 db):

	R_1	R_2
T_1	12	22
T_2	8	16

a készletezők raktározási költsége: $[5, 8] \quad \text{Ft/1000 db,}$

a fajlagos szállítási költség a készletezők és a fogyasztók között (Ft/1000 db):

	F_1	F_2	F_3
R_1	10	20	80
R_2	90	50	10

4.5. Alkalmazások

Ebben a fejezetben bemutatjuk a szállítási feladat széleskörű alkalmazási lehetőségeit, továbbá azokat a fogásokat, amelyek lehetővé teszik bonyolultabb problémák megfogalmazását a feladat keretei között. A gabonafelvásárlási modell a kétlépcsős szállítási feladat tipikus példája. Az áruehelyezési modellben pedig megmutatjuk, hogyan lehet többféle terméket egyidejűleg optimálisan elosztani [16].

4.5.1 A gabonafelvásárlás modellje

Kétlépcsős szállítási problémáról akkor beszélünk, ha a $T_1, \dots, T_p, \dots, T_n$ termelők $t_1, \dots, t_p, \dots, t_n$ mennyiségű terméket állítanak elő, és ezt az $R_1, \dots, R_j, \dots, R_m$ készletező raktárak vásárolják fel az $r_1, \dots, r_j, \dots, r_m$ kapacitásaiknak megfelelően, majd készleteikből az $F_1, \dots, F_k, \dots, F_p$ fogyasztók igényeit az $f_1, \dots, f_k, \dots, f_p$ megrendelések szerint elégítik ki.

A leírt modell egyszerűen adaptálható a gabonaipar felvásárlási tevékenységére, ahol a termelőknek a mezőgazdasági üzemek, a készletezőknek a gabonaipar saját raktárai és bértároló helyei, a fogyasztóknak pedig a malmok, takarmánykeverők felelnek meg.

A matematikai modell megfogalmazása előtt tekintsük a feladat disztribúciós tábláját (4.2. táblázat). A modellben, illetve a disztribúciós táblában használt jelölések a következők:

- T_i az i -edik mezőgazdasági üzem,
 R_j a j -edik raktár,
 B_i bértároló hely az i -edik mezőgazdasági üzemben,
 F_k a k -edik feldolgozó üzem,
 E értékesítés,
 ϕ külső beszállító,
 t_i az i -edik mezőgazdasági üzem feladása,
 r_j a j -edik raktár kapacitása,
 b_i a bértároló hely kapacitása,
 f_k a k -edik feldolgozó üzem igénye,
 e az értékesíthető mennyiség,
 φ a külső beszállító által szállított mennyiség
 x_{ij} az i -edik mezőgazdasági üzemből a j -edik raktárba szállított mennyiség,
 x'_i az i -edik mezőgazdasági üzemben bértárolt mennyiség,
 y_{jk} a j -edik raktárból a k -edik feldolgozó üzembe szállított mennyiség,
 z_{ik} az i -edik bértároló helyről a k -edik feldolgozó üzembe szállított mennyiség,
 α_j a j -edik raktár le nem kötött kapacitása,
 β_i az i -edik bértároló le nem kötött kapacitása,
 γ_j a j -edik raktárból értékesített mennyiség,
 γ'_i az i -edik bértárolóból értékesített mennyiség,
 δ_k a külső beszállítóktól a k -edik feldolgozó üzembe szállított mennyiség,
 c_{ij} az i -edik mezőgazdasági üzem és a j -edik raktár közötti fajlagos szállítási költség,
 h_i a bértárolás fajlagos költsége,
 a_{jk} a j -edik raktár és a k -edik feldolgozó üzem közötti fajlagos szállítási költség,
 d_{ik} az i -edik bértároló és a k -edik feldolgozó üzem közötti fajlagos szállítási költség,
 M tiltótarifá.

A T_i termelők az R_j gabonaipari raktárakba, vagy a B_i saját, bértárolásra kiadott raktáraikba szállíthatnak, ezért a termelők és a fel nem sorolt relációk között a szállítást letiltottuk, vagyis az F_k felhasználók közvetlen ellátását, illetve az E értékesítést a T_i termelőktől kizártuk (4.2. táblázat). A szállítás második lépcsőjében az R_j raktárakból és a B_i bértároló helyekről látjuk el alapanyaggal az F_k felhasználókat. A visszaszállítás lehetőségét tiltótarifá alkalmazásával akadályoztuk meg. Lehetőséget biztosítottunk azonban az α_j, β_i raktárkapacitás felesleg, illetve a felhasználók igényét meghaladó γ_j, γ'_i termelői kapacitásfelesleg elhelyezésére, vagyis a modellben a feladások és megrendelések egyenlősége automatikusan teljesül.

4.2. táblázat

A gabonafelvásárlási modell disztribúciós táblája

	R_1	R_j	R_m	B_1	B_i	B_n	F_1	F_k	F_p	E	
T_1	c_{11}	c_{1j}	c_{1m}	h_1	M	M	M	M	M	M	t_1
T_i	c_{i1}	c_{ij}	c_{im}	M	h_i	M	M	M	M	M	t_i
T_n	c_{n1}	c_{nj}	c_{nm}	M	M	h_n	M	M	M	M	t_n
R_1	0	M	M	M	M	M	a_{11}	a_{1k}	a_{1p}	0	r_1
R_j	M	0	M	M	M	M	a_{j1}	a_{jk}	a_{jp}	0	r_j
R_m	M	M	0	M	M	M	a_{m1}	a_{mk}	a_{mp}	0	r_m
B_1	M	M	M	0	M	M	d_{11}	d_{1k}	d_{1p}	0	b_1
B_i	M	M	M	M	0	M	d_{i1}	d_{ik}	d_{ip}	0	b_i
B_n	M	M	M	M	M	0	d_{n1}	d_{nk}	d_{np}	0	b_n
ϕ	M	M	M	M	M	M	0	0	0	M	ϕ
	r_1	r_j	r_m	b_1	b_i	b_n	f_1	f_k	f_p	e	

4.3. táblázat

A gabonafelvásárlási modell megoldási mátrixa

	R_1	R_j	R_m	B_1	B_i	B_n	F_1	F_k	F_p	E	
T_1	x_{11}	x_{1j}	x_{1m}	x'_1	0	0	0	0	0	0	t_1
T_i	x_{i1}	x_{ij}	x_{im}	0	x'_i	0	0	0	0	0	t_i
T_n	x_{n1}	x_{nj}	x_{nm}	0	0	x'_n	0	0	0	0	t_n
R_1	α_1	0	0	0	0	0	y_{11}	y_{1k}	y_{1p}	γ_1	r_1
R_j	0	α_j	0	0	0	0	y_{j1}	y_{jk}	y_{jp}	γ_j	r_j
R_m	0	0	α_m	0	0	0	y_{m1}	y_{mk}	y_{mp}	γ_m	r_m
B_1	0	0	0	β_1	0	0	z_{11}	z_{1k}	z_{1p}	γ'_1	b_1
B_i	0	0	0	0	β_i	0	z_{i1}	z_{ik}	z_{ip}	γ'_i	b_i
B_n	0	0	0	0	0	β_n	z_{n1}	z_{nk}	z_{np}	γ'_n	b_n
ϕ	0	0	0	0	0	0	δ_1	δ_k	δ_p	0	ϕ
	r_1	r_j	r_m	b_1	b_i	b_n	f_1	f_k	f_p	e	

Ha a $\Sigma t_i > \Sigma f_k$, akkor a termelői kapacitásfelesleg értékesíthető. Ezt a $\Sigma t_i - \Sigma f_k = e$ feltétellel biztosíthatjuk. Ha a $\Sigma t_i < \Sigma f_k$, akkor a $\Sigma f_k - \Sigma t_i = \phi$ hiányt külső beszállítók egyenlítik ki. Ha a $\Sigma r_j + \Sigma b_i > t_i$, akkor a raktárkapacitás-feleslegek az $R_j - R_j$ és $B_i - B_i$ relációk által meghatározott szektor diagonálisán csapódnak le. Ezt a diagonális 0 értékű költségelemei biztosítják. Az elmondottak megértését a 4.3. táblázat segíti elő, amelyben a feladat megoldási mátrixát közöljük, amelyből már egyszerűen felírható a matematikai modell.

A matematikai modell:

$x_{ij} \geq 0$, $y_{jk} \geq 0$, $z_{ik} \geq 0$, $\alpha_j \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $\gamma_j \geq 0$, $\gamma'_i \geq 0$, $\delta_k \geq 0$, ahol az $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,m$, $k=1,2,\dots,p$,

$$\sum_i x_{ij} + \alpha_j = r_j,$$

$$x'_i + \beta_i = b_i,$$

$$\sum_j y_{jk} + \sum_i z_{ik} + \delta_k = f_k,$$

$$\sum_j \gamma_j + \sum_i \gamma'_i = e,$$

ahol az

$$e = \begin{cases} \sum_i t_i - \sum_k f_k, & \text{ha } \sum_i t_i - \sum_k f_k > 0, \\ 0, & \text{ha } \sum_i t_i - \sum_k f_k \leq 0 \end{cases}$$

$$\sum_j x_{ij} + x'_i = t_i,$$

$$\alpha_j + \sum_k y_{jk} + \gamma_j = r_j,$$

$$\beta_i + \sum_k z_{ik} + \gamma'_i = b_i,$$

$$\sum_k \delta_k = \varphi,$$

ahol a

$$\varphi = \begin{cases} \sum_k f_k - \sum_i t_i, & \text{ha } \sum_i t_i - \sum_k f_k \leq 0, \\ 0, & \text{ha } \sum_i t_i - \sum_k f_k > 0, \end{cases}$$

$$\sum_i t_i + \sum_j r_j + \sum_i b_i + \varphi = \sum_j r_j + \sum_i b_i + \sum_k f_k + e,$$

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_i h_i x'_i + \sum_j \sum_k a_{jk} y_{jk} + \sum_i \sum_k d_{ik} z_{ik} = \min.$$

4.5.2 Az áruehelyezés optimalizálása a gabonaiparban [16]

A gabonaforgalmi és malomipari vállalatok a korábbi trösztirányításnak köszönhetően egységes koncepció, a területi elv alapján kisebb szervezeti egységekre, ún. körzeti üzemekre tagolódtak. Ezek tevékenysége általában nem volt specializált, sőt inkább azt a sokszínűség (malomipar, takarmánygyártás stb.) jellemezte, ami a privatizáció után sem sokat változott. Az üzemek gyártási folyamatai nemcsak anyagigényesek, hanem sokféle anyag elkülönített tárolását követelték meg. A felhasznált anyagok fizikai tulajdonságai eltérőek, tárolási módjuk különböző, amiből adódóan a raktárrendszerek is sokszínű képet mutatnak.

Egy-egy üzemben a legkorszerűbb silóktól az ideiglenes horizontális raktárig mindenféle tároló fajta és típus megtalálható, amelyek más és más anyagmozgatási technológiát igényelnek. A nehézségeket tovább fokozza, hogy a raktárak és a feldolgozó üzemek különböző időszakokban létesültek, így magukon viselik a különböző korok építészeti stílusjegyeit és telepítésük sem mindig a legcélszerűbb.

E helyzetkép ismeretében magától értetődően felvetődik a kérdés, ilyen sokszínű raktárrendszerben elképzelhető-e optimális áruehelyezés. A kérdés megválaszolásához fogalmazzuk meg a problémát egy leegyszerűsített modell formájában.

Adott egy üzem, amely meghatározott időszakban $A_1, \dots, A_k, \dots, A_l$ féle anyagot használ fel az $F_1, \dots, F_j, \dots, F_m$ féle gyártási tevékenységéhez $f_{11}, \dots, f_{jk}, \dots, f_{ml}$ mennyiségben. A gyártáshoz szükséges anyagokat az $R_1, \dots, R_i, \dots, R_n$ raktárakban tároljuk $r_{11}, \dots, r_{ik}, \dots, r_{nl}$ mennyiségben. Az anyagokat úgy kell elhelyezni a raktárakban, hogy az összes raktározási (betárolási, tárolási, kezelési) és szállítási költség minimális legyen.

A leírásból kiderül, a probléma a szokványos elosztási feladat formájában nem írható fel. A feladat specifikuma, hogy egyidejűleg többféle anyagot kell a raktár-felhasználó viszonylatokhoz hozzárendelni x_{ijk} mennyiségben. Mivel a

$$\sum_j x_{jk} = r_k,$$

így a klasszikus feladattól eltérően az r_{ik} peremadatok is ismeretlenek. Ha ugyanis a

$$\sum_k r_{ik} \leq r_i$$

triviális feltételnek megfelelően az r_{ik} értékeket előírnánk, akkor lemondanánk a raktározási költségek szerinti optimalásról, és a programunk csak a raktárak felhasználók közötti szállítási költségekre nézve adná a legkedvezőbb megoldást.

A jelzett probléma kiküszöbölésre alakítsuk át a modellünket. Legyen r'_{ik} a k -adik anyagból az i -edik raktárban potenciálisan tárolható mennyiség, és legyen

$$\varphi_i = \sum_k r'_{ik} - r_i,$$

ahol az r_i az i -edik raktár kapacitása, és az $r'_{ik} \leq r_i$. A k szerint szummázott r'_{ik} akár az r_i tényleges raktárkapacitás többszöröse is lehet. Ez akkor fordulhat elő, ha például az i -edik raktárban egyetlen anyag tárolását sem korlátozzuk. A φ_i tehát egy olyan fiktív mennyiség, amely megmutatja, hogy az anyagonként megadott kapacitások összege mennyivel nagyobb az i -edik raktár tényleges kapacitásánál. A modell egyensúlyának biztosítására, a raktáranként jelentkező φ_i kapacitásokat a ϕ_i fiktív felhasználókkal kötjük le.

A gyakorlati esetek többségében a felhasználók raktárigénye nem egyenlő a rendelkezésre álló raktárkapacitással, ezért további fiktív felhasználót és raktárt is be kell iktatni. A lehetséges esetek, ha ρ a raktárkapacitás hiány, φ pedig a raktárkapacitás felesleg:

$$\rho = \begin{cases} \sum_j \sum_k f_{jk} - \sum_i r_i, & \text{ha } \sum_j \sum_k f_{jk} - \sum_i r_i > 0 \\ 0, & \text{ha } \sum_j \sum_k f_{jk} - \sum_i r_i < 0 \end{cases}$$

és

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{ha } \sum_j \sum_k f_{jk} - \sum_i r_i > 0 \\ \sum_i r_i - \sum_j \sum_k f_{jk}, & \text{ha } \sum_j \sum_k f_{jk} - \sum_i r_i < 0. \end{cases}$$

Az új változók bevezetésével az áruelhelyezés optimumát biztosító modell a következő:

$$x_{jk} \geq 0, (i=1, \dots, n, j=1, \dots, m, k=1, \dots, l)$$

$$y_{ijk} \geq 0$$

$$x'_{jk} \geq 0$$

$$y'_{ik} \geq 0$$

$$\sum_j x_{ijk} + y_{ijk} + y'_{ik} = r'_{ik}$$

$$r'_{ik} \leq r_i$$

$$\sum_i x_{ijk} + x'_{jk} = f_{jk}$$

$$\sum_k y_{iik} = \varphi_i$$

$$\varphi_i = \sum_k r'_{ik} - r_i$$

$$\sum_i \sum_k r'_{ik} + \rho = \sum_j \sum_k f_{jk} + \sum_i \varphi_i + \varphi$$

$$\sum_i \sum_j \sum_k c_{ijk} x_{ijk} = z \rightarrow \min$$

ahol az

x_{ijk} az i -edik raktárból a j -edik felhasználóhoz szállított k -adik anyag mennyisége,
 y_{iik} az i -edik raktárból az i -edik fiktív felhasználó által a k -adik anyagból lekötött mennyiség,
 x'_{jk} a j -edik felhasználó raktárkapacitás hiánya a k -adik anyagból,
 y'_{ik} az i -edik raktár kapacitás feleslege a k -adik anyagból,
 c_{ijk} a fajlagos raktározási és szállítási költség,
 f_{jk} a j -edik felhasználó igénye a k -adik anyagból,
 r'_{ik} az i -edik raktárban a k -adik anyagból potenciálisan tárolható mennyiség,
 φ_i az i -edik fiktív felhasználó igénye,
 r_i az i -edik raktár kapacitása,
 ρ az összes raktárkapacitás hiány
 φ az összes raktárkapacitás felesleg.

4.4. táblázat

Az áruehelyezési modell disztribúciós táblája

		A_1			A_k			A_l			Φ_1	Φ_i	Φ_n	Φ	
		F_1	F_j	F_m	F_1	F_j	F_m	F_1	F_j	F_m					
A_1	R_1	c_{111}	c_{1j1}	c_{1m1}	M	M	M	M	M	M	0	M	M	0	r'_{11}
	R_i	c_{i11}	c_{ij1}	c_{im1}	M	M	M	M	M	M	M	0	M	0	r'_{i1}
	R_n	c_{n11}	c_{nj1}	c_{nm1}	M	M	M	M	M	M	M	M	0	0	r'_{n1}
A_k	R_1	M	M	M	c_{11k}	c_{1jk}	c_{1mk}	M	M	M	0	M	M	0	r'_{1k}
	R_i	M	M	M	c_{i1k}	c_{ijk}	c_{imk}	M	M	M	M	0	M	0	r'_{ik}
	R_n	M	M	M	c_{n1k}	c_{njk}	c_{nmk}	M	M	M	M	M	0	0	r'_{nk}
A_l	R_1	M	M	M	M	M	M	c_{11l}	c_{1jl}	c_{1ml}	0	M	M	0	r'_{1l}
	R_i	M	M	M	M	M	M	c_{i1l}	c_{ijl}	c_{iml}	M	0	M	0	r'_{il}
	R_n	M	M	M	M	M	M	c_{n1l}	c_{njl}	c_{nml}	M	M	0	0	r'_{nl}
R		0	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M	M	M	ρ
		f_{11}	f_{j1}	f_{m1}	f_{1k}	f_{jk}	f_{mk}	f_{1l}	f_{jl}	f_{ml}	φ_1	φ_i	φ_n	φ	

A modell disztribúciós tábláját a 4.4. táblázatban, a megoldási mátrixot a 4.5. táblázatban közöljük. A táblázatokban az előzőeken kívül még a következő jelöléseket alkalmaztuk:

R_i az i -edik raktár ($i=1, \dots, n$)

R fiktív raktár

F_j a j -edik felhasználó,

A_k a k -adik anyag,

Φ_i az i -edik fiktív felhasználó,

Φ fiktív felhasználó,

M tiltótarifa.

4.5. táblázat

Az áruelhelyezési modell megoldási mátrixa														
		A_1			A_k			A_l						
		F_1	F_j	F_m	F_1	F_j	F_m	F_1	F_j	F_m	ϕ_1	ϕ_i	ϕ_n	ϕ
A_1	R_1	x_{111}	x_{1j1}	x_{1m1}	0	0	0	0	0	0	y_{111}	0	0	y'_{11}
	R_i	x_{i11}	x_{ij1}	x_{im1}	0	0	0	0	0	0	0	y_{i11}	0	y'_{i1}
	R_n	x_{n11}	x_{nj1}	x_{nm1}	0	0	0	0	0	0	0	0	y_{nn1}	y'_{n1}
A_k	R_1	0	0	0	x_{11k}	x_{1jk}	x_{1mk}	0	0	0	y_{11k}	0	0	y'_{1k}
	R_i	0	0	0	x_{i1k}	x_{ijk}	x_{imk}	0	0	0	0	y_{iik}	0	y'_{ik}
	R_n	0	0	0	x_{n1k}	x_{njk}	x_{nmk}	0	0	0	0	0	y_{nnk}	y'_{nk}
A_l	R_1	0	0	0	0	0	0	x_{11l}	x_{1jl}	x_{1ml}	y_{11l}	0	0	y'_{1l}
	R_i	0	0	0	0	0	0	x_{i1l}	x_{ijl}	x_{iml}	0	y_{iil}	0	y'_{il}
	R_n	0	0	0	0	0	0	x_{n1l}	x_{njl}	x_{nml}	0	0	y_{nnl}	y'_{nl}
R		x'_{11}	x'_{j1}	x'_{m1}	x'_{1k}	x'_{jk}	x'_{mk}	x'_{1l}	x'_{jl}	x'_{ml}	0	0	0	ρ
		f_{11}	f_{j1}	f_{m1}	f_{1k}	f_{jk}	f_{mk}	f_{1l}	f_{jl}	f_{ml}	ϕ_1	ϕ_i	ϕ_n	ϕ

4.6. táblázat

Felhasználó (F_j)	Anyag (A_k)	Igény (f_{jk})
F_1	búza	50
F_2		40
F_3		20
F_1	kukorica	40
F_2		70
F_3		50
F_1	árpa	10
F_2		15
F_3		20
Összesen		315

4.7. táblázat

Raktár (R_i)	Anyag (A_k)	Kapacitás (r'_{ik})
R_1	búza	80
R_2		100
R_1	kukorica	100
R_2		150
R_1	árpa	100
R_2		150
Összesen		680

A modell alkalmazási lehetőségének megértéséhez tekintsük a következő egyszerű problémát:

Adott egy üzem két raktárral: R_1 , R_2 , amelyek kapacitása: $r_1=100$ és $r_2=150$ egység. Az üzem három feldolgozó részlege: F_1 , F_2 , F_3 , három féle anyagot: A_1 ='búza', A_2 ='kukorica',

A_3 ='árpa' igényel a gyártási tevékenységéhez. Készítsünk optimális raktározási tervet.

A felhasználók anyagokénti igényét a 4.6. táblázat, a raktárakban az anyagoként tárolható mennyiségeket a 4.7. táblázat tartalmazza.

4.8. táblázat

Raktár (R_i)	Felhasználó (F_j)	Anyag (A_k)	Fajlagos szállítási költség (c_{ijk})
R_1	F_1	búza	5
	F_2		6
	F_3		2
R_2	F_1		4
	F_2		5
	F_3		3
R_1	F_1	kukorica	6
	F_2		5
	F_3		3
R_2	F_1		4
	F_2		6
	F_3		4
R_1	F_1	árpa	5
	F_2		5
	F_3		4
R_2	F_1		5
	F_2		7

Amint az látható a kukorica és az árpa, a két raktár kapacitását teljesen lekötheti, míg az első raktárban a búzából csak 80 egység, kukoricából pedig 100 egység tárolását engedjük meg. A raktáranként megadott mennyiségeket összegezve, majd abból a tényleges raktárkapacitást levonva megkapjuk azokat az φ_i mennyiségeket amelyeket a Φ_i fiktív felhasználók fognak lekötni.

$$\varphi_1 = \sum_k r'_{1k} - r_1 = 280 - 100 = 180,$$

$$\varphi_2 = \sum_k r'_{2k} - r_2 = 400 - 150 = 250.$$

A felhasználók igényeit, a tényleges raktárkapacitásokkal összevetve:

$$\sum_j \sum_k f_{jk} > \sum_i r_i,$$

ezért a különbséget a korábban említett feltételeknek megfelelően fiktív raktár beállításával egyenlítjük ki, amelynek a kapacitása $\rho = 315 - 250 = 65$ egység.

Az egyszerűség kedvéért a fajlagos raktározási költségeket figyelmen kívül hagyjuk. A felhasználók és a raktárak közötti fajlagos szállítási költségeket a 4.8. táblázat tartalmazza. A táblázatban az árpánál a $R_2 - F_3$ viszonylat nem szerepel, ami gyakorlatilag azt jelenti, hogy a F_3 részére a R_2 -ben nem tárolhatunk árpát. A disztribúciós táblában nyilvánvalóan ez a viszonylat tiltott lesz.

4.9. táblázat

A raktározási feladat disztribúciós táblája és megoldása

		A ₁			A ₂			A ₃			R ₁	R ₂	r _{ik}
		F ₁	F ₂	F ₃	F ₁	F ₂	F ₃	F ₁	F ₂	F ₃	Φ ₁	Φ ₂	
A ₁	R ₁	5	6	2 ¹⁰	M	M	M	M	M	M	0 ⁷⁰	M	80
	R ₂	4 ⁵⁰	5 ⁴⁰	3 ¹⁰	M	M	M	M	M	M	M	0	100
A ₂	R ₁	M	M	M	6	5 ⁵	3 ⁵⁰	M	M	M	0 ⁴⁵	M	100
	R ₂	M	M	M	4 ⁴⁰	6 ⁰	4	M	M	M	M	0 ¹¹⁰	150
A ₃	R ₁	M	M	M	M	M	M	5	5 ¹⁵	4 ²⁰	0 ⁶⁵	M	100
	R ₂	M	M	M	M	M	M	5 ¹⁰	7	M	M	0 ¹⁴⁰	150
	R	0	0	0	0	0 ⁶⁵	0	0	0	0	M	M	65
	f _{jk}	50	40	20	40	70	50	10	15	20	180	250	745

4.10. táblázat

Optimális nyers- és alapanyag elhelyezés

Anyag	Raktár	Felhasználó	Mennyiség
búza	raktár1	felhasználó3	10
búza	raktár1	fiktív felhasználó	70
búza	raktár2	felhasználó1	50
búza	raktár2	felhasználó2	40
búza	raktár2	felhasználó3	10
kukorica	raktár1	felhasználó2	5
kukorica	raktár1	felhasználó3	50
kukorica	raktár1	fiktív felhasználó	45
kukorica	raktár2	felhasználó1	40
kukorica	raktár2	felhasználó2	0
kukorica	raktár2	fiktív felhasználó	110
árpa	raktár1	felhasználó2	15
árpa	raktár1	felhasználó3	20
árpa	raktár1	fiktív felhasználó	65
árpa	raktár2	felhasználó1	10
árpa	raktár2	fiktív felhasználó	140
kukorica	fiktív raktár	felhasználó2	65

Előfordulhat az is, hogy valamelyik anyag valamelyik raktárban egyetlen felhasználó részére sem tárolható. Ekkor a disztribúciós táblából egyszerűen elhagyjuk a nem kívánatos sort. Ha viszont valamelyik felhasználónak valamelyik anyagból nincs igénye, akkor értelemszerűen a disztribúciós tábla egyik oszlopa marad el.

Az adatokat egyszerűen a 4.5. táblázatba helyettesítve nyertük a feladat disztribúciós tábláját (4.9. táblázat), amelybe az optimális raktározási programot is beírtuk. A 4.10. táblázat a megoldáshoz használt számítógép program által szolgáltatott eredményeket mutatja be.

Az összes raktározási és szállítási költség: 990

4.5.3 Átrakási probléma

Az átrakási (transshipment) probléma általában az összetett vagy kombinált szállítással össz-

szefüggésben merülhet fel. Összetett szállításról, mint ismeretes, akkor beszélünk, ha a szállítójármű változtatja a pályáját, vagy két, esetleg több jármű továbbítja az árut. Az utóbbi esetben azonos vagy különböző közlekedési ágazatok járművei egyaránt szóba kerülhetnek, pl. közút, vasút, vízi út stb.

Az összetett szállítás a járműváltás miatt általában nem elhanyagolható költséget is jelentő rakodással jár. Mégis, számos esetben az átrakás gazdaságilag olyan előnyös lehet, hogy nemcsak kompenzálja az átrakás költségét, hanem csökkenti az összes költséget is. Például a nagy távolságú vasúti szállítás sokkal olcsóbb, mint a közúti, ezért nagyon gyakori a közúti és vasúti szállítás kombinálása. Arra a kérdésre, hogy milyen esetben olcsóbb a kombinált fuvarozás a közvetlen szállításnál, az átrakási probléma ad választ.

Mint azt látni fogjuk, az átrakási probléma nagyon egyszerűen visszavezethető a szállítási feladatra [47], és bármely ismert módszerrel megoldható. A feladat struktúrájának bemutatására tekintsük a következő példát.

Három malom (M_1, M_2, M_3) 1200, 1300, 1050 t havi kapacitással négy kenyérgyárat (K_1, K_2, K_3, K_4) lát el liszttel. A kenyérgyárak havi igénye 1250, 1000, 600, 700 tonna havonta. A liszt közvetlen szállítási költsége közúton a malmok és a kenyérgyárak között [Ft/t]:

	K_1	K_2	K_3	K_4
M_1	90	60	1224	588
M_2	1314	1284	48	1746
M_3	618	588	1746	30

A kenyérgyárak vasúton is megközelíthetők, de csak közvetve, ezért a lisztet a malmokból vasúti átrakó helyekre (T_1, T_2, T_3), illetve az átrakó helyekről a kenyérgyárakba közúton kell szállítani. A vasúti szállítás fajlagos költségei az átrakási pontok között [Ft/t]:

	T_1	T_2	T_3
T_1	0	816	352
T_2	816	0	1164
T_3	352	1164	0

a malmok és az átrakási pontok között:

	T_1	T_2	T_3
M_1	50	M	M
M_2	M	40	M
M_3	M	M	48

az átrakási pontok és a kenyérgyárak között:

	K_1	K_2	K_3	K_4
T_1	60	50	M	M
T_2	M	M	45	M
T_3	M	M	M	60

A malmok a malmokba, a kenyérgyárak a kenyérgyárakba közvetlen nem szállíthatnak. Kérdés: milyen szállítási program esetén lesz minimális az összes szállítási költség.

A kétlépcsős szállítási feladatként megfogalmazott probléma disztribúciós tábláját és meg-

oldását a 4.11. táblázatban közöljük.

Amint látható, a szállítás első lépcsőjében a malmokból a vasúti terminálokra és a kenyérgyárakba szállíthatunk. A vasúti terminálok egyaránt lehetnek feladók és megrendelők, ezért a második lépcsőben a terminálokról szállítunk a kenyérgyárakba. A táblázatban magyarázatra egyedül a terminálok 3550 t kapacitása szorul. A terminálok különleges tulajdonságú pontok, mivel sem forrásuk, sem nyelésük nincs, és elvileg szállítóképességük a tényleges feladásokhoz és a megrendelésekhez viszonyítva végtelen nagy. A szállítási feladat természetéből fakadóan azonban a kapacitásukat felülről korlátozni kell. A legcélszerűbb felső korlátként az összes szállítás értékét megadni, ami a példában 3550 t. Ez az érték ugyanis lehetővé teszi, hogy akár az összes feladás áthaladjon egy átrakási ponton. A kihasználatlan terminálkapacitás a költségmátrix T_i-T_j partíciójának 0 elemein csapódik ki.

4.11. táblázat

	T_1	T_2	T_3	K_1	K_2	K_3	K_4	f_i
M_1	50	M	M	90^{200}	60^{1000}	1224	588	1200
M_2	M	40^{700}	M	1314	1284	48^{600}	1746	1300
M_3	M	M	48^{350}	618	588	1746	30^{700}	1050
T_1	0^{2500}	816	352	60^{1050}	50	M	M	3550
T_2	816^{700}	0^{2850}	1164	M	M	45	M	3550
T_3	352^{350}	1164	0^{3200}	M	M	M	60	3550
r_j	3550	3550	3550	1250	1000	600	700	

A megoldásból látható, hogy a K_2 , K_3 , K_4 kenyérgyárak között, közvetlen a malmokból lesznek ellátva liszttel. A K_1 kenyérgyárba az M_1 malomból közúton 200 t lisztet szállítunk. A hiányzó 1050 t-t az M_2 és M_3 malmok biztosítják. Ezek útja a következő: az M_2 -ből a T_2 terminálra 700 t, az M_3 -ből a T_3 terminálra 350 t közúton érkezik, majd vasúton folytatja az útját a T_1 terminálig, ahonnan ismét közúton szállítjuk a K_1 kenyérgyárig.

Az átrakási probléma a példában ismertetett szituációnál általánosabban is megfogalmazható úgy, hogy a feladatban valamennyi szállítási pont (feladó- és megrendelőhely egyaránt) lehet átrakási pont. Az átrakási pontok kapacitásainak felső határa ebben az esetben is egyenlő a ténylegesen mozgatott mennyiséggel, vagyis a tényleges feladások vagy megrendelések összegével. De mivel a feladók és a megrendelők is átrakási pontok, ezért a tényleges feladásokat és az igényeket egyaránt meg kell növelni az átrakási pontokra megadott kapacitáskorlát értékével. A kihasználatlan kapacitás az átrakási pontokon a költségmátrix főátlójának nulla elemeire kerül.

4.5.4 Objektumok optimális elhelyezése

E feladat egyik változata az ún. **lineáris elrendezési probléma**, amelyben $k=1,2,\dots,m$ számú korábban telepített objektumot (üzem, gép, berendezés stb.) $i=1,2,\dots,n$ számú új objektummal kell kiegészíteni. Az új objektumok $j=1,2,\dots,n$ számú ismert koordinátájú helyre telepíthetők úgy, hogy egy helyre csak egy objektum és fordítva, egy objektum csak egy helyre kerülhet. A megoldáshoz ismert az új és a korábban telepített objektumok között egységnyi idő alatt szállítandó anyagemennyiség (I_{ik}), az anyagáramlás intenzitás-mátrixa, valamint a régi objektumok és a lehetséges új helyek közötti távolság (s_{kj}). (Vegyük észre, hogy ebben a feladatban az új objektumok között nincs anyagáramlás.) Kérdés: melyik objektumot, hova telepítsük ahhoz, hogy a rendszer egészére vonatkozóan az anyagmozgatási

teljesítményigény (Q) minimális legyen?

A döntési változók (x_{ij}) legyenek 0 és 1 értékűek. Ha az i -edik új objektumot a j -edik szabadhelyre telepítjük, akkor $x_{ij}=1$, különben $x_{ij}=0$.

A feladat feltételi egyenletei biztosítják, hogy egy helyre csak egy objektum és fordítva, egy objektum csak egy helyre kerüljön:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1.$$

A célfüggvény

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Q_{ij} x_{ij} = \min,$$

ahol: Q_{ij} az i -edik új objektum által generált vagy elnyelt anyagmozgatási teljesítmény, ha az i -edik új objektumot a j -edik szabadhelyre telepítjük. Feltételezve, hogy az anyagmozgatási költség arányos az anyagmozgatási teljesítménnyel, a költségmátrix elemeit (Q_{ij}) a

$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^m I_{ik} s_{kj}$$

formulával számíthatjuk ki, ahol:

I_{ik} az anyagáram intenzitása az i -edik új és a k -adik régi objektum között [tömeg/idő],

s_{kj} a k -adik régi és a j -edik új hely közötti távolság [távolság].

A feladat megoldása a fentiek alapján a hozzárendelési problémára vezethető vissza, és megoldható a magyar módszerrel.

Egy mezőgazdasági nagyüzem a következő létesítményekkel rendelkezik:

RT_1 karbantartó műhely,

RT_2 alkatrész raktár,

RT_3 magtár,

RT_4 tehenészeti telep,

RT_5 takarmány raktár.

A termelési tevékenység bővítése miatt 4 új létesítményt kell telepíteni:

UT_1 szárító,

UT_2 takarmánykeverő,

UT_3 tejfeldolgozó,

UT_4 tejszarnok.

Az új és a régi létesítmények közötti szállítási intenzitás (I_{ik}) [t/év]:

	RT_1	RT_2	RT_3	RT_4	RT_5
UT_1	4	7	1200	20	400
UT_2	3	4	800	90	200
UT_3	5	3	0	1500	0
UT_4	4	2	0	300	0

Az új létesítményeket 4 helyen (P_j) lehet elhelyezni, de egy helyre csak egyet. A régi objektumok és a telepítésre kijelölt helyek egymáshoz viszonyított távolságai (s_{kj}) [km]:

	P_1	P_2	P_3	P_4
RT_1	20	5	3	16
RT_2	17	14	4	9
RT_3	5	6	4	1
RT_4	3	7	6	2
RT_5	2	13	2	8

Jelöljük ki a létesítmények helyeit úgy, hogy az összes szállítási teljesítmény minimális legyen.

Először a

$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^m I_{ik} s_{kj}$$

képletet használva, számítsuk ki a Q_{ij} költségmátrix elemeit (az I_{ik} mátrix i -edik sorának elemeit szorozzuk a s_{kj} mátrix j -edik oszlopának elemeivel és a szorzatokat összegezzük):

$$Q_{11}=4 \cdot 20+7 \cdot 17+1200 \cdot 5+20 \cdot 3+400 \cdot 2=7059,$$

$$Q_{12}=4 \cdot 5+7 \cdot 14+1200 \cdot 6+20 \cdot 7+400 \cdot 13=12658,$$

$$Q_{13}=4 \cdot 3+7 \cdot 4+1200 \cdot 4+20 \cdot 6+400 \cdot 2=5760,$$

$$Q_{14}=4 \cdot 16+7 \cdot 9+1200 \cdot 1+20 \cdot 2+400 \cdot 8=4567,$$

$$Q_{21}=3 \cdot 20+4 \cdot 17+800 \cdot 5+90 \cdot 3+200 \cdot 2=4798,$$

...

$$Q_{44}=4 \cdot 16+2 \cdot 9+0 \cdot 1+300 \cdot 2+0 \cdot 8=682.$$

Az eredményeket táblázatba foglalva a megoldandó hozzárendelési feladat:

	P_1	P_2	P_3	P_4
UT_1	70599	12658	5760	4567
UT_2	4798	8101	4165	2664
UT_3	4651	10567	9027	3107
UT_4	1014	2148	1820	682

A magyar módszerrel kapott megoldás $x_{13}=1$, $x_{24}=1$, $x_{31}=1$, $x_{42}=1$, azaz az UT_1 szárítót a P_3 helyre, az UT_2 takarmánykeverőt P_4 helyre, UT_3 tejfeldolgozót a P_1 helyre, és az UT_4 tejcsarnokot a P_2 helyre kell telepíteni. A célfüggvény értéke $Q=15223$ tkm/év.

4.5.5 Nyereségmaximalizálás

Egy olajtársaság három olajkútjának (K_1 , K_2 , K_3) termékét feldolgozatlanul nyersolajként (T_1), illetve részben feldolgozott nehézolajként (T_2) és teljesen feldolgozott finomított benzinként (T_3) értékesítheti. A piacon mindhárom termékre szükség van, egy kút termékét azonban csak egyfajta feldolgozottsággal gazdaságos értékesíteni. Az egyes kutakból kitermelt, különböző mértékben feldolgozott termékek fajlagos előállítási és szállítási költségét Ft/kg-ban:

	T_1	T_2	T_3
K_1	25	50	100
K_2	50	100	150
K_3	50	75	200

A termékek eladási ára rendre 50, 100, 200 Ft/kg. Készítsünk optimális termelési tervet, amely a nyereséget maximalizálja. A feladatot hozzárendelési problémaként kezeljük. A nyereség mátrix az eladási árak és a költségek különbségeiből:

	T_1	T_2	T_3
K_1	25	50	100
K_2	0	0	50
K_3	0	25	0

Mivel a nyereség maximálása a cél a nyereség mátrix elemeit -1 -gyel szorozzuk.

	T_1	T_2	T_3
K_1	-25	-50	-100
K_2	0	0	-50
K_3	0	-25	0

Redukáljuk a mátrixot:

	T_1	T_2	T_3	p_i
K_1	-25	-50	-100	-100
K_2	0	0	-50	-50
K_3	0	-25	0	-25

A sorredukció után:

	T_1	T_2	T_3
K_1	75	50	0
K_2	50	50	0
K_3	25	0	25
q_j	25	0	0

Az összes redukció $z_0 = -150$. Az oszlopredukció után kijelöljük a független 0 elemeket:

	T_1	T_2	T_3
K_1	50	50	0^*
K_2	25	50	0^+
K_3	0^*	0^+	25

A fedővonal rendszer megszerkesztése:

	T_1	T_2	T_3	
K_1	50	50	0^*	←
K_2	25	50	0^+	←
K_3	0^*	0^+	25	
			↑	

A legkisebb fedetlen elem, $\varepsilon=25$, ezért a célfüggvény változása: $z_1 = -150 + 25 = -125$. Az ε értékét a fedetlen elemekből levonva és a kétszer fedettekhez hozzáadva, majd kijelölve a független 0 elemeket megkapjuk a feladat megoldását.

	T_1	T_2	T_3
K_1	25	25	0^*
K_2	0^*	25	0^+
K_3	0^+	0^*	50

A megoldás szerint a K_1 kútból kitermelt olajt finomított benzinként, K_2 és a K_3 kutakból kitermelt olajt nyersolajként, illetve részben feldolgozott nehézolajként értékesítjük, ekkor a nyereség 125 Ft/kg.

4.5.6 Optimális gépterhelés

A lineáris programozási feladatok között különleges helyet foglalnak el a gépek (berendezések) optimális terhelésének megállapítását célzó vizsgálatok. A gyakorlat ezeknek a feladatoknak különböző típusait fejlesztette ki, amelyek egy része szállítási feladat formájában is megfogalmazható és így hatékonyan megoldható.

A termelési feladat elvégzéséhez n számú, $G_1, G_2, \dots, G_n$ szimbólumokkal jelölt gép áll rendelkezésünkre, és segítségükkel m féle $T_1, T_2, \dots, T_m$ terméket kell előállítani $r_1, r_2, \dots, r_m$ mennyiségben vagy pedig egy meghatározott $a_1, a_2, \dots, a_m$ arányban. A feladat általában, a gépek hasznos időalapja (kapacitása), a fajlagos gyártási időigények, a fajlagos előállítási költségek stb. ismeretében meghatározni az egyes gépeken az egyes gyártmányokból előállítandó mennyiségeket.

Jelölje: x_{ij} az i -edik gépen a j -edik termékből legyártott mennyiséget, pl. (t)-ban, a_{ij} az egyes gyártmányok fajlagos termelési időigénye (h/t), c_{ij} a termékek fajlagos termelési költséget (Ft/t), p_j az egyes gyártmányokból származó bevételt (Ft/t)-ban, és b_i az egyes gépek kapacitását (t)-ban.

Gép/Termék	T_1	T_2		T_m	b_i (t)
G_1	x_{11}, a_{11}, c_{11}	x_{12}, a_{12}, c_{12}	...	x_{1m}, a_{1m}, c_{1m}	b_1
G_2	x_{21}, a_{21}, c_{21}	x_{22}, a_{22}, c_{22}	...	x_{2m}, a_{2m}, c_{2m}	b_2
G_n	x_{n1}, a_{n1}, c_{n1}	x_{n2}, a_{n2}, c_{n2}	...	x_{nm}, a_{nm}, c_{nm}	b_n
r_j (t)	t_1	t_2	...	t_m	
p_j (Ft/t)	p_1	p_2	...	p_m	

A probléma optimális megoldásának nevezzük azt az

$$x_{ij} \ (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m),$$

értékrendszert, amely minimális gyártási időt, minimális gyártási költséget, vagy maximális bevételt stb. biztosít. Tehát a programozás célja különböző lehet, és ezekhez különféle optimális gyártási programok tartoznak.

A szállítási feladatként kezelhető gépterhelési problémáknál leggyakrabban a következő célkitűzésekkel találkozhatunk:

- (1) az előírt termékmennyiségnek minimális idő alatt történő legyártása;
- (2) az előírt termékmennyiség előállítása minimális gyártási költség mellett;
- (3) az előírt termékmennyiség előállítása maximális nyereséggel.

A célkitűzéseknek megfelelő célfüggvények a következők:

$$f_1 = \sum_i \sum_j a_{ij} x_{ij} = \min$$

$$f_2 = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = \min$$

$$f_3 = \sum_j p_j \sum_i x_{ij} - \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = \sum_i \sum_j (p_j - c_{ij}) x_{ij} = \max$$

Az egyes programok akár összeegyeztethetők, ha valamely $\lambda_k \geq 0$ együtthatókkal súlyozva, az

$$f_1 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 - \lambda_3 f_3$$

függvény minimumát megvalósító programot készítünk. A λ_k együtthatók megválasztása, vagyis annak - megállapítása, hogy az egyes szempontokat milyen súllyal vegyük figyelembe, előzetes és megalapozott gazdasági döntés eredménye.

Az előírt termékmennyiség előállítása minimális gyártási idő alatt

Egy vashengerműben 3 hengerson (G_1, G_2, G_3) működik, amelyen négyféle (T_1, T_2, T_3, T_4) terméket állítanak elő. A termékek előállításának fajlagos időigénye hengersonként változó. A hengerek maximális kapacitása $b_i=[150, 150, 150]$ t/hó. A termékekből a megrendelők havi igénye $r_j=[100, 50, 80, 60]$ t/hó. A termékek előállításához szükséges fajlagos időt (a_{ij}) t/h-ban a következő táblázat mutatja:

	T_1	T_2	T_3	T_4	Kapacitás (t)
G_1	2	3	5	4	150
G_2	4	5	5	3	150
G_3	3	4	3	5	150
Igény (t)	100	50	80	60	

Minimalizáljuk az összes gyártási időt úgy, hogy a megrendelők igénye ki legyen elégítve.

A feladat megoldása:

Tekintettel arra, hogy az összes igény (290 t) kisebb, mint az összes hengerson kapacitás (450 t), az indulótáblát fiktív igénnyel egészítjük ki.

	T_1	T_2	T_3	T_4	$T_{\text{fiktív}}$	Kapacitás (t)
G_1	2^{100}	3^{50}	5	4	0	150
G_2	4	5	5	3^{60}	0^{90}	150
G_3	3	4	3^{80}	5	0^{70}	150
Igény (t)	100	50	80	60	160	

Az

$$x_{11} = 100, \quad x_{12} = 50, \quad x_{24} = 60, \quad x_{25} = 90, \quad x_{33} = 80, \quad x_{35} = 70.$$

A célfüggvény értéke, a minimális gyártási idő, $z=770$ óra. A megoldás szerint az első hengerson kapacitását (150 t) teljesen kihasználjuk, a T_1 termékből 100 tonnát, a T_2 -ből 50 tonnát gyártunk. A második hengerson a T_4 termékből 60 tonnát, és a harmadik hengerson a T_3 termékből 80 tonnát állítunk elő. A fiktív oszlopon megjelenő kihasználatlan kapacitások 90 illetve 70 t.

Az előírt termékmennyiség előállítása minimális gyártási költséggel

Egy vashengerműben 3 hengerson (G_1, G_2, G_3) működik, amelyen négyféle (T_1, T_2, T_3, T_4) terméket állítanak elő. A termékek előállításának fajlagos költsége hengersonként változó. A hengerek maximális kapacitása $b_i=[150, 150, 150]$ t/hó. A termékekből a megrendelők havi igénye $r_j=[100, 50, 80, 60]$ t/hó. A termékek előállításának és szállításának fajlagos költségeit (c_{ij}) eFt/t-ban a következő táblázat mutatja:

	T_1	T_2	T_3	T_4	Kapacitás (t)
G_1	200	240	225	250	150
G_2	210	230	240	260	150
G_3	235	245	230	255	150
Igény (t)	100	50	80	60	

Kérdés a termékeket mely hengersonokhoz kell rendelni, és azokból mekkora mennyiséget kell gyártani, ahhoz hogy minimalizáljuk a szállítási és gyártási költséget.

A feladat megoldása:

A feladat megoldásához a költségmátrixot fiktív termékkel egészítjük ki (eFt/t):

	T_1	T_2	T_3	T_4	$T_{fiktív}$	Kapacitás (t)
G_1	200 ¹⁰⁰	240	225 ⁵⁰	2 ⁵⁰	0	150
G_2	210	230 ⁵⁰	240	260	0 ¹⁰⁰	150
G_3	235	245	230 ³⁰	255 ⁶⁰	0 ⁶⁰	150
Igény (t)	100	50	80	60	160	

Az

$$x_{11} = 100, \quad x_{13} = 50, \quad x_{22} = 50, \quad x_{25} = 100, \quad x_{33} = 30, \quad x_{34} = 60, \quad x_{35} = 60.$$

A minimális gyártási költség: 64950 eFt

Az előírt termékmennyiség előállítás maximális nyereséggel

Egy vashengerműben 3 hengerson (G_1 , G_2 , G_3) működik, amelyen négyféle (T_1 , T_2 , T_3 , T_4) terméket állítanak elő. A termékek előállításának fajlagos költsége hengersonként változó. A hengersorok maximális kapacitása $b_i = [150, 150, 150]$ t/hó. A termékekből a megrendelők havi igénye $r_j = [100, 50, 80, 60]$ t/hó. A termékek előállításának és szállításának fajlagos költségeit (c_{ij}) eFt/t-ban a következő táblázat mutatja:

	T_1	T_2	T_3	T_4	Kapacitás (t)
G_1	200	240	225	250	150
G_2	210	230	240	260	150
G_3	235	245	230	255	150
Igény (t)	100	50	80	60	

A termékek eladási árai rendre: (260, 275, 258, 266) eFt/t.

Kérdés a termékeket mely hengersorokhoz kell rendelni, és azokból mekkora mennyiséget kell gyártani, ahhoz hogy megrendelők igényét kielégítsük és maximalizáljuk a nyereséget.

A feladat megoldásához a költségmátrixot fiktív termékkel egészítjük ki (eFt/t):

	T_1	T_2	T_3	T_4	$T_{fiktív}$	Kapacitás (t)
G_1	200	240	225	250	0	150
G_2	210	230	240	260	0	150
G_3	235	245	230	255	0	150
Igény (t)	100	50	80	60	160	

A nyereségmátrix az eladási árak és a költségek különbségeiből (eFt/t):

	T_1	T_2	T_3	T_4	$T_{fiktív}$	Kapacitás (t)
G_1	60	35	33	16	0	150
G_2	50	45	18	6	0	150
G_3	25	30	28	11	0	150
Igény (t)	100	50	80	60	160	

Mivel a nyereség maximálása a cél a nyereségmátrix elemeit -1 -gyel szorozzuk, így a megoldandó feladat disztribúciós táblája (eFt/t):

	T_1	T_2	T_3	T_4	$T_{fiktív}$	Kapacitás (t)
G_1	-60	-35	-33	-16	0	150

G_2	-50	-45	-18	-6	0	150
G_3	-25	-30	-28	-11	0	150
Igény (t)	100	50	80	60	160	

A feladat megoldása:

	T_1	T_2	T_3	T_4	$T_{fiktív}$	Kapacitás (t)
G_1	60^{100}	35	33	16^{50}	0	150
G_2	50	45^{50}	18	6	0^{100}	150
G_3	25	30	28^{80}	11^{10}	0^{60}	150
Igény (t)	100	50	80	60	160	

$$x_{11} = 100 \quad x_{14} = 50 \quad x_{22} = 50 \quad x_{25} = 100 \quad x_{33} = 80 \quad x_{34} = 10 \quad x_{35} = 60$$

A maximális nyereség 11400 eFt

4.6. Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse a szállítási feladat feltételeit és célfüggvényét!
2. Ismertesse a tiltótarifá fogalmát, mutassa be néhány alkalmazását!
3. Egy szállítási feladaton mutassa be a *Vogel-Korda*-féle módszert!
4. Ismertesse a korlátozás és szétválasztás módszerét a szállítási feladat megoldására!
5. Ismertesse a disztribúciós és a szimplex módszer kapcsolatát!
6. Ismertesse a disztribúciós módszer algoritmusát!
7. Ismertesse a magyar módszer elméleti alapjait!
8. Mutassa be a magyar módszert egy hozzárendelési feladaton!
9. Alkalmazza a magyar módszert egy szállítási feladat megoldására!
10. Keressen többlepcsős szállítási feladat formájában leírható gyakorlati problémákat!
11. Ismertesse az átrakási probléma modelljét!
12. Mikor használható a lineáris elrendezési probléma modellje?
13. Ismertesse az optimális gépterhelési probléma változatait!

Jegyzetek, kérdések

5. A KÖRUTAZÁSI FELADAT

A körutazási probléma legegyszerűbb megfogalmazása a következő. Adott n város, ezeket jelöljük: $P_1, P_2, \dots, P_n$ szimbólumokkal. Az i -edik és a j -edik város közötti távolság c_{ij} . A feladat, valamelyik városból, mondjuk P_1 -ből elindulva ellátogatni minden városba egyszer, de csakis egyszer, majd visszatérni P_1 -be. Kérdés a városok meglátogatásának mely sorrendje biztosítja a legrövidebb útvonalat.

Az ismertett probléma feltételrendszere a **hozzárendelési feltételből**:

$$(5.1) \quad \sum_i x_{ij} = \sum_j x_{ij} = 1, \quad x_{ij} \in \{0,1\} \text{ minden } i, j - \text{re},$$

és a körutazási feltételből:

$$(5.2) \quad I = \{i_1 i_2, i_2 i_3, \dots, i_{n-1} i_n, i_n i_1\}$$

áll. Az utóbbi azt írja elő, hogy az 1 értékű változók indexei n elemű indexláncot alkotnak. E feltételek mellett kell meghatározni a

$$(5.3) \quad K = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

célfüggvényt.

Ez a kombinatorikus feladat régóta foglalkoztatja a matematikusokat és gyakorlati szakembereket. A probléma megfogalmazható integer lineáris programozási (ILP) feladatként, azonban ezzel szemben komoly kifogásként merülhet fel, hogy nem túl nagy n esetén is meglehetősen nagyméretű ILP-t kapunk. Legyen x_{ijk} egy nulla-egy változó, amely 1, ha az i -edik városból a j -edikbe a k -adik fázisban megyünk, különben $x_{ijk}=0$. Ekkor az ILP-modell:

$$(5.4) \quad x_{ijk} \in \{0,1\} \text{ minden } i, j, k - \text{ra}$$

$$(5.5) \quad x_{ijk} = 0, \text{ ha } i = j \text{ minden } i, j, k - \text{ra}$$

$$(5.6) \quad \sum_j x_{1ji} = 1,$$

$$(5.7) \quad \sum_i x_{i1n} = 1,$$

$$(5.8) \quad \sum_k x_{ijk} \leq 1 \text{ minden } i, j - \text{re},$$

$$(5.9) \quad \sum_i \sum_k x_{ijk} = 1 \text{ minden } j - \text{re},$$

$$(5.10) \quad \sum_j \sum_k x_{ijk} = 1 \text{ minden } i - \text{re},$$

$$(5.11) \quad \sum_i x_{ijk} = \sum_{j'} x_{ij'k+1} \text{ minden } j - \text{re és } k < n - \text{re},$$

$$(5.12) \quad \sum_i \sum_j \sum_k c_{ij} x_{ijk} \rightarrow \min.$$

A feltételek jelentése:

(5.6) a körút kezdőpontja az 1. város,

(5.7) a körút végpontja az 1. város,

(5.8) egy fázisban legfeljebb egy ij viszonylatot lehet bevonni a körútba,

(5.9) a j -edik pontba csak egyszer lehet bemenni,

(5.10) az i -edik pontból csak egyszer lehet távozni,

(5.11) ha a j -edik pontba a k -adik fázisban érkeztünk, akkor onnan a $k+1$ -dik fázisban távozzunk.

A változók nagy száma indokolja a feladat szerkezetéhez igazodó, kevesebb számítást

igénylő módszerek kifejlesztését. Több olyan algoritmus is ismeretes, amely az esetek többségében optimumot szolgáltat. Ezek közül kettőt mutatunk be. Az egyik a korábban megismert *korlátozás és szétválasztás módszerét* alkalmazza, a másik pedig a *szekvenciális optimálási tételre* épül.

5.1. Little, Murty, Sweeney és Karel algoritmus

Az algoritmus a korlátozás és szétválasztás módszerén alapul. Mivel minimumfeladatról van szó, (hasonlóan, mint a szállítási feladatnál) alsó korlátot állapítunk meg, és a legkisebb alsó korlát alapján végezzük el a szétválasztást [72].

Az összes körutak L halmazára (ezek száma $(n-1)!$) **alsó becslést** a C költségmátrix redukciójával nyerünk. Mint ismeretes, ezt úgy hajtjuk végre, hogy meghatározzuk a mátrix minden sorának (p_i) és minden oszlopának (q_j) minimális elemét:

$$p_i = \min\{c_{ij} \mid j = 1, 2, \dots, n\},$$

$$q_j = \min\{c_{ij} - p_i \mid i = 1, 2, \dots, n\},$$

majd ezeket kivonjuk a C mátrixból. Az így kapott redukált mátrix:

$$C_0 = [c_{ij} - p_i - q_j].$$

A redukció nagysága a

$$\sum_i p_i + \sum_j q_j$$

összeggel fejezhető ki. Könnyű belátni, hogy a redukció nagysága a célfüggvényben bekövetkezett változást mutatja. Jelöljük c'_{ij} -vel a redukált mátrix elemeit, majd azokat helyettesítsük (5.3)-ba és használjuk fel az (5.1) feltételt, akkor a

$$K = \sum_i \sum_j (c'_{ij} + p_i + q_j) x_{ij} = \sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} + \sum_i p_i + \sum_j q_j.$$

Az összes körutak L halmazához **alsó korlátként** a kifejezés jobb oldalán álló redukciót rendeljük, azaz

$$K_0 = \sum_i p_i + \sum_j q_j$$

Az is belátható, hogy a $c'_{ij} x_{ij} \geq 0$ miatt az L halmazban a K_0 -nál kisebb értékű körút nem található.

A **szétválasztás** úgy történik, hogy az összes körutakat két csoportba osztjuk. Az L_1 -be tartoznak azok, amelyeknek egy alkalmasan választott ij viszonylat eleme, azaz az $x_{ij}=1$, az L_1' -be pedig azok, amelyek közül az ij viszonylatot kizárjuk, azaz az $x_{ij}=0$. A kérdés most már csak az, hogyan válasszuk ki az ij viszonylatot, és miként becsüljük meg az L_1 és az L_1' halmazokba csoportosított körutak alsó korlátait.

Ha valamely ij viszonylatot ki akarunk zárni a körútból, akkor nem kell mást tenni, mint a költségmátrixban a c_{ij} elem helyére $M=\infty$ -t írni. Ha elvégezzük a helyettesítést, akkor rendszerint mód nyílik a mátrix újabb redukálására. Ennek a redukciónak a nagyságát úgy kapjuk, hogy az i -edik sor minimális eleméhez hozzáadjuk a j -edik oszlop minimális elemét. Mivel a redukció nagysága a célfüggvényben bekövetkező változást mutatja, ezért a szétválasztást úgy végezzük el, hogy a költségmátrix minden 0 értékű elemére nézve megvizsgáljuk az elérhető redukció nagyságát, és azt választjuk, amelyik a legnagyobb redukciót biztosítja. A **szétválasztási kritérium** meghatározásának lépései tehát a

következők:

A C_0 mátrix minden 0 elemére kiszámítjuk az elérhető r_{ij} redukció értékét:

$$r_{ij} = \min\{c_k | k=1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n\} + \min\{c_k | k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}.$$

Az így nyert r_{ij} halmazból kiválasztjuk a maximálist, azaz

$$r'_j = \max\{r_{ij}\}.$$

Megjegyezzük, az ij viszonylat csak akkor egyértelmű szétválasztási kritérium, ha az r_{ij} halmaznak egy és csakis egy maximális eleme van. Ez a követelmény, sajnos, nem mindig biztosítható.

A szétválasztás alapjául szolgáló ij viszonylat birtokában meghatározhatjuk az L_1 halmazhoz tartozó C_1 , és az L_1' halmazhoz tartozó C_1' költségmátrixokat. A C_1' mátrixot úgy nyerjük, hogy a C_0 mátrixban a c_{ij} elem helyére M -et írunk, majd redukáljuk a mátrixot. Mivel a redukció értéke r'_{ij} , az L_1' -hez tartozó alsó korlát:

$$K_1 = K_0 + r'_j.$$

Az L_1 -hez tartozó C_1 mátrixot úgy kapjuk, hogy a C_0 mátrix i -edik sorát és j -edik oszlopát elhagyjuk. Ezzel biztosítjuk, hogy az ij viszonylat az L_1 körutak mindegyikében szerepeljen. Ezzel egyidejűleg meg kell akadályozni a ji viszonylat fellépését, ezért a c_{ji} helyére M -et írunk. Az így nyert mátrixot redukáljuk. Ha a redukció mértékét r_{ij} -vel jeleljük, akkor az L_1 körutak halmazához tartozó alsó korlát:

$$K_1 = K_0 + r_{ij}.$$

Ezután azt a halmazt bontjuk tovább, amelyhez a kisebb alsó korlát tartozik. A **körutazási feltétel biztosítása** nagyon egyszerű. Tételezzük fel, hogy a k -adik lépés előtt a következő indexlánc alakul ki:

$$\{ab, bc, \dots, ef, \dots, uv\}$$

Ekkor nem kell mást tenni, mint a c_{ca} elem helyére M -et írni a C_k mátrix meghatározása előtt, és ezzel az indexlánc idő előtti záródását megakadályozni.

Az algoritmus alkalmazása

Alkalmazzuk az algoritmust a következő példa megoldására.

A $P_1, P_2, \dots, P_5$ állomások közötti távolságok megtételéhez a C mátrixba foglalt időtartamok szükségesek. A P_1 állomásról indulva, minden állomást egyszer kell érinteni, majd vissza kell térni P_1 -be. A P_1 és a P_3 , valamint a P_2 és a P_5 állomások között nincs közvetlen kapcsolat. Határozzuk meg, az állomások bejárásának melyik sorrendje biztosítja a legrövidebb időtartamú körutat!

$$C = \begin{vmatrix} M & 15 & M & 10 & 30 \\ 15 & M & 10 & 8 & M \\ M & 10 & M & 15 & 25 \\ 10 & 8 & 15 & M & 20 \\ 30 & M & 25 & 20 & M \end{vmatrix}$$

Redukáljuk a mátrixot:

$$C = \begin{vmatrix} M & 5 & M & 0 & 8 \\ 5 & M & 0 & 0 & M \\ M & 0 & M & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & M & 0 \\ 8 & M & 3 & 0 & M \end{vmatrix}$$

Az L_0 -hoz tartozó alsó korlát:

$$K_0 = \sum_i p_i + \sum_j q_j = 56 + 16 = 72.$$

Határozzuk meg a szétválasztási kritériumot:

$$\begin{aligned} r_{14} &= 5 + 0 = 5 & r_{23} &= 0 + 3 = 3 \\ r_{24} &= 0 + 0 = 0 & r_{32} &= 3 + 0 = 3 \\ r_{41} &= 0 + 5 = 5 & r_{42} &= 0 + 0 = 0 \\ r_{45} &= 0 + 3 = 3 & r_{54} &= 3 + 0 = 3 \end{aligned}$$

A szétválasztás alapjául szolgáló viszonylat:

$$r'_{ij} = \max\{r_{ij}\} = r_{14} = 5.$$

Megjegyezzük: $r_{14} = r_{41} = 5$, ezért a szétválasztás nem egyértelmű.

Az L_1' halmazba tartoznak azok a körutak, amelyeknek az 1-4 viszonylat nem eleme, a $c_{14} = M$, és az $x_{14} = 0$. Az L_1' -hez tartozó költségmátrix:

$$C_1' = \begin{vmatrix} M & 0 & M & M & 3 \\ 5 & M & 0 & 0 & M \\ M & 0 & M & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & M & 0 \\ 8 & M & 3 & 0 & M \end{vmatrix}$$

Az L_1' körutak alsó korlátja:

$$K_1' = K_0 + r'_{14} = 72 + 5 = 77.$$

Az L_1 halmazban $x_{14} = 1$. Ezt úgy érjük el, hogy a C_0 mátrix első sorát és negyedik oszlopát elhagyjuk, majd a c_{41} elem helyére M -t írunk. Így az első oszlopban és az ötödik sorban lehetőség nyílik a redukcióra, amelynek nagysága $r_{14} = 8$. A redukció után a C_1 mátrix:

$$C_1 = \begin{vmatrix} - & - & - & - & - \\ 0 & M & 0 & - & M \\ M & 0 & M & - & 3 \\ M & 0 & 5 & - & 0 \\ 0 & M & 0 & - & M \end{vmatrix}$$

Az L_1 körutak alsó korlátja:

$$K_1 = K_0 + r_{14} = 72 + 8 = 80.$$

A példában a $K_1 > K_1'$, ezért az $x_{14} = 0$, és az L_1' halmazt bontjuk tovább (5.1. ábra). Az

újabb szétválasztáshoz a C_1' mátrix elemeit vizsgáljuk.

$$\begin{array}{ll} r_{12}=3+0=3 & r_{23}=0+3=3 \\ r_{24}=0+0=0 & r_{32}=3+0=3 \\ r_{41}=0+5=5 & r_{42}=0+0=0 \\ r_{45}=0+3=3 & r_{54}=3+0=3 \end{array}$$

$$r'_{ij} = \max\{r_{ij}\} = r_{41} = 5.$$

$$C_2' = \begin{vmatrix} M & 0 & M & M & 3 \\ 0 & M & 0 & 0 & M \\ M & 0 & M & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & M & 0 \\ 3 & M & 3 & 0 & M \end{vmatrix}$$

$$K'_2 = K'_1 + r'_{41} = 77 + 5 = 82.$$

Az L_2 halmazhoz tartozó C_2 mátrix:

$$C_2 = \begin{vmatrix} - & 0 & M & M & 0 \\ - & M & 0 & 0 & M \\ - & 0 & M & 5 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ - & M & 3 & 0 & M \end{vmatrix}$$

$$K_2 = K'_1 + r_{41} = 77 + 3 = 80.$$

A $K_2' > K_2$, így $x_{14}=1$, és az L_2 -t bontjuk tovább (5.1. ábra).

$$\begin{array}{ll} r_{12}=0+0=0 & r_{15}=0+0=0 \\ r_{23}=0+3=3 & r_{24}=0+0=0 \\ r_{32}=0+0=0 & r_{35}=0+0=0 \\ r_{54}=3+0=3 & \end{array}$$

$$r'_{ij} = \max\{r_{ij}\} = r_{23} = 3.$$

$$C_3' = \begin{vmatrix} - & 0 & M & M & 0 \\ - & M & M & 0 & M \\ - & 0 & M & 5 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ - & M & 0 & 0 & M \end{vmatrix}$$

$$K'_3 = K'_2 + r'_{23} = 80 + 3 = 83.$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} - & 0 & - & M & 0 \\ - & - & - & - & - \\ - & M & - & 5 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ - & M & - & 0 & M \end{vmatrix}$$

$$K_3 = K'_2 + r_{23} = 80 + 0 = 80.$$

A $K_3' > K_3$, ezért $x_{23}=1$, és az L_3 -at bontjuk tovább (5.1. ábra). Az indexlánc elemei: $I=\{23, \dots, 41\}$.

$$r_{12}=0+M=M$$

$$r_{35}=5+0=5$$

$$r_{15}=0+0=0$$

$$r_{54}=M+5=M$$

$$r'_{ij} = \max\{r_{ij}\} = r_{12} = M.$$

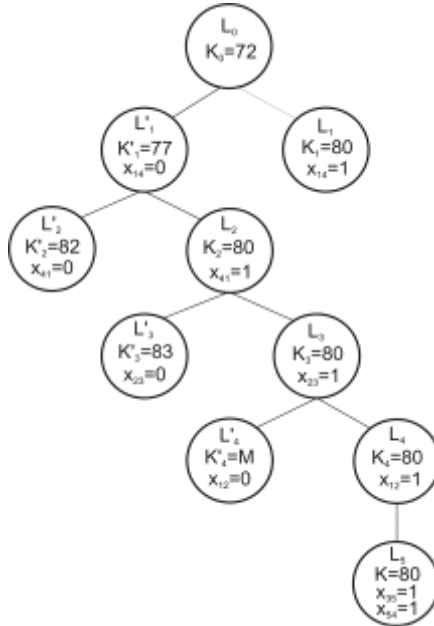
$$C_4' = \begin{vmatrix} - & M & - & M & 0 \\ - & - & - & - & - \\ - & M & - & 5 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ - & M & - & 0 & M \end{vmatrix}$$

$$K_4' = K_3 + r'_{12} = 80 + M = M.$$

$$C_4 = \begin{vmatrix} - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & 5 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & 0 & M \end{vmatrix}$$

$$K_4 = K_3 + r_{12} = 80 + 0 = 80.$$

$$I = \{12, 23, \dots, 41\}.$$



5.1. ábra. A körutazási feladat megoldása

A körutazási feltétel biztosítására, mint az, az indexláncból látható a c_{31} elem helyére M -t kellene írni. Mivel azonban az első oszlopot már elhagytuk, ezt a helyettesítést nem kell végrehajtani. A $K_4' > K_4$, így az $x_{12}=1$. A C_4 mátrixot redukálni, és tovább bontani már nem lehet. Az indexlánc hiányzó láncszemei a C_4 mátrix 0 elemei. A feladat megoldása tehát:

$$I = \{12, 23, 35, 54, 41\},$$

a célfüggvény pedig:

$$K=K_4=80.$$

A megoldás menete az 5.1. ábrán is nyomon követhető.

5.1. példa: A korlátozás és szétválasztás módszerével oldjuk meg a következő körutazási feladatot:

M	8	3	7	4
13	M	4	5	1
2	6	M	5	3
8	5	1	M	7
7	4	8	2	M

5.2. A szekvenciális optimálási módszer

A műszaki-gazdasági szélsőérték-feladatok megoldásának egyik leghatékonyabb eszköze a szekvenciális optimálás, amit gyakran dinamikus programozásnak is neveznek. Az optimálási tételre alapuló módszert R. Bellman [9] amerikai matematikus dolgozta ki.

A dinamikus programozás különböző típusú szélsőérték-feladatok megoldására alkalmas technika vagy közelítő módszer, amely az analízis módszereitől eltérően nem a deriváltak zérus helyeinek meghatározásával jut célhoz, hanem a következőkben részletezett successzív approximációs eljárással [52]. További sajátossága a dinamikus programozásnak, hogy például a lineáris programozástól eltérően nem általánosan használható algoritmus, hanem a feladatok megoldásának egy sajátos közelítése. A különböző, de bizonyos feltételeknek megfelelő problémák megoldására szolgáló algoritmusok (a legismertebb alkalmazások az allokációs, terhelési, készletezési feladatok stb.) lényegesen eltérnek egymástól.

A dinamikus programozás a többfázisú döntési problémák optimalizálása. Ez azt jelenti, hogy az adott problémát fázisokra vagy részproblémákra bontjuk, és a részproblémákat egymásután szekvenciálisan oldjuk meg. Ezért gyakran a dinamikus programozást szekvenciális optimalizálásnak is nevezik.

A dinamikus programozás a *Bellman-féle* optimálási tételre [9] alapul, amely diszkrét, determinisztikus rendszerekre a következők szerint értelmezhető [52].

Legyen egy rendszerünk, amelynek állapota az egyes k fázisokban ($k=0,1,\dots,n$) döntés következtében megváltozhat. A k fázisokban megszámlálható számú állapot lehet. Ha a döntések egy bizonyos sorozatát $k=0$ -tól $k=n$ -ig **politikának**, a kapcsolódó döntések sorozatát pedig, amelyek valamely politika részei, **alpolitikának** nevezzük, akkor igaz a következő tétel: Egy optimális politika csak optimális alpolitikákból állhat.

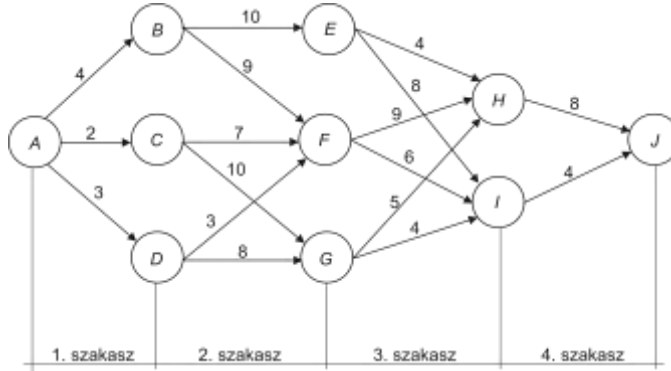
Bizonyítás:

Tekintsünk egy alpolitikát, amely valamely optimális politika része. Ha ez az alpolitika nem lenne optimális, akkor lenne egy jobb alpolitika, amely lehetővé tenné a politika javítását, ez pedig ellentmondana a hipotézisünknek.

5.2.1 A postakocsi probléma

A dinamikus programozás alapvető vonásait és terminológiáját egy mintapéldán keresztül mutatjuk be, amely nem más, mint H. M. Wagner amerikai professzor által megfogalmazott és jól ismert postakocsi (stagecoach) probléma [47]. A feladat kerettörténete a következő:

Egy ügynök az USA keleti partjának egyik városból (A) a nyugati part egy városába (J) akar eljutni postakocsival. Így az utazás kiindulási pontja és végállomása rögzített, azonban a két pont közötti út megtételére sokféle lehetőség adódik. Az utazás lehetséges útvonalait az 5.2. ábrán látható gráf szemlélteti. Az ábrán a kiindulási pont A, a végállomás J. Az A és J között 4 szakaszt (fázist) kell megtenni, de egy szakaszon belül különböző államok (B,C,D) (E,F,G), (H,I) érintésével lehet előre haladni a gráf élei mentén.



5.2. ábra. Ábra a postakocsi problémához

Az ügynök tudta, hogy a postakocsival való utazás nem biztonságos, mégis a körülményekhez képest szeretett volna békésen utazni. Az útvonal tervezésekor ezért a következőképpen okoskodott. Az a legbiztonságosabb útvonal, amelyen a biztosítási költségek összege a legkisebb. A biztosítási költségeket a gráf éleire írt számok (c_{ij}) jelzik. Például a C-ből a G-be vezető úton a biztosítási költség $c_{CG}=10$ egység.

Megoldás:

Az egyes szakaszokra vonatkozó döntési változók legyenek x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 , a döntési változókhoz tartozó halmazok (állapotok) pedig $x_0:\{A\}$, $x_1:\{B,C,D\}$, $x_2:\{E,F,G\}$, $x_3:\{H,I\}$, $x_4:\{J\}$.

Az 1. szakasz költsége legyen $u_1(x_0, x_1)$. Ez a költség azoktól az értékektől függ, amit az x_0 és x_1 felvehetnek. A példában az x_0 csak az A pont lehet, de az x_1 a B, C, D értékeket vehet fel. Hasonlóan legyen a 2. szakasz költsége $u_2(x_1, x_2)$, és ez a költség csak az x_1 -től és x_2 -től függ. A biztosítás összes költsége így:

$$f(x_0, x_4) = u_1(x_0, x_1) + u_2(x_1, x_2) + u_3(x_2, x_3) + u_4(x_3, x_4).$$

Keressük az 1. szakaszban az $x_1=B, C, D$ pontokba vezető utak minimális biztosítási költségeit. Az $x_0:\{A\}$ -ból az $x_1:\{B, C, D\}$ pontokba vezető utak minimális költségeit jelöljük $f_{01}(x_1)$ -el. A választás az 1. szakaszban egyértelmű:

$$f_{01}(B) = u_1(A, B) = 4,$$

$$f_{01}(C) = u_1(A, C) = 2,$$

$$f_{01}(D) = u_1(A, D) = 3.$$

A 2. szakaszban keressük az $x_0:\{A\}$ -ból az $x_2:\{E, F, G\}$ -be vezető minimális költségű utakat. Ezeket jelöljük $f_{02}(x_2)$ -vel. Az $x_2:\{E, F, G\}$ -be vezető legkisebb költségű utakat úgy kapjuk, hogy az előző szakaszban meghatározott $x_0:\{A\}$ -ból az $x_1:\{B, C, D\}$ -be vezető minimális költségű utakhoz hozzávesszük az $u_2(x_1, x_2)$ szakasz-költségeket és ezek közül a minimálisat választjuk, azaz

$$f_{02}(E) = \min_{x_1=B, C, D} \{f_{01}(x_1) + u_2(x_1, E)\} = \min\{4 + 10, 2 + \infty, 3 + \infty\} = 14 \rightarrow x_1 = B,$$

$$f_{02}(F) = \min_{x_1=B,C,D} \{f_{01}(x_1) + u_2(x_1, F)\} = \min\{4+9, 2+7, 3+3\} = 6 \rightarrow x_1=D,$$

$$f_{02}(G) = \min_{x_1=B,C,D} \{f_{01}(x_1) + u_2(x_1, G)\} = \min\{4+\infty, 2+10, 3+8\} = 11 \rightarrow x_1=D.$$

A 2. szakaszban kapott eredmények szerint az A pontból az E-be a B ponton keresztül, az F-be és a G-be pedig a D ponton keresztül lehet a legkisebb költséggel eljutni, azaz az

$$f_{02}(E) = 14 \rightarrow (A, B, E),$$

$$f_{02}(F) = 6 \rightarrow (A, D, F),$$

$$f_{02}(G) = 11 \rightarrow (A, D, G)$$

útvonalak jelentik a legjobb alpolitikákat a 2. szakasz végéig.

5.1. táblázat

A postakocsi probléma megoldása

Fázis (szakasz) i	Az előző fázisban elért állomások x_{i-1}	Az i -edik fázisban elérhető állomások x_i	Alpolitikák költsége az i -edik fázisig $f_{0i-1}(x_{i-1}) + u_i(x_{i-1}, x_i)$	Legjobb alpolitikák költsége $f_{0i}(x_i) = \min\{f_{0i-1}(x_{i-1}) + u_i(x_{i-1}, x_i)\}$	Utolsó kapcsolat
1	A	B C D	4 2 3	4 2 3	AB AC AD
2	B C D	E	4+10=14 2+∞=∞ 3+∞=∞	14	BE
	B C D	F	4+9=13 2+7=9 3+3=6	6	DF
	B C D	G	4+∞=∞ 2+10=12 3+8=11	11	DG
3	E F G	H	14+4=18 6+9=15 11+5=16	15	FH
	E F G	I	14+8=22 6+6=12 11+4=15	12	FI
4	H I	J	15+8=23 12+4=16	16	IJ

A 3. szakaszban, ahol keressük az $x_0: \{A\}$ -ból az $x_3: \{H, I\}$ -be vezető legkisebb költségű utakat hasonlóan járunk el, mint a 2. szakaszban. A 2. szakaszban elért $x_2: \{E, F, G\}$ pontokba vezető $f_{02}(x_2)$ legkisebb költségű utakhoz hozzávesszük az $u_3(x_2, x_3)$ szakasz-költségeket, és ezek közül a minimálist választjuk:

$$f_{03}(H) = \min_{x_2=E,F,G} \{f_{02}(x_2) + u_3(x_2, H)\} = \min\{14+4, 6+9, 11+5\} = 15 \rightarrow x_2=F,$$

$$f_{03}(I) = \min_{x_2=E,F,G} \{f_{02}(x_2) + u_3(x_2, I)\} = \min\{14+8, 6+6, 11+4\} = 12 \rightarrow x_2=F.$$

A legjobb alpolitikák a 3. szakasz végéig:

$$f_{03}(H) = 15 \rightarrow (A, D, F, H),$$

$$f_{03}(I) = 12 \rightarrow (A, D, F, I).$$

A 4. szakaszban keressük az $x_0: \{A\}$ -ból az $x_4: \{J\}$ -be vezető legkisebb költségű utat:

$$f_{04}(J) = \min_{x_3=H,I} \{f_{03}(x_3) + u_4(x_3, J)\} = \min\{15+8, 12+4\} = 16 \rightarrow x_3=I.$$

A feladat megoldása:

$$f_{04}(J)=16 \rightarrow (A,D,F,I,J).$$

A feladat megoldását az 5.1. táblázat foglalja össze.

A bemutatott módszer alkalmazásának feltétele, hogy a $\mathbf{p}$ politikát fel tudjuk bontani

$$(p_0, p_1), (p_1, p_2), \dots, (p_{n-1}, p_n)$$

alpolitikákra úgy, hogy a K költség csupán az egyes fázisok kezdő- és végpontját jellemző (p_{i-1}, p_i) paraméterektől függő

$$u_i(p_{i-1}, p_i)$$

részköltségek összegére bomlik, azaz

$$K(\mathbf{p})=u_1(p_0, p_1)+u_2(p_1, p_2)+\dots+u_n(p_{n-1}, p_n).$$

Tekintsük a következő $n \neq 1$ változós függvényt:

$$F(\mathbf{x})=u_1(x_0, x_1)+u_2(x_1, x_2)+\dots+u_i(x_{i-1}, x_i)+u_n(x_{n-1}, x_n)$$

Ez a függvény felbontható n számú elemi függvény összegére. Keressük az F függvény minimumát, tudva, hogy minden x_i olyan tartományban változhat, amely csak x_0 -tól és x_{i+1} -től függ, akármilyen értéket vesz fel i az 1 és n között.

Nézzük az 1 és 2 fázisokat együttesen, nevezzük $f_{02}(x_0, x_2)$ -nek az $u_1(x_0, x_1)+u_2(x_1, x_2)$ összeg optimális értékét, ekkor x_1 -et változtatjuk a tartományában, amely csak x_0 -tól és x_2 -től függ. Tehát minimum keresés esetén a következő képletet kapjuk:

$$f_{02}(x_0, x_2)=\min\{u_1(x_0, x_1)+u_2(x_1, x_2)\},$$

ahol $x_1 \in X_1(x_0, x_2)$, ami azt jelenti, hogy x_1 az X_1 értékhalmazhoz tartozik, ez pedig csak x_0 -tól és x_2 -től függ. Az x_1 -nek az az értéke, amely optimálissá teszi az $u_1(x_0, x_1)+u_2(x_1, x_2)$ összeget, egyben az optimális alpolitikát is meghatározza az 1 és 2 fázisokban a vizsgált x_0 és x_2 pár esetében.

Vegyük most az 1, 2 és 3 fázisokat együtt, és nevezzük $f_{03}(x_0, x_3)$ -nak az $u_1(x_0, x_1)+u_2(x_1, x_2)+u_3(x_2, x_3)$ összeg optimális értékét, amikor x_1 -et és x_2 -t változtatjuk a tartományaikban. Az optimalitási tétel alapján felírhatjuk:

$$f_{03}(x_0, x_3)=\min\{f_{02}(x_0, x_2)+u_3(x_2, x_3)\},$$

ahol $x_2 \in X_2(x_0, x_3)$.

Általánosan:

$$f_{0i}(x_0, x_i)=\min\{f_{0i-1}(x_0, x_{i-1})+u_i(x_{i-1}, x_i)\},$$

ahol az $x_{i-1} \in X_{i-1}(x_0, x_i)$ és $f_{01}(x_0, x_1)=u_1(x_0, x_1)$.

A fenti formula rekurzív alkalmazása lehetővé teszi, hogy kiszámítsuk az egymás után következő optimális alpolitikákat az 1 és 2 fázisokat együttvéve, az 1, 2 és 3 fázisokat együttvéve, ..., az 1, 2, ..., i , ..., n fázisokat együttvéve. Az optimális politikát az

$$F(x_0, x_n)=\min\{f_{0n-1}(x_0, x_{n-1})+u_n(x_{n-1}, x_n)\}$$

képlet adja.

5.2.2 A körutazási feladat megoldása dinamikus programozással

A továbbiakban alkalmazzuk a dinamikus programozást a körutazási feladat megoldására [15]. A bevezetőben használt jelöléseket megtartva, jelentse c_{ij} a P_i -ből a P_j -be mutató él költségét, ahol $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$. Legyen $a_j^{(k)}$ a valamely $P_i^{(1)}$ csúcsból a $P_j^{(k)}$ csúcsba mutató, k élt tartalmazó legrövidebb út hossza, amely út ugyanazt a csúcsot csak egyszer érinti. A fázisok száma: $k=1,2,\dots,n$.

Ha nincs ilyen út, akkor az

$$a_j^{(k)} = M,$$

ha $k=1$, akkor az

$$a_j^{(1)} = \min\{c_{ij}\},$$

különben az

$$a_j^{(k+1)} = \min\{a_i^{(k)} + c_{ij}\}.$$

A körutazási feltételt a $k+1$ -edik fázisban úgy biztosítjuk, hogy az $a_i^{(k)}$ helyére M -t írunk, amennyiben az $a_i^{(k)}$ hosszúságú út a j csúcsot tartalmazza. Így rekurzíven az $a_i^{(k)}$ értékeket meghatározva, legfeljebb $k=n-1$ lépés után megkapjuk a $P_i^{(1)}$ -ből a $P_j^{(n-1)}$ -be vezető, $n-1$ élt tartalmazó legrövidebb utakat, amelyekben valamennyi csúcs különböző, feltéve, hogy ilyen utak léteznek.

Az n -edik lépésben a legrövidebb utakhoz hozzáadjuk a $P_j^{(n-1)}$ -ből a $P_i^{(1)}$ -be mutató élt:

$$a_i^{(n)} = a_j^{(n-1)} + c_{ji}.$$

Így a $P_i^{(1)}$ -ből induló és a $P_i^{(1)}$ -be vezető körutakat kapunk, amelyek közül a legrövidebb a körutazási feladat megoldása.

Az ismertett algoritmus gyakorlati alkalmazását az előző mintapéldán mutatjuk be.

$$C = \begin{vmatrix} M & 15 & M & 10 & 30 \\ 15 & M & 10 & 8 & M \\ M & 10 & M & 15 & 25 \\ 10 & 8 & 15 & M & 20 \\ 30 & M & 25 & 20 & M \end{vmatrix}$$

1. fázis:

Először az

$$a_j^{(1)} = \min\{c_{ij}\}$$

képletet alkalmazva meghatározzuk, hogy az 1. fázisban a P_j állomások mely állomásokról érhetők el a legrövidebb úton:

$$a_1^{(1)} = \min\{M, 15, M, 10, 30\} = c_{41} = 10$$

$$a_2^{(1)} = \min\{15, M, 10, 8, M\} = c_{42} = 8$$

$$a_3^{(1)} = \min\{M, 10, M, 15, 25\} = c_{23} = 10$$

$$a_4^{(1)} = \min\{10, 8, 15, M, 20\} = c_{24} = 8$$

$$a_5^{(1)} = \min\{30, M, 25, 20, M\} = c_{45} = 20$$

Az utakhoz tartozó indexláncok:

$$a_1^{(1)} \rightarrow \{41\}$$

$$a_2^{(1)} \rightarrow \{42\}$$

$$a_3^{(1)} \rightarrow \{23\}$$

$$a_4^{(1)} \rightarrow \{24\}$$

$$a_5^{(1)} \rightarrow \{45\}$$

A megoldás az 5.3. ábrán is követhető, amely szemléletesen mutatja a $k=1,2,\dots,5$ fázisok után a $j=1,2,\dots,5$ pontokba vezető legrövidebb utakat.

2. fázis:

A második fázistól az

$$a_j^{(k+1)} = \min\{a_i^{(k)} + c_{ij}\}.$$

formulát használjuk.

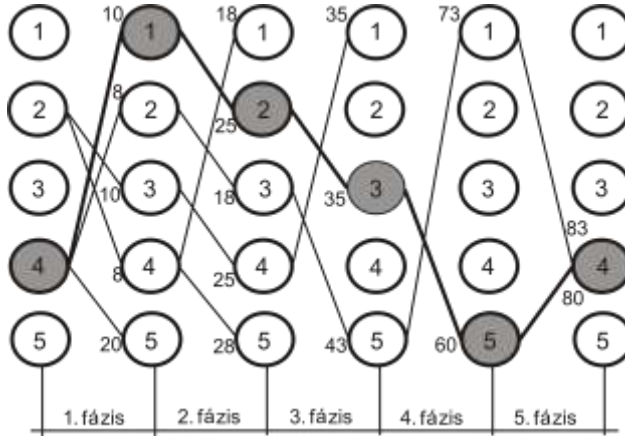
$$a_1^{(2)} = \min\{M, 8+15, M, 8+10, 20+30\} = a_4^{(1)} + c_{41} = 18$$

$$a_2^{(2)} = \min\{10+15, M, M, M\} = a_1^{(1)} + c_{12} = 25$$

$$a_3^{(2)} = \min\{M, 8+10, M, 8+15, 20+25\} = a_2^{(1)} + c_{23} = 18$$

$$a_4^{(2)} = \min\{M, M, 10+15, M, M\} = a_3^{(1)} + c_{34} = 25$$

$$a_5^{(2)} = \min\{10+30, M, 10+25, 8+20, M\} = a_4^{(1)} + c_{45} = 28$$



5.3. ábra. A mintapélda megoldása dinamikus programozással

Az utakhoz tartozó indexláncok:

$$a_1^{(2)} \rightarrow \{24, 41\}$$

$$a_2^{(2)} \rightarrow \{41, 12\}$$

$$a_3^{(2)} \rightarrow \{42, 23\}$$

$$a_4^{(2)} \rightarrow \{23, 34\}$$

$$a_5^{(2)} \rightarrow \{24, 45\}$$

A körutazási feltételt M -mel biztosítottuk, ahol az $a_i^{(1)}$ -hez tartozó indexláncban szerepelt a j . Például a második fázisban a 2-es pontba a 3-as ponton keresztül nem lehet men-

ni, mivel az első fázisban a 3-ba vezető legrövidebb út a 2-ből indul. Ez egyrészt az $a_3^{(1)}$ -hez tartozó indexláncból $\{23\}$ derül ki, másrészt az 5.3. ábrán is látható. A körút záródását úgy akadályozzuk meg, hogy az $a_2^{(2)}$ sorában a 3-as ponton át a 2-be vezető út tiltott, azaz. M

3. fázis:

$$a_1^{(3)} = \min\{M, M, M, 25+10, 28+30\} = a_4^{(2)} + c_{41} = 35$$

$$a_2^{(3)} = \min\{M, M, M+10, M+8, M\} = M$$

$$a_3^{(3)} = \min\{M, 25+10, M, M, 28+25\} = a_2^{(2)} + c_{23} = 35$$

$$a_4^{(3)} = \min\{M, M, M, M, M\} = M$$

$$a_5^{(3)} = \min\{18+30, M, 18+25, 25+20, M\} = a_3^{(2)} + c_{35} = 43$$

Az utakhoz tartozó indexláncok:

$$a_1^{(3)} \rightarrow \{23, 34, 41\}$$

$$a_3^{(3)} \rightarrow \{41, 12, 23\}$$

$$a_5^{(3)} \rightarrow \{42, 23, 35\}$$

4. fázis:

$$a_1^{(4)} = \min\{M, M, M, M, 43+30\} = a_5^{(3)} + c_{51} = 73$$

$$a_2^{(4)} = M$$

$$a_3^{(4)} = \min\{M, M, M, M, M\} = M$$

$$a_4^{(4)} = M$$

$$a_5^{(4)} = \min\{35+30, M, 35+25, M, M\} = a_3^{(3)} + c_{35} = 60$$

Az utakhoz tartozó indexláncok:

$$a_1^{(4)} \rightarrow \{42, 23, 35, 51\}$$

$$a_5^{(4)} \rightarrow \{41, 12, 23, 35\}$$

A negyedik fázisban a 2-es és 4-es pontokba vezető utakat már nem kell vizsgálni, mivel az előző fázisban egyik ponton keresztül sem vezetett út sem a 2-be, sem a 4-be.

5. fázis:

Amint látható, két $n-1$ élt tartalmazó utat kaptunk, az első a P_4 csúcsból a P_1 -be vezet, ezért az

$$a_4^{(5)} = a_1^{(4)} + c_{14} = 73 + 10 = 83,$$

a körúthoz tartozó indexlánc:

$$\{42, 23, 35, 51, 14\}.$$

A második útból hasonlóan az

$$a_4^{(5)} = a_5^{(4)} + c_{54} = 60 + 20 = 80,$$

az indexlánc pedig:

$$\{41, 12, 23, 35, 54\}.$$

A két körút közül a második (az 5.3. ábrán vastagabb vonallal rajzolt élsorozat) a feladat

megoldása, amely megegyezik a *Little, Murty, Sweeney és Karel-féle* algoritmussal nyert körúttal.

5.3. Alkalmazások

A körutazási feladat szállítási hálózatokon, kommissiózó raktárakban stb. út problémák megoldására alkalmas, gyakran használják azonban ún. sorolási feladatokban az optimális műveleti sorrend meghatározására is. Az utóbbi esetben ismert a c_{ij} átváltsási idő, amely akkor áll elő, amikor az i -edik művelet után a j -ediket végezzük, további kikötés, hogy az n műveletet csak egyszer kell elvégezni.

5.2. példa: Egy vevő rendelése alapján egy raktárból 5 féle terméket kell kigyűjteni. Ismert a kommissiózóter (K) és a termékek tárolóhelyei (T_i) közötti, valamint a tárolóhelyek egymás közötti távolsága. A távolságok méterben kifejezve:

	K	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
K	-	100	150	120	160	90
T_1	100	-	40	50	90	30
T_2	150	40	-	60	40	20
T_3	120	50	60	-	20	70
T_4	160	90	40	20	-	90
T_5	90	30	20	70	90	-

Milyen sorrendben kell a termékeket kigyűjteni ahhoz, hogy a kommissiózás útvonala a legrövidebb legyen. Mekkora a legrövidebb út hossza? A feladatot oldjuk meg a szekvenciális optimálás módszerével.

5.3. példa: Egy sörgyárban a piaci igények felmérése alapján az elkövetkező időszakban 5 féle sört palackoznak. A palackozó gépsor átállítása az egyik sör palackozásáról a másikkra különböző időt igényel. Az átállítási idők percekben kifejezve a következők:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	-	100	50	60	90
S_2	90	-	80	50	60
S_3	50	80	-	70	50
S_4	60	70	60	-	80
S_5	70	40	80	40	-

Kérdés milyen sorrendben palackozzuk a söröket ahhoz, hogy az összes átállítási idő a legrövidebb legyen.

5.4. példa: Egy acél-hengerműben a megrendelések és a piaci igények ismeretében a következő negyedévben 5 féle hengerelt terméket gyártanak. A hengermű átszerelése az egyik termék gyártásáról a másikkra különböző időt igényel. Az átállítási idők órában kifejezve a következők:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
T_1	-	10	5	6	9
T_2	9	-	8	5	6
T_3	7	8	-	5	5
T_4	6	7	6	-	8
T_5	7	4	8	4	-

Kérdés milyen sorrendben gyártjuk a termékeket ahhoz, hogy az összes átállítási idő a legrövidebb legyen.

5.5. példa: Egy vevő rendelése alapján egy raktárból 5féle terméket kell kigyűjteni. Ismert a komissiózóter (K) és a termékek tárolóhelyei (T_i) közötti, valamint a tárolóhelyek egymás közötti távolsága. A távolságok méterben kifejezve:

	K	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
K	-	100	150	120	160	90
T_1	100	-	40	50	90	30
T_2	150	40	-	60	40	20
T_3	120	50	60	-	20	70
T_4	160	90	40	20	-	90
T_5	90	30	20	70	90	-

Milyen sorrendben kell a termékeket kigyűjteni ahhoz, hogy a komissiózás útvonala a legrövidebb legyen. Mekkora a legrövidebb út hossza?

A körutazási feladat a szállításszervezési problémákban önmagában elég ritkán fordul elő. Általában valamely komplex probléma részletei fogalmazhatók meg az ismert modell formájában. Ennek érzékeltetésére tekintsük a következő gyakorlati problémát.

5.6. példa: Egy tejipari vállalat az ellátási körzetébe tartozó fogyasztókat üzeméből és hűtőtárolóiból látja el. A feladat olyan szállítási rendszer kialakítása, amely a tejtermékek kiszállítását minimális költséggel valósítja meg. Ismertek az üzemek, a hűtőtárolók kapacitásai és a vevők igényei, valamint az ezeket összekötő útvonalak távolságai. Adott a kiszállítást végző tehergépkocsi száma és teherbírása.

5.2. táblázat

Távolságmátrix a körutazási feladathoz

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
P_1	M	3,2	6,8	6,6	7,0	7,8	7,7	9,8	11,8	10,7	11,0	12,1
P_2	3,2	M	3,6	3,4	3,8	4,6	4,5	6,6	8,6	7,5	7,8	8,9
P_3	6,8	3,6	M	1,5	1,8	2,0	2,2	3,3	5,2	4,2	4,5	5,8
P_4	6,6	3,4	1,5	M	0,8	1,6	1,9	2,8	5,5	4,5	4,8	6,0
P_5	7,0	3,8	1,8	0,8	M	0,8	1,2	3,0	5,8	4,7	5,0	6,2
P_6	7,8	4,6	2,0	1,6	0,8	M	0,4	3,2	5,9	4,7	5,0	6,4
P_7	7,7	4,5	2,2	1,9	1,2	0,4	M	2,8	5,9	4,9	5,2	6,4
P_8	9,8	6,6	3,3	2,8	3,0	3,2	2,8	M	1,7	1,8	2,1	4,0
P_9	11,8	8,6	5,2	5,5	5,8	5,9	5,9	1,7	M	1,4	1,7	4,6
P_{10}	10,7	7,5	4,2	4,5	4,7	4,7	4,9	1,8	1,4	M	0,3	3,5
P_{11}	11,0	7,8	4,5	4,8	5,0	5,0	5,2	2,1	1,7	0,3	M	3,8
P_{12}	12,1	8,9	5,8	6,0	6,2	6,4	6,4	4,0	4,6	3,5	3,8	M

Ez a feladat három lépésben oldható meg. Az első lépésben a vevőket kell hozzárendelni az üzemekhez és a hűtőtárolókhoz. Gyakorlatilag ez egy olyan szállítási feladat megoldását jelenti, amelyben az üzemek és hűtőtárolók a feladók, a vevők pedig a megrendelők.

Feltételezve, hogy egy üzemből több tehergépkocsi látja el az üzemhez rendelt vevőket, a második lépés a vevők járatokba sorolása. E feladat során a tehergépkocsi kapacitásait, a szállítási távolságokat és a vevők igényeit is figyelembe kell venni. A problémát esetleg még az is bonyolíthatja, hogy a vevők igényei különböző időpontokban jelentkeznek. A legegyszerűbb megoldásnak az látszik, hogy egy-egy járatba lehetőleg az egymáshoz

legközelebb eső vevők tartozzanak. Természetesen ez esetben nem biztos, hogy a tehergépkocsikat a lehető legjobban használjuk ki.

A harmadik lépésben az egyes járatokba sorolt tehergépkocsik optimális útvonalait határozzuk meg, amely visszavezethető a körutazási feladatra. Az optimálást minden járatra külön kell elvégezni.

A járatok közül csak az egyiket mutatjuk be. A fuvardíj a szállítási távolság lineáris függvénye ezért az összes megtett utat kell minimalizálni. A vevők és az üzem közötti távolságok mátrixát térkép alapján határozták meg. A 12x12-es mátrix egy-egy eleme a legrövidebb utat jelenti az üzem és a vevők, illetve a vevők és a vevők között (5.2. táblázat). Mivel egyirányú utak a területen nincsenek, a mátrix szimmetrikus.

A feladatot a szekvenciális optimálás módszerével megoldva a következő körutakat kapjuk:

$$I=\{11-10-9-8-7-6-5-4-3-12-2-1-11\}, K=31,4 \text{ km},$$

$$I=\{11-10-9-8-7-6-5-4-2-1-3-12-11\}, K=31,2 \text{ km},$$

amelyek közül a második az optimális.

5.4. Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse a körutazási feladatban a hozzárendelési és a körutazási feltételeket és azok értelmezését!
2. Írja fel a körutazási feladat ILP modellként!
3. Ismertesse a korlátozás és szétválasztás elvét és alkalmazását a körutazási feladat megoldására! Mutassa be az alsókorlátot és a szétválasztási kritériumot!
4. Ismertesse a szekvenciális optimálás elvét, és a körutazási feladat megoldására alkalmas algoritmust!
5. Keressen a környezetében körutazási feladatként leírható gyakorlati problémákat!
6. Mit jelent a sorolási feladat?

Jegyzetek, kérdések

6. JÁRATSZERKESZTÉSI FELADATOK

A járat alatt a logisztikában általában a járművek meghatározott, több állomást érintő útvonalát értjük, ami lehet menetrendszerű vagy eseti. A járatok tervezésére irányuló tevékenységet pedig járatszerkesztésnek nevezzük. A járatszerkesztés célját és megoldási módját tekintve, a konkrét feladattól függően, nagyon sokféle lehet. Egyes esetekben az útvonalak adottak, és a menetrend összeállítása a feladat, más esetekben csak alkalmi optimális útvonalakat kell meghatározni, de gyakran fordul elő a két alapeset kombinációja is. A járatszerkesztésre ezért egységes megoldási módszer nem adható. Mindig a konkrét feladat ismeretében kell megkeresni vagy kifejleszteni azt az eljárást, amelyről megoldást remélhetünk.

Ebben a fejezetben két, gyakran előforduló problémával foglalkozunk. Az egyik a szállítójárművek, targoncák stb. üres futásának minimalizálása, a másik a központi telephelyről indított, korlátozott számú és kapacitású járművek útvonalának optimalizálása.

6.1. Járatszerkesztés az üres menetek költségének minimalizálásával

Az üres menetek költségének a minimalizálásán alapuló járatszerkesztési probléma modelljét és algoritmusát az ATUKI megbízásából *Krekó Béla* és *Szántó Emil* dolgozta ki [91]. E helyen az algoritmus továbbfejlesztett változatát mutatjuk be [11].

Ez a sajátos probléma általában több telephellyel rendelkező üzemben merülhet fel, amikor olyan járatokat kell tervezni, amelyek a telephelyeket a szükséges gyakorisággal érintik és egyúttal a legrövidebbek is. A gyakorlatban sokféle módon megfogalmazható feladat alapmodellje a következő:

Adott n számú állomás $A_1, A_2, \dots, A_n$. Az állomások egyidejűleg egyaránt lehetnek feladók és megrendelők. A j -edik állomás, mint megrendelő y_{ij} számú rakományt igényel az i -edik feladótól. Ezen kívül ismeretes az állomások közötti szállítási távolság vagy a fajlagos szállítási költség (c_{ij}).

A cél olyan útvonal megtervezése, amely a lehető legkevesebb üres futás mellett biztosítja, hogy a feladó állomásokról az áru a megrendelő állomásokra kerüljön. Könnyen belátható, hogy a kitűzött célt akkor érjük el, ha az üres meneteket úgy osztjuk el az egyes szállítási viszonylatokra, hogy az x_{ij} üres menetek száma és a c_{ij} fajlagos szállítási költségek szorzatainak összege minimális, azaz

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min.$$

Az elmondottakból az is kiderül, hogy ha valamennyi állomáson azonos a megrendelt és feladott rakományok száma, akkor nincs üres menet, és a feladatnak nincs értelme. A legkedvezőtlenebb esetben viszont minden rakott menetet üres menet követ.

A feladat ma már klasszikusnak tekinthető megoldása két lépésből áll. A feladatot szállítási problémaként kezelve, az első lépésben az üres meneteket programozzuk. A második lépés a járatkapcsolás, vagyis az üres és a rakott menetek valamilyen előírás szerinti összekötése.

A klasszikus módszer szerint az első lépésben egy olyan szállítási feladatot kell megoldani, amelyben a készletek a feladóhelyekről indított, az igények pedig a megrendelőhelyekre érkező járatoknak felelnek meg. A költségmátrix főátlójában csak 0 elemek szere-

pelnek, így a megoldás során a rakott menetek a főátlóra kerülnek. A főátlón kívüli relációkra programozott menetek az üres menetek számát adják, amelyek a mátrix transzponálásával kerülnek a tényleges helyükre. Ezután a járatkapcsoláshoz szükséges ún. munkamátrixot a rakott és az üres menetek mátrixának egymásra illesztésével kapjuk meg.

A továbbiakban az ismertetett eljáráshoz hasonló, de kevesebb számítást igénylő algoritmust mutatunk be [11]. Tekintsük először az algoritmust:

$$(6.1) \quad y_{ij} \geq 0, x_{ij} \geq 0, (i = j = 1, 2, \dots, n)$$

$$(6.2) \quad d_k = \sum_{j=1}^n y_{kj} - \sum_{i=1}^n y_{ik}, (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$(6.3) \quad r_k = \begin{cases} d_k, & \text{ha } d_k > 0 \\ 0, & \text{ha } d_k \leq 0 \end{cases},$$

$$(6.4) \quad t_k = \begin{cases} |d_k|, & \text{ha } d_k < 0 \\ 0, & \text{ha } d_k \geq 0 \end{cases},$$

$$(6.5) \quad \sum_{j=1}^n x_{kj} = t_k,$$

$$(6.6) \quad \sum_{i=1}^n x_{ik} = r_k,$$

$$(6.7) \quad c_{ij} = M, \text{ ha } i = j,$$

$$(6.8) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

ahol:

n	az állomások száma,
y_{ij}	a rakott menetek száma az i - j relációban,
x_{ij}	az üres menetek száma az i - j relációban,
d_k	a k -adik állomásról indított és a k -adik állomásra érkező rakott menetek számának a különbsége,
t_k	a k -adik állomásról indított üres menetek száma,
r_k	a k -adik állomásra érkező üres menetek száma,
c_{ij}	a fajlagos szállítási költség.

Az algoritmust összehasonlítva az eredeti eljárással, az alapvető különbség az üres menetek számának meghatározásában mutatkozik, és mint látni fogjuk, ez lényegesen egyszerűsíti azok elosztását is.

Az algoritmus szerint először a (6.2), (6.3), (6.4) összefüggésekkel kiszámítjuk az üres menetek számát. A rakott menetek $\mathbf{Y}$ mátrixát soronként és oszloponként összegezzük, majd a k -adik sorösszegeből levonjuk a k -adik oszlop összegét. A d_k differenciák előjele a (6.3) és (6.4) feltételeknek megfelelően megmutatja, hogy az üres menetet a k -adik állomásról kell-e indítani, vagy a k -adik állomásra kell teljesíteni. A $d_k > 0$ azt jelenti, hogy a k -adik állomásról több rakott menetet indítanak, mint amennyi oda érkezik. Értelemszerűen ezért a k -adik állomásra $r_k = d_k$ alkalommal kell üresen menni. Ha a $d_k < 0$, akkor fordított a helyzet, és a k -adik állomásról $t_k = |d_k|$ alkalommal üresen kell indítania járatot. A $d_k = 0$ esetben magától értetődően nincs üres járat, vagyis $r_k = t_k = 0$.

Az üres menetek számának meghatározása után valamelyik ismert algoritmussal megoldjuk az (6.5), (6.6), (6.7) feltételeket, és a (6.8) célfüggvényt kielégítő szállítási feladatot. A továbbfejlesztett eljárás előnye itt domborodik ki, mivel a **C** költségmátrix azon sorait, illetve oszlopait, ahol $t_k=0$, illetve $r_k=0$, elhagyhatjuk. Így az eredetinel jóval kisebb méretű szállítási feladatot kell megoldani. A legkedvezőtlenebb esetben is n -ről $n/2$ -re csökken a költségmátrix rendje.

Az ismertetett előnyök szemléltetésére tekintsünk egy, az irodalomból ismert példát [40], így az érdeklődő olvasónak alkalma nyílik a régi és az új eljárás idő- és számításgényének összehasonlítására.

Mintapélda: Egy üzemben öt munkahely, $P_1, P_2, \dots, P_5$ között a szállítást targoncával kívánjuk megoldani. Az üzemek között teljesítendő rakott menetek számát tartalmazó **Y** mátrix:

		H	o	v	a		
H		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Σy_{kj}
o	P_1	–	2	3	1	–	6
n	P_2	–	–	2	3	4	9
n	P_3	–	4	–	1	2	7
a	P_4	2	2	1	–	1	6
n	P_5	–	1	2	4	–	7
	Σy_{ik}	2	9	8	9	7	35

A fajlagos szállítási költségek mátrixa legyen a távolságmátrix, mivel a szállítási költség a távolság lineáris függvénye:

		H	o	v	a	
H		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
o	P_1	0	8	10	5	15
n	P_2	8	0	4	3	10
n	P_3	10	4	0	9	8
a	P_4	5	3	9	0	6
n	P_5	15	10	8	6	0

Képezzük a (6.2) összefüggéseknek megfelelő különbségeket, és határozzuk meg a (6.3), (6.4) feltételek alapján az elosztandó üres meneteket:

$d_1=4$	$r_1=4$	$t_1=0$
$d_2=0$	$r_2=0$	$t_2=0$
$d_3=-1$	$r_3=0$	$t_3=1$
$d_4=-3$	$r_4=0$	$t_4=3$
$d_5=0$	$r_5=0$	$t_5=0$

Ezután azokat a sorokat és oszlopokat elhagyva, ahol $t_k=0$, illetve $r_k=0$, írjuk fel a szállítási feladat induló tábláját:

		H	o	v	a		
H		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	t_k
o	P_1						
n	P_2						
n	P_3	10^1					1
a	P_4	5^3					3
n	P_5						
	r_k	4					

Amint látható a szállítási feladat egy 2×1 -es mátrixra redukálódott, amelynek megoldását az indulótáblában azonnal feltüntettük:

$$x_{31}=1, x_{41}=3.$$

Az üres menetek költsége:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = 25$$

A járatkapcsoláshoz szükséges munkamátrixot a rakott és üres menetek mátrixainak összegzésével nyerjük: $\mathbf{Y}' = \mathbf{Y} + \mathbf{X}$

		<i>H</i>	<i>o</i>	<i>v</i>	<i>a</i>	
<i>H</i>		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
<i>o</i>	P_1	-	2	3	1	-
<i>n</i>	P_2	-	-	2	3	4
<i>n</i>	P_3	1	4	-	1	2
<i>a</i>	P_4	5	2	1	-	1
<i>n</i>	P_5	-	1	2	4	-

A szállítás összes költsége:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} (y_{ij} + x_{ij}) = 255,$$

amelyből 25 egység az üres menetek költsége.

A járatkapcsolás intuitív feladat, amelyben különböző korlátozó feltételeket is figyelembe lehet venni. Például, ha korlátozott a járművek által naponta megtehető távolságegységek száma, akkor a szállítást több járművel kell megoldani. Esetünkben egy targonca naponta 54 távolságegységet képes teljesíteni, így a feladatot 5 targoncával tudjuk elvégezni.

		<i>H</i>	<i>o</i>	<i>v</i>	<i>a</i>		
<i>H</i>		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
<i>o</i>	P_1	-	2	3	2	1	-
<i>n</i>	P_2	-	-	2	3	4	3
<i>n</i>	P_3	1	4	-	1	2	
<i>a</i>	P_4	5	2	1	-	1	
<i>n</i>	P_5	-	1	2	4	-	

Indítsuk az I. jelű targoncát a P_1 üzemből a P_3 -ba, ezt egy vízszintes és egy függőleges szakasszal jelöljük, miközben az y'_{13} értékét 3-ról 2-re csökkentjük. Ezzel 1 rakott menetet teljesítettünk a P_1 -ből a P_3 -ba. A targonca által megtett út:

$$s_1 = c_{13} = 10.$$

Ezt követően irányítsuk a targoncát a P_3 -ból P_2 -be, amit ismét egy vízszintes és egy függőleges szakasszal jelölünk. Elvégezve az előző műveleteket:

$$y'_{32} = 4 - 1 = 3,$$

$$s_1 = s_1 + c_{32} = 10 + 4 = 14.$$

A továbbiakban a műveleteket nem részletezve, a bemutatott módon addig kötjük össze az üzemeket, amíg a targonca által megtehető 54 távolságegységet el nem érjük. Ezután kijelöljük a II., III. stb. targoncák útvonalait.

6.1. táblázat

Targonca	Útvonal	Távolság
I	$P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_5 \rightarrow P_4 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_4 \Rightarrow P_1$	51
II	$P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_5 \rightarrow P_4 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_4 \Rightarrow P_1$	51
III	$P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_5 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_5 \rightarrow P_4$	54
IV	$P_4 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_3 \rightarrow P_5 \rightarrow P_4 \Rightarrow P_1 \rightarrow P_4$	49
V	$P_4 \rightarrow P_2 \rightarrow P_5 \rightarrow P_2 \rightarrow P_4 \rightarrow P_5 \rightarrow P_3 \Rightarrow P_1$	50
Összesen		255

A végső megoldást a 6.1. táblázatban foglaltuk össze, ahol a $\rightarrow$ jellel a rakott, a $\Rightarrow$ jellel pedig az üres meneteket jelöltük.

6.2. Járműkapacitással korlátozott egycentrumos járatszerkesztés

Az elosztási vagy felvásárlási tevékenységet folytató vállalatoknál, raktári bázisokon stb. gyakori feladat a járművek menetrendjének, útvonalának kijelölése. A probléma nagyon sokféle formában jelentkezhet, de az egyik leggyakoribb eset az, amikor a vállalatnak egy központi helyről, a centrumból kell ellátnia a fogyasztókat vagy megrendelőket, és az igényeinek kielégítésére a vállalat véges számú, valamint véges kapacitású járműparkkal rendelkezik.

A feladat megoldásának legegyszerűbb módja az, hogy minden fogyasztóhoz egyedi járművel szállítjuk ki a megrendelt mennyiséget. A megrendelt mennyiségek azonban általában nem kötik le a járművek kapacitását, ami lehetővé teszi az utak összevonását, ún. járatok szervezését. Természetesen az összevonások csak bizonyos megszorítások mellett eszközölhetők, így:

- a megrendelők igényét a célállomásokon maradéktalanul ki kell elégíteni,
- a szállított mennyiség nem lépheti túl a járáshoz rendelt jármű kapacitását,
- a jármű által megtett út vagy a szállítási idő nem léphet túl egy előre meghatározott megengedett értéket.

Tekintve, hogy az utak összevonására általában nagyon sokféle lehetőség van, felvetődik a kérdés, található-e az intuitív döntéseknél jobb, az optimálishoz közel álló megoldás. Az irodalomból számos heurisztikus algoritmus ismert a feladat megoldására. Az utóbbi években elsősorban a genetikus algoritmusok alkalmazása vált népszerűvé. A továbbiakban két, a klasszikus megoldások közé sorolható, kézi számolásra és programozásra egy-

aránt alkalmas algoritmust ismertetünk, amelyek lépéseit ugyanazon a mintapéldán mutatjuk be, majd az eredményeket általánosítva összefoglaljuk az eljárásokat [21], [26].

Mintapélda: Legyen adott egy debreceni székhelyű vállalat, P_0 , amelynek Debrecenből kell az ország különböző pontjaira (Budapest, Győr stb.) települt $P_1, P_2, \dots, P_n$ fogyasztókhoz meghatározott $r_1, r_2, \dots, r_n$ mennyiségű terméket eljuttatnia. A fogyasztókat, telep-helyeiket és az igényeiket az 6.2. táblázat tartalmazza.

A vállalat 7 tehergépkocsival rendelkezik, a járműpark összetételét a 6.3. táblázatban foglaltuk össze.

6.2. táblázat

Megrendelések

Fogyasztó	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
Telephely	Budapest	Győr	Miskolc	Nyíregyháza	Szombathely	Zalaegerszeg
r_i [t]	4	3	4	2	3	2

6.3. táblázat

Járműpark

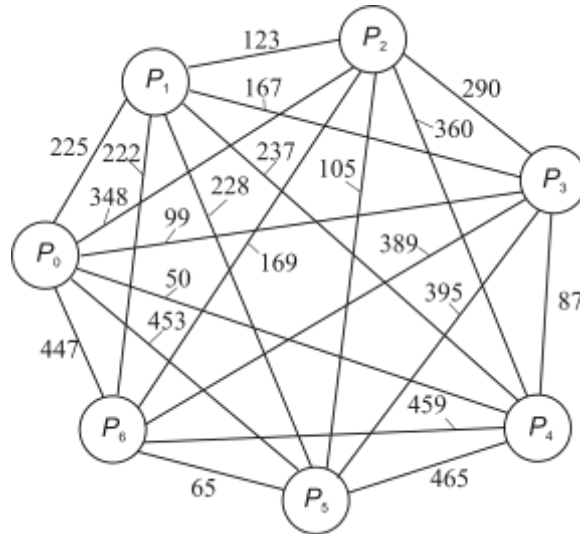
Teherbírás [t]	Darabszám
10	2
6	5

6.4. táblázat

Távolsági mátrix [km]

	Debrecen P_0	Budapest P_1	Győr P_2	Miskolc P_3	Nyíregyháza P_4	Szombathely P_5	Zalaegerszeg P_6
Debrecen P_0	0	225	348	99	50	453	447
Budapest P_1	225	0	123	167	237	228	222
Győr P_2	348	123	0	290	360	105	169
Miskolc P_3	99	167	290	0	87	395	389
Nyíregyháza P_4	50	237	360	87	0	465	459
Szombathely P_5	453	228	105	395	465	0	65
Zalaegerszeg P_6	447	222	169	389	459	65	0

Ismeretesek továbbá a P_0 centrum és a $P_1, P_2, \dots, P_n$ célállomások közötti legrövidebb utak c_{0j} , c_{i0} , és c_{ij} (6.4. táblázat). Az állomások és az utak egy $G(P, E)$ gráfot alkotnak (6.1. ábra), ahol a P az állomások és az E a c_{ij} költségű az élek halmaza. A feladat a megrendelt mennyiségek kiszállítása a centrumból a fogyasztókhoz a rendelkezésre álló járműpark felhasználásával úgy, hogy a járművek által megtett összes út a lehető legrövidebb legyen. A járművek által megtehető utat és a szállítási időt illetően nem élünk megszorításokkal, ami azonban az eljárás lényegét nem érinti. Az összevonások szempontjából csak a járművek kapacitása jelentsen korlátot.

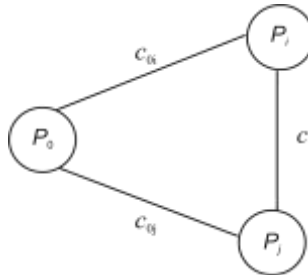


6.1. ábra. Az elosztási hálózatot ábrázoló gráf

A javasolt megoldás alapja az a triviális tény, hogy az utak összevonása a gyakorlatban általában útmegtakarítást eredményez, ami a 6.2. ábra alapján nagyon egyszerűen belátható. Ha a $P_0-P_i-P_0$ és a $P_0-P_j-P_0$ utakat egyesítjük $P_0-P_i-P_j-P_0$ járattá, akkor az elérhető megtakarítás:

$$s_{ij} = 2c_{0i} + 2c_{0j} - (c_{0i} + c_{ij} + c_{0j}) = c_{0i} + c_{0j} - c_{ij}.$$

Az is világos, hogy minél nagyobb az adott járatához rendelt jármű kapacitása, annál több út összevonására van lehetőség. Ezért a járatok szervezésekor a nagyobb járműveknek prioritást kell biztosítani.



6.2. ábra. Az útösszevonásokkal elérhető útmegtakarítás

Természetesen indokoltan vetődhet fel a kérdés, hogy az útmegtakarítás minden esetben költségmegtakarítást jelent-e. A kérdés indoka egyrészt az hogy, az utak összevonása szállítási-munka (tkm) növekedéssel járhat, másrészt a nagyobb kapacitású járművek fajlagos üzemeltetési költsége általában nagyobb, mint a kisebbeké. Mégis a kérdésre egyértelmű igennel válaszolhatunk. A szállítási munkaigény növekedése ugyanis nem jelent számottevő költség-növekedést, mivel a terhelt és a terheletlen jármű költsége között nincs lényeges különbség. A nagyobb és a kisebb teherbírású járművek fajlagos üzemeltetési költségében mutatkozó eltérés pedig nem tartozik e feladat lényegéhez, tekintve, hogy e feladatban meglévő jármű állományt kell optimálisan kihasználni. Más kérdés az, ha a járműállomány összetételéről kell dönteni, akkor magától értetődően mérlegelni kell a fajlagos költségeket is.

A gyakorlatban előfordulhat, hogy egy-egy fogyasztó megrendelése meghaladja a legnagyobb jármű kapacitását. Ebben az esetben a fuvar megosztjuk két vagy több jármű között. Tekintettel arra, hogy az így telítendő járműveknél nincs további lehetőség út összevonásra, a telített járműveket nem vizsgáljuk, csak a megosztás utáni maradékokat kezeljük megrendelésként.

A megoldás első lépése az ún. **megtakarítási mátrix** felállítása, amelynek elemei az előzőek alapján azt mutatják, hogy mennyi idő vagy útmegtakarítás érhető el azzal, ha a $P_0-P_i-P_0$ és a $P_0-P_j-P_0$ utakat egyesítjük $P_0-P_i-P_j-P_0$. A teljes megtakarítási mátrixot a 6.5. táblázat tartalmazza, ami esetünkben egy szimmetrikus mátrix, de ennek a megoldás során nincs jelentősége. Például, a $P_0-P_1-P_0$ és a $P_0-P_2-P_0$ utak összevonásakor a P_2 sor és a P_1 oszlop metszéspontjában, a megtakarítás:

$$s_{21} = c_{01} + c_{02} - c_{21} = 225 + 348 - 123 = 450.$$

6.5. táblázat

Megtakarítási mátrix [km]

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	0	450	157	38	450	450
P_2	450	0	157	38	696	626
P_3	157	157	0	62	157	157
P_4	38	38	62	0	38	38
P_5	450	696	157	38	0	835
P_6	450	626	157	38	835	0

6.2.1 A klasszikus megoldás

A számításokat a szemléletesség és az érthetőség megkönnyítése érdekében két táblázatban végezzük. Az első tábla a megtakarítási mátrixot és a megrendelt mennyiségeket, a második $t_1, t_2, \dots, t_l$ terhelhetőség szerint csökkenő sorba rendezett a $J_1, J_2, \dots, J_l$ járműveket és m_k terhelésüket tartalmazza. Az induló táblák a 6.6/a és a 6.6/b táblázatok.

1. lépés

Megkeressük az s_{ij} mátrix (6.6/a táblázat) legnagyobb elemét, ezt jelöljük s_{xy} -nal, azaz

$$s_{xy} = \max\{s_{ij} \mid i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n\}.$$

6.6/a táblázat

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	r_i
P_1	0	450	157	38	450	450	4
P_2	450	0	157	38	696	626	3
P_3	157	157	0	62	157	157	4
P_4	38	38	62	0	38	38	2
P_5	450	696	157	38	0	835	3
P_6	450	626	157	38	835	0	2

A második táblából (6.6/b táblázat) pedig kiválasztjuk az első járművet, ennek teherbírása-

sa t_k , majd megvizsgáljuk, hogy a jármű kapacitása lehetővé teszi-e a két út összevonását, azaz ha

$$r_x + r_y \leq t_k,$$

akkor az utak összevonhatók.

6.6/b táblázat

Jármű	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7
t_k [t]	10	10	6	6	6	6	6
m_k [t]	0	0	0	0	0	0	0

A példában az

$$s_{56} = s_{56} = \max\{s_{ij} | i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n\} = 835,$$

és az

$$r_5 + r_6 = 3 + 2 = 5 \leq t_1 = 10,$$

vagyis a P_0 - P_5 - P_0 és a P_0 - P_6 - P_0 utak P_0 - P_5 - P_6 - P_0 járatra egyesíthetők. Az elérhető útmegtakarítás 835 km. A P_5 és P_6 fogyasztók igényeit ezzel kielégítettnek tekinthetjük. Az s_{56} elem ismételt kiválasztását és a járat záródását úgy akadályozzuk meg, hogy az első táblában lefedjük az 5-dik sort és a 6-dik oszlopot, valamint az s_{65} elem helyére 0-t írunk. Ezzel egyidejűleg a r_5 és r_6 értékét csökkentsük 0-ra, a második táblában pedig a J_1 járművet megterheljük $r_5 + r_6 = 5$ -tel. Az adminisztrációk után a változásokat a 6.7/a és a 6.7/b táblázatok mutatják.

6.7/a táblázat

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	r_i
P_1	0	450	157	38	450	450	4
P_2	450	0	157	38	696	626	3
P_3	157	157	0	62	157	157	4
P_4	38	38	62	0	38	38	2
P_5	450	696	157	38	0	835	0
P_6	450	626	157	38	0	0	0

6.7/b táblázat

Jármű	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7
t_k [t]	10	10	6	6	6	6	6
m_k [t]	5	0	0	0	0	0	0

2. lépés

Az összevonást követően, mivel a J_1 jármű még nem telített, a P_5 - P_6 járatot próbáljuk P_5 -be menő vagy P_6 -ból induló úttal bővíteni. Ezért maximális s_{ij} elemet keresünk a 6.7/a táblázat 6-dik sorában és az 5-dik oszlopában, miközben a lefedett elemeket figyelmen kívül hagyjuk:

$$\max\{s_{6j} | j=1,2,\dots,n\} = s_{62} = 626,$$

$$\max\{s_{i5} | i=1,2,\dots,n\} = s_{25} = 696.$$

Mivel $s_{25} > s_{62}$, továbbá az

$$r_2 + r_5 + r_6 = 3 + 3 + 2 = 8 \leq t_1 = 10,$$

ezért a P_5 - P_6 járatot előlről bővítjük. Az összevonás után az első járat állomásai P_0 - P_2 - P_5 - P_6 - P_0 lesznek. Az így elért összes megtakarítás:

$$s_{25} + s_{56} = 696 + 835 = 1531 \text{ km.}$$

Ezt követően az első táblában fedjük le a 2-dik sort és az 5-dik oszlopot, valamint az s_{62} elem helyére írunk 0-t. Ezzel egyidejűleg a r_2 értékét csökkentjük 0-ra, a második táblában pedig a J_1 jármű terhelését növeljük $r_2=3$ -mal. A változtatások eredményeként a 6.8/a és a 6.8/b táblázatokat kapjuk.

6.8/a táblázat

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	r_i
P_1	0	450	157	38	450	450	4
P_2	450	0	157	38	696	626	0
P_3	157	157	0	62	157	157	4
P_4	38	38	62	0	38	38	2
P_5	450	696	157	38	0	835	0
P_6	450	0	157	38	0	0	0

6.8/b táblázat

Jármű	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7
t_k [t]	10	10	6	6	6	6	6
m_k [t]	8	0	0	0	0	0	0

3. lépés

A következő lépésben kíséreljük meg a P_2 - P_5 - P_6 járatot P_2 -be menő vagy P_6 -ból induló úttal bővíteni. Most maximális s_{ij} elemet a 6.8/a táblázat 6-dik sorában és a 2-dik oszlopában keressük:

$$\max\{s_{6j} | j=1,2,\dots,n\} = s_{61} = 450,$$

$$\max\{s_{i2} | i=1,2,\dots,n\} = s_{12} = 450.$$

6.9/a táblázat

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	r_i
P_1	0	450	157	38	450	450	4
P_2	450	0	157	38	696	626	0
P_3	157	157	0	62	157	157	4
P_4	38	38	62	0	38	38	2
P_5	450	696	157	38	0	835	0
P_6	450	0	157	38	0	0	0

Az P_1 állomás egyaránt kapcsolható lenne P_2 elé vagy P_6 mögé, ha ezt a J_1 jármű teherbírása lehetővé tenné. Mivel azonban az

$$r_1 + r_2 + r_5 + r_6 = 4 + 3 + 3 + 2 = 12 > t_1 = 10,$$

az összevonás nem lehetséges. A P_2 - P_5 - P_6 járatot ezért lezárjuk, amit az első táblában a 6-dik sor és a 2-dik oszlop, a második táblában pedig az első oszlop lefedésével jelzünk (6.9/a és 6.9/b táblázatok).

6.9/b táblázat

Jármű	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7
t_k [t]	10	10	6	6	6	6	6
m_k [t]	8	0	0	0	0	0	0

Az első járat így véglegesen kialakult: P_0 - P_2 - P_5 - P_6 - P_0 , és az elért útmegtakarítás 1531 km.

4. lépés

A második járat indításához ismét megkeressük az s_{ij} mátrix fedetlen elemei között a legnagyobb (6.9/a táblázat), a második táblából pedig kiválasztjuk a második járművet (6.9/b táblázat):

$$s_{3y} = s_{13} = \max\{s_{ij} | i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n\} = 157,$$

és az

$$r_1 + r_3 = 4 + 4 = 8 \leq t_2 = 10.$$

Elvégezzük a szokásos adminisztrációt: az első táblában lefedjük az első sort és a harmadik oszlopot, az s_{31} elem helyére 0-t írunk, a r_1 és r_3 értékét 0-ra csökkentjük (6.10/a táblázat), a második táblában a J_2 jármű terhelését $r_1 + r_3 = 8$ -cal növeljük (6.10/b táblázat). A megtakarítás: 157 km.

6.10/a táblázat

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	r_i
P_1	0	450	157	38	450	450	0
P_2	450	0	157	38	696	626	0
P_3	0	157	0	62	157	157	0
P_4	38	38	62	0	38	38	2
P_5	450	696	157	38	0	835	0
P_6	450	0	157	38	0	0	0

6.10/b táblázat

Jármű	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7
t_k [t]	10	10	6	6	6	6	6
m_k [t]	8	8	0	0	0	0	0

5. lépés

A P_1 - P_3 járatot próbáljuk meg P_1 -be menő vagy P_3 -ból induló úttal bővíteni. Ezért maximális s_{ij} elemet keresünk a 6.10/a táblázat harmadik sorában és az első oszlopában:

$$\max\{s_{3j} | j=1,2,\dots,n\} = s_{34} = 62,$$

$$\max\{s_{i1} | i=1,2,\dots,n\} = s_{41} = 38.$$

Mivel $s_{34} > s_{41}$, továbbá az

$$r_1 + r_3 + r_4 = 4 + 4 + 2 = 10 = t_2 = 10,$$

ezért a P_1 - P_3 járatot hátulról bővítjük. Az összevonás után a második járat által érintett pontok P_0 - P_1 - P_3 - P_4 - P_0 lesznek. Az első táblában lefedjük az 3-dik sort és az 4-dik oszlopot, az s_{41} elem helyére 0-t írunk, valamint a r_4 értékét 0-ra csökkentjük (6.11/a táblázat). A második táblában pedig az J_2 jármű terhelését növeljük $r_4=2$ -vel (6.11/b táblázat). A második járatnál elért útmegtakarítás:

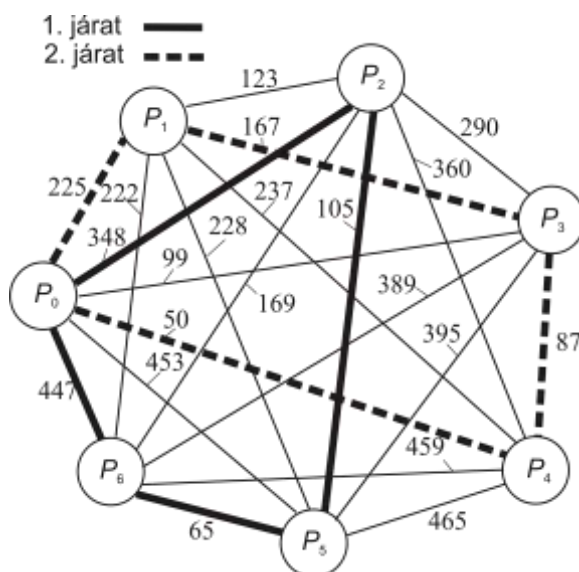
$$s_{13} + s_{34} = 157 + 62 = 219 \text{ km.}$$

6.11/a táblázat

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	r_i
P_1	0	450	157	38	450	450	0
P_2	450	0	157	38	696	626	0
P_3	0	157	0	62	157	157	0
P_4	0	38	62	0	38	38	0
P_5	450	696	157	38	0	835	0
P_6	450	0	157	38	0	0	0

6.11/b táblázat

Jármű	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7
t_k [t]	10	10	6	6	6	6	6
m_k [t]	8	10	0	0	0	0	0



6.3. ábra. A mintapélda megoldása

További összevonásra már nincs lehetőség. A szállítást a leggazdaságosabban a két járat-tal, 10 t teherbírású járművekkel lehet lebonyolítani. A járatok által érintett pontok:

$$P_0 - P_2 - P_5 - P_6 - P_0,$$

$$P_0-P_1-P_3-P_4-P_0.$$

Az összes útmegtakarítás: $1531+219 = 1750$ km. A járatok útvonalait grafikusán a 6.3. ábra szemlélteti. A megtett utak:

$$s_1=348+105+65+447=965 \text{ km,}$$

$$s_2=225+167+87+50=529 \text{ km.}$$

6. lépés

A járatok útvonalai körutakat alkotnak, és a körutak élein szállított mennyiségek különböznek. Egy élhez tartozó szállítási munka az élhosszsúság és az élen szállított mennyiség szorzata:

$$W_{ij} = c_{ij} \cdot q_{ij},$$

ahol: c_{ij} az i -edik és a j -edik pont közötti távolság, q_{ij} pedig az ij élen szállított mennyiség.

Könnyen belátható, hogy az éleken szállított mennyiségek nagysága, és így a szállítási munka nemcsak az útösszevonások, hanem a körút bejárési sorrendjének is függvénye. Például, ha a második járatnál az eredményként kapott bejárési sorrendet ($P_0-P_1-P_3-P_4-P_0$) követjük, akkor az összes szállítási munka:

$$W = c_{01} \cdot q_{01} + c_{13} \cdot q_{13} + c_{34} \cdot q_{34} + c_{40} \cdot q_{40} = 225 \cdot 10 + 167 \cdot 6 + 87 \cdot 2 + 50 \cdot 0 = 3426 \text{ tkm.}$$

Ha megfordítjuk a bejárési sorrendet, azaz a $P_0-P_4-P_3-P_1-P_0$ útvonalat követjük, akkor a következő eredményt kapjuk:

$$W = c_{04} \cdot q_{04} + c_{43} \cdot q_{43} + c_{31} \cdot q_{31} + c_{10} \cdot q_{10} = 50 \cdot 10 + 87 \cdot 8 + 167 \cdot 4 + 225 \cdot 0 = 1864 \text{ tkm,}$$

ami lényeges eltérést mutat a második bejárési sorrend javára. Ezért minden esetben meg kell vizsgálni, hogy a szállítási munka szempontjából melyik bejárési sorrend ad kedvezőbb megoldást.

Az első járat vizsgálata arra az eredményre vezet, hogy az eredeti bejárési sorrendhez ($P_0-P_2-P_5-P_6-P_0$) tartozó összes szállítási munka 3439 tkm kisebb, mint a fordított sorrendhez ($P_0-P_6-P_5-P_2-P_0$) tartozó, ami 4281 tkm. A járatok optimális bejárési sorrendje tehát:

$$P_0-P_2-P_5-P_6-P_0,$$

$$P_0-P_4-P_3-P_1-P_0.$$

Az algoritmus leírása

A mintapélda megoldása után fogalmazzuk meg kicsit általánosabban a problémát és foglaljuk össze az algoritmust.

A szállítási pontokat (a centrumot és a fogyasztókat) szimbolizálja a $G=(P,E)$ irányítatlan gráf, amely a P szállítási pontok és az E élek halmazából áll. A P halmaz elemeit jelölje p_i ($i=0,1,2,\dots,n$), az E halmaz elemeit pedig e_{ij} ($i=j=0,1,2,\dots,n$). Ha a p_i össze van kötve p_j -vel, akkor $e_{ij}=1$, különben $e_{ij}=0$. Az e_{ij} -hez rendelt távolsági mátrix c_{ij} elemei jelentsék a szállítási pontok közötti legrövidebb utakat. Ha $e_{ij}=0$, akkor $c_{ij}=M$, ahol M végtelen nagy szám. A P halmaz p_i elemeihez rendeljük a megrendelésvektor r_i elemeit. Megállapodás szerint p_0 jelentse a centrumot.

Legyen J a rendelkezésre álló járművek halmaza, amelynek minden j_k ($k=1,2,\dots,l$) ele-

méhez hozzárendeljük a járműveket jellemző t_k teherbírás- és az m_k terhelésvektorokat.

1. Rendezzük a J halmazt a t_k teherbírás szerint csökkenő sorrendbe.
2. A kapacitáskorlát miatt összevonásra alkalmatlan utakat a vizsgálatból kivonjuk. Ehhez képezzük a $r_i^{(u)} / t_k$ hányadosokat minden $i > 0$ -ra és k -ra. Ha a

$$r_i^{(u)} / t_k > 1 \text{ és } m_k = 0,$$

akkor a

$$r_i^{(u+1)} := r_i^{(u)} - t_k \text{ és } m_k := t_k,$$

és vesszük a következő járművet, vagyis a k index értékét növeljük eggyel. Ha

$$r_i^{(u)} / t_k < 1,$$

akkor vesszük a következő megrendelőt, azaz az i értékét növeljük eggyel. A 2. lépést addig ismételjük, amíg a $r_i^{(u)} / t_k > 1$. (A felső indexben az u a ciklusváltozó.) Végül azokat a szállítási pontokat, ahol $r_i = 0$ elhagyjuk, illetve az elhagyott pontoknak megfelelő sorokat és oszlopokat a c_{ij} mátrixból töröljük.

3. Az új c_{ij} távolsági mátrixból az

$$s_{ij} = c_{0i} + c_{0j} - c_{ij}, \text{ ha az } e_{ij} = 1,$$

illetve az

$$s_{ij} = 0, \text{ ha az } e_{ij} = 0$$

képletekkel kiszámítjuk az s_{ij} megtakarítási mátrix elemeit.

4. Az s_{ij} mátrix fedetlen elemei között megkeressük a legnagyobbat:

$$s_y = \max\{s_{ij} | i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Ha találtunk 0-nál nagyobb elemet, akkor az 5. lépéssel folytatjuk, különben az eljárás befejeződött.

5. A rendezett J halmazból vegyük a következő j_k járművet, amelynél $m_k = 0$, és megvizsgáljuk a $p_0 - p_x - p_0$ és a $p_0 - p_y - p_0$ utak összevonásának lehetőségét:

Ha a $r_x + r_y \leq t_k$, akkor az utak összevonhatók. Lefedjük az x -edik sort és az y -adik oszlopot, majd végrehajtjuk a következő változtatásokat:

$$m_k := r_x + r_y,$$

$$r_x := 0, r_y := 0, s_{yx} := 0,$$

és a 6. lépéssel folytatjuk.

Ha a $r_x + r_y \geq t_k$, akkor nincs lehetőség az utak összevonására. Lefedjük az y -adik oszlopot, majd végrehajtjuk a következő változtatásokat:

$$m_k := r_y,$$

$$r_y := 0,$$

és visszatérünk a 4. lépéshez.

6. A $p_x - p_y$ járatot megpróbáljuk p_x -be menő vagy p_y -ből induló úttal bővíteni. Ezért megkeressük az y -adik sor és az x -edik oszlop maximális elemeit, majd ezek közül először a nagyobbat választjuk:

$$\max\{s_{yj} | j=1,2,\dots,n\} = s_{yj^*},$$

$$\max\{s_{ix} | i=1,2,\dots,n\} = s_{i^*x}.$$

Ha az $s_{yj^*} \geq s_{i^*x}$, és a $t_k \geq m_k + r_{j^*}$, akkor a járatot hátulról, az y -ből induló és a j^* -ba menő úttal bővítjük. Lefedjük az y -adik sort és a j^* -edik oszlopot, majd

$$m_k := m_k + r_{j^*},$$

$$r_{j^*} := 0, r_{j^*x} := 0, y := j^*,$$

és megismételjük a 6. lépést.

Ha az $s_{yj^*} < s_{i^*x}$, és a $t_k \geq m_k + r_{i^*}$, akkor a járatot előlről, az i^* -ből induló és az x -be menő úttal bővítjük. Lefedjük az i^* -edik sort és a x -edik oszlopot, majd

$$m_k := m_k + r_{i^*},$$

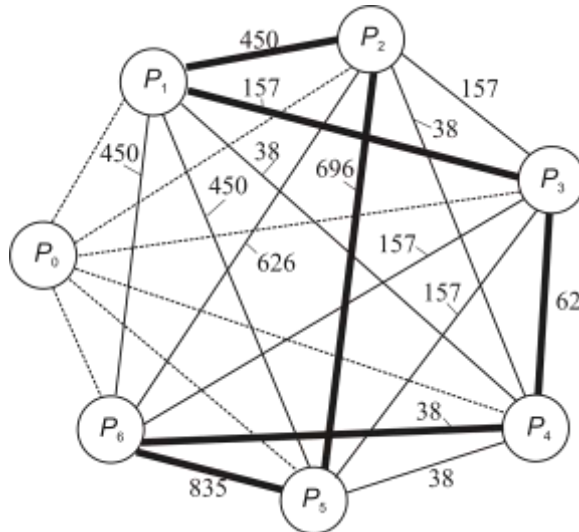
$$r_{i^*} := 0, s_{yi^*} := 0, x := i^*,$$

és megismételjük a 6. lépést.

Különben nincs lehetőség az útösszevonásra, ezért lezárjuk a járatot: lefedjük az y -adik sort és az x -edik oszlopot, majd visszatérünk a 4. lépéshez.

6.2.2. A megoldás visszavezetése maximális súlyú körutak keresésére

A mintapélda megoldásának első lépése ebben az algoritmusban is az ún. megtakarítási mátrix felállítása, ami a 6.5. táblázattal azonos [26]. A megtakarítási mátrixot ábrázolja az $M=(P^*,S)$ gráf (6.4. ábra), ahol az n elemű P^* a P részhalmaza, amely a P_0 pontot nem tartalmazza. Az S pedig az s_{ij} súlyú élek halmaza.



6.4. ábra. Az $M=(P^*,S)$ gráfon kijelölt $K=(P^*,S^*)$ maximális súlyú körút

A megoldás **második lépésében** kijelöljük a megtakarítási mátrixot (s_{ij}) ábrázoló $M=(P^*,S)$ gráfon a maximális súlyú körutat. A körutazási feladat megoldáshoz számos heurisztikus algoritmus áll rendelkezésre, és ezek közül kettő az 5. fejezetben található. A körutat szimbolizáló gráf $K=(P^*,S^*)$, ahol az S^* a körutat alkotó élek halmaza. A maximális súlyú körút éleinek súlyát a 6.12. táblázat tartalmazza, a körút vastag vonallal

kiemelt élei pedig a 6.4. ábrán láthatók. (A szaggatott vonallal rajzolt élek nem részei az S halmaznak.) A körút elemei:

$$P_1-P_3-P_4-P_6-P_5-P_2-P_1.$$

Ha rendelkezünk elegendően nagy kapacitású járművel, akkor megtehetjük azt is, hogy a körútból a legkisebb s_{ij} elemhez tartozó élet eltávolítjuk (P_4-P_6), és az így kapott ún. hamiltoni út végpontjaihoz (P_4 és P_6 pontok) kapcsoljuk a P_0 centrumot. Az eredmény egy új, maximális súlyú körút, amely a centrumból indul, valamennyi fogyasztó telepelyét egyszer érinti, majd visszatér a centrumba. Ebben az esetben egyetlen jármű (járat) látogatja meg a fogyasztóhelyeket.

6.12. táblázat

Maximális súlyú körút [km]

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1			157			
P_2	450					
P_3				62		
P_4						38
P_5		696				
P_6					835	

A járművekre előírt kapacitáskorlát (t_k) miatt azonban a $K=(P^*, S^*)$ körutat olyan, egy vagy több élt tartalmazó, maximális útmegtakarítást eredményező, utakra kell felbontani, amelyek eleget tesznek a kapacitáskorlátokra vonatkozó előírásoknak, azaz a

$$m_k = \sum_{u=1}^p r_u \leq t_k$$

feltételnek, ahol:

- ρ a k -adik járáttal felkeresett fogyasztók száma,
- r_u az u -adik fogyasztó igénye,
- m_k a k -adik járáttal kiszállított mennyiség,
- t_k a k -adik jármű kapacitása.

Végül a kijelölt utaknak a végpontjait összekötjük a centrummal, így maximális útmegtakarítást eredményező részkörutakat kapunk.

A **harmadik lépésben** a következő eljárással megszerkesztjük a járatokat, vagyis a fogyasztóhelyeket, illetve kiszállítandó mennyiségeket a járművekhez, illetve a járatokhoz rendeljük. Gyakorlatilag a maximális súlyú körutat a kapacitáskorlátoknak megfelelő utakra bontjuk.

6.13/a táblázat

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	r_i
P_1			157				4
P_2	450 ³						3
P_3				62			4
P_4						38	2
P_5		696 ³					3
P_6					835 ²		2

6.13/b táblázat

Jármű	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7
t_k [t]	10	10	6	6	6	6	6
m_k [t]	2+3+3	0	0	0	0	0	0

Az 6.12. táblázatot egészítsük ki a megrendelőpontokba szállítandó r_i mennyiségekkel (6.13/a táblázat), és a 6.13/b táblázatban tüntessük fel a $t_1, t_2, \dots, t_l$ terhelhetőség szerint csökkenő sorba rendezett $J_1, J_2, \dots, J_l$ járműveket és az m_k terhelésüket.

Indítsuk el az első 10 t teherbírású járművet (J_1), és a körúton irányítsuk a legnagyobb megtakarítást eredményező élre, azaz keressük meg a 6.13/a táblázatban a körút legnagyobb költségelemét. Ez a P_6-P_5 élhez tartozó $s_{65}=835$. Vizsgáljuk meg, hogy a J_1 járművel az 6. és 5. pontok összevont kiszolgálása megvalósítható-e. Ennek feltétele:

$$r_6 + r_5 \leq t_1.$$

Ha a kapacitáskorlátra vonatkozó feltétel nem teljesül, akkor nincs lehetőség a $P_0-P_6-P_0$ és a $P_0-P_5-P_0$ utak összevonására, és ebben az esetben a P_6 és a P_5 fogyasztók kiszolgálását nem lehet összevont járatba szervezni, a járatösszevonást elvetjük. A megtakarítási mátrixban az s_{65} és a s_{56} értékét 0-ra állítjuk, és új maximális súlyú körutat keresünk.

A példában azonban a kapacitáskorlátra vonatkozó feltétel teljesül, ezért a P_6-P_5 élre a 6. fogyasztóhoz szállítandó mennyiséget, $r_6=2$ tonnát, a P_5 ponthoz közvetlen kapcsolódó P_5-P_2 élre pedig az 5. fogyasztóhoz szállítandó $r_5=3$ t mennyiséget programozzuk. A programozott mennyiségeket a szállítási feladatok megoldásánál alkalmazott szintaxist követve a felső indexbe írjuk (6.13/a táblázat).

A programozással a 6. és az 5. pontok felkeresését összevontuk, és a P_6-P_5 élet hozzárendeltük az első járatához. Az összevonás eredményeként kialakult $P_0-P_6-P_5-P_0$ járatnál elérhető útmegtakarítás 835 km, és a J_1 jármű terhelése $m_1=2+3=5$ t, amit a 6.13/b táblázat második oszlopában tüntettünk fel. Ezt követően az 5. oszlopot és 6. sort lefedjük (inaktívvá tesszük), mivel az P_5 pontba a P_6 -ból vezet él, a P_6 pontból pedig már nem indulhat más él.

Az összevonást követően a J_1 jármű még nem telített, ezért próbáljuk meg a járatot bővíteni. A járat bővítést a körúton a P_6-P_5 élet megelőző P_4-P_6 , vagy követő P_5-P_2 élek bevonásával folytathatjuk. Azt az élet választjuk, amelyhez nagyobb s_{ij} érték tartozik, vagyis amelytől nagyobb megtakarítást remélhetünk, és amely eleget tesz a járműterhelési feltételnek is.

Mivel az

$$s_{52}=696 > s_{46}=38,$$

továbbá az

$$r_6 + r_5 + r_2 = 2 + 3 + 3 = 8 \leq 10,$$

a P_5-P_2 élet is a járatához adjuk, és a P_2 ponthoz kapcsolódó P_2-P_1 élre $r_2=3$ t mennyiséget programozunk. Fedjük le az 5. sort és a 2. oszlopot, mivel a P_2 pontba a $P_6-P_5-P_2$ él sorozat vezet (6.13/a táblázat). A kialakult járat élei: $P_0-P_6-P_5-P_2-P_0$, az útmegtakarítás $835+696=1531$ km, és a gépkocsi terhelése $m_1=2+3+3=8$ t (6.13/b táblázat).

Ezt követően kíséreljük meg a járatot a kapcsolódó, P_4-P_6 megelőző, vagy a P_2-P_1 követő élekkel bővíteni. Ismét a nagyobb útmegtakarítást eredményező élet választjuk,

$$s_{21}=450 > s_{46}=38,$$

és megvizsgáljuk, hogy a P_2-P_1 él hozzáadható-e a járathoz. Ennek feltétele:

$$r_6+r_5+r_2+r_1=2+3+3+4=12.$$

Tekintettel arra, hogy $r_6+r_5+r_2+r_1=2+3+3+4=12$, a kapacitáskorlátra vonatkozó feltétel nem teljesül, ezért a P_2-P_1 él járathoz szerkesztését elvetjük. Az első járatot ezért a P_2 pontnál lezárjuk. A lezárást követően a P_6 pontba már csak P_0 -ból és a P_2 pontból pedig már csak a P_0 -ba vezethet él, ezért lefedjük a 6. oszlopot és a 2. sort (6.13/a táblázat). Az első járat nem változik, az érintett pontok: $P_0-P_6-P_5-P_2-P_0$, a jármű terhelése $m_1=8$ t, és az elért megtakarítás:

$$s_{65}+s_{52}=835+696=1531 \text{ km.}$$

6.14. táblázat

	P_1	P_3	P_4
P_1	0	157	38
P_3	157	0	62
P_4	38	62	0

Az új, a második járat indítása előtt az 6.12. táblázatból hagyjuk el a 6.13/a táblázat lefedett sorait és oszlopaikat, majd így kapott maradék megtakarítási mátrixon (6.14. táblázat) kijelöljük a maximális súlyú körutat. Ennek eredményét mutatja a 6.15/a táblázat, amelynek utolsó oszlopába a megrendelőpontokba szállítandó r_i mennyiségeket is beírjuk.

6.15/a táblázat

	P_1	P_3	P_4	r_i
P_1		157 ⁴		4
P_3			62 ⁴	4
P_4	38 ²			2

6.15/b táblázat

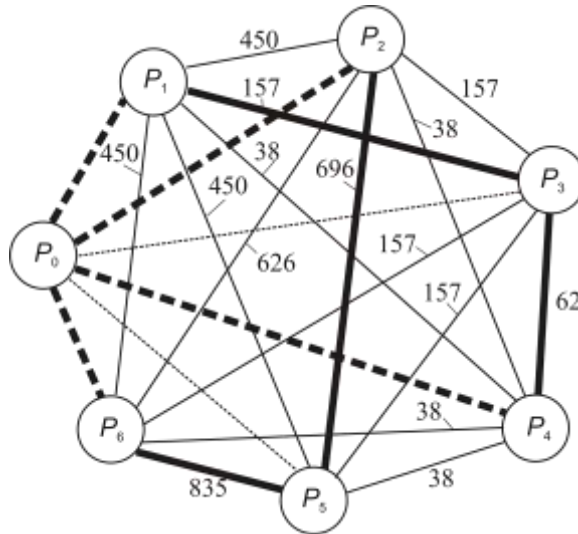
Jármű	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7
t_k [t]	10	10	6	6	6	6	6
m_k [t]	2+3+3	4+4+2	0	0	0	0	0

Vegyük a következő 10 tonnás járművet (J_2), és az előzőleg követett eljárást ismételjük meg az új körút még nem programozott fedetlen élein. Keressük meg a körút legnagyobb súlyú, még nem programozott, fedetlen élet, ez a P_1-P_3 , amelynek a súlya $s_{13}=157$ (6.15/a táblázat).

Mivel az

$$r_1+r_3=4+4\leq t_2=10,$$

a P_1-P_3 élre $r_1=4$ t és a P_3 ponthoz közvetlen kapcsolódó P_3-P_4 élre a 3. fogyasztóhoz szállítandó $r_3=4$ t mennyiséget programozunk, majd lefedjük le a P_1 sort és a P_3 oszlopot (6.15/a táblázat). Ezzel a 1. és az 3. pontok felkeresését összevontuk, és a P_1-P_3 élet hozzárendeltük a második járathoz. Az így kialakult $P_0-P_1-P_3-P_0$ járattal elérhető útmegtakarítás 157 km, és a J_2 jármű terhelése $m_2=4+4=8$ t lesz (6.15/b táblázat).



6.5. ábra. A mintapélda megoldása a szállítási hálózaton

A második járat bővítését a körút a P_1-P_3 , élet megelőző vagy követő, járatba még nem kapcsolt fedetlen éleivel folytathatjuk. A megelőző P_2-P_1 él már lefedett (a P_2 pontot az első járat már érintette), ezért csak az $s_{34}=62$ súlyú P_3-P_4 élet választhatjuk. Az él kapcsolásának feltétele:

$$r_1 + r_3 + r_4 = 4 + 4 + 2 \leq t_2 = 10$$

teljesül, ezért a P_3-P_4 élet hozzáadjuk a második járatához. A P_4 ponthoz közvetlen kapcsolódó, $s_{41}=38$ súlyú P_4-P_1 , élre $r_4=2$ t mennyiséget programozunk (6.15/a táblázat). A második járat $P_1-P_3-P_4$ éleinek megfelelően a 3. sort és az 4. oszlopot lefedjük. A második jármű terhelése így $r_1 + r_3 + r_4 = 4 + 4 + 2 = 10$ t, vagyis telítődött, ezért a P_4 pontnál a második járatot is lezárjuk, és egyidejűleg lefedjük a 4. sort. Értelemszerűen a P_4-P_1 él már nem része a második járatnak. A második járat által érintett pontok: $P_0-P_1-P_3-P_4-P_0$, a J_2 jármű terhelése $m_2 = 4 + 4 + 2 = 10$ t, és az elért megtakarítás:

$$s_{13} + s_{34} = 157 + 62 = 219 \text{ km.}$$

A kiszállítandó mennyiségeket a két járatra teljesen elosztottuk, így a feladat megoldása befejeződött. A szerkesztett járatok:

$$P_0-P_6-P_5-P_2-P_0 \text{ és } P_0-P_1-P_3-P_4-P_0.$$

Az összes útmegtakarítás azonos az előző eljárás eredményével: $1531 + 219 = 1750$ km. A megoldás grafikusán a 6.5. ábrán látható, ahol a vastagvonallal rajzolt élek szemléltetik a járatokat.

Az algoritmus leírása

Legyen $G=(P, E)$ egy összefüggő, irányítatlan gráf, ahol a P a fogyasztókat jelképező csomópontok $n+1$ elemű halmaza, az E pedig a csomópontokat összekötő élek halmaza. A P halmaz elemeit jelölje p_i ($i=0,1,2,\dots,n$), az E halmaz elemeit pedig e_{ij} ($i,j=0,1,2,\dots,n$). Ha a p_i össze van kötve p_j -vel, akkor $e_{ij}=1$, különben $e_{ij}=0$. A csomópontokhoz r_i mennyiségek (a fogyasztók igényei), E minden eleméhez pedig c_{ij} költségek tartoznak (ezek a távolságmátrix elemei).

Legyen J a rendelkezésre álló járművek halmaza, amelynek minden j_k ($k=1,2,\dots,l$) eleméhez hozzárendeljük a járműveket jellemző t_k teherbírás- és az m_k terhelésvektorokat.

1. A távolságmátrixból az

$$s_{ij} = c_{0i} + c_{0j} - c_{ij}, \text{ ha } e_{ij} = 1,$$

illetve az

$$s_{ij} = 0, \text{ ha az } e_{ij} = 0$$

képletekkel kiszámítjuk az s_{ij} megtakarítási mátrix elemeit, és azokat súlyként rendeljük az $M=(P^*,S)$ gráf S éleihez, amelyben a P^* a csomópontok (fogyasztók) n elemű halmaza.

2. Rendezzük a J halmazt a t_k teherbírás szerint csökkenő sorrendbe.

3. Az $M=(P^*,S)$ gráf aktív élein jelöljük ki a maximális súlyú körutat, ez legyen a $K=(P^*,S^*)$, ahol S^* a körutat alkotó k_{ij} élek n elemű halmaza, és a k_{ij} élek mindegyikéhez s_{ij} súlyok rendelvek.

4. A k -adik iterációban vegyük a k -adik üres járművet, amelynek teherbírása t_k .

5. Keressük meg a K körút aktív k_{ij} éleihez tartozó s_{ij} elemek közül a legnagyobbat

$$s_{\beta\gamma} = \max\{s_{ij}\}.$$

Ha nincs aktív k_{ij} él, akkor az eljárás végére értünk, különben a 6. lépéssel folytatjuk. Az él akkor aktív, ha az i -edik sor és a j -edik oszlop fedetlen.

6. Vizsgáljuk a kapacitáskorlátra vonatkozó $r_\beta + r_\gamma < t_k$ feltétel teljesülését.

Ha a feltétel teljesül, akkor a $k_{\beta\gamma}$ élre r_β , a $k_{\gamma\delta}$ élre r_γ mennyiséget programozunk, (ahol $k_{\gamma\delta}$ a γ ponthoz kapcsolódó él az K körúton), a $k_{\beta\gamma}$ élet a járáshoz adjuk. A k -adik jármű terhelését $m_k := r_\beta + r_\gamma$ -ra állítjuk, kiszámítjuk az útmegtakarítást: $s_k = s_{\beta\gamma}$, lefedjük a β sort és a γ oszlopot, majd az 5. lépéssel folytatjuk.

Különben a járatösszevonást elvetjük (ez azt jelenti, hogy a β és a γ fogyasztók kiszolgálását nem lehet összevont járatba szervezni). Legyen az

$$s_{\beta\gamma} := 0 \text{ és az } s_{\gamma\beta} := 0,$$

majd visszatérve a 3. lépéshez, új körutat keresünk.

7. Megvizsgáljuk a k -adik jármű telítettségét. Ha az $m_k < t_k$, akkor a járatot az K körút $k_{\beta\gamma}$ élét megelőző ($k_{\alpha\beta}$) vagy követő ($k_{\gamma\delta}$) éllel bővíthetjük, feltéve, hogy az él aktív, és a kapacitáskorlátra vonatkozó feltétel is teljesül.

Ha az

$$s_{\gamma\delta} > s_{\alpha\beta}, \text{ és az } r_\beta + r_\gamma + r_\delta \leq t_k,$$

akkor a $k_{\gamma\delta}$ élet hozzá vesszük a járáshoz, és a δ ponthoz kapcsolódó követő élre r_δ mennyiséget programozunk. A jármű terhelését r_δ mennyiséggel növeljük:

$$m_k := r_\beta + r_\gamma + r_\delta,$$

és kiszámítjuk az útmegtakarítást:

$$s_k^\xi := s_k^{\xi-1} + s_{\gamma\delta},$$

ahol ξ a 7. lépés ciklusváltozója. A $k_{\gamma\delta}$ élet inaktívvá tesszük, lefedjük a γ sort és a δ oszlopot.

Ha az

$$s_{\gamma\delta} < s_{\alpha\beta}, \text{ és az } r_\beta + r_\gamma + r_\alpha \leq t_k,$$

akkor a $k_{\alpha\beta}$ élet hozzá vesszük a járáshoz, és a β ponthoz kapcsolódó megelőző élre r_α mennyiséget programozunk. A jármű terhelését r_α mennyiséggel növeljük:

$$m_k := r_\beta + r_\gamma + r_\alpha,$$

és kiszámítjuk az útmegtakarítást:

$$s_k^\xi := s_k^{\xi-1} + s_{\alpha\beta},$$

lefedjük a α sort és a β oszlopot.

A 7. lépést addig ismételjük, amíg a kapacitáskorlátra vonatkozó feltétel teljesül. Az ismétlés előtt a ciklusváltozót növeljük: $\xi := \xi + 1$. Ha jármű telítődött, akkor $s_k := s_k^\xi$, és a 8. lépéssel folytatjuk.

8. A k -adik járatot lezárjuk, amelyben a felkeresett csomópontok ($u=1,2,\dots,p$), a szállított mennyiség

$$m_k := \sum_{u=1}^p r_u,$$

az elért útmegtakarítás s_k . Végül lefedjük a járat első csomópontjával azonos oszlopot és az utolsó csomópontjával azonos sort. A lefedett sorokban és oszlopokban az s_{ij} értékét 0-ra változtatjuk.

9. A ciklusváltozót növeljük $k := k + 1$, és visszatérünk a 3. lépéshez. (Új körutat keresünk!)

A mintapéldában a járatok szerkesztésekor csak a járművek kapacitáskorlátaait vettük figyelembe, de mint utaltunk rá annak sincs akadálya, hogy egyéb megszorításokat tegyünk, például, hogy a jármű által megtehető utat vagy időt a kapacitáskorláthoz hasonlóan az útösszevonás feltételeként vizsgáljuk. Az sem szorul különösebb magyarázatra, hogy az algoritmus nemcsak elosztási, hanem gyűjtőjáratok, továbbá személyszállítást végző autóbuszok járatainak szerkesztésére is alkalmas.

6.1. példa: Adott egy felvásárló vállalat (P_0), amelynek helyről P_1 - P_{10} kell meghatározott mennyiségű r_i árut begyűjtenie. A pontok közötti távolság [km]:

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
P_0	0	9	12	16	19	21	24	28	31	35	40
P_1	9	0	5	8	11	13	19	19	25	26	33
P_2	12	5	0	7	11	14	12	18	25	28	31
P_3	16	8	7	0	5	12	18	21	25	24	26
P_4	19	11	11	5	0	8	12	16	21	25	26
P_5	21	13	14	12	8	0	7	11	14	19	23
P_6	24	19	12	18	12	7	0	6	12	16	19
P_7	28	19	18	21	16	11	6	0	7	11	18
P_8	31	25	25	25	21	14	12	7	0	6	15
P_9	35	26	28	24	25	19	16	11	6	0	12
P_{10}	40	33	31	26	26	23	19	18	15	12	0

A vállalat 15 járművel rendelkezik, amelyek kapacitása a következő:

Kapacitás [m^3]	Darabszám
3	10
4	3
8	2

A feladó pontokról begyűjtendő árumennyiségek:

Feladó	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
r_i [m ³]	2	0,75	1	1,5	2	3	0,5	2	3	2

Határozzuk meg a beszállítási programot úgy, hogy az összes út minimális, a járművek kihasználása pedig maximális legyen.

6.3. Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse a járatszerkesztés alapfogalmait!
2. Mit jelent az üresmenetek költségének a minimalizálása, mikor alkalmazható ez a modell?
3. Ismertesse az üresmenetek költségét minimalizáló algoritmust!
4. Ismertesse az egycentrumos járatszerkesztés fogalmát és alkalmazási területeit!
5. Mutassa be a megtakarítási mátrixra alapozott kapacitáskorlátos járatszerkesztési algoritmust!
6. Hogyan vezethető vissza a kapacitáskorlátos járatszerkesztési feladat megoldása a maximális súlyú körutak keresésére?

Jegyzetek, kérdések

7. TELEPÍTÉSI ELMÉLET

A településtudományak, illetve a regionális tervezésnek egyik pillére a telepítési elmélet, amely az ember helyhez kötött közösségi tevékenységeinek (termelés, fogyasztás, egészségügyi, közigazgatási, oktatási, kulturális stb. szolgáltatás) földrajzával, a telepítéstől függő társadalmi-gazdasági-műszaki hatásainak elemzésével foglalkozik.

Az elmélet fő kérdései: mit, hol, mekkora kapacitással, mikor, kinek? Egy telepítési döntési probléma alapvető elemei [55]:

- a telepítés céljának meghatározása,
- a telepítés helyének kijelölése,
- a telepítési kombinációk és azok hatásainak rangsorolása.

A telepítési kombinációk rangsorolásakor számtalan szempontot kell mérlegelni, ezek közül a legfontosabbak:

- a fogyasztói igény mennyiségi és minőségi összetétele,
- a tevékenységhez szükséges eszközök, anyagok, energia, munkaerő stb. hozzáférhetősége,
- illeszkedés a meglévő település- és közlekedési hálózatba,
- környezetvédelmi előírások.

A logisztikai céloknak megfelelően mi csak a közlekedési és szállítási szempontokat figyelembe vevő módszerekkel foglalkozunk, szem előtt tartva, hogy az így nyert eredményeket egyéb szempontok módosíthatják.

A közlekedés és a szállítás jelentősége a telepítési elméletben és gyakorlatban sokat változott. Ez azzal magyarázható, hogy egyes területek súlya, például a környezetvédelemé növekedett. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a gazdaságossági szempontok mérlegeléséről le kellene mondani. Különösen nem az anyagigényes ágazatokban, ahol az energiaárak állandó növekedése miatt a szállítási költségek a termelési költségek tetemes hányadát teszik ki. Ezért törekedni kell a szállítási költségek minimumát biztosító telephely kiválasztására.

A telepítési kombináció arra ad választ, hogy hol, mikor, milyen kapacitású objektumot létesítsünk. Egyszerűbb esetekben a választás csupán néhány kombinációra korlátozódik, és intuitív módon dönthetünk. A felhasználható helyek számának (m) növekedésével azonban a lehetséges telepítési kombinációk száma exponenciálisan növekszik, ami nem túl nagy m esetén is áttekinthetetlen döntési lehetőséget eredményez. A döntések előkészítésében ezért az operációkutatási módszerek sokat segíthetnek. Természetesen helytelen lenne azt képzelni, hogy a telepítési döntéseket teljesen a számítógépekre lehet bízni, de még nagyobb hiba lenne a számítógépek által szolgáltatott információkról lemondani.

7.1. A telepítési problémák csoportosítása

A telepítési probléma sokféle formában jelentkezhet, és ennek megfelelően különböző formában modellezhető. A feladattípusokat a következő ismérvek alapján csoportosíthatjuk:

A telephely variánsok határozottsága szerint: **kötött, részben kötött, szabad**. Az első két esetben a lehetséges telephelyek koordinátái teljesen vagy részben ismertek. A szabad választás esetén viszont csak a telephelyek száma és kapacitása adott.

A létesítendő objektumok száma és kapacitása szerint megkülönböztetünk: **egykörzetes** és **többkörzetes** problémát. Egykörzetesnek nevezzük a feladatot akkor, ha adott kapaci-

tású, egyetlen új objektum telephelyét keressük. Többkörzetes a feladat akkor, ha egyszerre több új objektum helyének a meghatározása a cél, amelyek kapacitása és száma adott alsó és felső korlátok között választható, vagy a telephelyek száma kötött, de kapacitásuk tág határok között változhat.

A szállított termékféleségek száma szerint megkülönböztetünk **egy** és **többtermékes** feladatot. Végül a célfüggvény jellege szerint: **lineáris**, **kvadratik**, **egyéb nem lineáris** feladatokról beszélünk.

Amint a csoportosításból látható, a telepítési feladatok nagyon sokfélék lehetnek. Mi ezek közül csak a legfontosabbakat ismertetjük.

7.2. Egykörzetes centrumkeresés kötött telephellyel

A $P_1, P_2, \dots, P_5$ helyeken működő állattartó telepek takarmányellátására egy takarmánykeverő üzemet kívánunk létesíteni. A keverőt az állattartó telepek valamelyikének közelében kell felépíteni, és a telepítés feltételei valamennyi helyen adottak.

A takarmánygyártáshoz szükséges alapanyagok tárolására alkalmas raktárak már korábban a P_4 és P_5 helyekre települtek. A telepek keveréktakarmány-igénye évente (t):

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
3000	1000	5000	2000	1000

Az alapraktárak kapacitásai:

P_4	P_5
8000	4000

A takarmánykeverő, a raktárak és az állattartó telepek között szállítandó mennyiségek (t/év):

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
3000	1000	5000	10000	5000

A telephelyek közötti távolságok (c_{ij}):

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	-	4	7	9	8
P_2	4	-	3	7	10
P_3	7	3	-	5	12
P_4	9	7	5	-	7
P_5	8	10	12	7	-

Az ismertetett feladat, amelyben a takarmánykeverő üzem jelenti a centrumot, az ún. enumerációs módszerrel oldható meg. Ennek lényege, hogy valamennyi lehetséges telepítési helyre (centrumvariánsra) meg kell határozni az anyagmozgatási teljesítmény értékét, és ezek véges halmazából kiválasztani a legkisebbet.

$$\min\{Q_i\} = \min\left\{\sum_j I_{ij} c_{ij}\right\}, \quad (i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m)$$

ahol:

n a centrum variánsok száma,

m feladó és megrendelő helyek száma,

Q_i az i -edik centrum variáns esetén az összes szállítási teljesítmény,

I_{ij} a centrumból a j -edik telephelyre időegység alatt kiszállított, vagy a j -edik telephelyről a centrumba időegység alatt beszállított termék mennyisége,
 c_{ij} a centrum és a j -edik telephely közötti távolság.

A szállítási teljesítmény, ha a keverőt (centrumot) a P_i ($i=1,2,\dots,5$) helyeken létesítjük:

$$Q_1 = \sum_{j=1}^5 I_{1j} c_{1j} = 0 + 1000 \cdot 4 + 5000 \cdot 7 + 10000 \cdot 9 + 5000 \cdot 8 = 169000 \text{ tkm/év}$$

$$Q_2 = \sum_{j=1}^5 I_{2j} c_{2j} = 3000 \cdot 4 + 0 + 5000 \cdot 3 + 10000 \cdot 7 + 5000 \cdot 10 = 147000 \text{ tkm/év}$$

$$Q_3 = \sum_{j=1}^5 I_{3j} c_{3j} = 3000 \cdot 7 + 1000 \cdot 3 + 0 + 10000 \cdot 5 + 5000 \cdot 12 = 134000 \text{ tkm/év}$$

$$Q_4 = \sum_{j=1}^5 I_{4j} c_{4j} = 3000 \cdot 9 + 1000 \cdot 7 + 5000 \cdot 5 + 0 + 5000 \cdot 7 = 94000 \text{ tkm/év}$$

$$Q_5 = \sum_{j=1}^5 I_{5j} c_{5j} = 3000 \cdot 8 + 1000 \cdot 10 + 5000 \cdot 12 + 10000 \cdot 7 + 0 = 164000 \text{ tkm/év}$$

A legjobb megoldás, ha a takarmánykeverőt a P_4 helyen létesítjük, ekkor a

$$\min\{Q_i\} = Q_4 = 94000 \text{ tkm/év.}$$

7.3. Egykörzetes centrumkeresés részben kötött telephellyel

Részben kötött telephelyről akkor beszélünk, amikor a létesítendő objektumot egy síkgörbére vagy egy egyenesre, pl. vasútvonalra, közútra stb. kell telepíteni.

A feladat a következő: adott $P_1, P_2, \dots, P_m$ telephely, amelyek koordinátái $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m$, továbbá az

$$y = m x + b$$

egyenletű egyenes, amelyre a centrumot kell telepíteni. Az anyagáramlás intenzitása a létesítendő centrum és a telephelyek között $I_{01}, I_{02}, \dots, I_{0m}$. Határozzuk meg a centrum u_0, v_0 koordinátáit úgy, hogy az összes anyagmozgatási teljesítmény (Q) minimális legyen. Az optimalás célfüggvénye:

$$Q = \sum_j I_{0j} \sqrt{(x_j - u_0)^2 + (y_j - v_0)^2} \rightarrow \min, j = 1, 2, \dots, m,$$

amelyhez a

$$v_0 = m u_0 + b$$

mellékfeltétel járul.

A $Q(u_0, v_0)$ függvénynek mindig van globális minimumhelye, ezt az állításunkat a következő pontban igazoljuk.

E feladattípus megoldásának legismertebb módszere a **vektorpoligonos centrumnyomozás**. Ennek lényege, hogy derékszögű koordináta-rendszerben léptékhelyesen ábrázoljuk a centrum lehetséges helyeit kijelölő vonalat, valamint az ismert koordinátájú meglévő telephelyeket. Ezt követően az egyenesen kijelöljük az első közelítő pontot, amit összekötünk a telephelyeket ábrázoló pontokkal. Az így nyert egyenesek adják a vektorok irányait, a nagyságukat pedig az I_{0i} anyagáramlási intenzitásokkal arányosan vesszük fel. A vektorokat ezután az első közelítő pontból indulva tetszőleges sorrendben összeadjuk [77]. A centrum akkor kerül az optimális helyre, ha a vektorok összeadásaként kapott

eredő merőleges a centrum helyét kijelölő egyenesre. Ezt általában csak többszöri próbálkozással, a centrum mozgatásával lehet elérni. A centrum mozgatásakor a következők szerint járunk el:

Ha az $m > 0$, és az eredő a normálistól balra hajlik, akkor balra, különben jobbra mozdítjuk el a centrumot.

Ha az $m < 0$, és az eredő a normálistól balra hajlik, akkor jobbra, különben balra mozdítjuk el a centrumot.

Az ismertett grafikus eljárásnál lényegesen kényelmesebb, gyorsabb és pontosabb a következő **iterációs módszer** [13]. Helyettesítsük a mellékfeltételt a célfüggvénybe:

$$Q = \sum_j I_{0j} \sqrt{(x_j - u_0)^2 + (y_j - mu_0 - b)^2} \rightarrow \min,$$

majd deriváljuk azt az u_0 koordináta szerint:

$$\frac{\partial Q}{\partial u_0} = - \sum_j I_{0j} \frac{x_j - u_0 + m(y_j - mu_0 - b)}{d_{0j}} = 0,$$

ahol a

$$d_{0j}^{(k)} = \sqrt{(x_j - u_0)^2 + (y_j - mu_0 - b)^2}.$$

Az egyenletből az u_0 -t kifejezve, egy olyan iterációs összefüggést kapunk, amellyel tetszőleges pontossággal közelíthetők a centrum koordinátái. A

$$\sum_j -I_{0j} \frac{x_j + m(y_j - b)}{d_{0j}} + \sum_j I_{0j} \frac{u_0(1 + m^2)}{d_{0j}} = 0.$$

Az u_0 független a j -től, így kiemelhető. Rendezés után a $k+1$ -edik iterációban:

$$u_0^{(k+1)} = \frac{\sum_j I_{0j} \frac{x_j + m(y_j - b)}{d_{0j}^{(k)}}}{\sum_j I_{0j} \frac{(1 + m^2)}{d_{0j}^{(k)}}},$$

ahol a

$$d_{0j}^{(k)} = \sqrt{(x_j - u_0^{(k)})^2 + (y_j - mu_0^{(k)} - b)^2}.$$

A v_0 pedig:

$$v_0^{(k+1)} = mu_0^{(k+1)} + b.$$

Az eljárás tehát a következő:

- az $u_0^{(1)}$ -re önkényesen felvesszünk egy x értéket,
- az iterációs képletekkel kiszámítjuk az $u_0^{(k+1)}$ -et és a $v_0^{(k+1)}$ -et,
- minden lépés után megvizsgáljuk a

$$|u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)}| \leq \varepsilon,$$

$$|v_0^{(k+1)} - v_0^{(k)}| \leq \varepsilon$$

feltételeket, ahol az ε tetszőlegesen kicsi szám,

- ha a feltételek nem teljesülnek, akkor az iterációt megismételjük, különben az eljá-

rást befejezzük.
Az eljárás konvergenciájáról a következő mintapéldában könnyen meggyőződhetünk.

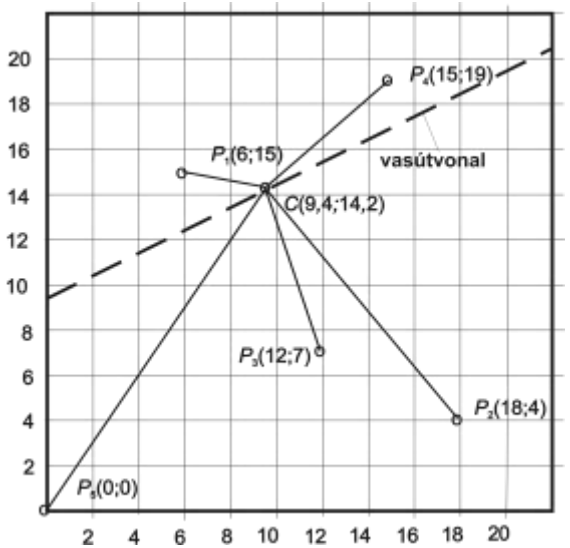
Mintapél^{da}:

Öt mezőgazdasági üzem $P_1, P_2, \dots, P_5$ közös agrokémiai központot kíván létesíteni. Az üzemek éves műtrágyaigénye:

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
25	40	10	20	10

ezer tonna. Területi középpontok koordinátái [km] (7.1. ábra):

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
6	18	12	15	0
15	4	7	19	0



7.1. ábra. A vasútvonal, a mezőgazdasági üzemek és a centrum elhelyezkedése

Az üzemek területén áthaladó vasútvonal egyenlete:

$$y=0,5\,x+9,5$$

Az agrokémiai központot a vasútvonalra kell telepíteni úgy, hogy az összes szállítási költség minimális legyen.

A centrum kezdőpontja legyen $u_0=0$, az ehhez tartozó $v_0=9,5$, az $\varepsilon=10^{-8}$. A levezetett összefüggéseket felhasználva fokozatosan közelítjük a centrum helyét:

Iteráció	u_0	v_0	Q
1	0,000	9,500	1020,949
2	8,331	13,665	1016,471
3	8,888	13,944	1015,600
4	9,137	14,068	1015,403
5	9,254	14,127	1015,356
...	...	...	...
21	9,369	14,185	1015,341

A végeredményt a 21. iteráció után kaptuk meg, amely szerint az agrokémiai központot az

$$u_0=9,369, \quad v_0=14,185$$

koordinátájú hely közelében kell felépíteni. Ekkor az anyagmozgatási teljesítmény $Q=1015,341 \cdot 10^3$ tkm/év lesz.

7.4. Egykörzetes centrumkeresés szabad telephelyválasztással

Szabad telephelyválasztás esetén az új létesítmény elvileg bárhol elhelyezhető. Feltételezzük, hogy a telephely megválasztásának a beruházási és üzemeltetési költségekre gyakorolt hatásától eltekinthetünk, csupán a szállítási költségek függvényében kell a minimumot keresnünk.

Ismerve az $\mathbf{r}_j(x_j, y_j)$ helyvektorokkal reprezentált fogyasztóhelyeket, keressük a centrum azon $\mathbf{r}_0(u_0, v_0)$ helyét, amelyre nézve a

$$Q(\mathbf{r}_0) = \sum_j I_{0j} |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0| \rightarrow \min, \quad j=1, 2, \dots, m,$$

ahol I_{0j} a centrum és a j -edik fogyasztóhely közötti anyagáramlási intenzitás (pl. az évente szállított mennyiség). Mivel derékszögű koordináta-rendszerben az $\mathbf{r}_j$ és $\mathbf{r}_0$ pontok távolsága

$$|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x_j - u_0)^2 + (y_j - v_0)^2},$$

a célfüggvény kifejtett alakja

$$Q = \sum_j I_{0j} \sqrt{(x_j - u_0)^2 + (y_j - v_0)^2}.$$

A $Q(\mathbf{r}_0)$ függvénynek az $\mathbf{r}_j$ pontokat burkoló konvex tartományban létezik minimumhelye, és tetszőleges pontossággal meg is határozható. Ezt a következőkkel igazolhatjuk: tetszőleges dimenziójú vektortérben a változó pontoknak egy rögzített ponttól való távolsága a változó pontnak konvex függvénye, ami természetesen akkor is igaz, ha ezt a távolságot egy pozitív konstanssal megszorozzuk. Sőt a

$$I_{0j} |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0|$$

súlyozott távolság az $\mathbf{r}_0$ -nak szigorúan konvex függvénye, kivéve, ha az $\mathbf{r}_0$ az $\mathbf{r}_j$ -ből induló valamely félegyenesen mozog, mert akkor e súlyozott távolság lineáris függvény, amely azonban szintén konvex. Mivel a konvex függvényeknek az összege szintén konvex, ezért egy változó $\mathbf{r}_0$ pont több rögzített $\mathbf{r}_i$ ponttól való súlyozott távolságainak összege az $\mathbf{r}_0$ -nak konvex függvénye, ha a rögzített pontokhoz tartozó I_{0j} súlyok nem negatív számok. Ugyanakkor a konvex függvény lokális minimuma egyben globális is. Ha az $\mathbf{r}_i$ pontok egy egyenesen fekszenek, akkor a lineáris függvények összegeként előálló $Q(\mathbf{r}_0)$ egy szakaszosan lineáris, konvex, de nem differenciálható függvény, amelynek a két szélső $\mathbf{r}_i$ pont közötti egyenes szakaszon van a minimumhelye. A leírtakból következik, hogy az egykörzetes centrumkeresés feladatát leíró függvénynek mindig létezik minimumhelye, amely egyben globális minimum.

A feladat megoldására közelítő, az optimumot tetszés szerinti pontossággal megközelítő grafikus és numerikus, valamint egzakt optimumot adó módszerek ismertek. **Grafikus eljárások:** a hálózatszerkesztéses, a területhálós módszerek, a grafikus tömegpont meghatározás és a vektorpoligonos centrumnyomozás. **Numerikus eljárások:** a numerikus tömegközéppont meghatározás, a *Newton-féle* iterációs módszer és a koordinátákmenti

centrumnyomozás. Egzakt megoldás csak $m=3$ esetén nyerhető a *Launhardt-féle* geometriai szerkesztéssel. A felsorolt eljárások az irodalomban megtalálhatók [52], [54] és [77]. E helyen csak a koordinátákmenti centrumnyomozással foglalkozunk részletesen [54].

A $Q(\mathbf{r}_0)$ függvénynek az u_0 és a v_0 koordináták szerinti deriváltja:

$$\frac{\partial Q}{\partial u_0} = - \sum_j \frac{I_{0j}}{\sqrt{(x_j - u_0)^2 + (y_j - v_0)^2}} (x_j - u_0),$$

és

$$\frac{\partial Q}{\partial v_0} = - \sum_j \frac{I_{0j}}{\sqrt{(x_j - u_0)^2 + (y_j - v_0)^2}} (y_j - v_0),$$

ahol az $\mathbf{r}_j \neq \mathbf{r}_0$.

A deriváltakat 0-val egyenlővé téve, és a centrum koordinátákat kifejezve megkapjuk a koordinátákmenti centrumnyomozás iterációs képleteit:

$$u_0^{(k+1)} = \frac{\sum_j I_{0j} x_j / d_{0j}^{(k)}}{\sum_j I_{0j} / d_{0j}^{(k)}},$$

$$v_0^{(k+1)} = \frac{\sum_j I_{0j} y_j / d_{0j}^{(k)}}{\sum_j I_{0j} / d_{0j}^{(k)}},$$

ahol az

$$d_{0j}^{(k)} = \sqrt{(x_j - u_0^{(k)})^2 + (y_j - v_0^{(k)})^2}.$$

Az iterációs képletekből a centrum $\mathbf{r}_0$ optimális koordinátáit, a kiindulópont $(u_0^{(k)}, v_0^{(k)})$ önkényes felvétele után, fokozatos közelítéssel határozhatjuk meg. Ezért nevezik az eljárást koordinátákmenti centrumnyomozásnak. Ha jobb kiindulópontot nem ismerünk, akkor célszerű a mechanikából ismert tömegközéppont-képletet erre a célra felhasználni:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum_j I_{0j} \mathbf{r}_j}{\sum_j I_{0j}}.$$

Minden lépés után megvizsgáljuk a

$$\left| u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)} \right| \leq \varepsilon,$$

$$\left| v_0^{(k+1)} - v_0^{(k)} \right| \leq \varepsilon$$

feltételeket, ahol az ε tetszőlegesen kicsi szám. Ha a feltételek teljesülnek, akkor befejezzük, különben folytatjuk az eljárást.

Mintapélda:

Két cementgyár (P_1, P_2) termékeit közös központi raktárban (R) készletezi, majd onnan látja el termékeivel az F_1, F_2 és F_3 elosztó központjait. A gyárak és az elosztó központok helykoordinátáit, a raktárba befolyó, és az onnan kifolyó anyagáramokat az alábbi táblázat foglalja össze.

Sorszám, j	Telephely	I_{0j} [t/hét]	x_j [km]	y_j [km]
1	P_1	2000	3	8
2	P_2	3000	8	2
3	F_1	2500	2	5
4	F_2	1000	6	4
5	F_3	1500	8	8

Határozzuk meg a központi raktár (R) optimális helyét, az ε értéke legyen 10^{-8} . Az R raktár kezdő koordinátái a tömegközépponti tétellel:

$$u_0 = \frac{\sum_j I_{0j} x_j}{\sum_j I_{0j}} = 5,3 \text{ km és } v_0 = \frac{\sum_j I_{0j} y_j}{\sum_j I_{0j}} = 5,05 \text{ km.}$$

Ezután a raktár optimális helyének koordinátáit az iterációs képletekkel

$$u_0^{(k+1)} = \frac{\sum_j \frac{I_{0j} x_j}{d_{0j}^{(k)}}}{\sum_j \frac{I_{0j}}{d_{0j}^{(k)}}}, \text{ és } v_0^{(k+1)} = \frac{\sum_j \frac{I_{0j} y_j}{d_{0j}^{(k)}}}{\sum_j \frac{I_{0j}}{d_{0j}^{(k)}}},$$

fokozatosan közelítjük, ahol a

$$d_{0j}^{(k)} = \sqrt{(x_j - u_0^{(k)})^2 + (y_j - v_0^{(k)})^2}.$$

Iteráció	u_0	v_0	Q
1	5,245419	4,914701	35212,96
2	5,251719	4,868425	35169,11
3	5,267635	4,846597	35163,75
4	5,282537	4,832637	35161,66
5	5,294722	4,822314	35160,44
...	...	...	...
35	5,340798	4,783764	35158,44

A raktár optimális helyét a 35. iteráció után kapjuk ($u_0=5,340798$, $v_0=4,783764$). Az anyagmozgatási teljesítmény ekkor $Q=35158,44$ tkm/hét.

7.5. Többkörzetes centrumkeresés kötetlen centrumkapacitásokkal és szabad telephelyválasztással

A többkörzetes telephelykutató az elhelyezendő objektumok decentralizálásával a kiszolgáló területet körzetekre bontja. A körzetek száma és az objektumok kapacitása lehet adott, de a körzetek számának meghatározása is a feladat része lehet. Az utóbbi esetben az is kérdés, hogyan körzetesítsünk, hány helyen, milyen kapacitású objektumokban folytassuk az adott tevékenységet.

A feladat feltételrendszere és célfüggvénye a következők szerint írható le:

$$(7.1) \quad I_{ij} \geq 0, \quad (i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m)$$

$$(7.2) \quad \sum_j I_{ij} = k_i,$$

$$(7.3) \quad \sum_i I_{ij} = f_j,$$

$$(7.4) \quad \sum_i k_i = \sum_j f_j,$$

$$(7.5) \quad Q = \sum_i \sum_j I_{ij} \sqrt{(x_j - u_i)^2 + (y_j - v_i)^2} \rightarrow \min ,$$

ahol:

- n a centrumok száma,
- m a fogyasztóhelyek száma,
- I_{ij} az i -edik centrumból a j -edik fogyasztóhelyre szállított mennyiség,
- k_i az i -edik centrum kapacitása,
- f_j a j -edik fogyasztóhely igénye,
- $\mathbf{r}_i(u_i, v_i)$ az i -edik centrum koordinátái,
- $\mathbf{r}_j(x_j, y_j)$ a j -edik fogyasztóhely koordinátái.

Először foglalkozunk azzal az esettel, amikor a létesítendő C_i centrumok n száma adott, de k_i kapacitásuk csak globálisan kötött. Ez azt jelenti, hogy a centrumok összes kapacitása egyenlő a F_j kiszolgált fogyasztóhelyek f_j igényeinek összegével,

$$\sum_i k_i = \sum_j f_j,$$

de külön-külön a centrumok kapacitása tetszőleges lehet.

E feladattípus megoldása gyakorlatilag a fogyasztóhelyek körzetekbe sorolásából, és az egyes körzetek centrumainak megkereséséből áll, vagyis a feladatot egykörzetes problémákra vezetjük vissza. Újdonságot így a korábbiakhoz képest csak a körzetbe sorolás jelent.

A körzetesítés a legegyszerűbben az ún. **kombinációs tábla** segítségével végezhető el (7.1. táblázat). Ez lényegében hasonló a disztribúciós táblához, azzal a különbséggel, hogy itt a k_i kapacitások ismeretlenek. A c_{ij} mátrix elemei a

$$c_{ij} = \sqrt{(x_j - u_i)^2 + (y_j - v_i)^2}$$

összefüggéssel számíthatók. Ehhez természetesen először önkényesen felvesszük az $\mathbf{r}_i(u_i, v_i)$ kezdő értékeket.

7.1. táblázat

A kombinációs tábla elvi felépítése

	F_1	F_j	F_m	k_i
C_1	c_{11}	c_{1j}	c_{1m}	
C_2	c_{21}	c_{2j}	c_{2m}	
C_n	c_{n1}	c_{nj}	c_{nm}	
f_j	f_1	f_j	f_m	

A körzetekbe soroláshoz oszloponként megkeressük a legkisebb c_{ij} elemeket és ezekre f_j mennyiségeket programozunk. Az f_j értékeket a tábla megfelelő c_{ij} eleme felett tüntetjük fel, így a $\sum_i I_{ij} = f_j$, és a $\sum_j I_{ij} = k_i$ lesz.

A körzetekbe sorolás után az egyes körzetek úgy vizsgálhatók, mint különálló, egykörzetes feladatok, és a korábban ismertetett módszerek valamelyikével a centrumok $\mathbf{r}_i$ helyei meghatározhatók. Ezt követően az új centrumkoordinátákkal új kombinációs táblát készítünk, és újra körzetekbe soroljuk a fogyasztóhelyeket.

Az eljárás akkor fejeződik be, ha két egymást követő kombinációs tábla azonos körzete-
ket eredményez. Meg kell jegyeznünk azonban, hogy az eljárás sikere nagymértékben

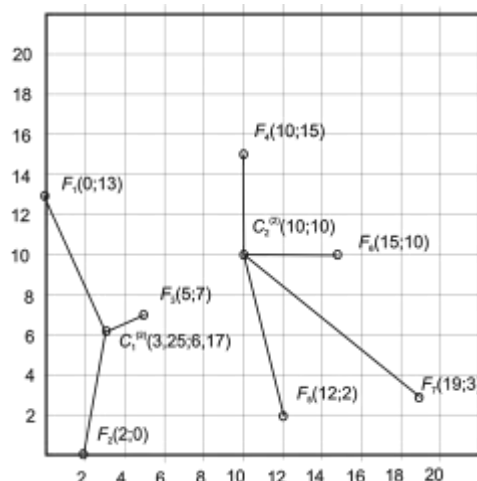
függ a kezdőértékek felvételétől. Előfordulhat, hogy csak lokális minimumhelyet kapunk. Ez ellen a legegyszerűbben úgy védekezhetünk, hogy a számításokat különböző induló-adatokkal megismételjük. Megnyugtató eredményt csak akkor remélhetünk, ha eltérő centrumsorozatok ugyanazt a megoldást szolgáltatják.

Mintapélda:

Legyen adott hét fogyasztóhely (állattartó telep), amelyeknek elhelyezkedése a 7.2. ábrán látható. A fogyasztóhelyek ellátására két raktárt kívánunk létesíteni. A raktárak kapacitása tetszőleges lehet. A fogyasztóhelyek koordinátái és igényei:

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
x_j	0	2	5	10	12	15	19
y_j	13	0	7	15	2	10	3
f_j	80	100	60	70	30	80	90

t/év. Határozzuk meg a centrumok optimális helyeit!



7.2. ábra. Az állattartó telepek és a centrumok elhelyezkedése

A centrumok kezdő koordinátái legyenek $\mathbf{r}_1(2,3)$, $\mathbf{r}_2(15,8)$. Ezek, valamint az 7.2. ábrán megadott koordináták felhasználásával kiszámítjuk a fogyasztóhelyek és a centrumok közötti távolságokat, majd elkészítjük az első kombinációs táblát.

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	k_i
C_1	10,2 ⁸⁰	3,0 ¹⁰⁰	5,0 ⁶⁰	14,4	10,0	14,8	17,0	240
C_2	15,8	15,3	10,0	8,6 ⁷⁰	6,7 ³⁰	2,0 ⁸⁰	6,4 ⁹⁰	270
f_j	80	100	60	70	30	80	90	510

$$u_1^{(1)} = 2, v_1^{(1)} = 3, u_2^{(1)} = 15, v_2^{(1)} = 8, Q^{(1)} = 2955,53$$

Amint látható, minden fogyasztóhely igényét a hozzá legközelebb eső raktárból elégítjük ki. A C_1 körzetbe az F_1, F_2, F_3 fogyasztók, a C_2 -be pedig az F_4, F_5, F_6, F_7 fogyasztók tartoznak. Ezt követően mind a két körzetre alkalmazzuk a koordinátákmenti centrumnyomozás módszerét. Ennek eredménye:

$$u_1 = 3,25, v_1 = 6,17, u_2 = 15, v_2 = 10.$$

Az így kapott centrumokkal új kombinációs táblát készítünk:

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	k_i
C_1	7,6 ⁸⁰	6,3 ¹⁰⁰	1,9 ⁶⁰	11,1	9,7	12,4	16,1	240
C_2	15,3	16,4	10,4	7,1 ⁷⁰	8,5 ³⁰	0,0 ⁸⁰	8,1 ⁹⁰	270
f_j	80	100	60	70	30	80	90	510

$$u_1^{(2)} = 3,25, v_1^{(2)} = 6,17, u_2^{(2)} = 15, v_2^{(2)} = 10, Q^{(2)} = 2827,81$$

A körzetbesorolás nem változott, így az eljárásnak vége. Az optimális anyagmozgatási teljesítmény:

$$Q = \sum_i \sum_j I_{ij} c_{ij} = 2827,81 \text{ tkm/év.}$$

7.6. Többkörzetes centrumkeresés korlátozott centrumkapacitás-sokkal és szabad telephelyválasztással

A gyakorlatban sokszor előfordul az a körülmény, hogy a létesítendő centrumok üzemeltetése bizonyos kapacitás alatt vagy felett gazdaságtalan lenne. Ilyenkor a centrumok k_i kapacitásait alulról vagy felülről korlátozzuk. E feladatoknál előfordulhat olyan eset is, hogy a meglévő létesítmények két vagy több centrummal kerülnek szállítási kapcsolatba.

7.2. táblázat

A kombinációs tábla a kapacitáskorlátos feladathoz

	F_1	F_j	F_m	k_i
C_1	c_{11}	c_{1j}	c_{1m}	$k_{1\min}$ $k_{1\max}$
C_i	c_{i1}	c_{ij}	c_{im}	$k_{i\min}$ $k_{i\max}$
C_n	c_{n1}	c_{nj}	c_{nm}	$k_{n\min}$ $k_{n\max}$
f_j	f_1	f_j	f_m	
d_j	d_1	d_j	d_m	

E feladat megoldásához is az előző pontban megismert kombinációs táblát használjuk fel, ami annyiban módosul, hogy annak utolsó oszlopában feltüntetjük a kapacitások korlátait, valamint a fogyasztók körzetekbe sorolásához a *Vogel-Korda*-féle módszerhez hasonlóan oszloponként differenciákat képezünk (7.2. táblázat). Ezeket a táblázat utolsó sorába írjuk be. Mint ismeretes, a differencia az oszlop két legkisebb elemének a különbsége.

A kombinációs tábla elkészítéséhez önkényesen felvesszük a centrumok $r_i(u_i, v_i)$ koordinátáit, majd kiszámítjuk a c_{ij} távolságmátrix elemeit.

A programozást abban az oszlopban kezdjük, ahol a differencia a legnagyobb. Az oszlop legkisebb elemére a lehető legnagyobb mennyiséget helyezzük, majd a programozást a következő legnagyobb differenciájú oszlopban folytatjuk. Azt az oszlopot, illetve sort, ahol elfogyott a készlet, elhagyjuk. Ha sort hagyunk el, akkor újra számítjuk a differenciákat. A sorokban ügyeljünk arra, hogy a megadott alsó korlátokat elérjük, a felsőket pedig ne lépjük túl.

A programozás után kapott körzeteket egykörzetes problémaként kezeljük. Ezek centrumainak koordinátáit valamelyik ismert eljárással határozzuk meg.

Újra számítjuk a távolságmátrixot, elkészítjük az új kombinációs táblát, majd elvégezzük a körzetesítést. Ha két egymást követő tábla azonos körzeteket eredményez, és nem változik a körzetek kapacitása, akkor a feladat megoldása befejeződött.

Mintapélda:

Az eljárás gyakorlati alkalmazását az előző pont mintapéldáján mutatjuk be, amit úgy módosítunk, hogy a C_1 körzet kapacitásának maximumát 200 t -ra korlátozzuk. A számítások a következő táblázatokban követhetők nyomon.

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	k_i
C_1	10,2 ⁸⁰	3,0 ¹⁰⁰	5,0 ²⁰	14,4	10,0	14,8	17,0	200
C_2	15,8	15,3	10,0 ⁴⁰	8,6 ⁷⁰	6,7 ³⁰	2,0 ⁸⁰	6,4 ⁹⁰	310
f_j	80	100	60	70	30	80	90	510
d_j	5,6	12,3	5,0	5,8	3,3	12,8	10,6	

$$u_1^{(1)} = 2, v_1^{(1)} = 3, u_2^{(1)} = 15, v_2^{(1)} = 8, Q^{(1)} = 3157,53.$$

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	k_i
C_1	10,9 ⁴⁰	2,3 ¹⁰⁰	5,7 ⁶⁰	15,1	10,1	15,2	17,1	200
C_2	15,0 ⁴⁰	15,7	9,9	7,2 ⁷⁰	7,9 ³⁰	0,7 ⁸⁰	7,8 ⁹⁰	310
f_j	80	100	60	70	30	80	90	510
d_j	4,1	13,4	4,2	7,9	2,2	14,5	9,3	

$$u_1^{(2)} = 1,93, v_1^{(2)} = 2,26, u_2^{(2)} = 14,6, v_2^{(2)} = 9,43, Q^{(2)} = 3101,44.$$

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	k_i
C_1	13,0 ⁴⁰	0,2 ¹⁰⁰	7,5 ⁶⁰	16,9	10,1	16,3	17,2	200
C_2	15,3 ⁴⁰	16,4	10,4	7,1 ⁷⁰	8,5 ³⁰	0,0 ⁸⁰	8,1 ⁹⁰	310
f_j	80	100	60	70	30	80	90	510
d_j	2,3	16,2	2,9	9,8	1,6	16,3	9,1	

$$u_1^{(3)} = 2,02, v_1^{(3)} = 0,10, u_2^{(3)} = 15, v_2^{(3)} = 10, Q^{(3)} = 3072,31.$$

Az utolsó táblázat szerint az F_2, F_3 telepek a C_1 körzethez, az F_4, F_5, F_6, F_7 telepek a C_2 körzethez tartoznak, az F_1 telep pedig mind két körzettel forgalmi kapcsolatban áll. Az összes szállítási költség: 3072,31 tkm/év.

7.7. Többkörzetes centrumkeresés kötött centrumkapacitásokkal és szabad telephelyválasztással

Ha a körzetek n száma és k_i kapacitása ismert, akkor a feladat a centrumok $\mathbf{r}$ koordinátáinak a meghatározása. Ez probléma az eddig tanultak alapján a szállítási feladatra, és a koordinátákmenti centrumnyomozásra vezethető vissza [10].

E feladat a modellje nagyon hasonlít a szállítási feladatra, lényeges különbség csak a célfüggvényben mutatkozik. A szállítási feladatban a távolságmátrix adott, itt viszont a feladó szerepét betöltő centrumok koordinátái ismeretlenek, azaz

$$(7.6) \quad I_{ij} \geq 0, \quad (i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m)$$

$$(7.7) \quad \sum_j I_{ij} = k_i,$$

$$(7.8) \quad \sum_i I_{ij} = f_j,$$

$$(7.9) \quad \sum_i k_i = \sum_j f_j,$$

$$(7.10) \quad Q = \sum_i \sum_j I_{ij} \sqrt{(x_j - u_i)^2 + (y_j - v_i)^2} \rightarrow \min ,$$

ahol:

n a centrumok száma,

m a fogyasztóhelyek száma,

I_{ij} az i -edik centrumból a j -edik fogyasztóhelyre szállított mennyiség,

k_i az i -edik centrum kapacitása,

f_j a j -edik fogyasztóhely igénye,

$\mathbf{r}_i(u_i, v_i)$ az i -edik centrum koordinátái,

$\mathbf{r}_j(x_j, y_j)$ a j -edik fogyasztóhely koordinátái.

A megoldás lépései:

a) Önkényesen felvesszük a centrumok $u_i^{(1)}, v_i^{(1)}$ koordinátáit

b) Kiszámítjuk a $c_{ij}^{(k)} = \sqrt{(x_j - u_i^{(k)})^2 + (y_j - v_i^{(k)})^2}$ távolságmátrixot.

c) Valamelyik ismert eljárással megoldjuk az (7.6)-(7.10) feltételeket kielégítő szállítási feladatot.

d) Ha

$$|Q^{(k)} - Q^{(k-1)}| \leq \varepsilon ,$$

akkor az eljárásnak vége, különben az e /lépéssel folytatjuk. Az ε alkalmasan választott kicsi szám.

e) A koordinátákmenti centrumnyomozásnál levezetett és alkalmasan átalakított iterációs képletekkel kiszámítjuk a centrumok új koordinátáit:

$$u_0^{(k+1)} = \frac{\sum_j I_{0j} x_j / d_{0j}^{(k)}}{\sum_j I_{0j} / d_{0j}^{(k)}} , \quad v_0^{(k+1)} = \frac{\sum_j I_{0j} y_j / d_{0j}^{(k)}}{\sum_j I_{0j} / d_{0j}^{(k)}} ,$$

ahol a

$$d_{0j}^{(k)} = \sqrt{(x_j - u_0^{(k)})^2 + (y_j - v_0^{(k)})^2} .$$

f) Megvizsgáljuk a

$$\begin{aligned} |u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}| &\leq \varepsilon , \\ |v_i^{(k+1)} - v_i^{(k)}| &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

feltételeket, ahol ε tetszőlegesen kicsi szám, ha a feltételek nem teljesülnek, akkor visszatérünk az e /lépéshez, különben a g /lépéssel folytatjuk.

g) Növeljük a ciklusváltozót:

$$k = k + 1 ,$$

és visszatérünk a b) ponthoz.

Mintapélda:

Az eljárás szemléltetésére az előző pontban ismertetett mintapéldát oldjuk meg, amit úgy

módosítunk, hogy a létesítendő raktárak kapacitásait előre kikötjük. Legyen a $k_1=k_2=255$ t. A centrumok kezdő koordinátái legyenek $\mathbf{r}_1(4,3)$, $\mathbf{r}_2(10,10)$. Ezek, valamint a 7.2. ábrán megadott koordináták felhasználásával kiszámítjuk a fogyasztóhelyek és a centrumok közötti távolságokat, majd elkészítjük az első disztribúciós táblát.

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	k_i
C_1	10,8 ⁶⁵	3,6 ¹⁰⁰	4,1 ⁶⁰	13,4	8,1 ³⁰	13,0	15,0	255
C_2	10,4 ¹⁵	12,8	5,8	5,0 ⁷⁰	8,2	5,0 ⁸⁰	11,4 ⁹⁰	255
f_j	80	100	60	70	30	80	90	510

$$u_1^{(1)}=4, v_1^{(1)}=3, u_2^{(1)}=10, v_2^{(1)}=10, Q^{(1)}=3482,6431.$$

A táblázatban a szállítási feladat megoldásának eredményeként kapott I_{ij} anyagáramlási intenzitásokat és a Q célfüggvény értékét is feltüntettük. A további számításokat magyarázat nélkül közöljük.

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	k_i
C_1	8,9 ⁸⁰	5,1 ¹⁰⁰	2,6 ⁶⁰	12,0	8,8 ¹⁵	12,5	15,5	255
C_2	15,3	16,4	10,4	7,1 ⁷⁰	8,5 ¹⁵	0,0 ⁸⁰	8,1 ⁹⁰	255
f_j	80	100	60	70	30	80	90	510

$$u_1^{(2)}=3,63, v_1^{(2)}=4,84, u_2^{(2)}=15, v_2^{(2)}=10, Q^{(2)}=2860,2384.$$

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	k_i
C_1	7,9 ⁸⁰	6,2 ¹⁰⁰	1,8 ⁶⁰	11,1	9,3 ¹⁵	12,1	15,7	255
C_2	15,3	16,4	10,4	7,1 ⁷⁰	8,5 ¹⁵	0,0 ⁸⁰	8,1 ⁹⁰	255
f_j	80	100	60	70	30	80	90	510

$$u_1^{(3)}=3,54, v_1^{(3)}=5,97, u_2^{(3)}=15, v_2^{(3)}=10, Q^{(3)}=2842,36.$$

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	k_i
C_1	7,8 ⁸⁰	6,3 ¹⁰⁰	1,6 ⁶⁰	10,9	9,3 ¹⁵	12,0	15,7	255
C_2	15,3	16,4	10,4	7,1 ⁷⁰	8,5 ¹⁵	0,0 ⁸⁰	8,1 ⁹⁰	255
f_j	80	100	60	70	30	80	90	510

$$u_1^{(4)}=3,54, v_1^{(4)}=5,97, u_2^{(4)}=15, v_2^{(4)}=10, Q^{(4)}=2842,03.$$

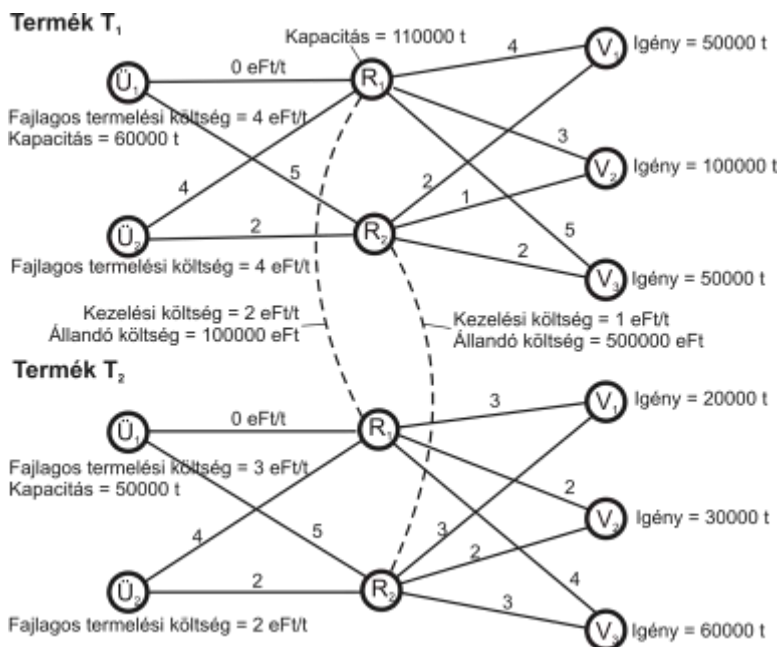
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	k_i
C_1	7,8 ⁸⁰	6,3 ¹⁰⁰	1,6 ⁶⁰	10,9	9,3 ¹⁵	12,0	15,7	255
C_2	15,3	16,4	10,4	7,1 ⁷⁰	8,5 ¹⁵	0,0 ⁸⁰	8,1 ⁹⁰	255
f_j	80	100	60	70	30	80	90	510

$$u_1^{(5)}=3,54, v_1^{(5)}=5,97, u_2^{(5)}=15, v_2^{(5)}=10, Q^{(5)}=2842,01.$$

Az utolsó táblázat szerint az F_1, F_2, F_3 telepeket a C_1 raktárból, az F_4, F_6, F_7 telepeket a C_2 raktárból, az F_5 telepet pedig két raktárból látjuk el takarmánnyal. Az összes szállítási költség: 2842,01 tkm/év.

7.8. Többtermékes raktárak telepítése

Ez a feladat röviden és leegyszerűsítve a következő: adott néhány, többféle terméket gyártó üzem ismert termelési kapacitással, továbbá ismert a termékek iránti kereslet, azaz a termékeket felhasználó vevők igénye. Ezt az igényt úgy elégítik ki, hogy az üzemekből a termékeket elosztóraktárakba szállítják, ahonnan eljuttatják a vevőkhöz, azzal a kikötéssel, hogy egy vevőt csak egy raktárból lehet kiszolgálni. Az üzemek termelési kapacitása és a raktárak éves forgalma alsó és felső értékkel korlátozható. A raktárak lehetséges helyei adottak, a kérdés, hogy melyik raktárak működjenek, ahhoz, hogy az összes elosztási költség minimális legyen. A raktározási költségek állandó (pl.: amortizáció, biztosítás) és a forgalommal lineárisan változó költségeket tartalmaznak. A szállítási költségek az üzem-raktár és a raktár-vevő viszonylatokban ismertek, és a forgalommal lineárisan változnak. A feladat meghatározni, hogy a melyik üzemeket és raktárakat használjuk, és mekkora kapacitással, a vevőket melyik raktárból szolgáljuk ki úgy, hogy a vevői igények a legkisebb elosztási költséggel legyenek kielégítve.



7.3. ábra. Többtermékes raktár hozzárendelési probléma

A probléma precízebben a következők szerint fogalmazható meg: Egy logisztikai hálózaton keressük a raktárak számát, méretét és helyét, amely minimalizálja a hálózaton mozgott termékek állandó és lineárisan változó költségeit a következő feltételek mellett:

- (1) Az üzemek termékenkénti termelési kapacitása nem léphető át.
- (2) A vevők igényét maradéktalanul ki kell elégíteni.
- (3) A raktárak forgalma nem haladhatja meg a raktárak előírt maximális kapacitását.
- (4) A raktárak forgalma nem lehet kisebb, mint az előírt minimális forgalom.
- (5) Egy vevő különböző termékekre vonatkozó igényeit egy raktárból kell teljesíteni.

Mintapélda:

E feladattípus bemutatására tekintsünk egy kisméretű többtermékes raktár hozzárendelési

(telepítési) problémát, amit a 7.3. ábra illusztrál [8]. A feladatban, két raktárban (R_1, R_2) kétféle terméket (T_1, T_2) tárolunk, amelyeket három vevő (V_1, V_2, V_3) igényel, de egy vevőt csak egy raktárból lehet kiszolgálni. Az R_1 raktárban a kezelési költség $v_1=2$ eFt/t, az állandó költség $f_1=100000$ eFt/év, ha működik, és a kapacitása $V_{1\max}=110000$ t. Az R_2 raktárban a kezelési költség $v_2=1$ eFt/t, az állandó költség $f_2=500000$ eFt/év, és a kapacitása nincs korlátozva ($V_{2\max}=\infty$). A raktárakat két üzemből ($\bar{U}_1, \bar{U}_2$) töltjük fel a termékekkel. Az üzemek mindkét terméket gyártják, de különböző fajlagos költséggel (eFt/t), továbbá az $\bar{U}_1$ üzem kapacitása mindkét termékből korlátozott, a T_1 termékből $S_{11}=60000$ t és a T_2 termékből $S_{21}=50000$ t. Az $\bar{U}_2$ üzem mindkét terméket korlátlanul képes előállítani ($S_{12}=S_{22}=\infty$).

A továbbiakban legyen a termékek (árak) indexe $i=1, 2$, az üzemek indexe $j=1, 2$, a raktárak indexe $k=1, 2$ és a vevők indexe $l=1, 2, 3$, valamint jelölje

D_{ij} az i -edik vevő igényét a j -edik termékből,

c_{ij} az i -edik termék fajlagos termelési költségét a j -edik üzemben,

d_{ijk} az i -edik termék fajlagos szállítási költségét a j -edik üzem és a k -adik raktár között,

e_{ikl} az i -edik termék fajlagos szállítási költségét a k -adik raktár és az l -edik vevő között.

A vevők igényei (t) a termékekből (D_{il}):

	Vevő V_1	Vevő V_2	Vevő V_3
Termék T_1	50000	100000	50000
Termék T_2	20000	30000	60000

A termelés fajlagos költségei (eFt/t) az üzemekben, (c_{ij}):

	Üzem $\bar{U}_1$	Üzem $\bar{U}_2$
Termék T_1	4	4
Termék T_2	3	2

A fajlagos szállítási költségek (eFt/t) az üzemek és a raktárak között (d_{ijk}):

	Raktár R_1	Raktár R_2
Üzem $\bar{U}_1$	0	5
Üzem $\bar{U}_2$	4	2

Mivel a példában a $d_{1jk} = d_{2jk}$, ez a fajlagos költség független a terméktől, de természetesen lehet változó is.

A fajlagos szállítási költségek (eFt/t) a raktárak és a vevők között a T_1 termékre (e_{ikl}):

	Vevő V_1	Vevő V_2	Vevő V_3
Raktár R_1	4	3	5
Raktár R_2	2	1	2

A fajlagos szállítási költségek (eFt/t) a raktárak és a vevők között a T_2 termékre (e_{ikl}):

	Vevő V_1	Vevő V_2	Vevő V_3
Raktár R_1	3	2	4
Raktár R_2	3	2	3

A feladat eldönteni melyik raktárak működjenek és mekkora kapacitással, a vevői igényeket melyik raktárból szolgáljuk ki, és a raktárakat, melyik üzemből töltjük fel.

A feladat matematikai modellje

A célfüggvény:

$$(1) \quad \sum_{ijk} C_{ijk} X_{ijk} + \sum_k [f_k z_k + v_k \sum_l (\sum_i D_{il} y_{kl})] \rightarrow \min, \text{ ahol } X \geq 0, y, z = 0, 1.$$

A feltételek:

Az elérhető termelési kapacitásokat nem léphetjük át:

$$(2) \quad \sum_{kl} X_{ijk} \leq S_{ij} \quad \text{minden } i - \text{re}.$$

A vevők igényeit ki kell elégíteni:

$$(3) \quad \sum_j X_{ijk} = D_{il} y_{kl} \quad \text{minden } i, k, l - \text{re}.$$

A vevők igényeit egy raktárból kell teljesíteni külön-külön:

$$(4) \quad \sum_k y_{kl} = 1 \quad \text{minden } l - \text{re}.$$

A raktárak forgalmát $V_{k\min}$ és $V_{k\max}$ között kell tartani:

$$(5) \quad V_{k\min} z_k \leq \sum_l (\sum_i D_{il} y_{kl}) \leq V_{k\max} z_k,$$

ahol:

i a termékek (árúk) indexe,

j az üzemek indexe,

k a raktárak indexe,

l a vevők indexe,

S_{ij} a termelési kapacitás az i -edik termékből a j -edik üzemben,

D_{il} az l -edik vevő igénye az i -edik termékből,

$V_{k\min}$ a minimális megengedett éves forgalom a k -adik raktárban,

$V_{k\max}$ a maximális megengedett éves forgalom a k -adik raktárban,

f_k a fenntartási és működési költségek állandó része a k -adik raktárban,

v_k a forgalomtól függő fajlagos kezelési költség a k -adik raktárban,

C_{ijkl} az i -edik termékből a j -edik üzemben előállított mennyiség összes fajlagos termelési és szállítási költsége, amit a k -adik raktáron át szállítunk az l -edik vevőhöz,

X_{ijkl} döntési változó, i -edik termékből a j -edik üzemben előállított mennyiség, amit a k -adik raktáron át szállítunk az l -edik vevőhöz,

y_{kl} 0, 1 értékű döntési változó, az $y_{kl}=1$, ha az l -edik vevőt a k -adik raktárból szolgáljuk ki,

z_k 0, 1 értékű döntési változó, a $z_k=1$, ha a k -adik raktár működik, különben 0.

A célfüggvényben a $\sum_{ijk} C_{ijk} X_{ijk}$ tag a termelési és a szállítási költséget összegzi. A második tag, a $\sum_k [f_k z_k + v_k \sum_l (\sum_i D_{il} y_{kl})]$ pedig raktározás állandó és változó költségeit tartalmazza.

Az előző táblázatok adatait felhasználva, először a

$$C_{ijkl} = c_{ij} + d_{jk} + e_{kl}$$

formulával számítsuk ki a célfüggvény első tagjában szereplő C_{ijkl} költségmátrix elemeit:

	$\tilde{U}_1$						$\tilde{U}_2$					
	R_1			R_2			R_1			R_2		
	V_1	V_2	V_3	V_1	V_2	V_3	V_1	V_2	V_3	V_1	V_2	V_3
T_1	8	7	9	11	10	11	12	11	13	8	7	8
T_2	6	5	7	11	10	11	9	8	10	7	6	7

7.3. táblázat (folytatás)

A többtermékes raktár hozzárendelési probléma szimplex-táblája

[illegible]

A vegyes integer lineáris programozási feladat megoldható az *Excel Solver* nevű bővítményével, vagy valamely más speciális VILP programmal. Tájékoztatásul, a feladat szimplex-táblája a 7.3. táblázatban látható. A táblában a sorazonosítók első karaktere a matematikai modell feltételit azonosító számnak felel meg, amit indexek egészítenek ki. Például a 2.1 azonosító a második feltétel első sorának felel meg.

A példa megoldása:

Termelési és szállítási költség:	2240000 Ft
Változó raktározási költség:	310000 Ft
Állandó raktározási költség:	500000 Ft
Összes költség:	3050000 Ft

A nem 0 értékű döntési változók:

$$X_{1221} = 50000, X_{1222} = 10000, X_{1223} = 50000,$$

$$X_{2221} = 20000, X_{2222} = 30000, X_{2223} = 60000,$$

$$z_2=1, y_{21} = 1, y_{22}= 1, y_{23}=1.$$

A megoldás szerint ($z_1=0$) az R_1 raktár és az $\bar{U}_1$ üzem nem működik. A vevőket az R_2 raktárból szolgáljuk ki és a T_1 és T_2 terméket az $\bar{U}_2$ üzemben állítjuk elő.

7.9. Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse a telepítéselmélet célját, feladatait!
2. Csoportosítsa a telepítési problémákat!
3. Ismertesse a kötött és részben kötött telepítési problémák megoldásának lehetőségeit!
4. Ismertesse az egy- és többkörzetes centrumkeresési problémák megoldását kötetlen centrumkapacitás esetén!
5. Ismertesse a többkörzetes centrumkeresési problémák megoldását kötött centrumkapacitás esetén!
6. Ismertesse a többtermékes telepítési feladat modelljét és megoldási lehetőségeit.

Jegyzetek, kérdések

8. HÁLÓZATI ANALÍZIS ÉS HÁLÓTERVEZÉS

A hálózatok különböző területeken és számtalan formában jelenhetnek meg. A közismert logisztikai, elektronikai és kommunikációs hálózatokkal nap, mint nap kapcsolatba kerülünk, az elvontan értelmezett hálózatokat pedig széles körben alkalmazzák a termelés, elosztás, telepítés, erőforrás-gazdálkodás, műszaki és pénzügyi tervezés stb. területén különböző problémák megoldására. A háló ábrázolás a mérnöki, a tudományos, a társadalmi és a gazdasági rendszerek elemei közötti kapcsolatok leírásának nemcsak szemléletes, hanem az egyik leghatékonyabb eszköze.

Az elmúlt években az operációkutatás egyik legizgalmasabb és leggyorsabban fejlődő területe a hálózatoptimalizálási modellek módszertani és alkalmazástechnikai kutatása volt. Számos algoritmus jelent meg már a '70-es években, de az igazi kibontakozást a '80-as évek számítástechnikai forradalma tette lehetővé, ami nemcsak a nagy sebességű számítástechnikai eszközök megjelenésében nyilvánult meg, hanem az adatbázis-kezelés fejlődésében is. Ennek eredményeként ma hatékony algoritmusok és szoftverek állnak rendelkezésre. Ezek rutinszerűen használhatók olyan nagyméretű feladatok megoldására, melyek néhány évtizeddel ezelőtt teljesen megoldhatatlannak bizonyultak volna [47].

Ebben a fejezetben csak érinteni tudjuk a hálózati analízis módszereinek rendkívül széles eszköztárát. Ennek keretében bemutatunk öt fontos hálózati problémát, és néhány alapvető gondolatot megoldásukról anélkül, hogy mélyebben behatolnánk az adatszerkezetek elemzésébe. Az utóbbiak a számítógépes alkalmazások szempontjából bírnak nagy jelentőséggel. Az első három probléma: a *legrövidebb útvonal*, a *minimális költségű feszítőfa* és a *maximális folyam* vagy *maximális forgalom* problémája. Ezek nagyon jellemző szerkezetűek, és sűrűn fordulnak elő a gyakorlati alkalmazásokban. A *minimális költségű folyam* egy általánosabb modell, ami nagyon sokféle feladat megoldására alkalmazható. Így például magában foglalja az előzőleg említett legrövidebb útvonal és a maximális folyam problémáját, valamint a korábban tárgyalt szállítási, hozzárendelési és átrakási feladatokat. Mint sok más hálózatoptimalizálási modell, a minimális költségű folyam problémája is lineáris programozási feladattá alakítható, és egyszerűen megoldható a szimplex-módszerből származtatott ún. hálózati szimplex-módszerrel.

Ezt követően a *hálótervezéssel* foglalkozunk. Ezen belül két közismert technikát érintünk, nevezetesen a PERT (*Program Evaluation and Review Technique*) és CPM (*Critical Path Method*) módszereket. Bár az '50-es években kifejlesztett PERT és CPM rendszerek felhasználási területe korlátozott, mégis a legszélesebb körben ismert és alkalmazott projekttervezési technikák a gyakorlatban.

A fejezetben az utolsó problémakörként megismerkedünk a Petri hálókkal. A Petri háló modelleket konkurens és a párhuzamos rendszerek struktúrájának és szabályozásának tanulmányozására fejlesztették ki, napjainkban azonban a gyártási rendszerek területén is széleskörű érdeklődés mutatkozik irántuk. A Petri hálók előnyösen használhatók a diszkrét gyártási rendszerek modellezésében, validálásában, elemzésében és ellenőrzésében, mert képesek leírni ezeknek a rendszereknek a lényeges jellemzőit.

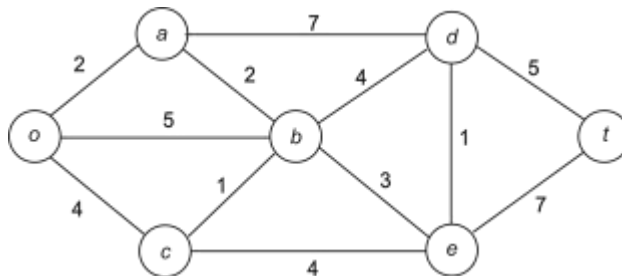
8.1. A hálózatok terminológiája

A különböző hálózatok és komponenseik leírására alkalmazott terminológia nem egységes. Ez szükségessé teszi, hogy mielőtt a részletekbe belemennénk, definiáljuk azokat a fogalmakat, amelyeket a továbbiakban használni fogunk. A fogalmak memorizálása nem könnyű, ezért a hálózati technikákban járatlan olvasónak javasoljuk, olvassa el és próbálja megérteni a definíciókat, majd később, memóriájának felfrissítése érdekében a kifejezések előfordulásakor térjen

vissza azokhoz. Az új fogalmak vastag betűvel szedettek azon a helyen, ahol a definícióját megadtuk.

A $G(P,E)$ háló pontok és vonalak halmazából áll. Az E vonalak meghatározott pontpárokat kapcsolnak egymáshoz. A P pontokat **csomópontoknak** vagy **csúcsoknak** nevezzük, pl. a 8.1. ábrán a körrel jelölt csomópontok száma 7. A vonalakat **éleknek** vagy **íveknek** nevezzük, pl. a 8.1. ábra a hálózatának 12 éle van. Az élék mindkét végükön csomópontokban végződnek, pl. az ab egy él az a és b csomópont között.

A hálózat élein különböző áramok folyhatnak, a 8.1. táblázat néhány tipikus példát ismertet. Ha az élen az áramlás csak egy irányban megengedett (pl. egyirányú utca), akkor azt **irányított élnek** nevezzük. Az irányt az élet jelképező vonal végén egy nyíllal jelöljük. Ha irányított élet két csomópontjának felsorolásával címkézzük, akkor a **honnan** csomópont mindig megelőzi a **hova** csomópontot. Például egy élet, amelyik az a csomópontból mutat b -be, ab -ként kell címkézni, de választhatjuk az $a-b$ vagy az (a,b) jelölési formákat is. Ha egy élen az áramlás mindkét irányba megengedett, az élet irányítatlan élnek nevezzük. Az **irányítatlan életet** gyakran **kapcsolat** néven is említik, pl. a kapcsolata b -vel az ab irányítatlan él.



8.1. ábra. Útrendszer a mintapéldához

8.1. táblázat

Tipikus hálózatok és összetevőik

Csomópontok	Élek	Áram
Kereszteződések	Utak	járművek
Repülőterek	Légifolyosók	repülőgépek
Telefonközpontok	kábelek, csatornák	üzenetek
Szivattyúállomások	Csővek	folyadék

A csak irányított élekből álló hálózatot **irányított hálózatnak** nevezik. Hasonlóan, ha egy hálózat minden éle irányítatlan, akkor a hálózat **irányítatlan hálózat**. A **vegyes** (irányított és irányítatlan életet tartalmazó) hálózatok, de akár az irányítatlan hálózatok, ha az kívánatos, átkonvertálhatók irányítottá úgy, hogy minden egyes irányítatlan élet kicserélünk egy pár irányított élre, melyek ellentétes irányba mutatnak.

Ezek után foglaljuk össze definíciószerűen az eddigieket. A $G(P,E)$ hálózat két véges halmazból áll, a P csomópontok és az E élék halmazából. Ha az élék a csomópontok rendezett párjai, a hálózat irányított, az (a,b) élben a az él feje, b az él vége. Ha az élék a különböző csomópontok rendezetlen párjai, akkor a hálózat irányítatlannak mondjuk.

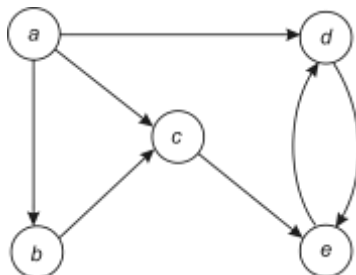
Ha az irányított $G(P,E)$ hálózatban az E egyik eleme (a,b) , akkor azt mondjuk az a csomópont össze van kötve a b csomóponttal. Ha a $G(P,E)$ irányítatlan hálózatban (a,b) az E egyik eleme, akkor feltesszük, hogy $(a,b)=(b,a)$, vagyis (a,b) és (b,a) ugyanaz az él.

Ha két csomópont nem kapcsolódik közvetlen éllel egymáshoz, kérdés lehet, hogy létezik-e az éléknek olyan sorozata, amely összeköti őket. Az irányított vagy irányítatlan hálózat

$(p_1, p_2), (p_2, p_3), \dots, (p_{n-1}, p_n)$ alakban adott élsorozatát, amely p_1 -ből p_n -be vezet, **útnak** nevezzük. Az **út hossza** $n-1$. Speciális esetként egyetlen csomópont is egy 0 hosszúságú út önmagából önmagába. Az utat **egyszerű útnak** nevezzük, ha minden éle és csomópontja különböző, kivéve esetleg az első és utolsó csomópontot. Ha az egyszerű út ugyanazzal a ponttal kezdődik és végződik, akkor **körútnak** mondjuk. A körút hossza az irányítatlan hálózaton legalább 3.

Például az o és t csomópontokat összekötő egyik út az $(o, b), (b, d), (d, t)$ vagy $o \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow t$ különböző élek sorozata az o -ból t -be és megfordítva (8.1. ábra). Ha a hálózat néhány vagy mindegyik éle irányított él, akkor megkülönböztetünk irányított és irányítatlan utat. Az irányított út p_i csomópontból p_j -be olyan kapcsolódó élek sorozatát jelenti, melyek iránya p_j felé mutat. Ilyenkor az út mentén az áramlás csak az p_i csomópontból p_j -be lehetséges. Az irányítatlan út esetében p_i csomópontból p_j -be vezető élsorozat kétirányú lehet.

Egy irányított hálózatban a kör lehet irányított és irányítatlan körút, attól függően, hogy a belefoglalt utak irányítottak vagy irányítatlanok. A 8.2. ábrán a de -ed egy irányított körút. Ellentétben az ab - bc - ac -vel, amely nem irányított körút, egyrészt azért, mert az ac él iránya ellentétes ab és bc irányával, másrészt az $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ egy irányítatlan út. Irányítatlan hálózatokban (8.1. ábra) számos körút van, pl. oa - ab - bc - co . Jegyezzük meg azt is, hogy az egyszerű út definíciója (különböző élek sorozata) kizárja körút fogalmából azt az egy lépésben visszatérő élsorozatot, amikor a visszatérés ugyanazon az élen történik, pl. az ob - bo (8.1. ábra) nem körút, mert ob és bo ugyanazt az élet jelentik. Az ob - bo élsorozatot huroknak nevezik. Azonban de - ed egy irányított kör, (8.2. ábra) mert de és ed különböző élek.



8.2. ábra. Példa az irányított hálózatra

Két csomópontra akkor mondjuk, hogy összefüggő, ha létezik legalább egy irányítatlan út kettőjük között. (Jegyezzük meg: az útnak nem kell feltétlenül irányítottnak lennie, ha a hálózat irányított.) A hálózat akkor **összefüggő hálózat**, ha a hálózatban minden csomópont-pár összefüggő. A 8.1 és a 8.2. ábrák hálózatai összefüggőek, de az utóbbi hálózat nem lenne összefüggő, ha az ad és ce éleket eltávolítanánk.

Az irányított hálózatok nagyon fontos osztályát képezik a **fák**. A kört nem tartalmazó irányított hálózatokat **körmentes hálózatnak** nevezzük. Az **irányított körmentes fa**, olyan irányított körmentes hálózat, amely a következő tulajdonságokkal bír:

- pontosan egy olyan csomópontja van, ahova nem vezet él, ez a fa gyökere,
- a gyökéren kívül minden más csomópontba egy él vezet,
- a gyökérből minden csomópontba egy út vezet.

Ha adott $G=(P,E)$ összefüggő hálózat, akkor a **feszítőfa** olyan $S(P,T)$ irányítatlan részhálózata G -nek, amely P összes csomópontját összeköti. Ekkor P bármely két csomópontja között pontosan egy út fut az S hálózaton, és ha S -hez hozzáveszünk egy élet az $E \setminus T$ kiegészítő halmazból, akkor pontosan egy körút keletkezik.

Egy fát lehet „nevelni” élek (ágak) hozzáadásával a következő eljárás szerint. Vegyük n számú

csomópont halmazát (8.2. ábra) élek nélkül. Az első él a gyökérből bárhova irányulhat. Ezután minden egyes új élnek olyan csomópontok közé kell esnie, amelyek közül az egyik már kapcsolódik más csomóponthoz, a másik pedig még nem. Ilyen módon növelve a fát elkerülhetjük, hogy körutat kapjunk, és biztosíthatjuk, hogy az összefüggő csomópontok száma eggyel nagyobb legyen, mint az élek száma. Minden egyes él hozzáadása egyre nagyobb fát alkot, és olyan összefüggő hálózat, amely nem tartalmaz irányítatlan körutakat. Az $(n-1)$ -edik él hozzáadása után az eljárás megáll, mert a fa már kapcsolódik minden egyes (n) csomóponthoz. Az így kapott fa feszítőfa lesz.

Minden feszítőfának pontosan $(n-1)$ éle van. Minimálisan ennyi él szükséges ahhoz, hogy összefüggő hálózatot kapjunk, és maximálisan ennyi él biztosítja a körmentességet. A feszítőfa kulcs szerepet játszik nagyon sok hálózati problémában, ezek között említhető a minimális költségű feszítőfa, vagy a hálózati szimplex eljárás.

Végezetül hálózati áramokkal kapcsolatban további alapfogalmakra lesz szükségünk. Azt a maximális áramot (végtelen is lehet), amelyet egy irányított él képes áteresztetni, **élkapacitásnak** nevezzük. A csomópontok lehetnek **feladó** vagy **forrás**, **megrendelő** vagy **nyelő** és **átrakó** vagy **közvetítő** csomópontok. A feladó csomópont jellemzője, hogy a beáramló mennyiség kisebb, mint a csomópontból kiáramló. Ennek ellentéte a megrendelő csomópont, ahol a csomópontba nagyobb áram érkezik, mint amennyi távozik. Az átrakó csomóponton be- és kiáramló mennyiségek egyenlők.

8.2. Mintapélda

A 8.1. ábrán vázolt hálózat egy útrendszer, ahol o a belépési pont. A többi ugyancsak betűkkel jelölt csomópont különböző állomásokat jelképez. Az élekre írt számok az élek költségét, jelen esetben azok hosszát jelentik. A hálózattal kapcsolatban három problémát kell megoldani:

1. Határozzuk meg, melyik útvonalon lehet a legkisebb költséggel eljutni az o belépési ponttól a t csomópontig.
2. Telefonhálózatot kell az utak alatt kiépíteni, biztosítva a kommunikációt minden csomópont között. A kérdés, milyen nyomvonalon kell a telefonvonalakat lefektetni ahhoz, hogy az összes vezeték hossz minimális legyen?
3. Az o belépési pontból valamilyen terméket kell a t csomópontba szállítani. Mivel a csomópontok közötti élek áteresztőképessége korlátozott, kérdés mekkora az a termékmennyiség, amelyet az úthálózat képes átbocsátani.

Az első feladat a *legrövidebb út* meghatározásával oldható meg. A második kérdésre a *minimális költségű feszítőfa* ad választ. A hálózat maximális áteresztőképessége pedig a *maximális folyam* problémájával összefüggő kérdés.

8.3. A legrövidebb út a hálózaton

Az alábbiakban a legrövidebb útvonal probléma megoldásának néhány változatát (beleértve az irányított hálózatokat is) mutatjuk be.

Tekintsünk egy irányítatlan és összefüggő hálózatot két tetszőlegesen választott csomóponttal, amelyek közül az egyik a *start*- a másik *célpont*. Minden egyes irányítatlan élhez tartozik egy nem negatív távolság (költség). A cél a legrövidebb útvonal megkeresése a start- és a célpont között.

E probléma megoldására viszonylag egyszerű algoritmusokat adunk. Az eljárások lényege a következő: a startpontból indulva, egymás után, a csomópontok szerint növekvő sorrendben meghatározzuk a legrövidebb utakat a startpont és a hálózat többi csomópontja között, egészen addig, amíg a célponthoz nem érünk.

8.3.1 Algoritmus a legrövidebb út probléma megoldására

Az n -edik iteráció: megkeressük a startpontból legrövidebb úton elérhető megoldatlan csomópontot. Ezt ismételjük $n=1,2,\dots$ -szer, amíg az n -edik legközelebbi csomópont a célpont nem lesz.

Az n -edik iteráció bemenete: $(n-1)$ számú megoldott csomópont a hozzájuk vezető legrövidebb utakkal.

Az n -edik legközelebbi csomópontra jelölt pontok: minden megoldott csomóponthoz közvetlenül kapcsolódik egy vagy több megoldatlan csomópont, ezek közül a legrövidebb éllel kapcsolódók a jelöltek.

Az n -edik legközelebbi csomópont számítása: minden megoldott csomóponthoz tartozó utak hosszához (költségéhez) hozzáadjuk a megoldott csomópontok és a jelöltek közötti élek hosszát. Ezek közül a legkisebb költségű vezet a legrövidebb úton elérhető megoldatlan csomópontba.

Mintapélda:

Keressük meg a legrövidebb utat a 8.1. ábrán vázolt hálózaton, ha az o csomópontból a t csomópontba kell eljutni. Az algoritmus lépéseit a 8.2. táblázatban követhetjük.

8.2. táblázat.

A legrövidebb út megoldása a mintapéldában

n	Megoldatlan csomópontokhoz közvetlen kapcsolódó megoldott csomópontok	Legközelebbi kapcsolódó megoldatlan csomópontok	Összes távolság	n -edik legközelebbi csomópont	Minimális távolság	Utolsó kapcsolat
1	o	a	2	a	2	oa
2,3	o	c	4	c	4	oc
	a	b	$2+2=4$	b	4	ab
4	a	d	$2+7=9$	e	7	be
	b	e	$4+3=7$			
	c	e	$4+4=8$			
5	a	d	$2+7=9$	d	8	bd
	b	d	$4+4=8$		8	ed
	e	d	$7+1=8$	d	8	
6	d	t	$8+5=13$	t	13	dt
	e	t	$7+7=14$			

Az első oszlop (n) tartalmazza az iterációk számát. A második oszlop az n -edik iterációban egyszerűen felsorolja azokat a megoldott csomópontokat, amelyek közvetlen kapcsolhatók valamely megoldatlan csomóponttal. A harmadik oszlopban találhatók az n -edik legközelebbi csomópontokra jelölt megoldatlan csomópontok. A negyedik oszlopban számítjuk ki a legrövidebb út költségét a startponttól minden egyes jelöltig, ez a megoldott csomópontig mért út és a kapcsoló él költségének összege. Az 5. oszlopban az n -edik legközelebbi csomópontok szerepelnek. Az utolsó két oszlop az utoljára megoldott csomópontokra vonatkozó és a következő iterációhoz szükséges információkat összegezi. Nevezetesen, a legrövidebb útvonal költségét a startponttól a szóban forgó csomópontig és az utolsó éle ezen a legrövidebb úton.

A legrövidebb utat a startponttól a célíg most már nyomon lehet követni, a 8.2. táblázat utolsó oszlopában ($t-d-e-b-a-o$) vagy ($t-d-b-a-o$). A két legrövidebb út a startponttól a célíg ($o-a-b-e-d-$

t) és (o-a-b-d-t), az összes távolság 13 egység mindkét útvonalon.

8.3.2 Dijkstra algoritmusa

Sok alkalmazásban irányított hálózaton kell megkeresni a legrövidebb irányított utat a startponttól a célig, ennek megoldására most a *Dijkstra-féle* algoritmust mutatjuk be [2].

Adott a $G(P,E)$ irányított gráf, amely a P csomópontok és az E élek halmazából áll. A P halmaz elemeit jelölje p_i ($i=1,2,\dots,n$), az E halmaz e_{ij} elemei a p_i és p_j csomópontokat összekötő élek, amelyekhez c_{ij} költségeket rendelünk. Ha az e_{ij} él nem létezik, akkor a $c_{ij}=M$. Keressük a p_s startpontból az összes p_i pontba vezető legrövidebb utakat.

Kezdetben a megoldott csomópontok S halmazához tartozzon az s startpont. Minden lépésben az S halmazhoz vegyük hozzá a megoldatlan csomópontok halmazából azt a csomópontot, amelyik a legközelebb van a startponthoz.

1. iteráció: Minden $j \neq s$ csomópontra

$$d_{sj}^{(1)} = c_{sj},$$

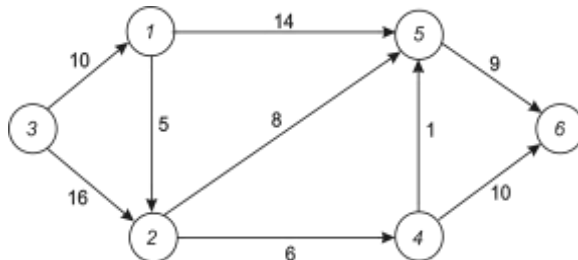
$$d_{si}^{(1)} = \min\{d_{sj}^{(1)}\}.$$

$k+1$ -edik iteráció: Minden megoldatlan csomópontra

$$d_{sj}^{(k+1)} = \min\{d_{sj}^{(k)}, d_{si}^{(k)} + c_{ij}\},$$

$$d_{si}^{(k+1)} = \min\{d_{sj}^{(k+1)}\},$$

ahol az i -edik csomópontot hozzávesszük az S halmazhoz, azaz megoldottnak tekintjük.



8.3. ábra. Irányított hálózat a Dijkstra algoritmushoz

Mintapélda:

Az algoritmus alkalmazásához tekintsük a 8.3. ábrán látható irányított hálózatot, ahol a változatosság kedvéért a csomópontokat számokkal címkéztük. Keressük az $s=3$ start pontból a 6 pontba vezető legrövidebb utat. A számítások lépései a következők, amelyek eredményeit a 8.3. táblázat tartalmazza.

1. lépés

$$d_{3i}^{(1)} = \min\{10, 16, M, M, M\} = d_{31}^{(1)} = 10,$$

$i=1$, kapcsolat: 3-1

2. lépés

$$d_{32}^{(2)} = \min\{d_{32}^{(1)}, d_{31}^{(1)} + c_{12}\} = \min\{16, 10+5\} = 15 \quad \text{kapcsolat 1-2}$$

$$d_{34}^{(2)} = \min\{d_{34}^{(1)}, d_{31}^{(1)} + c_{14}\} = \min\{M, 10+M\} = M$$

$$d_{35}^{(2)} = \min\{d_{35}^{(1)}, d_{31}^{(1)} + c_{15}\} = \min\{M, 10+14\} = 24 \quad \text{kapcsolat 1-5}$$

$$d_{36}^{(2)} = \min\{d_{36}^{(1)}, d_{31}^{(1)} + c_{16}\} = \min\{M, 10 + M\} = M$$

$$d_{3i}^{(2)} = \min\{15, M, 24, M\} = d_{32}^{(2)} = 15$$

$i=2$, kapcsolat: 1-2

8.3. táblázat.

A legrövidebb út megoldása Dijkstra algoritmusával

Lé- pés	Megoldott csomó- pontok halmaza	d_{sj}					i	d_{si}	Kap- csolat
		d_{31}	d_{32}	d_{34}	d_{35}	d_{36}			
1	3	10	16	M	M	M	1	10	3-1
2	3,1		15	M	24	M	2	15	1-2
3	3,1,2			21	23	M	4	21	2-4
4	3,1,2,4				22	31	5	22	4-5
5	3,1,2,4,5					31	6	31	4-6 5-6

3. lépés

$$d_{34}^{(3)} = \min\{d_{34}^{(2)}, d_{32}^{(2)} + c_{24}\} = \min\{M, 15 + 6\} = 21 \quad \text{kapcsolat 2-4}$$

$$d_{35}^{(3)} = \min\{d_{35}^{(2)}, d_{32}^{(2)} + c_{25}\} = \min\{24, 15 + 8\} = 23 \quad \text{kapcsolat 2-5}$$

$$d_{36}^{(3)} = \min\{d_{36}^{(2)}, d_{32}^{(2)} + c_{26}\} = \min\{M, 15 + M\} = M$$

$$d_{3i}^{(3)} = \min\{21, 23, M\} = d_{34}^{(3)} = 21$$

$i=4$, kapcsolat: 2-4

4. lépés

$$d_{35}^{(4)} = \min\{d_{35}^{(3)}, d_{34}^{(3)} + c_{45}\} = \min\{23, 21 + 1\} = 22 \quad \text{kapcsolat 4-5}$$

$$d_{36}^{(4)} = \min\{d_{36}^{(3)}, d_{34}^{(3)} + c_{46}\} = \min\{M, 21 + 10\} = 31 \quad \text{kapcsolat 4-6}$$

$$d_{3i}^{(4)} = \min\{22, 31\} = d_{35}^{(4)} = 22$$

$i=5$, kapcsolat: 4-5

5. lépés

$$d_{36}^{(5)} = \min\{d_{36}^{(4)}, d_{35}^{(4)} + c_{56}\} = \min\{31, 22 + 9\} = 31 \quad \text{kapcsolat: 4-6 vagy 5-6}$$

$$d_{3i}^{(5)} = \min\{31, 31\} = d_{36}^{(5)} = 31$$

$i=6$, kapcsolat: 4-6 vagy 5-6

Legrövidebb utak: 3-1-2-4-5-6, 3-1-2-4-6

A legrövidebb útvonal meghatározásának egy másik lehetséges módja, hogy a hálózaton megkeressük a startpontból minden más csomópontba vezető legrövidebb utakat. Vegyük észre: az előző algoritmusokban minden olyan csomópontba vezető legrövidebb út már megoldott, amely közelebb van a startponthoz, mint a célpont. Ezért amikor a startpontból az összes többi csomópontba vezető legrövidebb út meghatározása a cél, akkor az algoritmus úgy módosul, hogy az n -edik iterációt addig ismételjük, amíg valamennyi csomópont megoldott nem lesz [20]. Nézzük most ezt az algoritmust.

Az úthálózatot szimbolizálja a $G=(P,E)$ irányított gráf, amely a P csomópontok és az E élek halmazából áll. A P halmaz elemeit jelölje p_i , ($i=1,2,\dots,n$), az E halmaz elemeit pedig a c_{ij} mátrix, ($i,j=1, 2,\dots,n$). A c_{ij} a p_i és a p_j csomópontokat összekötő él. Ha nincs ilyen él, akkor a

$c_{ij}=M$ nagy szám.

Legyen az $a_{ij}^{(k)}$ valamely p_i csomópontból p_j csomópontba vezető legfeljebb k élet tartalmazó legrövidebb út hossza, amely út ugyanazt a csomópontot csak egyszer tartalmazza. A $k=1, 2, \dots, n-1$ az iterációk száma. Ha nincs i -ből j -be vezető út, akkor

$$a_{ij}^{(k)}=M,$$

ahol M nagy szám.

Ha $k=1$ és $i=s$ a szabadon választható startpont, akkor az s -ből közvetlen j -be vezető utak:

$$a_{sj}^{(1)}=c_{sj}.$$

Ezeket az utakat úgy rövidíthetjük, hogy az s -ből az i -be vezető k élt tartalmazó $a_{si}^{(k)}$ utakhoz hozzávesszük a c_{ij} éleket, majd ezek halmazából kiválasztjuk a legrövidebbeket, azaz

$$a_{sj}^{(k+1)}=\min\{a_{si}^{(k)}+c_{ij}\}, \text{ ahol } i=j=1, 2, \dots, (s-1), (s+1), \dots, n, k=1, 2, \dots, n-1,$$

ha az

$$a_{sj}^{(k+1)} < a_{sj}^{(k)},$$

különben

$$a_{sj}^{(k+1)} = a_{sj}^{(k)}.$$

Az élsorozat záródását úgy akadályozzuk meg, hogy $s=j$ esetén

$$c_{sj} = M.$$

A fenti formulát rekurzívan alkalmazva, legfeljebb $k=n-1$ lépés után megkapjuk az s -ből a $j=1, 2, \dots, (s-1), (s+1), \dots, n$ -be vezető legrövidebb utakat.

Még általánosabb megoldása a legrövidebb útvonal problémájának az, hogy megkeressük a legrövidebb utat minden egyes csomópontból, minden egyes másik csomópontba. További általánosítás lehet az élek nem negativitására vonatkozó kikötést elhagyása. Ugyanakkor az út kijelölését a minimumkritérium mellett más megszorításokhoz is köthetjük. Ezek a változatok előfordulhatnak különböző alkalmazásokban.

8.3.3 Alkalmazások

Mielőtt elemeznénk az alkalmazási lehetőségeket, egy fontos ténytet kell hangsúlyoznunk. A problémát, mint a startpont és a célpont közötti távolság minimalizálását írtuk le. Valójában azonban megoldást úgy kaptunk, hogy a bemutatott módszerrel minimalizáltuk a két kitüntetett csomópont közötti élekhez rendelt költségek összegét. Az élekhez rendelt értékek azonban más, nemcsak távolság jellegű mennyiségek lehetnek. Egy él megfelelhet valamilyen tevékenységnek, és ha az él értéke a tevékenység költsége, akkor a feladat megkeresni, hogy a tevékenységek elvégzésének mely sorrendje biztosítja, a meghatározott cél szerint, a költségek minimumát. Más esetben, ha az élekhez a tevékenységek időszükségletét rendeljük, akkor a feladat az idő minimalizálása a tevékenységek sorrendjének optimális megválasztásával. Az említett példák érzékeltetik, hogy a legrövidebb út problémájának sokszor semmi köze sincs a távolsághoz.

A legrövidebb út a logisztikában széles körben alkalmazható modell, amelyek között a legrövidebb, a leggyorsabb stb. gépjármű útvonalak kijelölését és a hálótervezést említjük. Az utóbbi területeken a legrövidebb út probléma számos esetben szubrutinként fordul elő

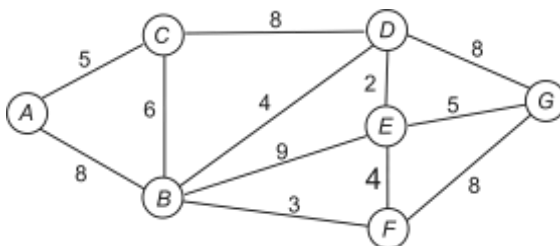
8.1. példa: Egy repülőtéren három éven belül automatikus csomagszállító pályát helyeznek üzembe. Addig a csomagokat vontatótargoncával szállítják a repülőgépekhez és vissza. Az erős igénybevétel miatt a vontatótargonca üzemeltetési és karbantartási költségei gyorsan növekszenek. A költségek emelkedése olyan mértékű, hogy felvetődik a kérdés: nem gazdaságosabb-e esetleg a targoncát évente, vagy kétfévente lecserélni újra. Az éves költségeket a használati idő függvényében a következő táblázat foglalja össze:

		j		
		1	2	3
i	0	8	18	31
	1		10	21
	2			12

A táblázat i -edik sorában és j -edik oszlopában található elem a régi vontatóért beszámított értékkel csökkentett bekerülési és üzemeltetési költség, ahol $i=0, \dots, 2$ a beszerzés éve, a $j=1, \dots, 3$ a csere éve. Például a 0-dik évben vásárolt 2 évig üzemeltetett, azaz a második évben lecserélt vontató költsége a 18 egység a második év végéig, ha azonban minden évben lecseréljük a vontatót, akkor a költség harmadik év végéig $8+10+12$ egység.

Határozzuk meg, a következő három évben mikor cseréljük le a vontatót, ha az összes költséget minimalizálni akarjuk. A feladatot fogalmazzuk meg legrövidebb út problémaként és rajzoljuk meg a gráfot.

8.2. példa



Az A városban található mentőállomásra riasztás érkezik a G városból. Melyik útvonalon haladjon a mentő ahhoz, hogy a legrövidebb idő alatt a G városba érjen. A hálózat éleire írt számok az adott szakasz megtételéhez szükséges időt tartalmazzák percekben.

8.4. A minimális költségű feszítőfa

A minimális költségű feszítőfa és az előző pontban tárgyalt legrövidebb út probléma között sok közös vonás fedezhető fel. Mindkét esetben adottak a csomópontok és az élek a hozzájuk rendelt költségekkel. Itt a feladat kiválasztani a hálózat azon éleit, amelyek összes költsége a legkisebb, úgy hogy a hálózat minden csomópontja össze legyen kötve. Az éleket olyan módon kell kiválasztani, hogy az eredményhálózat egy olyan fát formáljon, amely a hálózat minden csomópontját összeköti, vagyis meg kell keresni azt a feszítőfát, amelynek a költsége minimális.

E problémának számos fontos közvetlen gyakorlati alkalmazása ismert, pl. hasznos lehet szállítási hálózatok tervezésében, de sokszor a minimális költségű feszítőfa induló megoldást szolgáltat más algoritmusok számára. A csomópontok jelképezhetnek egymásból elérhető településeket. Az élek ekkor a szállítópályák (autópálya, vasút, légifolyosó stb.), az élek költségei pedig a távolságok. Ebben a szövegösszefüggésben a minimális költségű feszítőfa meghatározása azoknak a szállítópályáknak a kiválasztását jelenti, amelyeken a települések minimális összes költséggel érhetők el egymásból. Egy másik alkalmazási terület az összehasonlító döntéselőkészítés, pl. nagyméretű kommunikációs és elosztási hálózatok tervezésekor.

A minimális költségű feszítőfa problémája nagyon egyszerűen megoldható, és egyike azon kevés operációkutatási problémának, amelynél a megoldás bármely pontból indulva elérhető. Az első lépést, a lehető legrövidebb él kiválasztását bármely csomópontnál kezdhetjük, mivel a korábbi döntések nincsenek hatással a következő döntésekre.

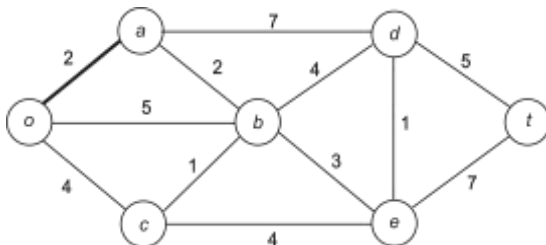
8.4.1 Algoritmus a minimális költségű feszítőfa meghatározására

1. Válasszunk a hálózaton egy tetszőleges csomópontot és kapcsoljuk éllel a legközelebb eső szomszédos csomóponthoz.
2. Keressünk meg azt a nem kapcsolt szomszédos csomópontot, amelyik legközelebb esik valamelyik kapcsolt csomóponthoz, majd az így meghatározott két csomópontot kössük össze éllel. Ezt a lépést addig ismételjük, amíg minden csomópont nem kapcsolódik.

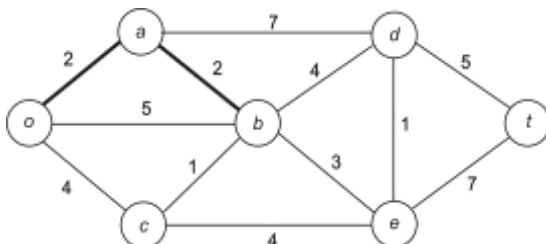
Mintapélda:

A bemutatott algoritmus kézi és grafikus megoldásának menetét a mintapélda második kérdésének megválaszolása kapcsán ismertetjük. Emlékeztetőül: telefonhálózatot kell az utak alatt kiépíteni (8.1. ábra), amely kommunikációt biztosít az összes csomópont között. A kérdés, milyen nyomvonalon kell a telefonvonalakat lefektetni ahhoz, hogy az összes vezeték hossz minimális legyen.

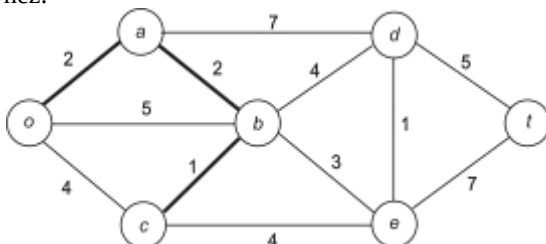
Válasszuk önkényesen az o pontot az induláshoz. Az o -hoz legközelebb álló nem kapcsolt csomópont a , ezért kapcsoljuk a -t o -hoz.



A legközelebbi még nem kapcsolt csomópont az o -hoz és a -hoz az a -hoz legközelebb eső b csomópont, kapcsoljuk b -t a -hoz.



A legközelebbi még nem kapcsolt csomópont az o , a , b -hez a b -hez legközelebb álló c csomópont, kapcsoljuk c -t b -hez.

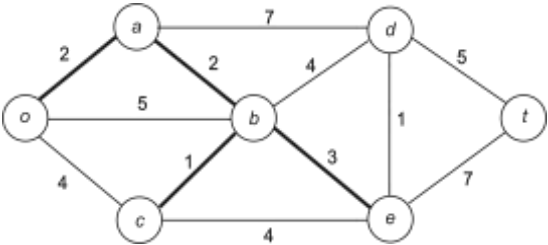


8.4. táblázat.

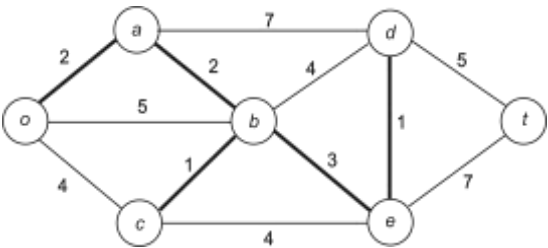
A minimális költségű feszítőfa kijelölése a mintapéldában

Lépés	Kapcsolt csomópont, amelyhez nemkapcsolt szomszédos csomópont tartozik	Legközelebbi nemkapcsolt szomszédos csomópont	Kapcsolóél költsége	Feszítőfa éle
1	<i>o</i>	<i>a</i>	2	<i>oa</i>
2	<i>o</i> <i>a</i>	<i>b</i>	2	<i>ab</i>
3	<i>o</i> <i>a</i> <i>b</i>	<i>c</i>	1	<i>bc</i>
4	<i>a</i> <i>b</i> <i>c</i>	<i>e</i>	3	<i>be</i>
5	<i>a</i> <i>b</i> <i>e</i>	<i>d</i>	1	<i>ed</i>
6	<i>d</i> <i>e</i>	<i>t</i>	5	<i>dt</i>
Összesen			14	

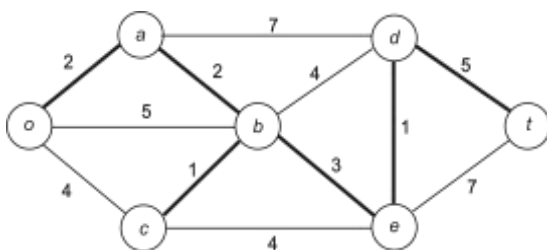
A legközelebbi még nem kapcsolt csomópont az *o*, *a*, *b*, *c*-hez a *b*-hez legközelebb álló *e* csomópont, kapcsoljuk *e*-t *b*-hez.



A legközelebbi még nem kapcsolt csomópont az *o*, *a*, *b*, *e*-hez az *e*-hez legközelebb eső *d* csomópont, kapcsoljuk *d*-t *e*-hez.



Most már csak az a *d*-hez legközelebb álló *t* az egyetlen nem kapcsolt csomópont, kapcsoljuk *t*-t *d*-hez.



Miután már minden csomópont összefüggő, az optimális megoldás az élek összege, azaz 14 egység. Végül a 8.4. táblázatban összefoglaljuk az eljárás lépéseit.

8.4.2 Minimális költségű feszítőfa kijelölése az illeszkedési mátrixszal

Az illeszkedési (incidencia) mátrix (A) a csomópontok és az élek közötti összefüggéseket, kapcsolatokat írja le. A mátrix sorai a csomópontoknak, az oszlopai pedig az éleknek felelnek meg. Ha az i -edik csomópont a j -edik él kezdőpontja, akkor az A mátrix a_{ij} elemének értéke 1, ha az i -edik csomópont a j -edik él végpontja, akkor $a_{ij} = -1$, különben az $a_{ij} = 0$. A 8.1. ábrán bemutatott hálózat illeszkedési mátrixa és az élek költsége (c_{ij}):

		(oa)	(ob)	(oc)	(ab)	(ad)	(bc)	(bd)	(be)	(ce)	(de)	(dt)	(et)
A=	o	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	a	-1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	b	0	-1	0	-1	0	1	1	1	0	0	0	0
	c	0	0	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0	0
	d	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	1	1	0
	e	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	1
	t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
	c _{ij}	2	5	4	2	7	1	4	3	4	1	5	7

Vegyük észre, hogy mivel minden élnek egy kezdő és egy végpontja van, az A mátrix minden oszlopában két nullától különböző elem található, az egyik értéke 1, a másiké -1 .

Először rendezzük a hálózat éleit a költségek szerint növekvő sorrendbe. A rendezett illeszkedési mátrix:

A=		(bc)	(de)	(oa)	(ab)	(be)	(oc)	(bd)	(ce)	(ob)	(dt)	(ad)	(et)
	o	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
	a	0	0	−1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
	b	1	0	0	−1	1	0	1	0	−1	0	0	0
	c	−1	0	0	0	0	−1	0	1	0	0	0	0
	d	0	1	0	0	0	0	−1	0	0	1	−1	0
	e	0	−1	0	0	−1	0	0	−1	0	0	0	1
	t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	−1
	c _{ij}	1	1	2	2	3	4	4	4	5	5	7	7

A rendezett illeszkedési mátrix első oszlopában válasszunk ki (tetszőlegesen) az egyik csomópontot, ez legyen a b pont, majd ezt kapcsoljuk a közvetlen kapcsolható c csomóponthoz. Az illeszkedési mátrixban ez a művelet (a kapcsolat) a két kiválasztott csomópont (a kezdő- és a végpont) sorainak összeadását jelenti. Adjuk össze a b és c pontokhoz tartozó sorokat. A kap-

csolást a mátrixban az összeadás eredményeként kapott sorban a $\{bc\}$ jelzés és feszítőfához hozzáadott él oszlopának a kiemelése jelzi. A feszítőfa első éle a kiemelt oszlopnak megfelelő (bc) él lesz.

	(bc)	(de)	(oa)	(ab)	(be)	(oc)	(bd)	(ce)	(ob)	(dt)	(ad)	(et)
o	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
a	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
$\{b,c\}$	0	0	0	-1	1	-1	1	1	-1	0	0	0
d	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	-1	0
e	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	1
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1
c_{ij}	1	1	2	2	3	4	4	4	5	5	7	7

Keressük a kapcsolt csomópontokhoz $\{b,c\}$ a legrövidebb éllel közvetlen kapcsolható még nem kapcsolt csomópontot, és a két csomópontot kössük össze a megfelelő éllel. (A keresést mindig az első oszlophoz legközelebb álló oszlopokban végezzük, tekintettel az élköltségek növekvő sorrendjére.) A kapcsolt csomópontok halmazához ($\{b,c\}$) a legrövidebb éllel közvetlen kapcsolható még nem kapcsolt csomópont az a pont, amely az (ab) éllel kapcsolható. Adjuk össze a $\{b,c\}$ halmaznak és az a pontnak megfelelő sorokat. A feszítőfa következő éle az (ab) él lesz.

	(bc)	(de)	(oa)	(ab)	(be)	(oc)	(bd)	(ce)	(ob)	(dt)	(ad)	(et)
o	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
$\{a,b,c\}$	0	0	-1	0	1	-1	1	1	-1	0	1	0
d	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	-1	0
e	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	1
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1
c_{ij}	1	1	2	2	3	4	4	4	5	5	7	7

A következő lépésben az $\{a,b,c\}$ halmazhoz a legrövidebb éllel kapcsolható pont az o . A kapcsoló él, amely egyben a feszítő következő éle, az (oa) él.

	(bc)	(de)	(oa)	(ab)	(be)	(oc)	(bd)	(ce)	(ob)	(dt)	(ad)	(et)
$\{o,a,b,c\}$	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
d	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	-1	0
e	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	1
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1
c_{ij}	1	1	2	2	3	4	4	4	5	5	7	7

Az eljárást folytatva, az $\{o,a,b,c\}$ halmazhoz legrövidebb éllel közvetlen kapcsolható csomópont az e , amit a (be) éllel kapcsolhatunk. Az új mátrix az első és a harmadik sor összeadása után:

	(bc)	(de)	(oa)	(ab)	(be)	(oc)	(bd)	(ce)	(ob)	(dt)	(ad)	(et)
$\{o,a,b,c,e\}$	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
d	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	-1	0
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1
c_{ij}	1	1	2	2	3	4	4	4	5	5	7	7

Az eljárás további lépései azok részletezése nélkül.

	(bc)	(de)	(oa)	(ab)	(be)	(oc)	(bd)	(ce)	(ob)	(dt)	(ad)	(et)
$\{o,a,b,c,d,e\}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1
c_{ij}	1	1	2	2	3	4	4	4	5	5	7	7

	(bc)	(de)	(oa)	(ab)	(be)	(oc)	(bd)	(ce)	(ob)	(dt)	(ad)	(et)
$\{o,a,b,c,d,e\}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c_{ij}	1	1	2	2	3	4	4	4	5	5	7	7

A minimális költségű feszítőfa élei: (bc), (de), (oa), (ab), (be) és (dt). Az élek költségeinek összege: $z=1+1+2+2+3+5=14$.

Megjegyezzük, az algoritmus alkalmas tetszőleges feszítőfa kijelölésére is. Ebben az esetben az illeszkedési mátrix éleit nem kell növekvő sorrendbe rendezni.

8.4.3 Minimális költségű feszítőfa kijelölése a Kruskal algoritmussal

Kruskal algoritmus a sok tekintetben hasonlít a 8.4.2 pontban ismertetett algoritmusra. Az algoritmus bemenete egy $G(P,E)$ irányítatlan gráf, amelyben az E halmaz elemei a (v,w) élek, kimenete G -nek egy minimális költségű feszítőfája $S(P,T)$. Kezdetben legyen Q a (vw) éleket tartalmazó halmaz, és legyen PS a csomópontokat tartalmazó W_i , $(i=1,2,\dots,n)$ halmazok összessége. Az algoritmus lépései:

1. Rendezzük Q -t a (vw) élek költségei szerint növekvő sorrendbe.
2. Válasszuk Q -ból azt a (vw) élt, amelynek a költsége a legkisebb, és az így kiválasztott (vw) élt hagyjuk el Q -ból.
3. Ha a v és w különböző W_1 és W_2 halmazokhoz tartoznak a PS -ben, akkor a (vw) élt adjuk a T -hez, egyidejűleg egyesítsük a W_1 és W_2 halmazokat $(W_1 \cup W_2)$, és a W_1 és W_2 halmazok helyébe tegyük a $W_1 \cup W_2$ -t. Ha a v és w ugyanannak a W_i halmaznak az elemei a PS -ben, akkor a (vw) él nem tartozik a feszítőfa éleihez, azaz elvetjük.
4. Ha a feszítőfához vett élek száma kisebb, mint $n-1$, akkor térjünk vissza a 2 lépéshez, különben megkaptuk a minimális költségű feszítőfa éleit.

Az algoritmus bemutatásához ismét tekintsük a 8.1. ábrán látható irányítatlan hálózatot. Az élek növekvő költségei listája (Q):

(vw) él	(vw) él költsége	(vw) él	(vw) él költsége
(bc)	1	(bd)	4
(de)	1	(oc)	4
(oa)	2	(ce)	4
(ab)	2	(dt)	5
(be)	3	(et)	7

A minimális költségű feszítőfa szerkesztésének lépései:

(vw) él	Művelet	PS halmazai	Feszítőfa élei (T)	Élek költsége
		{a}, {b}, {c}, {d}, {e}, {o}, {t}		
(bc)	Hozzáveszi	{a}, {b, c}, {d}, {e}, {o}, {t}	(bc)	1
(de)	Hozzáveszi	{a}, {b, c}, {d, e}, {o}, {t}	(de)	1
(oa)	Hozzáveszi	{o, a}, {b, c}, {d, e}, {t}	(oa)	2
(ab)	Hozzáveszi	{o, a, b, c}, {d, e}, {t}	(ab)	2
(be)	Hozzáveszi	{o, a, b, c, d, e}, {t}	(be)	3
(bd)	Elveti			
(oc)	Elveti			
(ce)	Elveti			
(dt)	Hozzáveszi	{o, a, b, c, d, e, t}	(dt)	5
Összesen				14

A feszítőfa élei: (bc), (de), (oa), (ab), (be), (dt); a minimális költségű feszítőfa költsége: $z = 1+1 + 2+2+3+5=14$.

8.3. példa: Egy egyetem számítógépes hálózatot kíván kiépíteni, amellyel a tanszékeket (T_i) kívánja összekötni a rektori hivattal (R). A rektori hivatalhoz a tanszékek egymáson keresztül is csatlakoztathatók, vagyis nem szükséges az egyes tanszékeket közvetlen vonallal a rektori hivatalhoz kötni. A hálózat kiépítésének költsége arányos a távolsággal. A távolság m -ben a rektori hivatal és az egyes tanszékek között a következő:

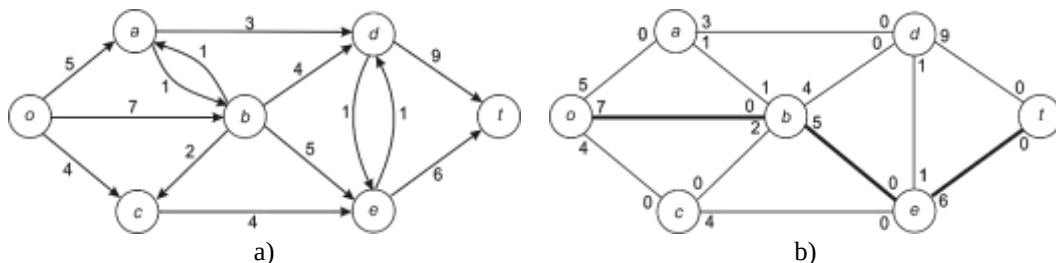
	R	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
R	–	190	70	115	270	160
T_1	190	–	100	240	215	50
T_2	70	100	–	140	120	220
T_3	115	240	140	–	175	801
T_4	270	215	120	175	–	310
T_5	160	50	220	801	310	–

Meghatározandó, melyik tanszék melyik tanszékkel legyen közvetlen összekötve úgy, hogy közvetett vagy közvetlen kapcsolat legyen minden tanszék és a rektori hivatal között, valamint a beruházás költsége a lehető legkisebb legyen.

8.5. A maximális folyam problémája

A maximális folyam egy speciális elosztási feladat, amelyet egy irányított, összefüggő és korlátozott kapacitású éleket tartalmazó hálózaton értelmezünk. A feladat különlegessége abban rejlik, hogy egy feladóval szemben csak egy megrendelő áll, mégpedig előre nem rögzített nagyságú megrendeléssel. A hálózat két kitüntetett csomópontja közül az egyik a forrás, a másik a nyelő, a többi pedig közvetítő csomópont. A kérdés most az, hogy a feladó csomópontból a megrendelő csomópontba vezető összes útnak mekkora az együttes maximális átbocsátóképessége. E kérdés megválaszolásához a hálózat szűk keresztmetszetét kell meghatározni.

A 8.2 pontban megismert mintapélda a harmadik problémájának megoldásához tekintsük a 8.4/a ábrán látható hálózatot. A csomópontok közötti élek kapacitása (k_{ij}) korlátozott, a korlátokat a hálózat éleire írt számok jelentik. Ha két csomópont között két él fut, akkor az élkapacitások mindkét irányban korlátozottak, pl. az a csomóponttól b -ig $k_{ab}=1$, és b -től az a -ig ugyancsak $k_{ba}=1$ rakomány haladhat egyidejűleg. A kérdés, mekkora termékmennyiség képes ez az úthálózat átbocsátani, azaz az o belépési pontból egyidejűleg mennyi terméket lehet a t csomópontba szállítani.



8.4. ábra: A mintapélda élkapacitásainak ábrázolása

A hálózat éleinek irányítását praktikus okokból nemcsak nyilak, hanem számok is mutathatják (8.4/b ábra). Az ábrán minden olyan él, amelyiknek az egyik végén 0 szerepel egy irányított élnek felel meg. Például az o és az a csomópontok közötti, az o pontból az a-ba mutató, $k_{oa}=5$ kapacitású irányított él egy vonallal helyettesíthető, amelynek az egyik végén 5 a másik végén 0 látható. Az 5 azt jelenti, hogy az o-ból az a-ba 5 egységnyi áram folyhat, 0 pedig azt jelzi, hogy a-ból az o-ba nem folyhat áram. Az a és b pontok között két él fut, amelyek kapacitáskorlátai: $k_{ab}=1$ és $k_{ba}=1$, ezért a helyettesítő (a,b) él mindkét végén 1 szerepel. A 8.4/b ábrán látható hálózatot maradékhálózatnak nevezik.

A maximális folyam problémát meg lehet fogalmazni lineáris programozási feladatként, és megoldható a később ismertetett hálózati szimplex-módszerrel. A feladat döntési változói az (i,j) éleken áramló x_{ij} mennyiségek. A probléma célfüggvénye és feltételei:

$$(8.1) \quad z = \sum_{j=0}^n x_{0j} = \sum_{i=0}^n x_{in} \rightarrow \max, \quad i=j=0, 1, 2, \dots, n,$$

$$(8.2) \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ji} = 0, \quad \text{minden } i=1, 2, \dots, n-1 \text{ csomópontra},$$

$$(8.3) \quad 0 \leq x_{ij} \leq k_{ij}, \quad \text{minden } i \rightarrow j \text{ éltre},$$

ahol a 0 a forrás és n a nyelő csomópont. A (8.1) célfüggvény szerint a forráspontból kifolyó és a nyelőpontba befolyó áramok összege egyenlő és maximális. A (8.2) feltételben előírjuk, hogy az i -edik közvetítő pontból kifolyó és az i -edik közvetítő pontba befolyó áramok egyenlőek. Végül a (8.3) feltétel korlátozza az $i \rightarrow j$ éleken folyó áramokat.

A (8.1)-(8.3) feladat megoldására a lineáris programozásnál hatékonyabb direkt eljárások is léteznek. Mi most ezek közül a *javitóút* néven ismert eljárást mutatjuk be. Ez az algoritmus két intuitív koncepcióra épül, a *maradékhálózatra* és a *javitóútra*

Induláskor a **maradékhálózat** csak abban különbözik az eredeti hálózattól, hogy az eredeti hálózatot azokon a helyeken, ahol az (i,j) irányított élnek hiányzik a (j,i) irányított párja kiegészítjük $k_{ji}=0$ élkapacitású (j,i) irányított éllel. Ezt a 8.4. ábra élein a 0-k jelzik. Ezután a maradékhálózat élkapacitásait, amit **maradékkapacitásnak** nevezünk, a következő módon változtatjuk. Amikor a hálózat valamelyik (i,j) élére $i \rightarrow j$ irányú és Δ nagyságú áramot adunk, akkor a maradékhálózat az (i,j) él k_{ij} maradékkapacitása Δ -val csökken, a (j,i) él k_{ji} maradékkapacitása pedig Δ -val nő. A hálózaton a maradékkapacitás mutatja az élek telítettségét. Egy él akkor telített, ha a maradékkapacitása 0. Ha maradékkapacitás nagyobb, mint 0, akkor az élen a maradékkapacitásnak megfelelő mennyiségű áram továbbítható.

A **javitóút** a maradékhálózatban egy olyan irányított út a forrástól a nyelő csomópontig, amely-

ken minden él maradékkapacitása szigorúan pozitív. A maradékkapacitások minimumát a javítóúton a javítóút maradékkapacitásának nevezzük. Ez mutatja annak a folyamnak a nagyságát, amellyel növelni lehet a teljes folyamat. Könnyen belátható, hogy ha kijelölhető egy javítóút, akkor a maximális folyam is növelhető.

8.5.1 A maximális folyam probléma algoritmus

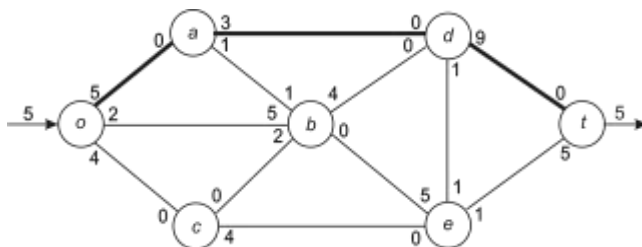
1. Keresünk egy olyan nem telített utat (valamennyi él maradékkapacitása szigorúan pozitív) a maradékhálózaton, amely a forráspontból a nyelőpontba vezet. Ha nincs ilyen út, akkor megkaptuk a maximális folyamat.
2. Az utat alkotó élek maradékkapacitásai közül kiválasztjuk a legkisebbet, ez legyen Δ . Az út minden élének k_{ij} maradékkapacitását a nyelő irányában csökkentjük, ellentétes irányban pedig növeljük a Δ értékével. A maximális folyam értékét ugyancsak Δ -val növeljük, majd visszatérünk az 1. lépéshez.

Mivel az élek száma véges, és minden lépésben legalább egy él telítődik, az eljárás véges számú lépés után biztosan maximális folyamhoz vezet.

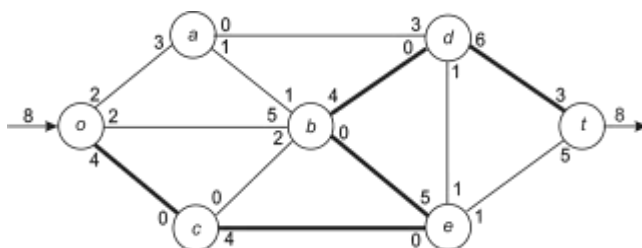
A gyakorlati végrehajtást illetően megjegyezzük, az első lépésnél számos lehetőség kínálkozik a javítóút kiválasztására, azonban amíg csak lehet, célszerű olyan utakat választani, amelynek élei a nyelő felé mutatnak, és csak azután figyelembe venni a többi utat. Később e fejezetben leírunk egy szisztematikus módszert a javítóút megtalálására.

Mintapélda:

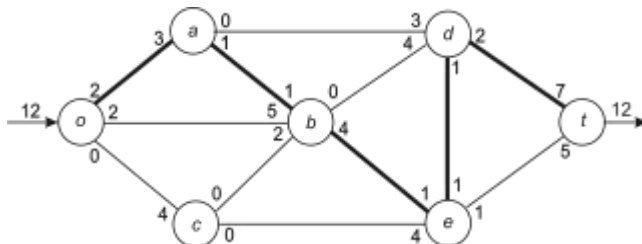
Alkalmazzuk az algoritmust a 8.4/b ábra hálózatára. A példa megoldása során a javítóutakat véletlenszerűen választjuk, pontosabban arra törekszünk, hogy a különböző szituációk előforduljanak a megoldásban. Minden egyes iteráció után megrajzoljuk a maradékhálózatot, amelyen az irányított élpárokat egyszerű vonalakkal ábrázoljuk. A javítóút élsorozatát vastag vonalakkal kiemeljük. A maradékkapacitásokat a csomópontok mellett tüntetjük fel, az (i,j) él k_{ij} maradékkapacitását az i , a (j,i) él k_{ji} maradékkapacitását pedig a j csomópont mellé írjuk. Ebben az értelemben a 8.4/b ábrán látható hálózat a kezdeti maradékhálózatnak felel meg.



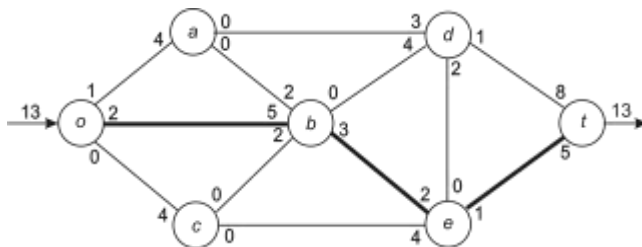
1. *iteráció:* A választott javítóút a 8.4/b ábrán $o-b-e-t$, amelynek maradékkapacitása az út éleihez tartozó minimális maradékkapacitás, azaz $\Delta = \min\{7, 5, 6\} = 5$. Ezt hozzárendelve az úthoz, $k_{ob}=2$, $k_{bo}=5$, $k_{be}=0$, $k_{eb}=5$, $k_{et}=1$, $k_{te}=5$, a maximális folyam $z=5$. A megváltozott a maradékhálózat az előző ábrán látható.
2. *iteráció:* A javítóút $o-a-d-t$, az út maradékkapacitása $\Delta = \min\{5, 3, 9\} = 3$, $z=5+3=8$. A 3-at hozzárendelve az úthoz megkapjuk az új hálózatot.



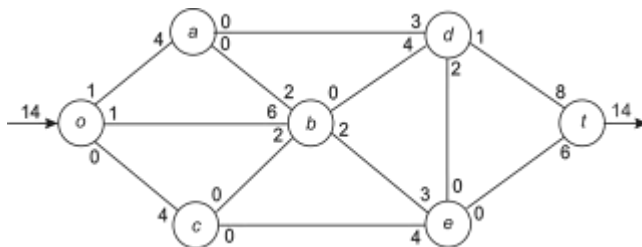
3. iteráció: A javítóút $s-c-e-d-t$, $\Delta = \min\{4, 4, 5, 4, 6\} = 4$, $z = 8 + 4 = 12$. A 4-et hozzárendelve az úthoz megkapjuk az új hálózatot.



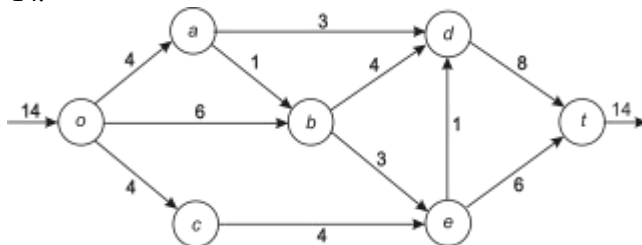
4. iteráció: A javítóút $s-a-b-e-d-t$, $\Delta = \min\{2, 1, 4, 1, 2\} = 1$, $z = 12 + 1 = 13$. Az 1-et hozzárendelve az úthoz megkapjuk az új hálózatot.



5. iteráció: A javítóút $s-b-e-t$, $\Delta = \min\{2, 3, 1\} = 1$, $z = 13 + 1 = 14$. Az 1-et hozzárendelve az úthoz megkapjuk az új hálózatot.

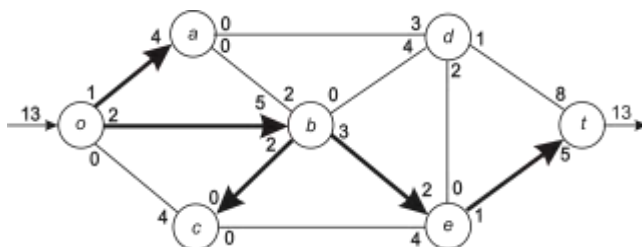


6. iteráció: A maradékhálózaton már nem található több javítóút, így az eljárásnak vége. A maximális folyam: $z = 14$.



8.5. ábra. A mintapélda megoldása

A egyes éleken áramló áramokat úgy kapjuk meg, hogy az eredeti hálózat nyelő irányú élkapacitásaiból levonjuk az élek utolsó iterációban kapott, nyelő irányú maradékkapacitáit. A mintapélda végső megoldását a tényleges folyamatokkal a 8.5. ábra szemlélteti.

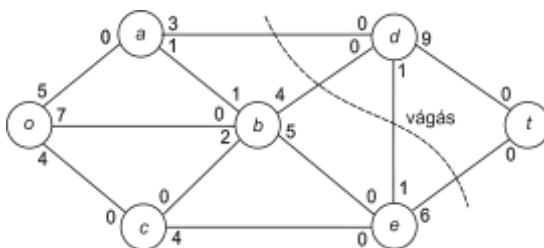


8.6. ábra. Eljárás a javítóút meghatározására

Nagy hálózatokon az algoritmus legnehezebb része a javítóút megkeresése. Ez a feladat egyszerűsíthető a következő szisztematikus eljárással. A forráspontból indulva keressük a szigorúan pozitív maradékkapacitással rendelkező élekkel közvetlen kapcsolódó csomópontokat. Ezután az így elért csomópontokból kiindulva újabb, korábban nem érintett, szigorúan pozitív maradékkapacitású élekkel kapcsolódó csomópontokat határozhatunk meg. Ezt az eljárást ismételve eredményül egy fát kapunk, melynek minden csomópontja szigorúan pozitív maradékkapacitású élsorozatot tartalmazó utak mentén érhető el a forráspontból. Ez a legyezőszerűen szétterjedő eljárás mindig meg fog határozni egy javítóutat, ha az egyáltalán létezik. Az eljárást a 8.6. ábra mutatja a 4. iteráció után kapott maradékhálózatra.

8.5.2 Maximális folyam - minimális vágás

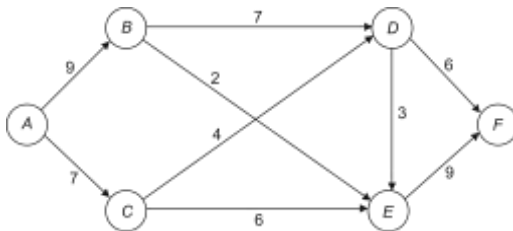
A bemutatott eljárással a maximális folyamot viszonylag gyorsan meghatározhatjuk, mégis szerencsés lenne, ha az optimális megoldást javítóutak keresése nélkül is megkapnánk. Ez néha lehetséges is egy fontos hálózatelméleti tétel segítségével, ami *maximális folyam - minimális vágás* néven ismert.



8.7. ábra. A minimális vágás a mintapéldában

Ahhoz, hogy a tételt ismertessük, először meg kell mondanunk, mit értünk a vágás alatt. **Vágásnak** nevezünk egy olyan élhalmazt, amelyet a hálózatból elhagyva, már nem lehet eljutni a forráspontból a nyelőpontba. A **vágás kapacitását** úgy definiáljuk, mint azt a maximális mennyiséget, amit a forráspontból a nyelőpont felé mutató irányban a vágás képes át bocsátani. A maximális folyam minimális vágás tétele azt mondja ki, hogy az a maximális mennyiség, amit el lehet juttatni a forráspontból a nyelőpontig, az összes vágáskapacitás közül a minimálissal egyenlő. Ennek meghatározása nem mindig egyszerű, mivel meg kell vizsgálni az összes vágás kapacitását. A mintapéldában szerencsére ez nem jelent nehézséget. A minimális vágás értéke $3+4+1+6=14$ (8.7. ábra).

8.4. példa: Határozzuk meg az alábbi hálózaton a A -ból a F -be vezethető maximális folyamot.



8.6. A minimális költségű folyam

A hálózat optimalizálási modellek között a minimális költségű folyam problémája központi helyet foglal el, mivel az alkalmazások több osztályát foglalja magában, és azért is, mert különösen hatékonyan lehet megoldani. Hasonlóan a maximális folyam problémájához, feltételezzük, hogy az áramlás a hálózat korlátozott kapacitású élein történik. Az áramlás költsége (távolsága), ugyanúgy, mint a legrövidebb út problémájában az élekhez rendelt. A szállítási vagy a hozzárendelési problémához hasonlóan az áramlás lehet többforrásos (feladó csomópontok) és többcélú (megrendelő csomópontok), amelyhez még az élekhez rendelt fajlagos költségek társulnak. Az átrakási problémához hasonlóan a csomópontokat tekinthetjük átrakási pontoknak a feladók és a megrendelők között. Mint azt később röviden bemutatjuk, a korábban tárgyalt öt modell a minimális költségű folyam egy-egy speciális esete.

A minimális költségű folyam megoldására rendkívül hatékony algoritmus áll a rendelkezésünkre. A problémát ugyanis meg lehet fogalmazni lineáris programozási feladatként, és így meg lehet oldani a szimplex-módszerből származtatott, *hálózati szimplex-módszernek* nevezett eljárással. Az algoritmust a következő részben írjuk le.

Vegyünk egy irányított és összefüggő hálózatot, amely n csomópontot tartalmaz legalább egy forrással és legalább egy nyelővel. A döntési változók:

$$x_{ij} = \text{áram az } i \rightarrow j \text{ élen};$$

az adott információk:

$$c_{ij} = \text{az áramlás fajlagos költsége az } i \rightarrow j \text{ élen},$$

$$k_{ij} = \text{az } i \rightarrow j \text{ él kapacitása},$$

$$b_i = \text{az } i\text{-edik csomópont által generált áramlás}.$$

A b_i értéke i csomópont természetétől függ,

$$b_i > 0, \text{ ha az } i\text{-edik csomópont forrás},$$

$$b_i < 0, \text{ ha az } i\text{-edik csomópont nyelő},$$

$$b_i = 0, \text{ ha az } i\text{-edik csomópont átrakó- vagy közvetítőpont}.$$

A cél az összes áramoltatási költség minimalizálása úgy, hogy a forrásokból a készletek el legyenek szállítva, és a megrendelők igényei ki legyenek elégítve.

Az ismertetett probléma célfüggvénye és feltételei:

$$(8.1) \quad z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$(8.2) \quad \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = b_i, \text{ minden } i\text{-re},$$

$$(8.3) \quad 0 \leq x_{ij} \leq k_{ij}, \text{ minden } i \rightarrow j\text{-re}.$$

Az első feltétel: az i -edik csomópontból kiáramló és i -edik csomópontba beáramló mennyiségek

különbsége az i -edik csomópont igényével vagy feladásával egyenlő. A második feltétel azt mondja ki, hogy az $i \rightarrow j$ élen a k_{ij} kapacitásnál nagyobb mennyiség nem áramolhat, és a negatív mennyiségek áramlása nem értelmezett.

Néhány alkalmazásban szükségszerű lehet az élkapacitás korlátozása alulról is, azaz $L_{ij} \leq x_{ij} \leq k_{ij}$, ahol $L_{ij} > 0$. Ez az eset a változók $x'_{ij} = x_{ij} - L_{ij}$ transzformációjával és $x_{ij} = x'_{ij} + L_{ij}$ helyettesítéssel visszavezethető az alapmodellre.

A feladat megoldása természetesen úgy, mint általában nem garantált, a lehetséges megoldás a háló struktúrájától és élek kapacitásától függ. Az ésszerűen megtervezett hálózat esetén a lehetséges megoldás szükséges feltétele a következő:

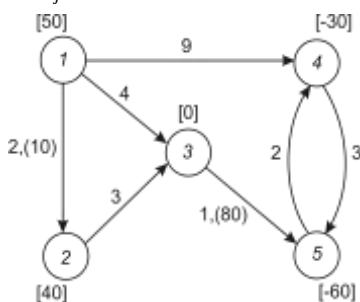
$$(8.4) \quad \sum_i b_i = 0,$$

azaz a feladó és megrendelő csomópontokon generált források és nyelések összege 0 legyen.

Az alkalmazásokban, hasonlóan a szállítási feladathoz, ez a feltétel ritkán teljesül. A szállítási feladatban ezt a problémát fiktív feladók vagy megrendelők bevonásával oldottuk meg. Az analóg lépés a minimális folyam problémában, hogy fiktív feladó vagy megrendelő csomópontot adunk a hálózathoz $c_{ij}=0$ költségű élekkel. A fiktív megrendelő csomópont minden feladó csomóponthoz $c_{ij}=0$ éllel kapcsolódik, igénye elnyeli a felesleges forrást. A fiktív feladó csomópont pedig minden megrendelő csomóponthoz $c_{ij}=0$ éllel kapcsolódik, és pótolja a megrendelő csomópontokon felmerült hiányt.

Számos alkalmazásban a b_i és k_{ij} mennyiségek egész számok, amiből következik, hogy az x_{ij} értékeknek is egész számoknak kell lenniük. Szerencsére, csakúgy, mint a szállítási problémában, ez az feltétel automatikusan teljesül.

Egy példát szemléltet a minimális költségű folyam problémára a 8.8. ábra. A b_i értékek szögletes zárójelben a csomópontok mellett szerepelnek, így az 1 és 2 feladó csomópontokon ($b_i > 0$), a 4 és 5 megrendelő csomópont ($b_i < 0$) és a 3 közvetítőponon ($b_i = 0$). A c_{ij} fajlagos költségeket az élek mellett ábrázoltuk. A példában két él kapacitását korlátoztuk, $k_{12}=10$ és $k_{35}=80$ (ezeket kerek zárójelbe írtuk), a többi élen a $k_{ij}=M=\infty$.



8.8. ábra. Mintapélda a minimális költségű folyam problémához

A feltételi egyenleteket szimplextáblába foglaltuk (8.5. táblázat), ahol figyeljük meg a csomópontokra írt egyenletek változóit. Mindegyik változónak pontosan kettő nem nulla együtthatója van, és ezek közül az egyik $+1$, a másik -1 . Ez a struktúra minden minimális költségű folyam problémában visszatér, és ennek a speciális struktúrának köszönhető az integer megoldás.

8.5. táblázat

	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{35}	x_{45}	x_{54}	b_i
u_1	1	1	1					50
u_2	-1			1				40
u_3		-1		-1	1			0
u_4			-1			1	-1	-30
u_5					-1	-1	1	-60
y_{12}	1							10
y_{35}					1			80
	2	4	9	3	1	3	2	0

Egy másik jelzése e speciális struktúrának, hogy a csomóponti egyenletek közül az egyik felesleges. Ennek oka, hogy egyenletek összegzése a (8.4) feltétel miatt 0-t eredményez. Ha $(n-1)$ független egyenlettel korlátozzuk a feladatot, akkor azok $(n-1)$ bázisváltozót határoznak meg. Az $(n-1)$ bázisváltozó pedig a feszítőfa $(n-1)$ élének felel meg.

A minimális költségű folyam probléma megoldására alkalmazható eljárás, az ún. hálózati szimplex-módszer, alapja a standard szimplex-módszer, ezért a lépései nagyon hasonlóak az eredeti eljáráshoz. A hálózati szimplex-módszerben egy lehetséges bázismegoldásból kiindulva a változók cseréjével javítjuk a programot, azonban a kihasználva a hálózati struktúra előnyeit nincs szükségünk a szimplex-táblára. Látni fogjuk, hogy bizonyos hasonlóságok fedezhetők fel a szállítási feladat megoldására alkalmazott disztribúciós módszer és a hálózati szimplex-módszer között is, ami nem véletlen, mivel mindkét eljárás a szimplex-módszeren alapul. Azt is mondhatjuk, hogy a hálózati szimplex-módszer a disztribúciós módszer kiterjesztett változata, amely kiterjesztés alkalmassá teszi más típusú feladatok megoldására is.

8.6.1 A hálózati szimplex-módszer alapjai

A hálózati szimplex-módszer a felsőkorlátos szimplex-módszerben használt technikát alkalmazza az $x_{ij} \leq k_{ij}$ élkapacitás-korlátok hatékony kezelésére. Mint ismeretes, ez a technika lehetővé teszi, hogy az eredetileg feltételi egyenletek formájában leírható kapacitáskorlátokat ún. **nem-negativitási feltételként** kezeljük, és ezzel a számítási időt lényegesen befolyásoló feltételi egyenletek számát csökkentjük [47].

A **felsőkorlát technika** alkalmazhatósága a speciális transzformációnak köszönhető, ami a korábban bemutatott probléma (8.8. ábra) szimplextáblájából (8.5. táblázat) érthető meg, ahol a felsőkorlátos duálváltozókat y_{ij} -vel jelöltük.

Vonjuk be a primálbázisba az x_{12} -t, még pedig úgy, hogy az y_{12} sorában az x_{12} együtthatóját válasszuk generálóelemnek. A transzformáció során a szimplex-táblában a 0 elemek miatt csak a generálóelem és a kapacitásvektor (b_i) oszlopa változik. A generálóelem $1=1^{-1}$ miatt változatlan marad, az oszlop többi eleme pedig előjelet vált. Így a célfüggvény sorában a $c_{12}=2$ $c_{12}=-2$ -re módosul. A kapacitásvektor oszlopában a b_1 k_{12} -vel csökken, a b_2 pedig k_{12} -vel növekszik. Ez a transzformáció bármikor is következik be, a 0 elemek, illetve az 1 és -1 együtthatók miatt mindig megtartja ezt a sajátosságát, ami feleslegessé teszi a felsőkorlátokra vonatkozó előírások feltételi egyenletként való kezelését. Ezek a sorok a szimplex-táblából elhagyhatók. A vektorcsere alkalmával elegendő azt figyelni, hogy a korlátos változó elérte-e a felsőhatárt vagy sem. Ha az $x_{ij} < k_{ij}$ vagy $y_{ij} < k_{ij}$, akkor normál primáltranszformációt végzünk. Ha viszont elérve a felsőhatárt $x_{ij} = k_{ij}$ vagy $y_{ij} = k_{ij}$, akkor az x_{ij} -t $x_{ij} = k_{ij} - y_{ij}$ -vel, illetve y_{ij} -t $y_{ij} = k_{ij} - x_{ij}$ -vel helyettesítjük.

Ekkor az x_{ij} , illetve y_{ij} **elhagyott bázisváltozóvá** válik, az $y_{ij}=0$, illetve $x_{ij}=0$ **nem-bázisváltozó** lesz. A transzformációt a 8.6. táblázatban figyelhetjük meg.

8.6. táblázat

	y_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{35}	x_{45}	x_{54}	b_i
u_1	-1	1	1					40
u_2	1			1				50
u_3		-1		-1	1			0
u_4			-1			1	-1	-30
u_5					-1	-1	1	-60
x_{12}	1							10
y_{35}					1			80
	-2	4	9	3	1	3	2	-20

Ha az optimalitás kritériumai teljesülnek, az optimális megoldás a következőképpen olvasható le:

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \text{ha az } x_{ij} \text{ a primálbázisban van, azaz } 0 < x_{ij} < k_{ij}, \\ k_{ij} - y_{ij}, & \text{ha az } y_{ij} \text{ a primálbázisban van } 0 < y_{ij} < k_{ij}, \\ x_{ij} = k_{ij}, & \text{ha az } y_{ij} \text{ a duálbázisban van, azaz } y_{ij} = 0, \\ x_{ij} = 0, & \text{ha az } x_{ij} \text{ a duálbázisban van.} \end{cases}$$

Az y_{ij} hálózati interpretációja a következő. Amikor y_{ij} bázisváltozóvá válik szigorúan pozitív értékkel, akkor az úgy tekinthető, mint egy folyam a j -edik csomópontból a i -edik csomópont felé, vagyis mint az $i \rightarrow j$ irányítású élen $j \rightarrow i$ irányú folyam, amely semlegesíti az i és j csomópontok közötti élhez korábban hozzárendelt ($x_{ij}=k_{ij}$) folyamat. Így amikor $x_{ij}=k_{ij}$ -t helyettesítjük $x_{ij}=k_{ij}-y_{ij}$ -vel, akkor egyidejűleg a valóságos $i \rightarrow j$ élet $j \rightarrow i$ ellentétes irányítású élre cseréljük, amelynek kapacitása k_{ij} és fajlagos költsége $-c_{ij}$. Az egyensúly fenntartása érdekében a törölt él $x_{ij}=k_{ij}$ kapacitását az i -edik csomóponttól a j -edire mozgatjuk, azaz b_i -t csökkentjük, b_j -t pedig növeljük k_{ij} -vel. Ha később, elérve a felsőhatárt, y_{ij} válik elhagyott bázisváltozóvá, akkor az $y_{ij}=k_{ij}$ -t helyettesítjük $y_{ij}=k_{ij}-x_{ij}$ -vel, és a nem-bázisváltozó x_{ij} értéke 0 lesz. Ez a lépés $j \rightarrow i$ $i \rightarrow j$ élcserét jelent, vagyis visszatérést az eredeti konfigurációhoz.

A felsőkorlát technika alkalmazása, mivel a kapacitáskorlátokat nem-negativitási feltételként kezeli, lényegesen csökkenti a feltételi egyenletek számát. A minimális költségű folyam problémában ez különösen előnyös, mivel általában az élek száma sokkal nagyobb, mint a csomópontoké. Ugyanakkor a számítási idő a feltételek számával gyorsabban növekszik, mint a változók számával. Így a módszer alkalmazása jelentős számítási idő megtakarítást eredményezhet.

8.6.2 Kapcsolat a lehetséges bázismegoldás és a lehetséges feszítőfa között

A hálózati szimplex-módszer első lépése egy lehetséges bázismegoldás generálása. Mint már jeleztük, n csomópont esetén a bázisvektornak $n-1$ eleme van. Az x_{ij} bázisváltozók reprezentálják az $i \rightarrow j$ élen áramló folyamat. Azokat az éleket, amelyekhez $x_{ij} > 0$ folyam tartozik **báziséleknek**, és hasonlóan azokat az éleket, amelyekhez $x_{ij} = 0$ vagy $y_{ij} = 0$ tartozik **nem-báziséleknek** nevezzük [47].

A bázisélek jellemzője, hogy soha nem képeznek irányítatlan körutat. Továbbá ismeretes, hogy az $n-1$ élből álló élhalmaz, ha nem tartalmaz körutat, akkor feszítőfát alkot. Ezért minden

bázisél-halmaz feszítőfát alkot.

Feszítőfa-megoldás nyerhető a következő módon:

Azokon az éleken, amelyek nem részei a feszítőfának (nem-bázisélek) az x_{ij} vagy y_{ij} változókat tegyük egyenlővé 0-val.

Azokon az éleken, amelyek a feszítőfát alkotják (bázisélek) határozzuk meg az x_{ij} vagy y_{ij} értékeket az élekre írható lineáris egyenletrendszer segítségével.

Megjegyezzük, ez az eljárás nincs tekintettel a nem-negativitási feltételekre, vagyis az élkapacitás korlátokra, ezért a kapott feszítőfa-megoldás nem biztos, hogy lehetséges megoldás is. A lehetséges feszítőfa-megoldásnak további követelményeknek is eleget kell tennie:

A **lehetséges feszítőfa-megoldás** a csomóponti feltételek mellett az egyéb feltételeknek ($0 \leq x_{ij} \leq k_{ij}$ vagy $0 \leq y_{ij} \leq k_{ij}$) is eleget tesz.

A fenti definíciókkal most már összegezhethetjük az eljárásunk alapkoncepcióját:

A **hálózati szimplex-módszer alaptétele**: A bázismegoldások feszítőfák és fordítva. A lehetséges bázismegoldások lehetséges feszítőfák és fordítva.

8.6.3 Eljárás a bázismegoldás előállítására

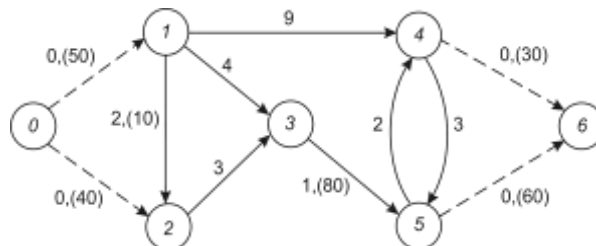
A hálózati szimplex-módszerrel egy lehetséges bázismegoldásból egy új, javított bázismegoldás viszonylag gyorsan előállítható. Az optimum eléréséhez szükséges lépések száma azonban attól függ, hogy a bázismegoldás milyen közel áll az optimumhoz. Ezért célszerű olyan módszert alkalmazni, amely az optimálisához közeli megoldást szolgáltat. A továbbiakban egy ilyen, a maximális folyam problémára épülő eljárást ismerhetünk meg. Ebben az eredeti feladatot maximális folyam problémává alakítjuk, és azt valamelyik ismert algoritmussal megoldjuk [22].

Alakítsuk át az 8.8. ábrán bemutatott hálózatot a következő módon. A forráspontokat és a nyelőpontokat kössük össze egy fiktív forrásponttal (0), illetve egy nyelőponttal ($n+1$), mégpedig 0 költségű, egyenlőségekkel korlátozott kapacitású, irányított élekkel. Egyidejűleg az eredeti forrás- és nyelőpontokat alakítsuk át közvetítőpontokká, azaz ezeken a csomópontokon b_i legyen 0. Az új éleken folyó x_{ij} áramok nagyságát a következő egyenlőségekkel írjuk elő:

$$x_{0i} = k_{0i} = b_i \text{ és}$$

$$x_{in+1} = k_{in+1} = |b_i|.$$

Ezek az egyenlőségek biztosítják, hogy az eredeti forráspontokból kilépő áramok összege, illetve az eredeti nyelőpontokba belépő áramok összege akkora legyen, amekkora az eredeti csomóponton generált áram volt. Az átalakított hálózatot a 8.9. ábra szemlélteti, ami az elmondottak szerint két csomóponttal és négy éllel (szaggatott vonallal jelölve) egészült ki, forrása a 0, nyelője a 6 csomópont, az 1,2,...,n csomópontok pedig közvetítőpontok.



8.9. ábra. Az átalakított hálózat

Az új hálózaton keressük azt a maximális folyamot, amit a hálózat a 0 forráspontból a 6

nyelőpontba vezet. E probléma modellje ebben a speciális esetben:

$$(8.5) \quad z = \sum_{j=0}^{n+1} x_{0j} = \sum_{j=0}^{n+1} x_{jn+1} \rightarrow \max ,$$

$$(8.6) \quad \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} - \sum_{j=0}^n x_{ji} = 0, \quad \text{minden } i=1,2,\dots,n \text{ közvetítőpontra},$$

$$(8.7) \quad 0 \leq x_{ij} \leq k_{ij}, \quad \text{minden } i \rightarrow j \text{ élre, ahol } i=j=1,2,\dots,n,$$

$$(8.8) \quad x_{0i} = k_{0i} = b_i, \quad i=1,2,\dots,n,$$

$$(8.9) \quad x_{in+1} = k_{in+1} = |b_i|, \quad i=1,2,\dots,n.$$

A (8.5) célfüggvény azt fejezi ki, hogy a forráspontból kilépő áramok összege egyenlő, a nyelőpontba belépő áramok összegével, és ez maximális. Könnyen belátható, hogy a (8.8) és (8.9) egyenlőségek miatt a célfüggvény azonnal kiszámítható. Így a maximális folyam probléma olyan sajátos esetével állunk szemben, amikor ismerjük a célfüggvényt, és csak a megoldáshoz tartozó x_{ij} döntési változókat kell meghatározni.

A közvetítőpontokra írt (8.6) feltételek szerint az i -edik pontból kilépő és az i -edik pontba belépő áramok összegének különbsége 0. A feltétel első tagjában a szummázás alsó határa ($j=1$) azt jelzi, hogy a közvetítőpontokból a 0 forráspontba nem vezet él, így nincs olyan áram, amely a 0 pontba folya. A második tagban a felsőhatár n , mert a nyelőpontból nem vezet él a közvetítőpontokba, ezért nincs olyan áram, amely az $(n+1)$ -ből valamely közvetítőpontba folya.

A (8.7) feltétel csak az eredeti hálózat éleire vonatkozik, mivel az új éleken az alsó és felső korlátok helyett a (8.8) és (8.9) egyenlőségek írják elő az áramok nagyságát.

Ha létezik a fenti maximális folyam problémának megoldása, akkor arról azt állítjuk, hogy az, az eredeti hálózaton a minimális költségű folyamnak is egy lehetséges bázismegoldása.

A minimális költségű folyam (8.2 és 8.3) és a maximális folyam probléma (8.6 és 8.7) feltételei ugyanarra az n elemű csomópont-halmazra (az eredeti hálózat csomópontjaira) vonatkoznak. Az állítás bizonyításához ezért csak azt kell belátni, hogy a (8.2) és a (8.6), valamint a (8.3) és a (8.7) feltételek egyenértékűek. Ha ugyanis a feltételek egyenértékűek, akkor az átalakított hálózaton a maximális folyam optimális megoldása, az eredeti hálózaton a minimális költségű folyam egy lehetséges bázismegoldása.

A (8.3) és (8.7) feltételek egyenértékűsége triviális. A (8.2) és (8.6) feltételek egyenértékűségének bizonyításához vizsgáljuk az (8.6) feltételeket az eredeti forrás-, nyelő- és közvetítőpontokra külön-külön.

a) Először írjuk fel a feltételeket a forrásponttal közvetlen kapcsolódó csomópontokra, vagyis az eredeti forráspontokra. Vegyük figyelembe, hogy az eredeti forráspontok és az $n+1$ -edik csomópont között nem fut él, ezért az első tagnál az összegzés felső határa n lesz. Így a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - x_{0i} - \sum_{j=1}^n x_{ji} = 0 ,$$

ahol a második tagot két tag összegére bontottuk.

Mivel definíció szerint $x_{0i}=b_i$, a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ji} = b_i ,$$

ami azonos a (8.2) feltétellel.

b) A nyelőponttal közvetlen kapcsolódó csomópontokra is, vagyis az eredeti nyelőpontokra, a bizonyítás az előzőhöz hasonlóan elvégezhető. Itt azt a kikötést használjuk fel, hogy a 0 forrásból nem vezet el az eredeti nyelőpontokba, ezért a második tagnál a összegzés alsó határa 1 lesz.

c) Végül az eredeti közvetítőpontokon a $b_i=0$, ami miatt a (8.6) alakú feltétel mindkét hálózaton érvényes.

Ezzel bizonyítottuk, hogy a (8.2) és (8.6) feltételek mindkét feladatban azonosak, és azt az állításunkat is, hogy az átalakított hálózaton a maximális folyam optimális megoldása az eredeti hálózaton a minimális költségű folyam egy lehetséges bázismegoldása. A javasolt hálózátátalakítással tehát elérhető, hogy a minimális költségű folyam egy lehetséges bázismegoldásának előállítását visszavezzük a maximális folyam probléma megoldására, amelyhez hatékony algoritmusok állnak rendelkezésre.

A javasolt eljárásunkat tovább javíthatjuk, pontosabban az eredeti feladat optimális megoldásához közelebb álló bázismegoldást nyerhetünk, ha a maximális folyam keresésekor javítóútként mindig a forráspontból (0) a nyelőpontba ($n+1$) vezető minimális költségű utat jelölünk ki. Mint ismeretes, a javítóúton az élek nyelőirányú maradékkapacitása szigorúan pozitív. Ezért a legrövidebb út probléma megoldásakor a forrásból a nyelőbe vezető legrövidebb úton előírjuk a nyelőirányú maradékkapacitások pozitív voltát.

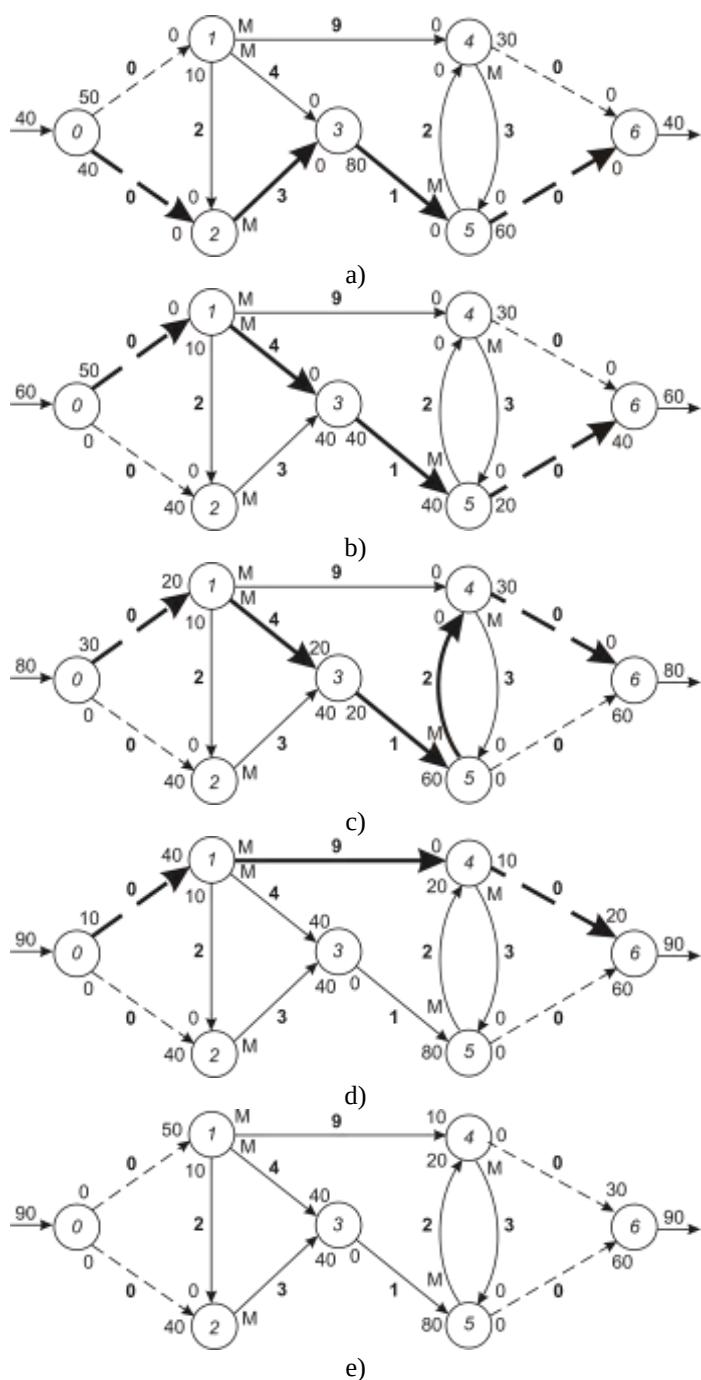
8.6.4 Az eljárás alkalmazása

Az 8.8. ábrán bemutatott mintapélda megoldásának első lépéseként generáljunk egy lehetséges bázismegoldást a javasolt módszerrel. Ehhez használjuk fel a 8.9. ábra szerint átalakított hálózatot. A maximális folyam problémát a következőképpen módosított algoritmussal oldjuk meg:

- (1) Keresünk egy olyan nem telített (valamennyi él maradékkapacitása szigorúan pozitív) legrövidebb utat a maradékhálózaton, amely a forráspontból a nyelőpontba vezet. Ha nincs ilyen út, akkor megkaptuk a maximális folyamat.
- (2) Az utat alkotó élek maradékkapacitásai közül kiválasztjuk a legkisebbet, ez legyen Δ . Az út minden élének k_{ij} maradékkapacitását a nyelő irányában csökkentjük, ellentétes irányban pedig növeljük a Δ értékével. A maximális folyam értékét ugyancsak Δ -val növeljük, majd visszatérünk az (1) lépéshez.

Induláskor a maradékhálózat csak abban különbözik az eredeti hálózattól, hogy az eredeti hálózaton azokon a helyeken, ahol az (i,j) irányított élnek hiányzik a (j,i) irányított párja kiegészítjük 0 élkapacitással (j,i) irányított éllel. Ezeket a 8.10/a ábra élein a 0-k jelzik. Ezután a maradékhálózat maradékkapacitásnak nevezett élkapacitásait következő módon változtatjuk. Amikor a hálózat valamelyik (i,j) élére valamilyen Δ áramot adunk, akkor a maradékhálózaton az (i,j) él k_{ij} maradékkapacitása Δ -val csökken, a (j,i) él k_{ji} maradékkapacitása pedig Δ -val nő. A hálózaton maradékkapacitás mutatja az élek telítettségét, egy él akkor telített, ha a maradékkapacitása 0. Ha a maradékkapacitás nagyobb, mint 0, akkor az élen a maradékkapacitásnak megfelelő nagyságú folyam továbbítható.

A megoldás menete a 8.10. ábrán követhető, ahol a javítóutak a vastag vonalak és a hálózat élein a maradékkapacitások mellett az élek fajlagos költségeit is feltüntettük. Az első iterációban a forrásból a nyelőbe vezető legrövidebb, szigorúan pozitív maradékkapacitású út 0-2-3-5-6, amelyen a legkisebb nyelőirányú maradékkapacitás $\Delta=40$. Az algoritmusnak megfelelően a javítóúton nyelőirányú maradékkapacitásokat 40-el csökkentjük, az ellentétes irányúakat pedig 40-el növeljük. A változások a 8.10/b ábrán láthatók, ahol a következő javítóutat, 0-1-3-5-6 is kijelöltük.

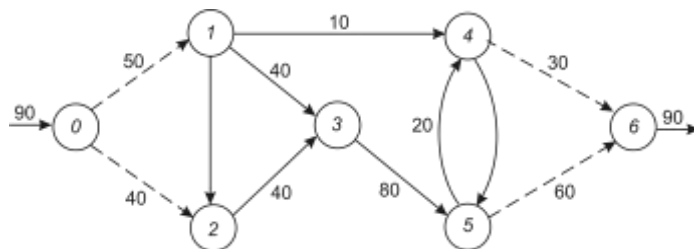


8.10. ábra. A bázismegoldás előállítása

Az eljárás szukcesszív alkalmazása a 8.11. ábrán látható megoldásra vezet, ahol az éleken ténylegesen áramló folyamok láthatók. Az éleken áramló folyamokat úgy kaptunk meg, hogy a korlátozott kapacitású éleken az induló maradékhálózat nyelőirányú élkapacitásából levontuk az élék utolsó iterációban kapott nyelőirányú élkapacitásait. A nem korlátozott kapacitású éleken a folyamok a forrásirányú maradékkapacitással egyenlők. Az eredmény: $x_{01}=50$, $x_{02}=40$, $x_{13}=40$,

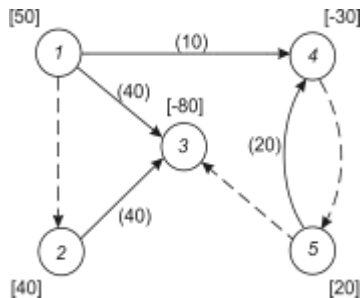
$x_{14}=10$, $x_{23}=40$, $x_{35}=80$, $x_{46}=30$, $x_{54}=20$, $x_{56}=60$.

Mivel az átalakított hálózaton a maximális folyam optimális megoldása, az eredeti hálózaton a minimális költségű folyam egy lehetséges bázismegoldása, a minimális költségű folyam egy lehetséges bázismegoldását a fiktív élek elhagyásával nyerjük, azaz $x_{13}=40$, $x_{14}=10$, $x_{23}=40$, $x_{35}=80$, $x_{54}=20$. A megoldáshoz tartozó célfüggvény: $z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = 490$.



8.11. ábra. A maximális folyam megoldása

A továbbiakban a feladatunk a bázismegoldás optimalitásának vizsgálata és javítása a hálózati szimplex-módszerrel. Ehhez rajzoljuk meg a bázismegoldáshoz tartozó feszítőfát (8.12. ábra). Mint tudjuk a hálózati szimplex-módszer felsőkorlátozó technikával kezeli az élkapacitás korlátokat. Mivel a 3-5 élen az $x_{35}=k_{35}=80$, vagyis elérte a felső határt, az x_{35} elhagyott bázisváltozó, az $y_{35}=0$ pedig nem-bázisváltozó lesz. Ennek következménye, hogy a 3-5 él irányítása ellentétesre, fajlagos költsége $c_{35}=-1$ -re változik. Ezzel egyidejűleg a 3 csomópont kapacitása $b_3:=b_3-k_{35}=-80$, az 5 csomóponté $b_5:=b_5+k_{35}=20$ lesz. A változások a 8.12. ábrán láthatók, ahol a báziséleket (a feszítőfát) folytonos, a nem-báziséleket szaggatott vonallal rajzoltuk meg.



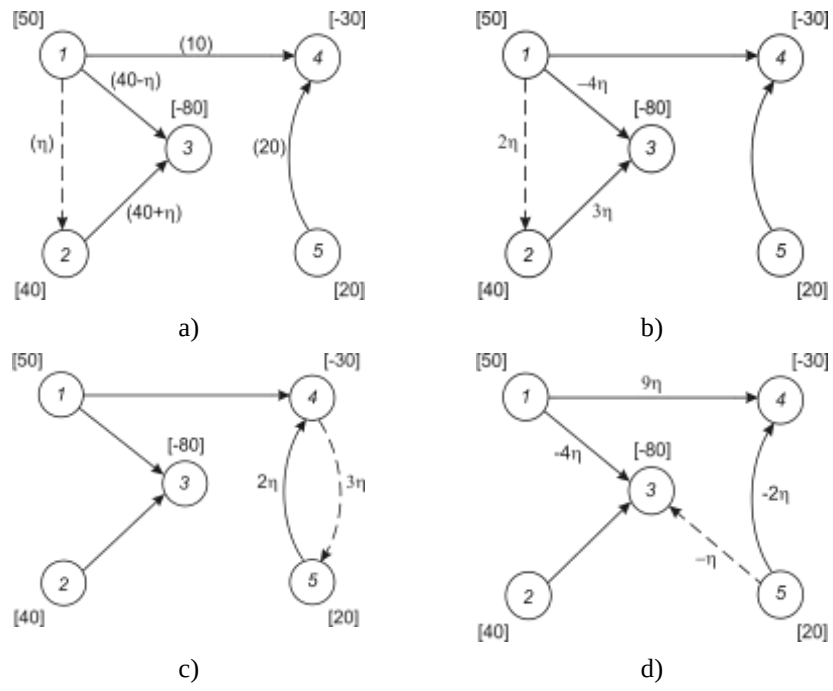
8.12. ábra. A bázismegoldáshoz tartozó feszítőfa

Megjegyezzük: a szállítási problémához hasonlóan a minimális költségű folyamnál is előfordulhat a **degeneráció**, ami kétféle formában jelentkezhet. A bázisélek száma lehet kevesebb és lehet több, mint a feszítőfa éleinek a száma. Az első esetben a feszítőfa hiányzó éleit a nem-bázisélek vagy az elhagyott bázisélek halmazából pótoljuk. A második esetben a bázisélek alkotta hálózaton kijelöljük a feszítőfát, és a feszítőfához nem tartozó éleket úgy kezeljük, mint a nem-báziséleket.

8.6.5 A bázismegoldás javítása a hálózati szimplex módszerrel

A bázismegoldást úgy javítjuk, hogy a 0-ról növekvő nem-bázisváltozók közül kiválasztunk egy olyat, amelynek bevonása javítja a célfüggvényt. Most nézzük meg, hogyan valósítható ez meg a szimplex tábla nélkül. A bemutatáshoz tekintsük a 8.13/a ábrát, amelyen az x_{12} nem-bázisváltozó, és az 1-2 él nem-báziséle. Növeljük az x_{12} értékét 0-ról η -ra, ami azt jelenti, hogy az 1-2 élen η nagyságú folyamot generálunk.

$$\Delta z = 2\eta + 3\eta - 4\eta = \eta.$$



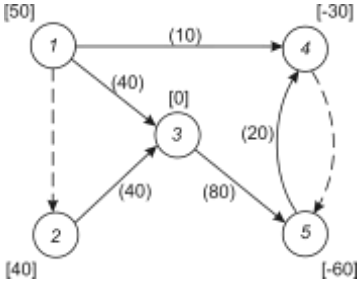
8.13. ábra. A nem-bázisélek bevonásának hatása a célfüggvényre

Ha egy feszítőfához egy nem-bázisélet adunk, akkor egy irányítatlan körutat kapunk. A 8.13/a ábrán a körút 1–2–3–1. Az η folyam hatására a körút azon élein, amelyek iránya megegyezik az 1–2 irányával, a folyam η -val nő, az ellentétes irányú éleken pedig η -val csökken. A körúton kívüli éleken nincs változás.

Most nézzük miként hat az η folyam a célfüggvényre. Ehhez rajzoljuk fel a hálózatot a fajlagos költségekkel és a megváltozott folyamokkal (8.13/b ábra). A célfüggvény változása az ábrából leolvasható:

8.7. táblázat

Nem-bázisél	Körút	Δz
1→2	1–2–3–1	2+3–4=1
4→5	4–5–4	3+2=5
5→3	5–3–1–4–5	–1–4+9–2=2



8.14. ábra. A mintapélda optimális megoldása

Mivel $\Delta z > 0$, és a z célfüggvény minimalizálása a feladat, az 1–2 él bevonása a bázismegoldásba nem kívánatos. Az x_{12} növelése ugyanis a célfüggvény növekedését eredményezné. Hasonlóan

megvizsgáljuk a többi nem-bázisél bevonásának hatását is (8.13/c és d ábrák). Az optimalitás vizsgálatot a 8.7. táblázatban foglaltuk össze, amelynek eredménye azt mutatja, hogy egyik nem-bázisél bevonása sem csökkenti a célfüggvényt, vagyis a lehetséges bázismegoldás optimális megoldás is (8.14. ábra).

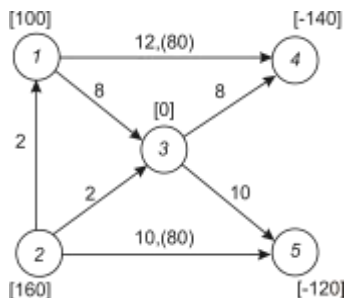
A teljesség kedvéért ismertetjük azt is, mi a teendő akkor, ha valamely él bevonása a bázisba kívánatos, vagyis hogyan hajtható végre a bázisvektor-csere, miként határozható meg a ki- és a belépő bázisváltozó nagysága. Tudjuk, hogy az η folyam hatására a körút azon élein, amelyek iránya megegyezik a bevonandó él irányával a folyam η -val nő, az ellentétes irányú éleken η -val csökken. A körúton kívüli éleken pedig nincs változás. A belépő bázisváltozó értékének (η) meghatározásához az élek kapacitáskorlátait kell megvizsgálni. Ahol az áram növekszik, ott a felső határt

$$x_{ij} := x_{ij} + \eta \leq k_{ij},$$

ahol csökken, ott az alsó határt

$$x_{ij} := x_{ij} - \eta \geq 0$$

kell figyelembe venni. Az így kiszámított η értékek közül a legkisebb fogja meghatározni a belépő bázisváltozó nagyságát, és az $x_{ij}=0$ vagy az $x_{ij}=k_{ij}$ értékkel kilépő bázisváltozót is. Az utóbbi esetben, amint azt korábban leírtuk, az x_{ij} elhagyott bázisváltozó lesz, aminek a konzekvenciái az $i \rightarrow j$ élen, valamint a i és j csomópontokon ugyancsak ismertek.



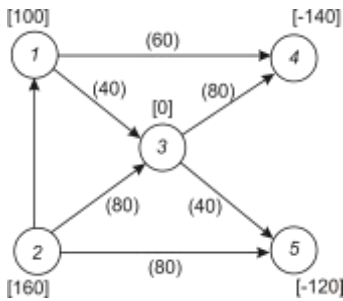
8.15. ábra. Mintapélda a hálózati szimplex módszerhez

Az elmondottak bemutatására tekintsük a 8.15. ábrán látható hálózatot. A szokásos módon a b_i értékek szögletes zárójelben a csomópontok mellett szerepelnek. A c_{ij} fajlagos költségeket az élek mellett ábrázoltuk. A példában két él kapacitását korlátoztuk, $k_{14}=80$ és $k_{25}=80$ (ezeket kerek zárójelbe írtuk), a többi élen a $k_{ij}=M=\infty$.

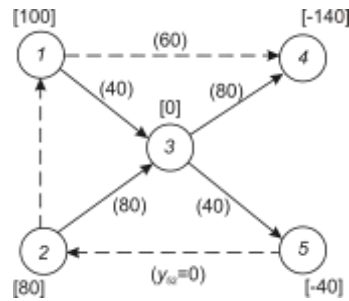
A feladat egy lehetséges bázismegoldását a 8.16. ábra szemlélteti, ahol az áram a 2-5 élen elérte a felső határt, és a bázisélek száma (5) több, mint a feszítőfa éleinek a száma (4). A megoldáshoz tartozó célfüggvény érték $z=3040$.

Mivel az $x_{25}=80$, azaz az élen az áram elérte a felső határt, ezért a felsőkorlát technikának megfelelően az x_{25} -öt, $y_{25}=k_{25}-x_{25}=0$ -val helyettesítjük, megváltoztatjuk az 2-5 él irányítását, x_{25} elhagyott bázisváltozó, az $y_{25}=0$ pedig nem-bázisváltozó lesz. A b_2 k_{25} -tel csökken, a b_5 k_{25} -tel nő, a c_{25} pedig előjelet vált. Az így kapott feszítőfa-megoldás a 8.17. ábrán látható.

Tekintettel arra, hogy a feladat degenerált, a következők szerint járunk el. A bázisélek halmazán kijelöljük a feszítőfát, ezt a 1-3, 2-3, 3-4, 3-5 élek alkotják (folytonos vonallal rajzolva a 8.17. ábrán), így az 1-4 élet nem-bázisélként kezeljük.



8.16. ábra. A mintapélda bázismegoldása



8.17. ábra. Mintapéldához tartozó feszítőfa-megoldás

Ezután az előzőekben leírt módon vizsgáljuk meg a nem-bázisélek bevonásának hatását a cél-függvényre. Az eredmény a 8.8. táblázatban látható, és megállapítható, hogy az 1–4 él bevonása kívánatos, mivel a célfüggvény csökkenését eredményezi. A kérdés még az, hogy az 1–4 élre mekkora áram adható. Az 1–4 élen az áram növekszik, ezért a korlát a felső határ, azaz

$$x_{14} = 60 + \eta \leq k_{14} = 80 \rightarrow \eta = 80 - 60 = 20$$

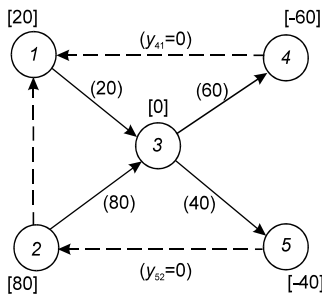
8.8. táblázat

Nem-bázisélek	Körút	Δz
1→4	1–4–3–1	12–8–8=–4
2→1	2–1–3–2	2+8–2=8
5→2	5–2–3–5	–10+2+10=2

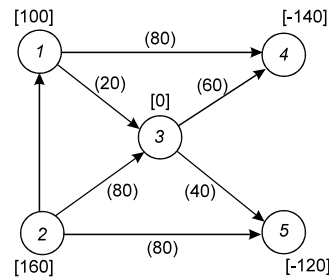
Az 1–3 és a 3–4 éleken az áram csökken, ezért a korlát az alsó határ, azaz

$$x_{13} = 40 - \eta \geq 0 \rightarrow \eta = 40$$

$$x_{34} = 80 - \eta \geq 0 \rightarrow \eta = 80$$



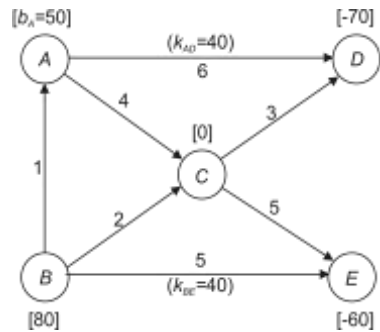
8.18. ábra. Az első iteráció után kapott feszítőfa-megoldás



8.19. ábra. A mintapélda megoldása

A $\min\{\eta\} = 20$, ezért az áram a bevont élen és a vele megegyező irányú éleken 20-al nő, az ellentétes irányítású éleken pedig 20-al csökken. Mivel az $x_{14} = 80$, azaz az áram most ezen az élen is elérte a felső határt, és a felsőkorlát technikának megfelelően az x_{14} -et, $y_{14} = k_{14} - x_{14} = 0$ -val helyettesítjük, megváltoztatjuk az 1–4 él irányítását, x_{14} elhagyott bázisváltozó, az $y_{14} = 0$ pedig nem-bázisváltozó lesz. A b_1 k_{14} -gyel csökken, a b_4 k_{14} -gyel nő, a c_{14} pedig előjelet vált. Az így kapott feszítőfa-megoldás a 8.18. ábrán látható.

8.5. példa: Oldjuk meg a következő minimális költségű folyam problémát hálózati szimplex módszerrel:



8.6. példa: Egy vállalat a közeljövőben új termék gyártását kezdi meg két üzemében ($\bar{U}_1, \bar{U}_2$). Az üzemek hetente 80, illetve 70 terméket állítanak elő, amit az $R_1=60$, illetve $R_2=90$ termék tárolására alkalmas nagykereskedelmi raktárak készleteznek. Az $\bar{U}_1$ üzemből az R_1 raktárba, az $\bar{U}_2$ üzemből az R_2 raktárba vasúton korlátlan mennyiségben lehet szállítani. A terméket azonban korlátozott számban egy elosztó központon (C) keresztül közúton is el lehet juttatni a két raktárba. A szállítható mennyiség felső határa az $\bar{U}_1$ üzem és a központ, valamint az $\bar{U}_2$ üzem és a központ között egyaránt 50 termék. Hasonlóan korlátozott a C központ és az R_1 és R_2 raktárak között hetente szállítható mennyiség, ami ugyancsak 50 termék. A fajlagos szállítási költségek az üzemek, a centrum és a raktárak között az alábbi táblázatban adottak:

	C	R_1	R_2	Kapacitás
$\bar{U}_1$	3	7	–	80
$\bar{U}_2$	4	–	9	70
C	–	2	4	
Kapacitás		60	90	

Kérdés a termékeket melyik útvonalakon és milyen mennyiségben szállítsuk ahhoz, hogy az összes szállítási költség minimális legyen.

8.7. példa: Tekintsük a következő disztribúciós táblával adott szállítási feladatot:

	R_1	R_2	R_3	Kapacitás
F_1	6	7	4	40
F_2	5	8	6	60
Kapacitás	30	40	30	

Kezeljük a problémát minimális költségű folyamként és oldjuk meg a hálózati szimplex módszerrel. A bázismegoldást a sor-oszlop minimum módszerrel állítsuk elő.

8.6.6 Speciális esetek

Szállítási probléma: A 4. fejezetben bemutatott szállítási probléma nagyon egyszerűen minimális költségű folyam problémává alakítható. A feladók mindegyike forráspont valamennyi megrendelő számára, és a megrendelők mindegyike nyelőpont valamennyi feladó számára. Átrakó- vagy közvetítőpontok nem szerepelnek a feladatban. Minden él irányított a forráspontokból a nyelőpontok felé, ami az előbbieket is figyelembe véve azt jelenti, hogy egy-egy forrásponthoz valamennyi nyelőpont egy-egy irányított éllel közvetlen kapcsolódik. Az x_{ij} áram fajlagos költsége az (i,j) élen c_{ij} . Mivel a szállítási problémában a feladók és a megrendelők közötti utak ka-

pacitása nem korlátozott, ezért $k_{ij}=\infty$ minden i,j -re.

Átrakási probléma: Az átrakási problémát a 4.5.3 pontban, mint a szállítási probléma általánosítását ismertettük, amelyben a feladók és a megrendelő között áramló mennyiségek ún. átrakó- vagy közvetítőpontokon haladhatnak keresztül. Átrakópontok maguk a feladók és megrendelők is lehetnek. Ezért az átrakási probléma minimális költségű folyamra formálása nagyon hasonló az előző pontban bemutatott átalakításhoz. A feladat jellegéből fakadó különbségek a következők. Valamennyi feladó, megrendelő és átrakópontot most két ellentétes irányított éllel kell összekötni, továbbá az átrakópontokon $b_i=0$. Ezekkel a járulékokkal az átrakási probléma az élek kapacitásainak korlátozását kivéve, azonos az általános minimális költségű folyam problémával. Ezért a minimális költségű folyam problémát néha *kapacitált átrakási problémának* nevezik.

Hozzárendelési probléma: Mivel a hozzárendelési probléma a szállítási feladatnak az a speciális esete, ahol a feladók és megrendelők száma azonos, és minden feladás és megrendelés értéke 1, ezért a forráspontokon $b_i=1$, a nyelőpontokon pedig $b_j=-1$.

Legrövidebb út probléma: A 8.3 pontban tárgyalt legrövidebb út problémában az irányítatlan hálózaton kijelölt start és célpontok között kellett megkeresni a legrövidebb utat. Ez a feladat minimális költségű folyam problémává úgy formálható, hogy a startpontot forráspontnak, a célpontot pedig nyelőpontnak tekintjük. A forráspontban $b_i=1$ és a nyelőpontban $b_j=-1$. A hálózat többi csomópontja közvetítőpont. Az élek költsége c_{ij} , továbbá az élek kapacitása nem korlátozott, ezért $k_{ij}=\infty$. Miután a minimális költségű folyam problémát irányított hálózaton értelmeztük, a legrövidebb út probléma irányítatlan hálózatát irányított hálózattá kell alakítani. Ezt, mint azt már leírtuk, úgy érhetjük el, hogy az irányítatlan éleket kicseréljük két ellentétes irányítású élparra. Ha irányítatlan hálózatot alakítunk át irányítottá, akkor értelemszerűen $c_{ij}=c_{ji}$.

Maximális folyam probléma: Az utolsó speciális eset a 8.5 részben leírt maximális folyam probléma, ahol adott egy irányított hálózat az élekhez rendelt kapacitás korlátokkal, valamint egy feladó és egy megrendelő előre nem rögzített nagyságú forrással és nyeléssel. Az átalakításhoz az eredeti feladatot csak három helyen kell módosítani. Az első: az élek költségeit $c_{ij}=0$ -ra állítjuk, mivel az eredeti feladatban nincsenek költségek. A második: a forrás- és a nyelőponthoz hozzárendelünk egy olyan b_i értéket, amely biztonságos felső határa a lehetséges maximális folyamnak. A harmadik: egy $c_{ij}=M$ költségű, $k_{ij}=\infty$ kapacitású, a forráspontból a nyelőpontba futó éllel bővítjük a hálózatot. A nagy költség miatt a többi élen a lehetséges maximális folyam fog áramolni.

Összegzés: Az említett, minimális költségű folyamra transzformálható, öt speciális probléma megoldására korábban hatékony algoritmusokat adtunk. Ezért a gyakorlatban az átalakítás csak akkor válik szükségessé, ha nem rendelkezünk a célirányos algoritmus gépi programjával. A hálózati szimplex-módszer azonban néhány esetben a speciális célú algoritmusok alternatívája lehet, például versenyképesnek bizonyult az átrakási probléma és egy-két kiterjesztett szállítási probléma megoldásában. Az átalakítás ezért inkább elméleti, mint gyakorlati jelentőséggel bír.

8.7. A hálótervezés

A tudomány és a technika térhódítása, a társadalmi változások és a termelőerők gyors fejlődése a termelés területén is túllépte az üzemszervezés hagyományos kereteit. A logisztika rendszer-szemléletű értelmezése, a szervezési feladatok bonyolultsága és számossága olyan, gyakran **projektmenedzsmentnek** is nevezett szervezési módszerek használatát igényli, amelyek biztosítják a termelési folyamathoz szükséges anyagok mozgása feletti áttekintést, és azok koordinálását. E követelményeknek a hálótechnika általában megfelel. A hálótervezés ugyanis olyan, idő-, költség- és kapacitásstervezést integráló módszerek és eszközök összessége, amelyek lehetővé teszik

a folyamatok tervezését, a különböző szervezetek célorientált irányítását, a bekövetkező események várható hatásainak előzetes felmérését, valamint számítógépes támogatással alkalmasak a folyamatok követésére, továbbá információkat szolgáltatnak a szükséges intézkedések megtételéhez.

A klasszikus hálótervezés lényegében a tevékenységek időbeli ütemezését, vagyis az ún. időtervezést jelenti. A tevékenységek, illetve a munkafolyamatok azonban nemcsak időt, hanem különféle, humán, technikai és gazdasági erőforrásokat is igényelnek, és ezek az igénybevétel nagyságával arányos költségfelhasználást eredményeznek. A korszerű hálótervező programok, ezért lehetőséget nyújtanak az idő, a költség és az erőforrások együttes kezelésére.

A hálótervezés alkalmas minden olyan folyamat vagy rendszer irányítására, vizsgálatára és a terv megvalósításának ellenőrzésére, amely önálló, de egymással kapcsolatban lévő részfolyamatokra bontható. A hálótervvel szemléletesen ábrázolható a feladat szerkezete és a tevékenységek időbeli lefolyása. A hálóterven jól érzékeltethetők az egymáshoz kapcsolódó résztvékenységek összefüggései, továbbá kimutatható a részhatáridőkben bekövetkezett csúszások hatása a végső határidőre.

A költségtervezési és az erőforrás-allokáló módszerek lehetővé teszik a különböző erőforrások tervezését (mikor, hol és mennyit kell belőlük felhasználni), és az erőforrások felhasználásának, illetve azok költségeinek követését, ellenőrzését.

Az időtervezés két legismertebb módszere a CPM (a kritikus útvonal módszere) és a PERT (program kiértékelési és áttekintési módszer) mellett számos más, de ezekre a módszerekre épülő eljárást is kifejlesztettek. A korszerű hálótervező programok (pl. a Microsoft Project) már költségtervezésre és erőforrás-allokálásra is alkalmas algoritmusokkal dolgoznak [29], [81].

A hálótervezés módszerével és gyakorlati felhasználásával foglalkozó szakirodalom igen gazdag [42], [78], [80], [81], [93]. Az irodalomban azonban kimondottan logisztikai alkalmazások csak elvétve fordulnak elő, aminek az oka, hogy a hálótervezés fénykorában logisztikáról még nem nagyon beszéltek.

8.7.1 A tevékenység-háló felépítése és szerkesztése

A hálótervvel ábrázolható folyamat elemei a tevékenységek és az események. A végrehajtandó feladatokat nevezzük **tevékenységek**nek. Ezek időben lejátszódó részfolyamatok. Az **események** a tevékenységek kezdő- és végpontjai, azaz olyan időpontok, ahol egy vagy több tevékenység kezdődik vagy befejeződik.

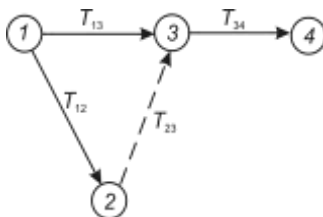
A hálóterven az események a háló csomópontjai, amelyeket a szokásos módon körök jelölnek. A csomópontok címkéi az időbeli előrehaladást vagy a végrehajtási sorrendet jelző természetes számok. A két esemény közé eső tevékenységet irányított éllel ábrázoljuk. Az egyenesen lévő nyíl a folyamat irányát jelzi.

A hálótervezés gráfelméleti, matematikai alapjainak ismertetésétől eltekintünk, csupán az alkalmazott hálózat néhány fontosabb tulajdonságát foglaljuk össze. A hálózat:

- összefüggő,
- véges kiterjedésű, azaz véges számú pontból (pont = esemény) és élből (él = tevékenység) áll,
- irányított élekből áll, (egy tevékenység a nyíl irányában valamely korábbi időpontból későbbi időpont felé halad),
- hurokmentes, azaz nem tartalmaz irányított köröket.

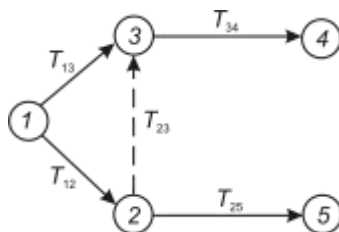
A hálózat tulajdonságaiból következik a hálóterv konstruálásának alapszabályai, amely szerint két csomópontot csak egy él köthet össze, azaz két esemény közé csak egy tevékenység eshet, és

az élek (tevékenységek) nem mutathatnak visszafelé.



8.20. ábra. A látszattevékenység (2-3) ábrázolása a hálótervben

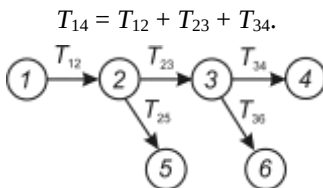
Azonban egy eseményből több tevékenység is indulhat, és a tevékenységek végződhetnek közös eseményben. Ezeket párhuzamos tevékenységeknek nevezzük. Végül a közös eseményből induló párhuzamos tevékenységek végződhetnek ugyanabban az eseményben, ilyenkor az ellentmondás elkerülése érdekében időt nem igénylő, ún. látszattevékenységet iktatunk a hálóba (8.20. ábra). A látszattevékenységet szaggatott vonallal jelöljük. Az ábrán a T_{34} tevékenység megkezdésének feltétele a T_{12} és a T_{13} párhuzamos tevékenységek befejeződése.



8.21. ábra. Különböző eseményekben (2 és 3) végződő párhuzamos tevékenységek szinkronizálása

A párhuzamos tevékenységek másik speciális esete, amikor azok ugyan különböző eseményekben végződnek, de valamilyen oknál fogva szinkronban kell lefolyniuk. A 8.21. ábrán a T_{12} és a T_{13} párhuzamos tevékenységek befejezése a T_{34} tevékenység indításának előfeltétele. A T_{25} azonban a T_{12} befejezését követően azonnal folytatódhat.

A gyakorlatban gyakran előfordul, hogy az egyes tevékenységek megkezdhetők az őket megelőző tevékenység teljes befejezése előtt. Ilyen esetekben úgy járunk el, hogy a megelőző tevékenységet résztevékenységekre bontjuk és a résztevékenységek befejezését a részeseményeket ábrázoló csomópontokkal jelezzük. Például a 8.22 ábrán a T_{14} tevékenység bizonyos készültségi állapotainál megkezdhetők a T_{25} és a T_{36} tevékenységek, ezért a T_{14} tevékenységet T_{12} , T_{23} és T_{34} résztevékenységekre bontottuk, ahol a



8.22. ábra. A T_{14} tevékenység résztevékenységekre bontása

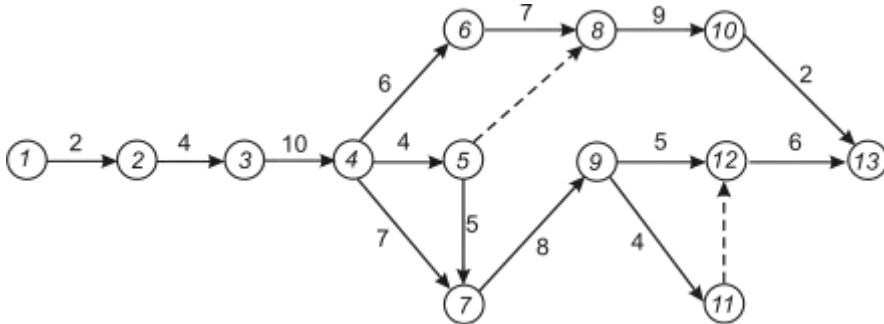
A bemutatott alapeseteket kombinálva bármilyen bonyolult, tevékenységekre bontott folyamat ábrázolható a háló segítségével. A hálóterv elkészítésének alapja az ún. tevékenységlista (jegyzék), ami gyakorlatilag egy olyan táblázat, amely az induló- és a célesemény közötti tevékenységek részletes leírását tartalmazza a hálókészítés szabályainak megfelelő sorrendben.

Mintapéllda:

Például egy lakóház építésének tevékenységi listáját úgy kaptuk, hogy alapos elemzés után sorra vettük a tevékenységeket, meghatároztuk azok időigényét, majd, egymástól való függőségüket figyelembe véve a hálótervezés szabályai szerint sorba rendeztük azokat (8.9. táblázat).

8.9. táblázat**Tevékenységlista a lakóházépítéshez**

Tevékenység			
kód		megnevezés	várható időszükséglet [nap]
1	2	Alapárok kiásása	2
2	3	Alapozás	4
3	4	Falazás	10
4	5	Külső vezetékszerelés	4
4	6	Tetőszerkezet építés	6
4	7	Elektromos előszerelés	7
5	7	Belső vezetékszerelés	5
6	8	Külső vakolás	7
7	9	Belső vakolás	8
8	10	Külső festés	9
9	11	Padozat burkolás	4
9	12	Belső festés	5
10	13	Külső felszerelés	2
12	13	Belső felszerelés	5

**8.23. ábra.** A lakóházépítés logikai hálója

A tevékenységlista alapján készül maga a hálótér (8.23. ábra), amely lényegében a tevékenységek időrendi sorrendben történő ábrázolása a tevékenységek közötti logikai kapcsolatok figyelembevételével. Egy-egy tevékenység magától értetődően csak az őt technológiai okokból megelőző tevékenységek befejeződése után kezdődhet meg. Az ábrán az 5-8 ún. vak él azt jelzi, hogy a 8-10 tevékenység (külső festés) megkezdéséhez a 4-5 és a 6-8 tevékenységeknek (külső vezetékszerelés és külső vakolás) egyaránt be kell fejeződnie. Hasonlóan szinkronizálási feladatot lát el a 11-12 vak él is

A háló sokféle szempont szerint értékelhető. A klasszikus hálótervezés a tevékenységek időbeli ütemezését, vagyis az ún. időtervezést jelenti. A tevékenységek azonban nemcsak az idővel, hanem más költségfelhasználást igénylő gazdasági erőforrásokkal is jellemezhetők. Ennek megfelelően az időtervezés mellett olyan módszereket is kifejlesztettek, amelyek lehetőséget nyújtanak az idő, a költségek és az erőforrások együttes kezelésére.

8.7.2 A CPM módszer

A határozott időtartamú tervezés (CPM) akkor alkalmazható, ha a tevékenységek időtartamai nem véletlenszerűek, vagyis jól megbecsülhetők. Különböző ipari területeken, építési, gyártási feladatoknál a múltbeli tapasztalatok, a kialakult normák alapján megbízható időadatokkal rendelkezünk.

Ha ezeket az időtartamokat hozzárendeljük a háló minden tevékenységéhez, akkor ún. időértékes hálótérvet kapunk. Az időértékes hálón meghatározható az események legkorábbi és legkésőbbi határideje, a tevékenységek tartalékideje, valamint a kezdő- és végpont közötti kritikus út.

Valamely j -edik esemény bekövetkezésének **legkorábbi időpontja** a következő összefüggéssel számítható:

$$\tau_j^0 = \max\{\tau_{i_k}^0 + t_{i_k j}\} \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

ahol:

i_k mindazon események indexe, amelyek a j -edik eseményt közvetlenül megelőzik,

τ_j^0 a j -edik esemény bekövetkezésének legkorábbi időpontja,

$\tau_{i_k}^0$ a j -edik eseményt közvetlenül megelőző események bekövetkezésének legkorábbi időpontjai,

$t_{i_k j}$ a $T_{i_k j}$ tevékenységek időtartamai.

Az összefüggés azt jelenti, hogy egy esemény legkorábban akkor realizálódhat, ha az eseményben végződő valamennyi tevékenység befejeződik. A hálón ez a kezdőponttól a j -be vezető utak közül a maximális hosszúságú út.

Valamely i -edik esemény bekövetkezésének **legkésőbbi időpontja** az az időpont, amikor az eseménynek legkésőbb be kell fejeződnie ahhoz, hogy a hálótérben vázolt folyamat időtartamát ne kelljen megnövelni. Ez az időpont a következő képlettel határozható meg:

$$\tau_i^1 = \min\{\tau_{j_s}^1 - t_{j_s i}\} \quad i = n-1, n-2, \dots, 0; \quad s = 1, 2, \dots$$

ahol:

j_s mindazon események indexe, amelyek az i -edik eseményt közvetlenül követik,

τ_i^1 az i -edik esemény bekövetkezésének legkésőbbi időpontja,

$\tau_{j_s}^1$ az i -edik eseményt közvetlenül követő események bekövetkezésének legkésőbbi időpontjai,

$\tau_{j_s}^1$ a $T_{j_s i}$ tevékenységek időtartamai.

Kritikus útnak nevezzük a hálón azt az utat, amely mentén az események bekövetkezésének legkorábbi és legkésőbbi időpontjai egybeesnek. Ha ezen az úton bármely tevékenység elhúzódik, akkor az, az egész folyamat csúszását eredményezi. A kritikus úton az előbbieket alapján azok az események fekszenek, ahol a

$$\tau_j^0 - \tau_i^1 = 0, \quad i = j = 0, 1, \dots, n,$$

a **kritikus út időtartama** pedig

$$S_{krit} = \tau_n^0 - \tau_0^0.$$

Vegyük észre, hogy a kritikus út a kezdőpontból a végpontba vezető maximális hosszúságú út, ezért a legrövidebb út analógiája alapján, a kritikus úton fekvő események és a kritikus út időtartama közvetlenül is meghatározhatók a következő algoritmussal:

Jelentse a t_{ikj} az i_k -adik eseményekből a j -edik eseménybe mutató tevékenységek időtartamait, ahol az i_k a j -edik eseményt közvetlenül megelőző események indexe, és a $j=1,2,\dots,n$. Legyen s_j az i_k -adik eseményekből a j -edik eseménybe mutató tevékenységsorok közül a leghosszabb időtartamú. Ha az $i_k=0$, akkor az

$$s_j = \max\{t_{ikj}\} \quad k=1,2,\dots,$$

különben az

$$s_j = \max\{s_{i_k} + t_{ikj}\}, \quad k=1,2,\dots$$

A képletet rekurzívan alkalmazva véges számú lépés után megkapjuk a kezdőpontból a végpontba vezető leghosszabb időtartamú utat:

$$S_{krit} = S_n.$$

A tevékenységek **időtartalékai** azok az intervallumok, amennyivel a tevékenységek a végső határidő veszélyeztetése nélkül elcsúszhatnak. Megkülönböztetünk teljes és független tartalék-időt.

A teljes tartalékidő:

$$p_{ij} = \tau_j^1 - \tau_i^0 - t_{ij}.$$

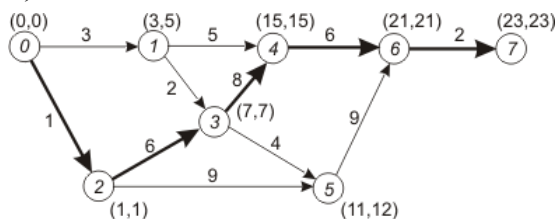
A T_{ij} tevékenységet a τ_i^0 és a $\tau_j^0 + p_{ij}$ időpontok között kell elkezdeni. A p_{ij} csúszás nem befolyásolja a végső határidőt, de érintheti a következő tevékenység kezdési időpontját.

A független tartalékidő:

$$\bar{p}_{ij} = \tau_j^0 - \tau_i^0 - t_{ij}.$$

Ha a T_{ij} tevékenység a τ_i^0 és a $\tau_i^0 + \bar{p}_{ij}$ időpontok között kezdődik el, akkor az nem akadályozza a következő tevékenység legkorábbi kezdését. A független tartalékidő számításának akkor van jelentősége, ha a folyamat realizálásában több kivitelező vesz részt. A teljes tartalékidő ilyenkor csak a következő kivitelezővel egyetértésben használható fel csúszásra.

A 8.24. ábrán egy üzemrészek közötti anyagmozgatási folyamat hálóterve látható. A hálón a tevékenységek az egyes feladó- és megrendelőhelyek közötti szállításokat, az események pedig e helyeken az anyag megjelenését jelentik. A hálón feltüntettük a szállítások átlagos időszükségletét is. Meghatározandó az események legkorábbi és legkésőbbi időpontja, a szállítások teljes és független tartalékidői, és a kritikus út hossza.



8.24. ábra. A vizsgált anyagmozgatási folyamat hálóterve

Készítsünk az események számával egyenlő rendű trianguláris mátrixot, amelynek elemei a T_{ij} tevékenységek t_{ij} időtartamai. A mátrix utolsó oszlopában az események bekövetkezésének a τ_i^0 legkorábbi, az utolsó sorában pedig a τ_i^1 legkésőbbi, időpontjait tüntettük fel (8.10. táblázat).

A legkorábbi és legkésőbbi határidők a táblázatban a következő mechanikus eljárással számíthatók:

A τ_0^0 értelemszerűen 0, mivel ennek bekövetkezéséhez nincs szükség időre.

A többi τ_j^0 esemény bekövetkezésének legkorábbi időpontját úgy határozzuk meg, hogy a τ_j^0 legkorábbi időpontokhoz rendre hozzáadjuk a mátrix j -edik oszlopának t_{ij} elemeit, és az összegek legnagyobbika lesz a τ_j^0 .

8.10. táblázat

Táblázat az események bekövetkezésének legkorábbi és legkésőbbi időpontjainak meghatározásához

$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6	7	τ_j^0
0		3	1						0
1				2	5				3
2				6		9			1
3					8	4			7
4							6		15
5							9		11
6								2	21
7									23
τ_i^1	0	5	1	7	15	12	21	23	

A legkorábbi határidők számítása:

$$\tau_1^0 = \max\{\tau_0^0 + t_{01}\} = \max\{0 + 3\} = 3,$$

$$\tau_2^0 = \max\{\tau_0^0 + t_{02}\} = \max\{0 + 1\} = 1,$$

$$\tau_3^0 = \max\{\tau_1^0 + t_{13}, \tau_2^0 + t_{23}\} = \max\{3 + 2; 1 + 6\} = 7,$$

$$\tau_4^0 = \max\{\tau_1^0 + t_{14}, \tau_3^0 + t_{34}\} = \max\{3 + 5; 7 + 8\} = 15,$$

$$\tau_5^0 = \max\{\tau_2^0 + t_{25}, \tau_3^0 + t_{35}\} = \max\{1 + 9; 7 + 4\} = 11,$$

$$\tau_6^0 = \max\{\tau_4^0 + t_{46}, \tau_5^0 + t_{56}\} = \max\{15 + 6; 11 + 9\} = 21$$

$$\tau_7^0 = \max\{\tau_6^0 + t_{67}\} = \max\{21 + 2\} = 23.$$

A mátrix utolsó sorának utolsó oszlopába beírjuk a $\tau_n^0 = \tau_n^1 = 23$ értéket, majd további események τ_i^1 legkésőbbi időpontjait úgy kapjuk meg, hogy visszafelé a τ_j^1 legkésőbbi időpontokból levonjuk a mátrix i -edik sorának t_{ji} elemeit, és ezek legkisebbike lesz a τ_i^1 .

A legkésőbbi határidők számítása:

$$\tau_6^1 = \min\{\tau_7^1 - t_{67}\} = \min\{23 - 2\} = 21,$$

$$\tau_5^1 = \min\{\tau_6^1 - t_{56}\} = \min\{21 - 9\} = 12,$$

$$\tau_4^1 = \min\{\tau_6^1 - t_{46}\} = \min\{21 - 6\} = 15,$$

$$\tau_3^1 = \min\{\tau_5^1 - t_{35}, \tau_4^1 - t_{34}\} = \min\{12 - 4; 15 - 8\} = 7,$$

$$\tau_2^1 = \min\{\tau_3^1 - t_{23}, \tau_5^1 - t_{25}\} = \min\{7 - 6; 12 - 9\} = 1,$$

$$\tau_1^1 = \min\{\tau_3^1 - t_{13}, \tau_4^1 - t_{14}\} = \min\{7 - 2; 15 - 5\} = 5,$$

$$\tau_0^1 = \min\{\tau_1^1 - t_{01}, \tau_2^1 - t_{02}\} = \min\{5 - 3; 1 - 1\} = 0.$$

8.11. táblázat

A teljes és a független tartalékidők meghatározása

T_{ij}	τ_i^0	τ_j^0	τ_i^1	τ_j^1	t_{ij}	$p_{ij} = \tau_j^1 - \tau_i^0 - t_{ij}$	$\bar{p}_{ij} = \tau_j^0 - \tau_i^0 - t_{ij}$
0-1	0	3	0	5	3	2	0
0-2	0	1	1	1	0	0	0
1-3	3	7	5	7	2	2	2
1-4	3	15	5	15	5	7	7
2-3	1	7	1	7	6	0	0
2-5	1	11	1	12	9	2	1
3-4	7	15	7	15	8	0	0
3-5	7	11	7	12	4	1	0
4-6	15	21	15	21	6	0	0
5-6	11	21	12	21	9	1	1
6-7	21	23	21	23	2	0	0

Az események bekövetkezésének legkorábbi és legkésőbbi időpontjainak számítása a 8.24 ábrán is követhető, ahol az időpontokat a csomópontok mellé írt számpárok jelölik.

A táblából a kritikus út is meghatározható a

$$\tau_j^0 - \tau_i^1 = 0, \quad i=j=0, 1, \dots, n$$

feltétel alapján. A kritikus út mentén fekvő események:

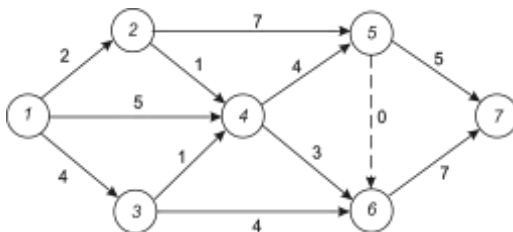
$$0-2-3-4-6-7,$$

és az

$$s_{\text{krit}} = 23.$$

A tevékenységek teljes és független tartalékidőinek számításait a 8.11. táblázatban foglaltuk össze.

8.8. példa: Tekintsük a következő logikai hálót, amelynek az élein látható számok az egyes tevékenységek elvégzéséhez szükséges előre megjósolható időtartamok napokban mérve. Határozzuk meg minden egyes esemény bekövetkezésének legkorábbi és legkésőbbi időpontját, a tevékenységek tartalék idejét, valamint a kritikus utat.



8.7.3 A PERT módszer

Eddig hallgatólagosan azt feltételeztük, hogy a tevékenységek végrehajtásához szükséges idő pontosan becsülhető. A gyakorlatban azonban a tevékenységek időtartama sokszor valamilyen eloszlással jellemezhető valószínűségi változó, amit egyetlen értékkel csak meglehetősen bizonytalanul tudunk megbecsülni. A PERT eredeti változata azt feltételezi, hogy a tevékenységek időtartama a *béta-eloszlást* követi (8.25. ábra), és a bizonytalanság csökkentésére három becslést használ: a legvalószínűbb, az optimista és a pesszimista becslést.

A **legvalószínűbb becslés** (m) az adott tevékenységre fordítandó idő legreálisabb értékét kívánja megadni. Ez a tevékenységidőtartam-eloszlás sűrűségfüggvényének maximumhelye, azaz a módusza (8.25. ábra). Az a -val jelölt **optimista becslés** a tevékenység időtartamának az a legkisebb értéke, amely alatt a tevékenység optimális esetben, különösen kedvező körülmények között befejezhető. A **pesszimista becslés** (b) a tevékenység időtartamának az a maximális értéke, amely különösen kedvezőtlen körülmények között szükséges a tevékenység elvégzéséhez. Valószínűtlen, de lehetséges érték abban az esetben, ha minden rosszul megy.



8.25. ábra. A béta-eloszlás sűrűségfüggvénye

Ahhoz, hogy az m , a , b számokból kiszámítsuk a tevékenység várhatóértékét (t_e) és szórását (σ), két feltevést szoktak tenni. Az egyik feltevés, hogy a szórás az ésszerűen lehetséges időigény terjedelmének egy hatoda, azaz

$$\sigma = \frac{b - a}{6}.$$

Ennek a feltevésnek az alapja, hogy sok eloszlásnak a farka körülbelül 3 szórásnyira van a módusztól, vagy a két farkok távolsága 6σ .

Ahhoz, hogy megkapjuk a t_e várhatóértéket, az eloszlás alakjáról azt feltételezzük, hogy *béta-eloszlás*. Ekkor a várhatóérték közelítőleg:

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6}.$$

A tevékenységek időtartamának várhatóértékeit és szórásait az előző képletekkel kiszámíthatjuk. A hálóterv szokásos jellemzőinek meghatározásához azonban még további feltevések szükségesek:

- a tevékenységek időtartamai statisztikailag egymástól függetlenek,
- a kritikus úton az időtartamok várhatóértékének összege mindig hosszabb, mint bármely más útvonalon,
- a hálóterven ábrázolt folyamat végrehajtásához szükséges idő normális eloszlású,
- az utóbbi feltevés alapja, hogy a független valószínűségi változók összege a központi határeloszlás-tétel szerint normális eloszlású.

Visszatérve a 8.9. táblázatban adott lakóház építési problémához, feltételezzük, hogy a tevékenységek időszükségletének várhatóértéke (t_{ie}) és szórásnégyzete (σ^2) az utolsó oszlopban adott értékekkel egyenlő. Határozzuk meg a terv végrehajtásához szükséges idő várhatóértékét, szórását és annak valószínűségét, hogy az építés 50 nap alatt befejeződik.

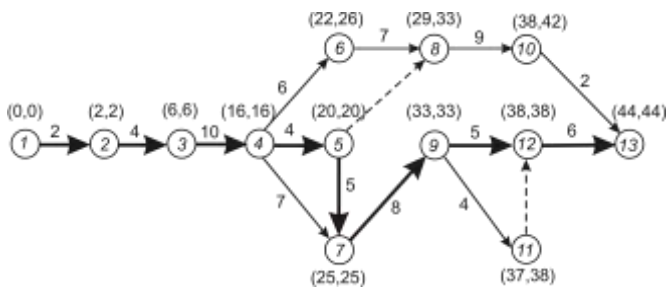
A megoldás a 8.26. ábrán látható, ahol csomópontok mellé írt számpárok az események bekövetkezésének legkorábbi és legkésőbbi időpontjai. A terv megvalósításához szükséges idő várhatóértéke a vastagvonallal rajzolt kritikus úton fekvő tevékenységek várható időszükségleteinek összege, azaz

$$s_{krit} = 2 + 4 + 10 + 4 + 5 + 8 + 5 + 6 = 44.$$

A szórása pedig

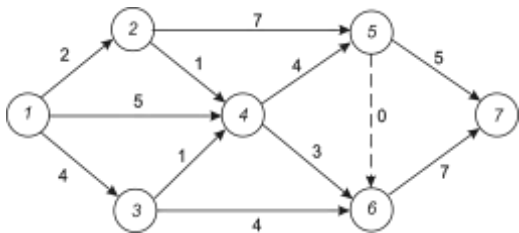
$\sqrt{44} = 6,63.$

A 50 napos befejezés valószínűsége: $50-44)/6,63 = 0,904$.



8.26. ábra. A lakóház építési példa megoldása

8.9. példa: Tekintsük az alábbi logikai hálót! A PERT három becslésen alapuló módszerét használva a tevékenységek elvégzésének időtartamai napokban mérve a 8.12. táblázatban található. Határozzuk meg a tevékenységek időtartamának várhatóértékét és szórását, a kritikus útvonalat, továbbá annak valószínűségét, hogy a terv 100 nap alatt befejeződik.



8.12. táblázat

Tevékenység	Optimista becslés	Legvalószínűbb becslés	Pesszimista becslés
1-2	28	32	36
1-3	22	28	32
2-4	26	36	46
2-5	14	16	18
3-4	32	32	32
3-6	40	52	74
4-5	12	16	24
4-6	16	20	26
5-7	26	34	42
6-7	12	16	30

8.7.4 A Microsoft Project alkalmazása

A projektirányítás fontos kelléke az irányítást támogató szoftver. A szoftverek sorában egyik legismertebb rendszer a Microsoft Project. A Microsoft Project bemutatásához visszatérünk a lakóház építési problémához, amit annyival egészítünk ki, hogy 8.9. táblázatban adott tevékenységi listához erőforrásokat is rendelünk. Előbb azonban összefoglaljuk a Microsoft Projecttel kapcsolatos legfontosabb ismereteket.

A projektmenedzsment tulajdonképpen módszerek és eszközök összessége, amelyek bevezetése után választ kapunk olyan kérdésekre, mint:

Milyen tevékenységeket kell végrehajtani a projekt céljainak eléréséhez?

Mikor hajtjuk végre az egyes tevékenységeket?

Ki fogja végrehajtani ezeket a tevékenységeket?

Mennyibe fog kerülni?

Mi történik, ha egyes tevékenységek nem készülnek el az ütemterv szerint?

Hogyan lehet a projekt részleteit egyeztetni az érdekeltekkel?

Természetesen egy megfelelően kialakított és működtetett projektirányítási rendszer önmagában még nem garantálja a projekt sikerét, a bukás kockázatát azonban jelentős mértékben növelheti, ha nem vagy csak rosszul alakítják ki.

A tevékenységek megadása

Minden terv alapját a tevékenységek és ezek paraméterei képezik, ezek tartalmazzák a projekt céljainak teljesítéséhez szükséges munkát, időtartamot és az erőforrásigényeket (8.27. ábra). Megemlítjük, hogy a programban lehetőségünk van a normál tevékenységeken kívül két speciális tevékenységtípussal is dolgozni. Az egyik az **összefoglaló tevékenység**, a másik pedig a **mérföldkő**. Az előbbieket összegzik a résztevékenységek főbb adatait, időtartamát, költségeit stb., az utóbbiak pedig a fontosabb projektállomásokat jelölik.

		Tevékenység neve	Időtartam	Kezdés	Befejezés	Megelőzők	Erőforrások nevei
1		Alapárak kiadása	2 nap	Sze 07.05.16.	Csü 07.05.17.		Árakadó gép, Árakadó gép kezelő
2		Alapozás	4 nap	Pén 07.05.18.	Sze 07.05.23.	1	Segédmunkás, Betonkeverő gép, Kőműves
3		Falazás	10 nap	Csü 07.05.24.	Sze 07.06.06.	2	Kőműves, Segédmunkás, Betonkeverő gép
4		Külső vezetékek szerelése	4 nap	Csü 07.06.07.	Ked 07.06.12.	3	Gáz és vízvezetékszerelő
5		Tetőszerkezet építése	6 nap	Csü 07.06.07.	Csü 07.06.14.	3	Ács
6		Elektromos előszerelés	7 nap	Csü 07.06.07.	Pén 07.06.15.	3	Villanyszerelő
7		Belső vezetékek szerelése	5 nap	Sze 07.06.13.	Ked 07.06.19.	4	Gáz és vízvezetékszerelő
8		Külső vakolás	7 nap	Pén 07.06.15.	Hét 07.06.25.	5	Segédmunkás[50%], Betonkeverő gép[50%], Kőműves
9		Belső vakolás	16 nap	Sze 07.06.20.	Sze 07.07.11.	7,6	Kőműves, Segédmunkás, Betonkeverő gép[50%]
10		Külső festés	9 nap	Ked 07.06.26.	Pén 07.07.06.	4,8	Festő és mázó
11		Padozat burkolás	4 nap	Csü 07.07.12.	Ked 07.07.17.	9	Burkoló
12		Belső festés	5 nap	Csü 07.07.12.	Sze 07.07.18.	9	Festő és mázó
13		Külső felszerelés	2 nap	Hét 07.07.09.	Ked 07.07.10.	10	Bádogos, Gáz és vízvezetékszerelő
14		Belső felszerelés	6 nap	Csü 07.07.19.	Csü 07.07.26.	11,12	Villanyszerelő, Gáz és vízvezetékszerelő, Asztalos
15		Befejezés	0 nap	Csü 07.07.26.	Csü 07.07.26.	13,14	

8.27. ábra. A lakóház építési probléma tevékenység listája

Minden projekt valamilyen alapvető cél elérése érdekében indul, a szándék valamilyen termék létrehozása, amit a projekt termékének nevezünk. A projekt terméke lehet tárgy, szolgáltatás vagy meghatározott esemény. A projektmenedzser alapvető feladata, hogy meghatározza cél eléréséhez szükséges tevékenységeket.

A tevékenységlista összeállításakor hasznos lehet, ha az eredményt a termék és a projekt szempontjából egyaránt vizsgáljuk. Az eredmény termékközpontú megközelítése a projekt minőségét, jellegzetességét és funkcióját mutatja. Például a lakóház építési projekt terméke egy lakóház és az eredmény **termékközpontú** megközelítése a projekt eredményére, az építményre és annak várható hasznosítóira fókuszál. Az eredmény **projektközpontú** megközelítése ezzel szemben a termék vagy szolgáltatás létrehozásának idő- és munkaigényét vizsgálja. Feladatunkban a projektközpontú megközelítés szerint a lakóház létrehozásához kapcsolódó tevékenységeket vizsgáljuk.

Az időtartamok felmérése és megadása

A tevékenység időtartama az az időmennyiség, amelyet a tevékenység végrehajtására szánunk.

Megadására a Microsoft Projectben többféle időegységet használhatunk, így akár perceket vagy hónapokat is. A projektünk átfutási idejétől és részletezettségétől függően más és más (óra, nap, hét, stb.) beosztással lehet dolgozni.

A programba integrált projektnaptárban megadhatjuk a munkanapokat, a munkanapon belüli munkaidőt, ebédszünet helyét és időtartamát stb. Mivel a Microsoft Projekt megkülönbözteti a munkaidőt a munkaidőn kívüli időszaktól, egy tevékenység időtartama nem feltétlenül azonos az eltelt idővel. Ütemezhetünk úgy is tevékenységeket, hogy azok a kezdésüktől a befejezésükig a munkaidőn kívüli időszakokat is figyelembe vegyék. Ezt eltelt időtartam megadásával oldhatjuk meg. Eltelt időtartamot elsősorban olyan tevékenységhez, rendelünk, amelyekre nincsen közvetlen ráhatásunk, de projektünk szempontjából kritikus. Ilyen például az úgynevezett technológiai várakozási idő.

A lakóház építési példában tevékenységek időtartamai adottak (8.27. ábra). A valódi projektekhez azonban gyakran becsülnünk kell a tevékenységek időtartamait. Jó kiindulópont a becsléshez például:

korábbi, hasonló projektek múltbeli tapasztalata,
a tevékenységet elvégző személyek becslései,
hasonló projektek irányításában jártas személyek véleménye,
szakértők vagy iparági szervezetek elbeszélései a miénkhez hasonló projektekről.

Összetett projektek esetében valószínűleg több forrásból merítjük az adatokat. Mivel a becslés eleve nem lehet pontos, ezért sokan ezt tartják az egyik legjelentősebb kockázati tényezőnek a projekteken.

Mérföldkő megadása

A projekttervben nemcsak a tevékenységek hordoznak fontos információkat a vezetés számára, hanem azok a fontosabb projektállomások is, amelyek elérése, figyelemmel kísérése fontos a teljesítés szempontjából. Ezeket az eseményeket –mint például egy összetett munkafázis befejezési időpontját vagy egy a projekttől független külső hatást (egy megrendelés visszaigazolásának beérkezését) – mérföldkövekkel kell jelölni. Mivel maga a mérföldkő többnyire nem tartalmaz munkát, így általában nulla időtartamú tevékenységként értelmezhetjük.

Tevékenységek munkafázisokba szervezése

Célszerű az egymáshoz szorosan kapcsolódó tevékenységeket csoportokba, munkafázisokba szervezni. A munkafázisokba szervezett tevékenységeket könnyebb megkülönböztetni egymástól, és a terv is átláthatóbbá válik. Például egy építési projektet gyakran osztanak fel fő munkafázisokra (például előkészítés, kivitelezés és utómunkálatok). Munkafázisokat a tevékenységek lefokozásával és előléptetésével hozhatunk létre. A vázlatkezeléséhez hasonlóan vonhatjuk össze a tevékenységlistákat egy összefoglaló elem alá. A Microsoft Projectben összefoglaló tevékenységek jelölik a munkafázisokat.

Az összefoglaló tevékenységek másképpen viselkednek, mint a többi tevékenység. Nem adhatjuk meg közvetlenül az adataik többségét (pl. időtartam, kezdő időpont stb.), mert ezek az adatok a munkafázis résztevékenységeiből adódnak. Az összefoglaló tevékenységek segítségével áttekinthetőbbé tehetjük a különféle munkafázisokat és a teljes projektet is.

Kapcsolódó tevékenységek

Projekteken a tevékenységeknek meghatározott sorrendben követik egymást. Például a lakóház építési példában a *külső vakolás* tevékenységét be kell fejezni, a *külső festés* megkezdése előtt. A két tevékenységnek kezdés-befejezés viszonya (más szóval kapcsolata, függősége) két dolgot jelent:

A második tevékenységnek az első után kell bekövetkeznie, ez a **sorrend**.
A második tevékenység csak akkor kezdődhet, ha az első már befejeződött, ez a **függőség**.

A tevékenységek viszonyát kapcsolatok (*Link*) segítségével írjuk le. A Microsoft Projectben azt a tevékenységet, ahonnan a kapcsolat indul, (*külső vakolás*) **Megelőzőnek** (*Predecessor*) hívjuk, mert ez megelőzi a tőle függő tevékenységeket. Azt a tevékenységet (*külső festés*) pedig, ahova érkezik, **Követőnek** (*Successor*) nevezzük, mert követi azokat a tevékenységeket, amelyektől függ. Bármely tevékenység lehet a megelőzője egy vagy több követő tevékenységnek, és hasonlóképpen bármely tevékenység lehet a követője egy vagy több megelőző tevékenységnek.

8.13. táblázat

A kapcsolatok típusai a Microsoft Projectben

Kapcsolat	Jelentés
BK (Befejezés-kezdés)	A megelőző tevékenység befejező időpontja határozza meg a követő tevékenység kezdő időpontját. Példa: Az alapozást be kell fejezni a falazás megkezdése előtt.
KK (Kezdés-kezdés)	A megelőző tevékenység kezdő időpontja határozza meg a követő tevékenység kezdő időpontját. Példa: Egyszerre érdemes egy forgatókönyvet átvizsgálni és forgatókönyv részleteit meghatározni.
BB (Befejezés-befejezés)	A megelőző tevékenység befejező idő-pontja határozza meg a követő befejező időpontját. Példa: Speciális eszközöket igényelő tevékenységek, amelyeket be kell fejezni, amikor az eszköz bérlése véget ér.
KB (Kezdés-befejezés)	A megelőző tevékenység kezdő időpontja határozza meg a követő tevékenység befejező időpontját. Példa: Mire a vágólabor elérhető lesz, a vágás-előkészítés tevékenységnek be kell fejeződnie. (Ez elég ritkán használt fajtája a kapcsolatoknak.)

A tevékenységek közötti logikai függőségeket **kapcsolatok** révén adjuk meg. A tevékenységek közötti kapcsolat típusa a Microsoft Projectben négyféle lehet, ezeket a 8.13. táblázat foglalja össze.

A tevékenységek közötti kapcsolat többféle módon is megjelenik a Microsoft Projectben. Például:

A **Sávós ütemterv** (*Gantt diagram*) és a **Hálós ütemterv** (*hálóterv*) nézetben a tevékenységek kapcsolatát a tevékenységeket összekötő vonalak mutatják (8.28. ábra).

A program különböző nézeteihez tartozó táblázatokban a követő tevékenységet megelőző tevékenység azonosítószáma a **Megelőzők** nevű mezőben jelenik meg (8.27. ábra).



8.28. ábra. A lakóház építési probléma Gantt diagramja

Erőforrások megadása és beállítása

A projektekben erőforrásoknak nevezzük azokat az embereket, gépeket, berendezéseket, alap- és segédanyagokat, amelyek a tevékenységek végrehajtásához szükségesek. A Microsoft Projectben az erőforrásoknak két fontos jellemzője a kapacitás és a költség. A kapacitás (rendelkezésre állás) azt határozza meg, hogy bizonyos erőforrások mikor és mennyi munkát végezhetnek tevékenységeken, a költség pedig azt, hogy mennyibe kerül az adott erőforrások igénybevétele.

A Microsoft Project használatának az egyik legnagyobb előnye, a hagyományos projektátmozgató módszerekkel szemben éppen a hatékony erőforrás-kezelésben rejlik. A Microsoft Project ugyan nem követeli meg az erőforrásadatok megadását, de ezek nélkül nehezebben látható át, hogy ki vagy mi melyik munkát végzi, mikor és milyen költséggel. Természetesen az erőforrásadatok felvétele és követése többletmunkával jár, de bőven megtérül, ha nagyon szorosa az idő-, a költség- vagy az erőforráskorlátaink a projektben.

8.14. táblázat

Munkatípusú erőforrások a Microsoft Projectben

Erőforrás	Példa
Névvel azonosított személyek	Kiss Péter, Szabó József
Szakértelem, munkakör alapján megkülönböztetett erőforrás	Kőműves, asztalos, villanyszerelő, segédmunkás
Munkacsoport jellegű	Karbantartó részleg, kőműves brigád, lakatos műhely stb
Berendezés	Daru, betonkeverő gép, stb.

A Microsoft Project kétféle erőforrás típussal dolgozik: munka- és anyagtípusú erőforrással. **Munkatípusú erőforrás** alatt a projekten dolgozó embereket és berendezéseket értjük. A munkatípusú erőforrásokra a 8.14. táblázat mutat be néhány példát.

A tevékenységekhez rendelt munkatípusú erőforrások kapacitását %-ban adjuk meg. A névvel azonosított erőforrások maximális kapacitása 100%, de ezt különböző azonos időben folyó tevékenységek között megoszthatjuk. A munkakör alapján megkülönböztetett erőforrások maximális kapacitása azonban 100%-nál több is lehet, mivel pl. a kőműves nevű erőforrás nemcsak egyetlen személyt jelenhet. Ha a kőműves nevű erőforrás maximális kapacitása 200 %, akkor az, két kőművessel egyenértékű (8.29. ábra).

		Erőforrás neve	Típus	Anyag címkéje	Monogram	Csoport	Max. mennyiség
1		Árokásó gép	Munka		Á		100%
2		Betonkeverő gép	Munka		B		100%
3		Árokásó gép kezelő	Munka		Á		100%
4		Segédmunkás	Munka		S		200%
5		Kőműves	Munka		K		200%
6		Villanyszerelő	Munka		V		100%
7		Gáz és vízvezeték-szerelő	Munka		G		200%
8		Ács	Munka		Á		100%
9		Festő és mázó	Munka		F		200%
10		Burkoló	Munka		B		100%
11		Bádogos	Munka		B		100%
12		Asztalos	Munka		A		100%

8.29. ábra. A lakóház építési probléma erőforrás lapja

Az **anyagtípusú erőforrásokat** a projekt előrehaladásával folyamatosan használjuk fel. Az építkezési projektben ilyenek például a téglák, gerendák, szögek, beton stb. Az anyagtípusú erőforrásokkal elsősorban azért dolgozunk a Microsoft Projectben, hogy nyomon tudjuk követni a

felhasználás mértékét és az ehhez társuló költségeket.

Munka- és anyagtípusú erőforrásokat összehasonlítva, azok sok tekintetben megegyeznek egymással. Mindkét erőforrástípust ugyanúgy kell tevékenységhez rendelni, azonos módon lehet a tulajdonságaikat megváltoztatni, és ugyanúgy megosztható mindkettő erőforráskészleten keresztül is. A kétféle erőforrástípus között azonban három lényeges különbség is említhetünk. A munkatípusú erőforrásoktól eltérően az anyagtípusúak esetében nincs túlóradíj és erőforrásnap-tár, továbbá nem adhatunk meg az egyszerre rendelkezésre álló maximális anyagmennyiséget sem.

Minden projekt megvalósításának vannak költségei, legfeljebb nem minden esetben vesszük azokat figyelembe. A költségtervezéssel és a költségfelhasználás nyomon követésével a projekt-vezetők választ kaphatnak a következő kérdésekre:

Várhatóan mennyibe fognak kerülni az egyes erőforrások és tevékenységek?

A tevékenységek időtartama és a becsült erőforrás-felhasználás alapján várhatóan mekkora lesz a projekt összköltsége?

A költségek szempontjából az erőforrások megfelelnek-e a projekt lehetőségeinek, nem használunk-e túl drága erőforrásokat olyan munkákhoz, melyeket kevésbé drága erőforrások is el tudnának végezni?

A költségfelhasználás üteme megfelel-e az elvárásoknak?

A **munkatípusú erőforrások költségeit** mindig egységnyi időre vetítve adjuk meg. Például a humánerőforrások költségét órabérben [Ft/óra], napi bérben [Ft/nap] stb. A berendezéseket egységnyi időre eső bérleti díját [Ft/óra], [Ft/nap], [Ft/hét] stb. egységben. Az **anyagtípusú erőforrásoknál a költségek** egységnyi felhasználásra vonatkoznak. Például [Ft/tégla], [Ft/t] stb.

A Microsoft Project az erőforrások munkaidejének beállítására és azok munkájának ütemezéséhez ún. **erőforrásnaptárt** használ. Az erőforrásnaptár tartalmazza az erőforrás munkaidejét és munkaidőn kívüli idejét. Az erőforrásnaptár csak a munkatípusú erőforrásoknál (ember és berendezés) használható, anyagtípusú erőforrásoknál nem.

Amikor a projekttervben elkezdünk erőforrásokat felvenni, a Microsoft Project minden egyes erőforráshoz létrehoz egy saját erőforrásnaptárt. Az erőforrásnapták kezdeti munkaidő-beállításai teljesen megegyeznek a **Szokásos alapnaptár** beállításáival. (Ez a Microsoft Projectbe épített naptár, mely hétfőtől péntekig, reggel 8 órától este 5 óráig, egy óras ebédszünettel megszakítva tartalmaz munkaidőt.) Ha erőforrásunk munkaideje mindig megegyezik a szokásos alapnaptár munkaidejével, nem szükséges az erőforrásnaptárokat egyedileg szerkesztenünk. Vannak olyan esetek, amikor mégis módosítanunk kell a szokásos alapnaptárban szereplő erőforrások munkaidejét, például: rugalmas munkaütemezés esetén, szabadság nyilvántartására, más alkalmak rögzítésére, amikor az erőforrás nem tud dolgozni a projekten, például betanítás ideje vagy megbeszélés alatt.

Erőforrások hozzárendelése a tevékenységekhez

A tevékenységi lista létrehozása és az erőforrások megadása, illetve beállítása után készen állunk arra, hogy az erőforrásokat tevékenységekhez rendeljük.

A tevékenységek és az erőforrások egymáshoz rendelése teszi lehetővé a tevékenységben foglalt munka elvégzését, illetve a tevékenység elvégzéséhez használt erőforrás mennyiségének és költségének a kiszámítását. A tevékenységek szempontjából vizsgálva az összerendelést, tevékenység-hozzárendelésről, az erőforrások szempontjából nézve pedig erőforrás-hozzárendelésről beszélhetünk. Akárhogy is nézzük, ugyanarról van szó: egy tevékenységhez hozzáadva egy erőforrást, valamiféle hozzárendelést kapunk eredményül (8.30. ábra).

Erőforrás neve	Egység
Kőműves	100%
Segéd munkás	100%
Betonkeverő gép	100%

8.30. ábra. A tevékenységek és az erőforrások egymáshoz rendelése.

A tevékenység létrehozását követően, az erőforrás-hozzárendelése előtt a tevékenységhez tartozó időtartam a tevékenység végrehajtásának a munkaigényét (erőforrásigényét) fejezi ki. A munkatípusú erőforrás százalékban adott kapacitása pedig az erőforrás munkavégző képességét jelenti. Ha például van egy 100% kapacitású emberi erőforrásunk, aki teljes munkaidőben az adott tevékenységen dolgozik, akkor az általa végzett munka mennyisége megegyezik a tevékenység időtartamában foglalt munkaórák számával. A munka mennyisége tehát általában megegyezik a tevékenység időtartamával. Ha azonban a tevékenységhez több erőforrást rendelünk, vagy ha a tevékenységhez rendelt erőforrás nem teljes munkaidőben dolgozik, akkor a Microsoft Project az elvégzett munkát az ún. ütemezési képlettel számítja ki:

$$\text{Munka [óra]} = \text{Időtartam [óra]} \times \text{Erőforrás-mennyiség [\%]}$$

Az időtartam, a munkatípusú erőforrás-kapacitás és a munka közötti összefüggések

Nézzünk egy konkrét példát! A *Falazás* tevékenység időtartama 10 nap. A lakóház építés projekt esetében az 10 nap 80 órát jelent. Amikor hozzárendelünk egy *Kőműves* erőforrást a tevékenységhez, a Microsoft Project a *Kőműves* munkaidejének 100 százalékát a *Falazás* tevékenységhez rendeli. Ekkor az ütemezési képletből kifejezett *Időtartam* a következő:

$$\text{Időtartam} = 80 \text{ óra Munka} / 100\% \text{ Erőforrás-mennyiség} = 80 \text{ óra}$$

Más szóval, egy *Kőműves* erőforrás kapacitásának 100 %-t hozzárendeltük a *Falazás* tevékenységhez, és a tevékenység végrehajtása 80 óra munkát igényel.

Ha két *Kőműves* erőforrást rendelünk 100%-ban a *Falazás* tevékenységhez, akkor az ütemezési képlet így néz ki:

$$\text{Időtartam} = 80 \text{ óra Munka} / 200\% \text{ Erőforrás-mennyiség} = 40 \text{ óra}$$

A két erőforrás egymással párhuzamosan végzi a 80 óra időtartamú tevékenységet, ezért a tevékenység elvégzésének időtartama 40 órára csökkent.

Alapértelmezés szerint a Microsoft Project a bemutatott, ún. **Effort-driven** (munkavezérelt) ütemezési eljárást alkalmazza. Ez annyit jelent, hogy a tevékenység kiinduló munkaigénye állandó, független a hozzárendelt további erőforrások számától (kapacitásától). Az **Effort-driven**

(munkavezérelt) ütemezéskor ezért az erőforrások kapacitásának növelése csökkenti és fordítva az erőforrások kapacitásának csökkentése növeli a tevékenység elvégzésének időtartamát.

A lakóház építési projektben a célunk, hogy nyomon kövessük az anyagok felhasználását és a költségét. Amikor anyag típusú erőforrást rendelünk egy tevékenységhez, annak felhasználását és költségét az alábbi két módszer valamelyikével kezelhetjük:

Az anyagból rögzített mennyiséget rendelünk a tevékenységhez. A Microsoft Project a teljes költség meghatározásához megszorozza az erőforrás egységköltségét a tevékenységhez rendelt erőforrás mennyiséggel.

Az anyagból változó arányú mennyiséget rendelünk a tevékenységhez. A Microsoft Project annak függvényében fogja meghatározni az erőforrás mennyiségét és költségét, ahogy a tevékenység időtartama változik.

Tevékenységek végrehajtásának a nyomon követése

A projektvezető az idejének nagy részét a hibátlan projektterv elkészítésére, ellenőrzésére és közzétételére fordítja. Azonban a tervezés csak az első fázisa a projektvezetésnek. Annak befejezése után kezdődik a projekt megvalósítása, azaz végre kell hajtani azt, amit előzőleg megtervezünk. Ideális esetben a projektek megvalósítása terv szerint halad, de ez a gyakorlatban ritkán fordul elő. Általános érvényű igazság, hogy minél bonyolultabb a projektterv, és minél hosszabb a tervezett időtartam, annál nagyobb a tervtől való eltérés esélye. Az eltérés az a különbség, ami a tervezett (a projekttervben rögzített) tevékenységekhez és időtartamokhoz képest ténylegesen megvalósul.

A tényleges munka megfelelő nyomon követése, a nyomkövetési adatok összehasonlítása a projekttervvel időben felfedheti az esetleges eltéréseket, és a terv érintett részeit szükség szerint módosíthatjuk.

A projektek többségénél elegendő az elvégzett tevékenységek készülségi fokának és a tényleges kezdési, befejezési dátumoknak a megfigyelése, de a Microsoft Project ennél részletesebb nyomon követést is támogat. Például tevékenység és erőforrás-hozzárendelés szintű munkaadatokat, az egyes időszakokban (hetente vagy naponta) elvégzett munkát is nyomon követhetjük. Az egyszerűbb nyomon követési módszerekhez képest az idősoros adatok segítségével pontosabban megválaszolhatjuk a projektvezetés alapvető kérdéseit:

Helyesen határoztuk-e meg a tevékenységek kezdését és befejezését? Ha nem, az milyen hatással lesz a projekt befejezésének időtartamára?

A tervezetthez képest az erőforrások több vagy kevesebb időt igényelnek a tevékenységek végrehajtásához?

A tervezetthez képest több vagy kevesebb pénz kell a tevékenységek végrehajtáshoz.

Projektvezetőnek kell eldöntenie, hogy milyen nyomon követési szintek illeszkednek a leginkább az adott projekttervhez, és ezek közül melyik felel meg a legjobban az érdekelteknek.

Miután elkészült a projekt **bázisterve** és elkezdődött a munka, a projektvezető figyelme már nem a tervezésre, hanem a projekt végrehajtási adatainak összegyűjtésére, bevitelére és elemzésére összpontosul. A projektek többségénél ezek a végrehajtási adatok három alapvető kérdésre vagy fő jellemzőre bonthatók:

Mennyi munkát igényelt a tevékenység végrehajtása?

Időben kezdődött és végződött-e a tevékenység?

Milyen költségvonzata van a tevékenységnek?

A kérdésekre adott válaszokat a bázistervvel összevetve a projektvezető és az érdekeltek követhetik a projekt előrehaladását, és megtudhatják belőle, hogy mikor van szükség módosító intéz-

kedésekre.

Az érdekeltek, például az ügyfelek és szponzorok tájékoztatása a projektállapotáról vitathatatlanul a projektvezető egyik legfontosabb, de egyben legmunkaigényesebb feladata. Bár a tökéletes információáramlás még nem garantálja a projekt sikerét, a gyenge információáramlás szinte mindig sikertelenséghez vezet.

A projektállapot megfelelő közvetítéséhez tisztában kell lennünk az alábbiakkal:

Kinek kell tudnia a projektállapotról és milyen célból?

Milyen formátumú vagy szintű adatokra van ehhez szükségük?

Ezekre a kérdésekre a projekt kezdeti tervezési szakaszában kell választ adnunk. Amikor már magán a projekten dolgozunk, a legfőbb kommunikációs tevékenységünk az állapot jelentése lesz. Ez számos formát ölthet:

Állapot jelentések leírják, hol tart a projekt idő, költség és eredmény tekintetében (projektháromszög).

Jelentések az előrehaladásról, amelyek a projektcsapat eredményeit dokumentálják.

Előrejelzések, amelyek a projekt jövőbeni teljesítményét becsülik meg.

Ha az ütemterv szerinti vagy az aktuális projektteljesítmény eltér a bázisinterváltól, eltérésről beszélünk. Az eltérést általában időben (hány nappal csúszik az ütemtervhez képest) vagy költségként (például mekkora összeggel haladja meg a költségvetést) mérjük. A kezdeti projekttervezés befejezése után projektvezetők az eltérések azonosítására, igazolására, és sokszor az azokra való reagálásra szentelik idejük nagy részét.

8.8. Petri hálók

A Petri hálók néven ismert hálózatokat *Carl A. Petri* (1964) „Kommunikáció Automata” című doktori disszertációjában vezette be. Azóta a Petri háló modelleket konkurens és a párhuzamos rendszerek struktúrájának és szabályozásának tanulmányozására széles körben tovább fejlesztették. A Petri hálókkal kapcsolatban az elmúlt évtizedekben a legtöbb alkalmazás a kommunikáció protokollok és számítógépes rendszerek területén jelent meg, napjainkban azonban a gyártási rendszerek területén is széleskörű érdeklődés mutatkozik irántuk.

Petri hálók előnyösen használhatók a diszkrét gyártási rendszerek modellezésében, validálásában, elemzésében és ellenőrzésében, mert képesek leírni ezeknek a rendszereknek néhány lényeges jellemzőjét. Ilyenek például a konkurencia vagy párhuzamosság (amikor több művelet párhuzamosan folyik), az aszinkron tevékenységek (a műveletek elvégzése változó mennyiségű időt igényel), az osztott erőforrások miatt jelentkező konfliktusok (ugyanaz a gép különböző műveleteket végez), és a diszkrét-esemény folyamatok (a gyártási folyamat úgy tekinthető, mint diszkrét események egy sorozata).

A Petri hálók szakirodalma a modellek széles választékát foglalja magában. A tankönyvben az ismertetést az időkorlátos Petri hálók osztályára szűkítjük, amelyek megfelelő eszközt adnak a valós idejű aszinkron konkurens rendszerek elemzéséhez. Az időzített Petri hálók hasznosnak bizonyultak a rugalmas gyártási rendszerek (FMS) működésének a tanulmányozására, és olyan információk elérését teszik lehetővé, mint a termelékenység, a gépek kihasználtsága és így tovább. A modell két jellemző tulajdonsága: a műveleti időkről azt feltételezzük, hogy determinisztikusak; az irányítási szabályokat (kivéve az egyszerű FIFO szabály) kifejezetten figyelembe vesszük. Így eltekintve teljesítménykiértékelés kérdésétől, a problémák ütemezési problémaként kezelhetők.

A Petri háló elméletének általános bevezetése után a rugalmas gyártó rendszerek (FMS) modellezésére és elemzésére használt időzített Petri hálók alkalmazását beszéljük meg.

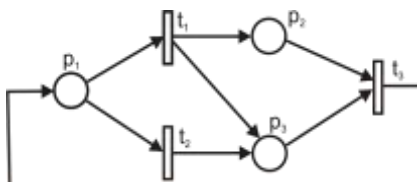
8.8.1 A Petri hálók elmélete és terminológiája

Ebben a szakaszban rövid áttekintést adunk a Petri hálók elméletének alapjairól.

A Petri háló struktúrája

A Petri háló egy irányított, súlyozott páros gráf, amely két csomópont típust tartalmaz. Az egyik csomópont típus a helyeket és a másik az átmeneteket jelöli. Helyeket és az átmeneteket irányított élek kötik össze. Formálisan, egy Petri háló három véges halmazból áll, $N=(P, T, F)$, ahol a

$P=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ a helyek véges halmaza,
 $T=\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ az átmenetek véges halmaza, és
 $(P \times T) \cup (T \times P) \supset F$ az irányított élek halmaza.



8.31. ábra. Egy Petri háló modellje

Grafikusan a helyeket körök, és az átmeneteket álló téglalapok jelzik, ahogy azt a 8.31. ábra mutatja. Egy átmenet bemeneti, illetve kimeneti helyeit az átmenet bemenő, illetve kimenő élei kapcsolják össze. A t_j ($j=1, 2, \dots, m$) átmenet bemeneti helyeinek halmazát $\text{Inp}(t_j)$ jelöli. Hasonlóképpen $\text{Out}(t_j)$ jelöli a t_j átmenet kilépő helyeinek halmazát. A példában (8.31. ábra), az

$$\begin{aligned} \text{Inp}(t_1) &= \text{Inp}(t_2) = \text{Out}(t_3) = \{p_1\} \\ \text{Out}(t_1) &= \text{Inp}(t_3) = \{p_2, p_3\}, \quad \text{Out}(t_2) = \{p_3\} \end{aligned}$$

A Petri háló illeszkedési mátrixa

Egy Petri-háló szerkezetét a helyek és az átmenetek illeszkedési mátrixával lehet kényelmesen leírni, amit a következő módon definiálunk:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times m},$$

ahol:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{ha } p_i \in \text{Out}(t_j) \\ -1, & \text{ha } p_i \in \text{Inp}(t_j) \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

A 8.31. ábrán látható Petri háló illeszkedési mátrixa a következő:

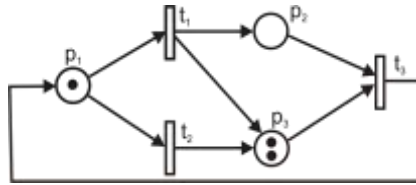
	t_1	t_2	t_3
p_1	-1	-1	+1
p_2	+1	0	-1
p_3	+1	+1	-1

A jelölés

Egy Petri háló (N) jelölése (M) egy függvény:

$$M: P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \text{ (pozitív egészs számok halmaza),}$$

amely a helyek állapotát jelző tokeneket (jeleket), nem negatív számokat rendel a hálózat minden p_i ($i=1, 2, \dots, n$) helyéhez. Speciálisan $M^0(p_i)$ jelenti a kezdeti jelölést. A tokeneket a helyeket ábrázoló körökbe rajzolt fekete pontok reprezentálják, például a 8.32. ábrán az $M^0(p_3)=2$.



8.32. ábra. Egy jelölt Petri háló

A 8.32. ábrán a Petri háló kezdeti jelölése:

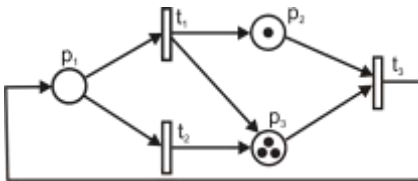
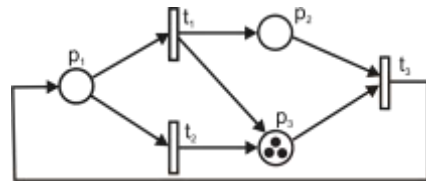
$$M^0(p_1)=1, M^0(p_2)=0, M^0(p_3)=2.$$

Az egyszerűsítés érdekében, a jelölést az $M^0=[1, 0, 2]$ n -vektor reprezentálja, amit tokeneloszlás vektornak is neveznek, és amelynek az i -edik komponense (m_i) egyenlő a p_i helyen található tokenek számával. Egy hely állapotát a benne lévő tokenek száma jelzi, és a hálózat állapota az egyes helyek állapotainak az összessége. A Petri hálók különleges tulajdonsága, hogy a jelölés (a tokenek száma) az átmenetek „tüzelésével” megváltoztatható, és így a bevezethetők a dinamikus hálózatok.

Tüzelési szabályok

A t_j átmenetről akkor, és csak is akkor mondjuk, hogy az M jelöléssel engedélyezett (vagy tüzelhető), ha minden bemeneti helye $p_i \in \text{Inp}(t_j)$ legalább egy tokenet tartalmaz, vagyis az $M(p_i) > 0$. Minden M jelöléssel engedélyezett átmenet tüzelhető. Amikor egy t_j átmenet tüzelt, akkor egy tokenet eltávolítunk minden bemeneti helyéről és egy tokenet hozzáadunk minden kimeneti helyéhez. Ez a változás határozza meg a hálózat új jelölését, az elérhető átmenetek új halmazát, és így tovább.

Például a 8.32. ábrán látható Petri hálón a t_1 és t_2 is engedélyezett az $M^0=[1, 0, 2]$ jelöléssel, de a t_3 nem, mivel annak egyik bemeneti helye, a p_2 nem tartalmaz tokenet. A t_1 tüzelése eltávolít egy tokenet a p_1 bemeneti helyről, és hozzáad egy tokenet minden kimeneti helyhez, p_2 -höz és p_3 -hoz. Az eredményként kapott új jelölést, $M^1=[0, 1, 3]$ a 8.33. ábra szemlélteti.

8.33. ábra. A jelölés t_1 tüzelése után8.34. ábra. A jelölés t_2 tüzelése után

Az új jelöléssel a t_3 átmenet most már engedélyezett, viszont t_1 és t_2 nem. A példában a t_3 tüzelése a kezdeti M^0 jelöléshez vezet vissza. Így az átmenetek tüzelésének sorozata (t_1, t_2) korlátlanul ismételhető.

Ha azonban, a kezdeti jelölést a t_1 tüzelése helyett a t_2 tüzelésével változtatjuk meg, akkor az új jelölés $M^2=[0, 0, 3]$ lesz (8.34. ábra), és ekkor egyik átmenet sem lesz engedélyezett. Ebben az esetben a Petri hálóról azt mondjuk, hogy meghalt, mivel a jelölés már nem fejleszthető tovább. Ezért fontos megjegyezni, hogy bár az M^0 jelöléssel mindkét átmenet, t_1 és t_2 engedélyezett, de közülük csak egyik tüzelhető (a t_1 és t_2 átmenetek mindegyike csak akkor lenne tüzelhető, ha a p_1 legalább két tokenet tartalmazna, mivel minden tüzelés eltávolít egy tokenet a p_1 -ből). Ebben a helyzetben, a t_1 és t_2 átmenetekről azt mondjuk, hogy konfliktusban állnak egymással, és dönteni kell arról, hogy melyik átmenet tüzeljük. Fontos tudni, hogy a hálózat fejlődése radikálisan különböző lehet, attól függően, hogy melyik átmenetet választjuk ki tüzelésre.

Azt is hangsúlyozni kell, hogy a Petri hálók nem feltétlenül garantálják tokenek számának megőrzését, mivel minden tüzelés után a tokenek száma a hálózatban megváltozhat. Például, a t_1 tüzelése eltávolít egy tokent, de két tokent hoz létre, így növelve az összes tokenek számát, amint az a 8.32.-8.34. ábrákból kiderül.

8.8.2 Alapvető tulajdonságok

Az átmenetek tüzelése, az ún. „token játék” teszi lehetővé a dinamikus viselkedésű rendszerek modellezését Petri hálókkal. Egy átmenet tüzelése úgy értelmezhető, mint egy esemény bekövetkezése, ami elnyel bizonyos erőforrásokat és létrehoz másokat. Ebből a szempontból a tokenek erőforrásokat reprezentálnak, amelyek bizonyos helyeken egy bizonyos állapotban vannak. Egy vagy több token létezése jelzi a rendelkezésre álló forrásokat, ezáltal lehetővé téve bizonyos események történését (az engedélyezett átmeneteknek megfelelően), mivel, ahol nincs token ott nincs elérhető erőforrás. Alternatíván a tokenek úgy tekinthetők, mint helyekkel reprezentált fenntartó feltételek. Attól függően, hogy melyik feltételeket elégítjük ki, bizonyos események megtörténnek, hatásukra a régi feltételek megszűnnek és az új jelöléssel leírt, új feltételek érvényesülnek.

Mint látni fogjuk, a tokenek gyártási környezetben erőforrásokat képviselnek, úgymint gépeket, alkatrészeket és így tovább, és egy átmenet tüzelése a műveletek kezdetét vagy befejezését jelenti. A rendszerben a helyek és átmenetek együttesen határozzák meg a műveletek feltételeit és az elsőbbségi kapcsolatokat.

A Petri hálóval modellezett dinamikus rendszerek tanulmányozásához fontos ismerni a hálózat életképességét és határait. A Petri háló élő, ha minden a kezdő jelölésből tüzelések sorozatával elérhető jelölésre létezik a tüzelések egy sorozata, amely az összes átmenetet tüzeli. Más szavakkal, az életképesség tulajdonság azt biztosítja, hogy a rendszer holtpontmentes. A korábban bemutatott, a 8.32. ábrán látható Petri háló nem él, mivel M^2 jelölés, amit az M^0 jelölésből a t_2 tüzelésével értünk el holtponthez vezetett. Megjegyezzük, ez a feltétel érvényes minden átmenetre: még akkor is, ha a t_1 , t_3 tüzelési sorrend a végtelenségig ismételtető, mert a t_2 átmenet meghalt.

A Petri háló korlátos, ha minden a kezdő jelölésből tüzelések sorozatával elérhető jelölésre létezik egy a tokenek számával megadott felső korlát. Ez a tulajdonság garantálja, hogy a hálózat bármely helyén a tokenek nem halmozódhatnak korlátlanul. Nem nehéz ellenőrizni, hogy a 8.32. ábrán látható Petri háló korlátos (a lehetséges jelölések, amelyek M^0 -ból elérhetők M^1 , M^2 , és M^0).

Általában az életképesség és korlátosság tulajdonságokat nehéz ellenőrizni. Ez valójában megköveteli az elérhetőségi gráf felépítését, amely leírja a kezdeti jelölésből előállítható összes lehetséges jelölést (az engedélyezett átmenetek tüzelésével). Nagy hálónál az elérhetőségi gráf nehezen kezelhető, mivel az elérhető jelölések száma exponenciálisan növekszik. Ezeknek a tulajdonságoknak azonban van némi hatása a hálózat szerkezetére (illeszkedési mátrixon keresztül) és egyszerűen le lehet vezetni a Petri hálók bizonyos osztályait (további részletek találhatók Sifakis, 1978, és Memmi és Roucairol, 1979 forrásokban).

Az életképesség és korlátosság együtt garantálják a rendszer folyamatos működését véges mennyiségű erőforrással. Ez az oka annak, hogy ezek a tulajdonságok különös figyelmet érdemelnek, amikor Petri hálókkal modellezett dinamikus rendszereket tanulmányozunk. A teljesítmény értékeléséhez, még be kell vezetni a Petri hálókban az időtényezőt, ami a következő bekezdés témája.

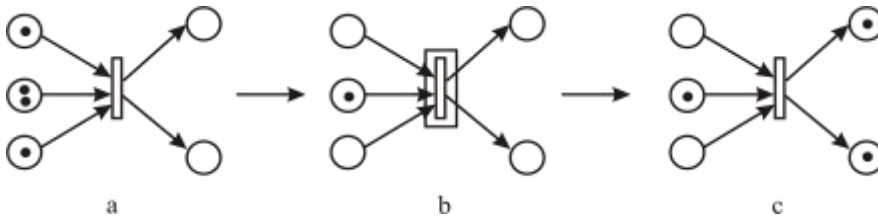
8.8.3 Az időzített Petri hálók

Az időzített Petri hálókat eredetileg Ramchandani (1974) vezette be. Ebben a modellben a tüzelési idő függvény definíciója:

$$\tau: T \rightarrow \mathbf{R}^+ \quad (\text{pozitív racionális számok halmaza}),$$

amely egy pozitív (racionális) számot $\tau(t)$ társít minden egyes t átmenethez.

A korábban leírtakhoz képest a tüzelési szabályok az időzített Petri hálókban nem változnak, kivéve, hogy minden t_j átmenethez tartozik $\tau(t_j)$ valós tüzelési időtartam. A működési mechanizmus megértéséhez tekintsük a 8.35. ábrát, amely egy átmenetet szemléltet a hozzá tartozó bemeneti és kimeneti helyekkel, valamint jelöléssel. A tüzelés indítása előtti állapotot a 8.35/a. ábrán látható. Amikor az átmenet engedélyezett, a tüzelés indítása után az átmenet minden bemeneti helyéről egy tokent eltávolítunk, és a tüzelés végrehajtásának időtartama alatt a tokenek az átmenetben maradnak (8.35/b. ábra). A tüzelés befejezésekor az átmenet minden kimeneti helyéhez egy tokent hozzáadunk (8.35/c. ábra). Vegyük észre, hogy az átmenet tüzelési ideje pontosan a tevékenység végrehajtásának időigényét képviseli.



8.35. ábra: Időzített átmenet tüzelése: (a) kezdés $u=0^-$, (b) végrehajtás: $u=0^+$, (c) befejezés: $u=\tau^+$

Ez a modell determinisztikus (rögzített) tüzelési időt feltételez, amelyek tanulmányozásáról a Sifakis (1980), Ramamoorthy és Ho (1980), és Chretienne (1983) források számolnak be. A következő szakaszban megbeszéljük Petri hálók specifikus osztályához tartozó, esemény gráfoknak nevezett hálók tulajdonságait, amelyeket később a műhelyrendszerű gyártás analíziséhez fogunk használni.

A determinisztikus (időzített) Petri hálók mellett kifejlesztettek más alternatív modelleket is, az úgynevezett sztochasztikus Petri hálókat. Ezek a modellek közelebb állnak a sorbanállási hálózatokhoz, mert azt feltételezik, hogy a tüzelési idő exponenciális eloszlású.

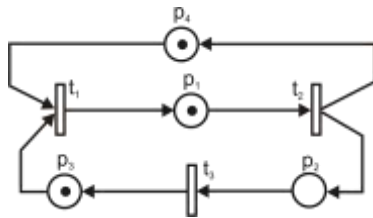
8.8.4 Az esemény gráfok

Definíciók

Egy esemény gráfnak (más néven a döntés-mentes Petri hálónak) nevezzük azt a Petri hálót, amelynek minden p_i helyéhez pontosan egy bemeneti és egy kimeneti átmenet tartozik. A 8.36. ábra egy példát mutat egy esemény gráfra (megjegyezzük, hogy a 8.31. ábrán bemutatott Petri háló nem esemény gráf, mivel a p_1 helyhez két kimeneti átmenet és a p_3 -hoz két bemeneti átmenet kapcsolódik).

Az esemény gráfokat azért nevezzük döntésmentes Petri hálónak, mert ezeknek a hálónak a szerkezete kizárja az átmenetek közötti konfliktusokat. Ezeken a hálókban nincs két (vagy több) olyan átmenet, amelyek ugyanazon inputhelyen osztoznának (ellentétben a 8.31. ábrán látható a Petri háló t_1 és t_2 átmeneteivel, amelyek közös bemenete a p_1). Ennek eredményeként, a Petri háló működése teljesen determinisztikus, mivel a tüzelési folyamathoz nem kell döntést hozni (egy engedélyezett átmenetet nem lehet kikapcsolni egy másik átmenet tüzelésével). Ez a tulajdonság lehetővé teszi a hálózat dinamikus viselkedésének teljes jellemzését, amikor az átmenet-

tek időzítettek.



8.36. ábra: Esemény gráf

Legyen adott a következő definíció: egy esemény gráfon az **elemi kör** egy irányított út, amely valamely csomópontból (hely vagy átmenet) indul és visszavezet az indulási csomóponthoz úgy, hogy a csomópontokat csak egyszer érinti. Például a 8.36. ábra esemény gráfja két elemi kört tartalmaz:

$$\beta_1 = (p_1, t_2, p_4, t_1, p_1),$$

$$\beta_2 = (p_1, t_2, p_2, t_3, p_3, t_1, p_1).$$

A továbbiakban az elemi köröket $\beta_k = (p_1, t_1, \dots, p_n, t_n)$ -vel jelöljük. Ezek a körök kulcsszerepet játszanak az esemény gráfok elemzésében, amint azt a következő részben megmutatjuk.

Az esemény gráfok tulajdonságai

8.1. tulajdonság: A tokenek száma egy elemi körben invariáns (változatlan) bármely átmenet tüzelésére.

8.2. tulajdonság: Egy esemény gráf élő, ha minden elemi körben legalább egy token létezik.

Ezeket a tulajdonságok eredetileg Commoner et al. (1971) publikálták.

Tekintsük a 8.36. ábrán látható az esemény gráfot a következő kezdeti jelöléssel:

$$M^0(p_1)=1, M^0(p_2)=0, M^0(p_3)=1, M^0(p_4)=1.$$

A 8.1. tulajdonság azt jelenti, hogy minden M lehetséges jelöléshez tartozó összes tokenek száma a β_1 és β_2 körökben az

$$M(\beta_1) = M(p_1) + M(p_4),$$

$$M(\beta_2) = M(p_1) + M(p_2) + M(p_3)$$

kifejezésekkel külön-külön adott és invariáns, ezért egyenlő a kezdeti jelöléssel, vagyis

$$M(\beta_1) = M^0(\beta_1) = 2, \quad M(\beta_2) = M^0(\beta_2) = 2.$$

Mivel mindkét elemi körben legalább egy token van, ami a 8.2. tulajdonság szerint garantálja, hogy a háló él. Különben halott lenne, azaz bizonyos számú tüzelés után elérné a holtponthoz.

Egy azonnali következmény az is, hogy ha az esemény gráf erősen összefüggő, ami azt jelenti, hogy bármelyik csomópontból bármely más csomópontba vezet egy irányított út (mint a példában a 8.36. ábrán), akkor a gráf korlátos. Ténylegesen minden egyes hely szükségszerűen legalább egy elemi kör része, és a 8.1. tulajdonság miatt, egy adott helyen, az egyidejűleg jelen lévő tokenek száma soha nem haladhatja meg a körben lévő összes tokenek számát.

Az időzített esemény gráfok analízise

Most összefoglaljuk a legfontosabb eredményeket, amelyeket később gyártási problémák tanulmányozására fogunk használni. Emlékeztetünk arra, hogy $\tau(t_j)$ (pozitív racionális szám) jelöli a t_j átmenet tüzelési idejét. Az egyszerűség kedvéért az elemi kör jelölése legyen $\beta_k = (p_1, t_1, \dots, p_m, t_m)$. Az átmenetek összes tüzelési ideje a β_k körben legyen $\tau(\beta_k)$, azaz

$$(8.1) \quad \tau(\beta_k) = \sum_{j=1}^m \tau(t_{kj}) \text{ (időegység).}$$

$M(\beta_k)$ jelölje a β_k körben a tokenek számát:

$$(8.2) \quad M(\beta_k) = \sum_{j=1}^m M^0(p_{kj}) \text{ (token),}$$

ahol M^0 a kezdeti jelölés. Végül vezessük be a β_k kör ciklusidejét, amely az egy tokenre eső tüzelési idő:

$$(8.3) \quad C(\beta_k) = \frac{\tau(\beta_k)}{M(\beta_k)} \text{ (időegység/token).}$$

Adott kezdeti jelölésről tegyük fel most, hogy az engedélyezett átmenetek tüzelése biztosítja a rendszer folyamatos működését. Amint korábban említettük, a „token játék” az esemény gráfon teljesen determinisztikus, amely biztosítja az előredefiniált viselkedést. A következő két tulajdonság az erősen összefüggő esemény gráfokra vonatkozik:

8.3. tulajdonság: A rendszer véges idő után állandósul, periodikus működésűvé válik.

8.4. tulajdonság: A ciklusidőt állandósult állapotban az elemi körök ciklusidőinek a maximális értéke határozza meg, azaz

$$(8.4) \quad C = \text{Max}\{C(\beta_k)\} \text{ (időegység/token).}$$

Állandósult állapotban alternatívaként használható a **termelési ráta** is, amely az időegységre eső tüzelhető átmenetek száma:

$$(8.5) \quad \lambda = 1/C = \text{Min}\{1/C(\beta_k)\} \text{ (token/időegység).}$$

Azt a β_k^* kört, amelyekre a ciklusidő maximum (azaz $C = C(\beta_k^*)$) kritikus körnek nevezzük. A kritikus kör ciklusideje határozza meg a rendszerben átbocsátóképességének felső határát.

Miután minden elemi kör ismert, egyértelműen kiszámítható az állandósult állapot teljesítménye. A (8.3)-(8.4) egyenletek szerint a teljesítmény függ a kezdeti állapottól (mivel a kezdeti jelölés az egyes körökben egyedileg határozza meg a tokenek számát), és természetesen az átmenetek tüzelési idejétől is. Megjegyezzük, a periodikus működés (állandósult állapot) általában csak az átmenetek K számú, egymást követő tüzelése után érhető el, továbbá, ha egy körben nincs token ($M(\beta_k)=0$), akkor a teljesítménye nulla (a ciklusidő végtelen): ez nem meglepő, hiszen a háló a 8.2. tulajdonság szerint halott.

Az eredmények illusztrálására, tekintsük ismét a 8.36. ábrán látható esemény gráfot, ahol a tüzelési időről a következő értékeket feltételezzük (időegységben kifejezve): $\tau(t_1)=\tau(t_2)=2$, $\tau(t_3)=1$. Ezekből a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \tau(\beta_1) &= \tau(t_1) + \tau(t_2) = 4 \text{ (időegység), } M(\beta_1) = 2 \text{ (db token),} \\ \tau(\beta_2) &= \tau(t_1) + \tau(t_2) + \tau(t_3) = 5 \text{ (időegység), } M(\beta_2) = 2 \text{ (db token).} \end{aligned}$$

Ezért, a

$$C(\beta_1) = \frac{4}{2} = 2 \text{ (időegység/token), } C(\beta_2) = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ (időegység/token).}$$

Az állandósult állapot ciklusideje:

$$C = \text{Max}_{\beta} \{C(\beta_1), C(\beta_2)\} = 2,5 \text{ (időegység/token),}$$

és β_2 a kritikus kör. A példában könnyű ellenőrizni, hogy a rendszer pontosan 5 időegység alatt tér vissza a kiindulási állapotba. Minden átmenetet pontosan kétszer tüzelünk. Az átmenetek tüzelésének időpontjai külön-külön:

átmenet t_1 : 0, 3, 5, 8, 10,...

átmenet t_2 : 0, 2, 5, 7, 10,...

átmenet t_3 : 2, 4, 7, 9,...

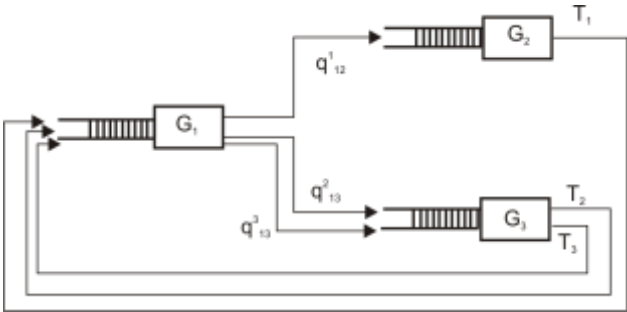
Mint látható, a két egymást követő tüzelés között a műveleti idők váltakozva 2 és 3 időegységek. Ez a példa jól illusztrálja a korábban említett K -periodicitás koncepcióját: bár átmenetek tüzelési ideje átlagosan minden 2,5 időegység (amint az várható az analitikus eredményből), a stacionárius 2 periódus ($K=2$), ami azt jelenti, hogy a jelölés periodicitása ténylegesen $\pi=5$ időegység.

A továbbiakban ezeket az eredményeket felhasználjuk a műhelyrendszerű termelés teljesítményelemzésére.

8.8.5 A műhelyrendszerű termelés Petri háló modellje

A modell leírása

Tekintsünk egy integrált gyártási és logisztikai feladatot, amelynek elvégzéséhez $G_1, G_2, \dots, G_m$ -mel szimbólumokkal jelölt, m számú gép áll rendelkezésünkre, és segítségével $T_1, T_2, \dots, T_n$ -nel jelölt, n számú, különböző terméktípust (feladattípus, munkatípus, stb.) kell előállítani meghatározott, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ arányban. A rendszerben feltételezzük, hogy a terméktípusok előállítása előírt sorrendben, több gépen elvégzendő műveletekből áll, és a műveleti idők adottak, valamint determinisztikusak. A terméktípusok termelési útvonala, ami a műveletek sorrendjét vagyis a gépek felkeresési sorrendjét jelenti, egyedileg meghatározott. A terméktípusok gyártásáról feltételezzük az ismétlődést vagy ciklikusságot, továbbá, hogy meg kell felelniük az előírt $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ termékösszetételnek [27].



8.37. ábra: A rugalmas gyártási rendszer vázlata

8.15. táblázat

A műhelyrendszerű gyártás műveleti idői (τ_{ij})

Munkadarab	Termékösszetétel	Műveleti idő		
		G_1	G_2	G_3
T_1	1/3	1	9	–
T_2	1/3	2	–	4
T_3	1/3	3	–	2

A leírt feladat egy lehetséges változatát a 8.37. ábra szemlélteti. A vizsgált gyártási rendszer a G_1, G_2 és G_3 gépekből áll, amelyek T_1, T_2 és T_3 terméktípusokon előírt sorrend szerint különböző műveleteket végeznek. A 8.15. táblázat foglalja össze, hogy a T_i terméktípus megmunkálása az G_j gépen mennyi időt igényel. A táblázatból a **műveleti sorrendek**, vagyis a termelési útvonalak is kiolvashatók:

(I) $T_1: G_1, G_2; T_2: G_1, G_3; T_3: G_1, G_3.$

A gyártási rendszerben a gépek között targoncák mozgatják a raklapokra helyezett terméktípusokat (egy targonca egy raklapot, egy raklap egy terméktípust hordoz). Azt is feltételezzük, hogy a terméktípusok gyártása azonos arányban ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$) történik. Így a termékösszetételben minden terméktípus 1/3 részt képvisel.

Vezessük be a G_j ($j=1, 2, 3$) gyártócellához tartozó v_j **igénybevételi ráta** fogalmát:

$$v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i d_{ij} \quad \text{minden } j=1, 2, \dots, m\text{-re,}$$

ahol $d_{ij}=1$, ha a j -edik gyártócella részt vesz az i -edik termék gyártásában, különben $d_{ij}=0$.

Ez a ráta azt mutatja, hogy a terméktípusok milyen arányban keresik fel az G_i gépet. Például, a G_2 gépet a három terméktípus közül csak a T_1 veszi igénybe (8.15. táblázat), így a $v_2=1/3$. Az igénybevételi ráták külön-külön:

$$v_1=1, \quad v_2=\frac{1}{3}, \quad v_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Az egy terméktípusra eső gépenkénti (G_j ($j=1, 2, 3$)) **átlagos kiszolgálási idő** a μ_i átlagos kiszolgálási ráta reciprok értéke, azaz

$$\frac{1}{\mu_j} = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_{ij}}{\sum_{i=1}^n d_{ij}} \quad (\text{időegység}).$$

Az egy terméktípusra eső átlagos kiszolgálási idők az átlagos műveleti időkből számíthatók (8.15. táblázat). Például az G_3 gépet csak a T_2 és T_3 terméktípusok gyártásához használjuk 4 és 2 műveleti idővel, így az $1/\mu_3=(4+2)/2=3$. Ezek alapján az átlagos kiszolgálási idők:

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{1+2+3}{3} = 2, \quad \frac{1}{\mu_2} = 9, \quad \frac{1}{\mu_3} = \frac{4+2}{2} = 3 \text{ időegység.}$$

Vezessük be a **minimális terméktípus halmaz** (MTH) fogalmát, amely a termékösszetételnek megfelelő arányban és a legkisebb számban tartalmazza a terméktípusokat. A példánkban az MTH egyszerűen:

$$MTH = \{T_1, T_2, T_3\},$$

mivel az összes terméktípust azonos arányban gyártjuk. Világos, hogy az MTH az egy ciklusban gyártott terméktípusok száma, ezért a halmaz ciklikus (ismétlődő) gyártása garantálja, hogy a termékösszetétel minden esetben teljesüljön.

A termelési cél eléréséhez elegendő az MTH-ban felsorolt valamennyi terméktípust az előírt sorrendben ciklikusan gyártani. Például a G_1 , G_2 és G_3 gépekre választhatjuk a következő terméktípus sorrendet:

$$(II) \quad S_{G_1} = \{T_1, T_2, T_3\}, \quad S_{G_2} = \{T_1\}, \quad S_{G_3} = \{T_2, T_3\}$$

A (II) szekvenciák a terméktípus gyártásának egy lehetséges alternatíváját képviselik, ténylegesen a munkák elvégzésének összes permutációja elfogadható. Ezekre a szekvenciákra a továbbiakban, mint a **gépszekvenciákra** hivatkozunk.

Végül megállapíthatjuk, hogy a gyártási rendszerünk egyértelműen két szegmensre bontható: az **operatív szegmens**, amely a műveleti sorrendekkel (termelési útvonalakkal), és a **vezérlő szegmens**, amely a gépszekvenciák által meghatározott [51]. Ez a Petri háló típus hasznos eszköz

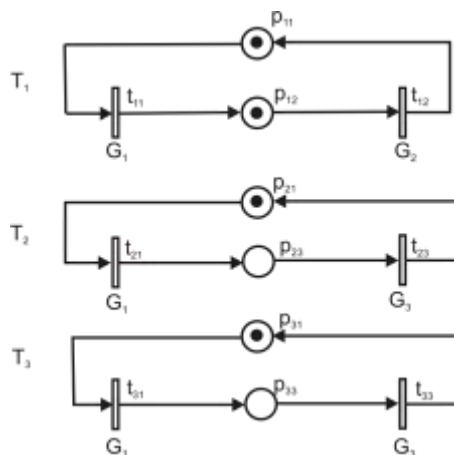
ahhoz, hogy leírja a gyártási rendszer alapvető jellemzőit. Először az operatív szegmens modellezési lehetőségeinek tárgyalásával kezdünk, majd bemutatjuk a vezérlőrészt is.

Az operatív szegmens

Az operatív szegmensben minden elemi körhöz egy terméktípus tartozik, ezért ezeket **termelési** vagy **folyamatköröknek** nevezzük. A folyamatkörök egy-egy terméktípus ciklikus gyártási folyamatát írják le (8.38. ábra). A termelési útvonalak az (1)-ben megadott műveleti sorrendet követik. A modellezés szabályok a következők:

Minden t_{ij} átmenet megfelel egy gép által végrehajtott műveletnek. Például a t_{11} átmenet jelenti a T_1 termék gyártási folyamatában az első műveletet, amit a G_1 gép végez el. Értelmeszerűen az átmenet tüzelési időtartama megfelel az adott műveleti időnek (8.15. táblázat), azaz $\tau(t_{11})=1$.

A folyamatkörökben a tokenek modellezik a gépek kiszolgálását. A p_{ij} helyeken az elvégzésre váró munkákat fizikailag a tokenek képviselik. A helyek így tároló pufferként is értelmezhetők, ennek megfelelően ezeket **puffer helyeknek** is nevezzük. Azt feltételeztük, hogy targoncák mozgatják a raklapokra helyezett terméktípusokat, és a modellben egy token egy targoncát vagy raklapot szimbolizál. A tokenek a folyamatkörökben keringenek, és az adott terméktípus ciklikus gyártását generálják. A p_{ij} helyek kezdeti jelölése biztosítja a műveleti sorrendet, vagyis a műveletek közötti elsőbbségi feltételeket.



8.38. ábra: Folyamatkörök a példában

Megjegyezzük, a modell nem követeli meg, hogy a terméktípusokhoz rendelt raklapok száma megfeleljen a termelési arányoknak. A következő szakaszban tárgyalt vezérlőszegmens ugyanis garantálja, hogy a rendszerben a raklapok eloszlásától függetlenül, a termékösszetétel raklap igényei mindig kielégítettek legyenek.

A vezérlőszegmens

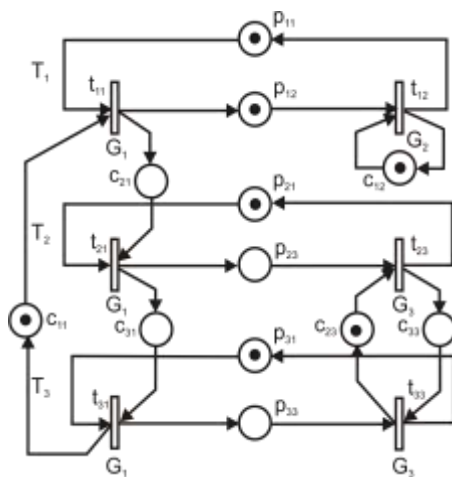
Ahhoz, hogy a gépeken a terméktípusok gyártásának sorrendjét modellezhessük, minden átmenet (mint tudjuk, ezek egy-egy művelet elvégzését képviselik egy adott gépen) egy **vezérlőkörnek** nevezett körhöz is kapcsolódik. A vezérlőkörben az átmenetek sorrendjét a gépszekvencia határozza meg, vagyis az, hogy az adott gépen a terméktípusokat milyen sorrendben kell gyártani.

A vezérlőkörök tehát az adott géphez tartozó gépszekvencia szerint működnek. Például a (II) előírás szerinti sorrend: $S_{G1} = \{T_1, T_2, T_3\}$, $S_{G2} = \{T_1\}$, $S_{G3} = \{T_2, T_3\}$, és az ezeknek megfelelő vezérlőkörök a folyamatkörökkel együtt a 8.39. ábrán láthatók.

Azért, hogy megkülönböztessük a vezérlőkörök helyeit a folyamatkörök helyeitől, az előbbieket vezérlőhelyeknek fogjuk nevezni, és c_{ij} -vel jelöljük. Míg a puffer helyek az operatívszegmens állapotát jellemzik, addig a vezérlőhelyek egy gép lehetséges állapotait írják le.

Fontos felismerni, hogy a tokenek a vezérlőkörökben, bár látszólag nem különböznek a folyamatkörök tokenjeitől, speciális tulajdonsággal bírnak, nevezetesen: minden vezérlőkörben egy és csak is egy token kering (eltérően a folyamatköröktől, amelyek több token is tartalmazhatnak), ami azt biztosítja, hogy egyidejűleg egy gép csak egy műveletet végezzen.

Továbbá, egy vezérlőkör egyedüli tokenjének a helyzete egyértelműen meghatározza a gép állapotát, ha a token egy átmenet belsejében helyezkedik el, az azt jelenti, hogy az átmenet tüzel, és a gép használatban van (a feladat végrehajtása abban a folyamatkörben folyik, amelyhez az átmenet tartozik). Ha a gép „tétlen”, akkor a token valamelyik vezérlőhelyen van (a gép a gépszekvencia szerinti következő feladatra várakozik). Szintén fontos megjegyezni, hogy a vezérlőhelyek kezdeti jelölését a munkasorrendben az első feladat határozza meg. Például kezdetben a G_1 gép vezérlőkörében a token a c_{11} helyen tartózkodik (8.39. ábra), mivel a G_1 gépen az első művelet a T_1 terméktípus megmunkálása.



8.39. ábra: Folyamat- és vezérlőkörök

Ez a modell bemutatja a Petri háló alapvető jellemzőit, amelyeket a röviden a 8.8.2-ben ismertettünk. Nevezetesen, a rendszerben az átmenetek a különböző műveleteket, a tokenek pedig az alkalmazott erőforrásokat jelentik. A bemutatott modellben alapvetően két erőforrás típus van: a terméktípusok (beleértve a szállító erőforrásokat, mint a raklapok, amelyek impliciten a terméktípusokhoz kapcsolódnak), és a gépek. A helyek és a tokenek együtt írják le a rendszer állapotát. A kifejlesztett modell lényeges tulajdonsága, hogy a rendszer vezérlő- és az operatívszegmensekre osztható, amelyekben folyamat- és vezérlőkörök működnek. Az előbbinek köszönhető a gyártási feladatok ismétlődése, az utóbbi pedig a feladatok ütemezését biztosítja a gépeken.

8.8.6 A műhelyrendszerű termelés működésének elemzése

Egyértelmű, hogy a műhelyrendszerű gyártás Petri háló modellje (8.39. ábra) erősen összefügg az időzített esemény gráffal. Így a 8.8.4. szakaszban közölt eredményeket felhasználva elemezhetjük a rendszer működését.

A ciklusidő számítása

Az első lépés a hálózat elemi köreinek meghatározása. A folyamat- és a vezérlőkörök már a korábbi leírásából ismertek. Eltekintve ezektől az alapköröktől léteznek további elemi körök,

amelyek puffer- és vezérlőhelyeket egyaránt tartalmaznak. Ezeket a köröket **vegyes köröknek** nevezik.

Az elemi körök a helyek és az átmenetek illeszkedési mátrixából olvashatók ki (8.16. táblázat), amit a következő módon definiálunk:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times m},$$

ahol:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{ha } p_i \in \text{Out}(t_j) \\ -1, & \text{ha } p_i \in \text{Inp}(t_j) \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

8.16. táblázat

A helyek és az átmenetek illeszkedési mátrixa

	t_{11}	t_{12}	t_{21}	t_{23}	t_{31}	t_{33}	Folyamat- és vezérlőkörök
p_{11}	-1	0	0	0	0	0	β_1
p_{12}	1	-1	0	0	0	0	
p_{21}	0	0	-1	1	0	0	β_2
p_{22}	0	0	1	-1	0	0	
p_{31}	0	0	0	0	-1	1	β_3
p_{33}	0	0	0	0	1	-1	
c_{11}	-1	0	0	0	1	0	β_4
c_{21}	1	0	-1	0	0	0	
c_{31}	0	0	1	0	-1	0	
c_{12}	0	-1,1	0	0	0	0	β_5
c_{23}	0	0	0	-1	0	1	β_6
c_{33}	0	0	0	1	0	-1	

A mintapéldában az összes elemi kört a 8.39. ábrából vagy a 8.16. táblázatból közvetlen meg lehet határozni. Vegyük észre, hogy a köröket olyan hurkok alkotják, amelyeknek minden sorban és minden oszlopban két csúcsa van, és az egyik csúcson $a_{ij}=-1$, a másik csúcson pedig $a_{ij}=1$. Valamely vezérlőhelyről indulva, bástyamozgással haladva, minden oszlopban és sorban egy-egy nem azonos folyamat- vagy vezérlőkörhöz tartozó -1 és 1 helyet érintve szerkeszthetjük meg a vegyes köröket. Nagyobb hálók esetén az elemi körök keresésére viszonylag egyszerű, számítógépes algoritmusok használhatók.

A műhelyrendszerű gyártás modelljében (8.39. ábra) nyolc elemi kör található.

Folyamatkörök:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (p_{12}, t_{12}, p_{11}, t_{11}), & (T_1 \text{ terméktípus}) \\ \beta_2 &= (p_{23}, t_{23}, p_{21}, t_{21}), & (T_2 \text{ terméktípus}) \\ \beta_3 &= (p_{33}, t_{33}, p_{31}, t_{31}), & (T_3 \text{ terméktípus}) \end{aligned}$$

Vezérlőkörök:

$$\begin{aligned} \beta_4 &= (c_{21}, t_{21}, c_{31}, t_{31}, c_{11}, t_{11}), & (G_1 \text{ gép}) \\ \beta_5 &= (c_{12}, t_{12}), & (G_2 \text{ gép}) \\ \beta_6 &= (c_{33}, t_{33}, c_{23}, t_{23}), & (G_3 \text{ gép}) \end{aligned}$$

Vegyes körök:

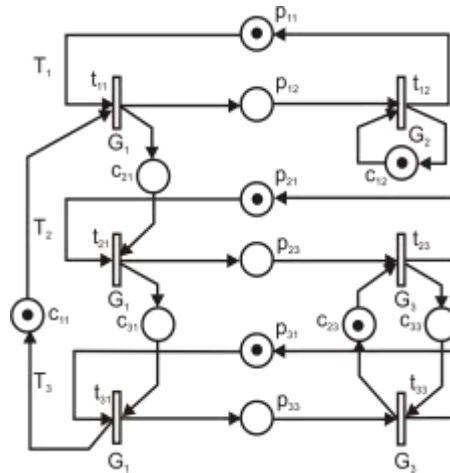
$$\begin{aligned} \beta_7 &= (c_{21}, t_{21}, p_{23}, t_{23}, c_{33}, t_{33}, p_{31}, t_{31}, c_{11}, t_{11}) \\ \beta_8 &= (c_{31}, t_{31}, p_{33}, t_{33}, c_{23}, t_{23}, p_{21}, t_{21}) \end{aligned}$$

Miután felsoroltuk az összes kört, alkalmazzuk a 8.3. és 8.4. tulajdonságokat annak érdekében, hogy kiértékeljük a rendszer teljesítményét. Megjegyezzük, hogy a kiértékelés függ a kezdeti állapottól, amelyhez meg kell adni a terméktípusok kezdeti eloszlását a folyamatban (azaz a puffer helyek kezdeti jelölését). Emlékezzünk arra, hogy a vezérlőhelyek kezdeti jelölése az adott géphez tartozó gépszekvenciával automatikusan meghatározott.

Tegyük fel, hogy kezdetben minden terméktípus a rendszeren kívül feldolgozásra vár (még egyetlen művelet sem fejeződött be). Tekintettel arra, hogy a terméktípus a raklappal együtt kering, azt feltételezzük, hogy az MTH-ban felsorolt három terméktípushoz három raklap tartozik. A puffer helyek kezdeti jelölésével leírt megfelelő kezdeti állapot a 8.40. ábrán látható.

Az átmenetek tüzelési ideje a műveleti időkkal adott (lásd termelési útvonalakat (I) és a 8.15. táblázatot):

$$\tau_{11}=1, \tau_{12}=9, \tau_{21}=2, \tau_{23}=4, \tau_{31}=3, \tau_{33}=2 \text{ időegység.}$$



8.40. ábra: Műhelyrendszerű gyártás 3 raklappal

Minden egyes β_k ($k=1, \dots, 8$) körre, a (8.1) egyenlettel most már kiszámíthatjuk a $\tau(\beta_k)$ teljes műveleti időt, a (8.2) egyenlettel az $M(\beta_k)$ tokenek számát, és a (8.3) egyenlettel a $C(\beta_k)$ ciklusidőt. A számított értékeket a 8.17. táblázat tartalmazza.

8.17. táblázat

Az elemi körök ciklusidőit

		Folyamatkör			Vezérlőkör			Vegyes kör	
		β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8
Összes tüzelési idő	$\tau(\beta_k)$	10	6	5	6	9	6	12	11
Tokenek száma	$M(\beta_k)$	1	1	1	1	1	1	2	2
Ciklusidő= $\tau(\beta_k)/M(\beta_k)$	$C(\beta_k)$	10	6	5	6	9	6	6	5,5

A 8.4 tulajdonság felhasználásával (8.4 egyenlet) az állandósult (stacionárius) ciklusidő:

$$C = \max_{k=1, \dots, 8} \{C(\beta_k)\} = C(\beta_2) = 10 \text{ időegység/token.}$$

A kritikus kör β_1 , ami azt jelenti, hogy az átbocsátóképességet T_1 terméktípus ciklusideje határozza meg. Mivel a termelési ciklus három terméktípust tartalmaz (minden terméktípusból egyet), valamint a termelési ráta: $\lambda = 1/C = 0,1$, így a **teljes átbocsátóképesség**:

$$Q = 3 \cdot \lambda = 3 \cdot 0,1 = 0,3 \text{ termék/időegység.}$$

A teljesítményjavítás lehetőségei

A rendszer teljesítményét (Q) adott termékösszetétel esetén csak a ciklusidő (C) csökkentésével tudjuk javítani. Tudjuk azt is, hogy a ciklusidő:

$$C = \text{Max}_{\beta_k} \{C(\beta_k)\} = \text{Max}_{\beta_k} \left\{ \frac{\tau(\beta_k)}{M(\beta_k)} \right\} = \frac{\tau(\beta^*)}{M(\beta^*)},$$

a kritikuskör átmeneteinek összes tüzelési időtartamától és a kritikus kör tokenszámától függ. Mivel a tokenek a puffer helyeken a raklapokat reprezentálják, világos, hogy a raklapok számának változtatása hatással van a teljesítményre.

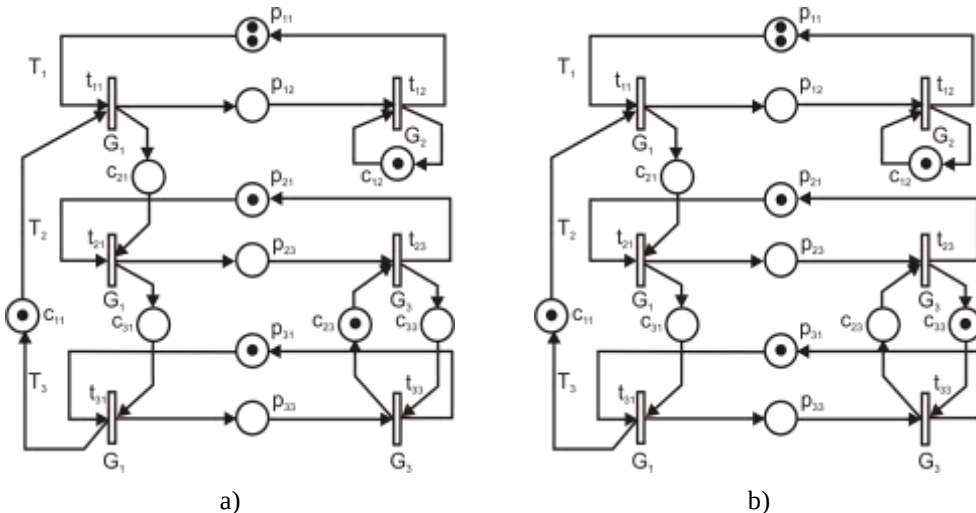
Tegyük fel most, hogy növeljük a raklapok számát eggyel a β_1 körben, azaz az új raklapot a T_1 a terméktípushoz rendeljük. Következésképpen, a β_1 körben két token kering (8.41/a. ábra). A ciklusidő pedig ebben a körben $C(\beta_1)=10/2=5$ időegység lesz, és az összes többi körben változatlan marad (8.18. táblázat).

8.18. táblázat

Az elemi körök ciklusidői (4 raklappal)

		Folyamatkör			Vezérlőkör			Vegyes kör	
		β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8
Összes tüzelési idő	$\tau(\beta_k)$	10	6	5	6	9	6	12	11
Tokenek száma	$M(\beta_k)$	2	1	1	1	1	1	2	2
Ciklusidő= $\tau(\beta_k)/M(\beta_k)$	$C(\beta_k)$	5	6	5	6	9	6	6	5,5

A raklapszám növelés eredményeként a kritikus kör a G_2 géphez tartozó β_5 vezérlőkör lesz, amelyben a $\tau(\beta_5)=C(\beta_5)=9$. A maximális ciklusidő $C(\beta_5)=9$ -re csökken és a teljesítmény $Q=3/9=0,333$ termék/időegységre javul. Ez az eredmény rendkívül fontos következtetésre vezet. Később megmutatjuk, hogy ez az eredmény általánosítható bármilyen műhelyszerű gyártási rendszerben.



8.41. ábra: Műhelyrendszerű gyártás 4 raklappal

Könnyű belátni azt is, hogy a teljesítményváltozás függ a raklapelosztástól is, és a raklapszám növelés nem feltétlen jár teljesítményjavulással. Tegyük fel, hogy a negyedik raklapot, amely korábban a T_1 terméktípushoz tartozott, most a T_2 terméktípushoz vagy a T_3 terméktípushoz rendeljük. Ebben az esetben világos, hogy a β_1 kör ciklus ideje ismét 10 időegység/token lesz, és

így a rendszer teljesítménye változatlan marad (ugyanannyi, mint három raklap esetén).

Végül vizsgáljuk meg a gépszekvenciák hatását az elérhető teljesítményre. Most tegyük fel, hogy a negyedik raklapot ismét a T_1 terméktípushoz rendeljük, és a G_3 gépen a terméktípusok megmunkálási sorrendjét permutáljuk. Az S_{G_3} gépszekvencia $\{T_2, T_3\}$ helyett legyen $\{T_2, T_3\}$. A Petri háló modellben ez azt jelenti, hogy a $\beta_6(G_3)$ vezérlőkör tokenje a c_{23} helyről a c_{33} helyre kerül (8.41/b. ábra).

Könnyen ellenőrizhető, hogy a tokenek száma a két vegyes körben megváltozik, azaz, a β_7 kör egy tokent nyer ($M(\beta_7)=3$) és a β_8 kör elveszt egyet ($M(\beta_8)=1$). A ciklusidők ennek megfelelően változnak, és $C(\beta_7)=12/3=4$ és $C(\beta_8)=11/1=11$ időegység lesz. A változás eredményeként most β_8 lesz a kritikus kör, és a ciklusidő $C=11$ időegység. A megfelelő átbocsátóképesség:

$$Q=3/11=0,273 \text{ termék/időegység.}$$

A gépszekvencia változása tehát jelentősen ronthatja a teljesítményt (miközben a raklapok száma változatlan). Ezek a példák világosan szemléltetik, hogy a rendszer teljesítménye nemcsak a rendelkezésre álló raklapok számától, hanem a raklapok elosztásától, valamint a gépszekvenciától is függ. Természetesen szeretnénk megtalálni azt az optimálisvezérlést, amely a rendszer lehető legjobb kihasználását biztosítja.

8.8.7 A műhelyrendszerű gyártás optimálisvezérlése

A maximális termelékenység

Az előző szakaszban a műhelyrendszerű gyártás tanulmányozásakor megfigyelhettük, hogy állandósult állapotban, egy bizonyos véges raklapszám esetén a szűk keresztmetszetet jelentő gép kihasználtsága maximális volt. Ez a tulajdonság általánosítható, amit a következő tétel fogalmaz meg.

8.1. tétel: A műhelyrendszerű termelésben, amelyben a gépeket a terméktípusok adott és állandó sorrend szerint keresik fel, mindig létezik egy olyan véges raklapelosztás, amelynél a kritikus kör egy vezérlőkör, és állandósult állapotban a szűk keresztmetszetet jelentő gép teljes mértékben kihasznált [36].

Ez a tulajdonság általánosítja azt az eredményt, amelyet korábban Cohen et al. (1983) a folyamatos üzemű gyártási rendszerekre (rendszer, amelyben minden terméktípus pályája azonos) megalapoztak. Most vázoljuk a tétel igazolását.

A tétel igazolásához tekintsük ismét a (8.4) egyenletet, amely az állandósult állapot ciklusidejét az összes elemi áramkör ciklusidőinek maximumaként számítja. Jelölje β_c a vezérlőköröket és $\beta \neq \beta_c$ a többi kört (azaz, a folyamat- és a vegyes köröket). A (8.4) egyenlet a következő alakban írható:

$$(8.6) \quad C = \text{Max} \left\{ \text{Max}_{\beta_c} (C(\beta_c)), \text{Max}_{\beta \neq \beta_c} (C(\beta)) \right\}$$

A vezérlőkörök maximális ciklusideje legyen C_0 , azaz

$$(8.7) \quad C_0 = \text{Max}_{\beta_c} \{C(\beta_c)\}.$$

Mivel egy vezérlőkör ciklusideje éppen a körhöz tartozó gép terhelése (azaz az adott gép gépszekvenciájában felsorolt terméktípusok műveleti időinek az összege), ezért C_0 pontosan a szűk keresztmetszetet jelentő gép terhelése. Állandósult állapotban a szűk keresztmetszetet jelentő gép teljes kihasználásának így a szükséges és elégséges feltétele: $C=C_0$, amely szerint a szűk keresztmetszetet jelentő gép vezérlőköre a kritikus kör. Felhasználva a (8.3) egyenletet, a feltétel kielégítéséhez a

$$(8.8) \quad C(\beta \neq \beta_c) = \frac{\tau(\beta \neq \beta_c)}{M(\beta \neq \beta_c)} \leq C_0,$$

összefüggésnek is teljesülnie kell. A kifejezést rendezve, az

$$(8.9) \quad M(\beta \neq \beta_c) \geq \frac{\tau(\beta \neq \beta_c)}{C_0},$$

minden $\beta \neq \beta_c$ körre, vagyis a nem vezérlőkörökben a tokenszámoknak nagyobb egyenlőnek kell lennie, mint a (8.9)-ben a jobboldali hányados.

Használjuk a

$$(8.10) \quad M_{\min}(\beta \neq \beta_c) = \left\lceil \frac{\tau(\beta \neq \beta_c)}{C_0} \right\rceil,$$

jelölést, ahol $\lceil y \rceil$ jelöli azt a legkisebb egészszámot, ami nagyobb vagy egyenlő, mint y . Az $M_{\min}(\beta \neq \beta_c)$ tehát a $\beta \neq \beta_c$ kör működéséhez szükséges minimális tokenszám, így a kör ciklusideje kisebb lesz, mint C_0 .

Bármely $\beta \neq \beta_c$ körben (amely nem vezérlőkör) található legalább egy puffer hely (legyen az folyamat- vagy vegyes kör). Ezért elegendő kezdetben $M_{\min}(\beta \neq \beta_c)$ tokenet helyezni ezekbe a körökbe, hogy eleget tegyünk a (8.9) feltételnek (emlékezzünk arra, hogy a tokenek száma minden körben invariáns). Mivel ezek a tokenek reprezentálják a raklapokat, véges számú raklapelosztást kapunk, amely garantálja, hogy a szűk keresztmetszet jelentő gép teljes mértékben ki legyen használva.

Ennek a tételnek a teljes és szigorú bizonyítása megtalálható Hillion és Proth (1989) munkájában. A szerzők kimutatták, hogy minden puffer helyen egy token elhelyezése elegendő ahhoz, hogy a (8.8) egyenlőtlenség teljesüljön. Ez az eredmény a szükséges raklapok számának a felső határát jelenti, ami a műhelyrendszerű gyártásnál egyszerűen a műveletek számával adott (mivel a Petri háló modellben a puffer helyek száma megegyezik az átmenetek számával és minden átmenet egy művelet jelent). A műhelyrendszerű gyártási példában (8.39. ábra) hat raklapra lenne szükség (minden puffer helyen egy tokenre).

Ez a tétel nagy szerepet játszik a rugalmas gyártási rendszerek optimális irányításában. A tétel garantálja, hogy amennyiben elegendő (de véges) számú raklap kering a rendszerben (minden terméktípushoz hozzárendelve), a rendszer a szűk keresztmetszetét jelentő gép teljes kihasználtságának köszönhetően maximális teljesítménnyel működik.

Ugyanakkor, ha a szűk keresztmetszetet jelentő gép teljesen kihasznált, akkor az átbocsátóképességet a raklapszám növeléssel már nem lehet tovább javítani, és ezért nyilvánvalóan felesleges további raklapot adni a rendszerhez. A műhelyrendszerű gyártási példában a felsőhatár hat raklapot eredményez, bár a számszerű eredmények szerint négy raklap is elegendő.

Lehetséges tehát, hogy optimumot keressünk a raklapok száma és a rendszer teljes kihasználtsága között. A maximális termelékenység eléréséhez ezért minimalizálni kell a szükséges raklapok számát. Ez a kérdés rendkívül fontos a gyakorlatban, mert a szállító erőforrások (mint a raklapok, a targoncák, stb.) is növelik a termelési költségeket, ezért nem lehetnek kihasználatlanok. A szállító erőforrások túlméretezése nagy WIP készleteket és hosszú átfutási időt eredményez.

A raklapok számának minimalizálása

Megmutattuk, hogy a szűk keresztmetszetet jelentő gép teljes kihasználásának szükséges és elégséges feltétele:

$$(8.11) \quad M(\beta_k) \geq M_{\min}(\beta_k) \text{ minden } \beta_k \neq \beta_c \text{ körre,}$$

ahol $M_{\min}(\beta_k)$ a (8.10) képlettel adott, $M(\beta_k)$ pedig a tokenek száma a β_k körben.

Egy puffer helyen egy token egy raklapot reprezentál. Ha a modellben s a folyamat- és vegyes körök száma, n_k pedig a $p_{k1}, p_{k2}, p_{ki}, \dots, p_{kn_k}$ a puffer helyek száma a k -adik körben, valamint $M^0(p_{ki})$ a kezdeti jelölés, akkor az összes raklap a rendszerben a

$$(8.12) \quad \mathcal{G} = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} M^0(p_{ki})$$

kifejezéssel adott.

Így a maximális termelékenység elérése érdekében a szükséges raklapok számának minimalizálási problémája a következőképpen írható fel:

$$\mathcal{G} = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} M^0(p_{ki}) \rightarrow \min$$

$$M(\beta_k) \geq M_{\min}(\beta_k) \quad \text{minden } \beta_k \neq \beta_c \text{ körre.}$$

Emlékezzünk, mindenegyes vezérlőkörhöz csak egy token tartozik, ezért $M(\beta_c)=1$ minden β_c vezérlőkörre.

Az egyéb körök ($\beta_k \neq \beta_c$) között, a vegyes körök egyaránt tartalmazhatnak puffer- és vezérlőhelyeket. Ezekben a körökben ezért a tokenek tartozhatnak vezérlőhelyekhez is, és nem reprezentálnak raklapot. Ezekre a körökre, definiáljuk a puffer hely tokenszám

$$(8.13) \quad PHT(\beta_k) = M_{\min}(\beta_k) - \sum \{M^0(p_{ki})\}, \text{ ahol } p_{ki} \text{ vezérlőhely a } \beta_k \text{ körben,}$$

kifejezést. Így a $PHT(\beta_k)$ csak a β_k kör puffer helyein található tokenszámot reprezentálja, amelynek eredményeként a kör ciklusideje $C(\beta_k)$ kisebb, vagy egyenlő mint C_0 . Vegyük észre azt is, hogy minden folyamatkörre a $PHT(\beta_k)=M_{\min}(\beta_k)$, mivel ezek a körök csak puffer helyeket tartalmaznak.

Vezessük be a $\mathbf{D}=[d_{kj}]_{s \times n}$ mátrixot, ahol s a folyamat- és vegyes körök együttes száma a hálózatban (azaz a vezérlő körök kivételével az összes elemi kör), és n az összes puffer helyek száma. A $\mathbf{D}$ a körök és helyek incidencia mátrixa, amely a következők szerint definiálható:

$$d_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{ha a } p_{kj} \text{ hely a } \beta_k \text{ kör része} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

A továbbiakban a kezdeti jelölés vektorát jelöljük $\mathbf{x}=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ (pozitív egészértékű vektor), ahol $x_j=M^0(p_{kj})$ ($j=1, 2, \dots, n$), és legyen $\mathbf{b}=[b_1, b_2, \dots, b_s]^T$ (pozitív egészértékű) vektor, ahol $b_k=PHT(\beta_k)$ ($k=1, 2, \dots, s$). A tokenek száma a β_k körben:

$$M(\beta_k) = \sum_{j=1}^n d_{kj} M^0(p_{kj}) + \sum M^0(p_{ki}), \text{ ahol } p_{ki} \text{ vezérlőhely a } \beta_k \text{ körben.}$$

A bevezetett a jelölésekkel a

$$(8.14) \quad M(\beta_k) = \sum_{j=1}^n d_{kj} x_j + M_{\min}(\beta_k) - b_k.$$

A probléma egy egészértékű lineáris programozási feladat (ILP), amit a következő alakban írhatunk fel:

$$N = \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \text{Min}$$

$$\mathbf{D}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \text{ ahol } \mathbf{x} \text{ nem negatív egészértékű vektor.}$$

Az ILP megoldása adja azt a minimális raklapszámot és raklapelosztást, amelynél a rendszerben

a szűkkesztszmetet jelentő gép állandósult állapotban teljes kihasználással működik. Ez a feltétel csak akkor teljesül, ha a kezdeti állapot megfelel a kapott optimális megoldásnak ($\mathbf{x}^*$), azaz, a kezdeti jelölés $M^0(p_{ki})=x_j^*$ ($j=1, 2, \dots, n$).

Példa

Tekintsük ismét a 8.8.5. szakaszban ismertetett műhelyrendszerű gyártást, amelynek a modellje a 8.40. ábrán látható. Emlékezzünk vissza, a modellben három folyamatkör ($\beta_1, \beta_2, \beta_3$) és két vegyes kör (β_7, β_8) található. A β_4, β_5 , és β_6 körök vezérlőkörök, amelyeket itt nem kell figyelembe venni. Az illeszkedési mátrix (**D**) a 8.40. ábra alapján a 8.19. táblázatban adott.

8.19. táblázat

A körök és puffer helyek illeszkedési mátrixa (**D**)

Kör	Helyek					
	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{23}	p_{31}	p_{33}
β_1	1	1	0	0	0	0
β_2	0	0	1	1	0	0
β_3	0	0	0	0	1	1
β_7	0	0	0	1	1	0
β_8	0	0	1	0	0	1

Tudjuk, hogy a szűkkesztszmetet jelentő gép, G_2 , a maximális terhelése a $C_0=9$ időegység. Mivel a $\tau(\beta_k)$ értékek a 8.15. táblázatban adottak, ki tudjuk számítani az $M_{\min}(\beta_k)$, értékeket a (8.10) egyenlet felhasználásával:

$$M_{\min}(\beta_k) = \left\lfloor \frac{\tau(\beta_k)}{C_0} \right\rfloor,$$

$$M_{\min}(\beta_1) = \left\lfloor \frac{10}{9} \right\rfloor = 2, \quad M_{\min}(\beta_2) = \left\lfloor \frac{6}{9} \right\rfloor = 1, \quad M_{\min}(\beta_3) = \left\lfloor \frac{5}{9} \right\rfloor = 1,$$

$$M_{\min}(\beta_7) = \left\lfloor \frac{12}{9} \right\rfloor = 2, \quad M_{\min}(\beta_8) = \left\lfloor \frac{11}{9} \right\rfloor = 2.$$

A vezérlőhelyek kezdeti jelölései (8.40. ábra) a következők:

$$\beta_4 \text{ kör: } M^0(c_{11})=1, M^0(c_{21})=M^0(c_{31})=0,$$

$$\beta_5 \text{ kör: } M^0(c_{12})=1,$$

$$\beta_6 \text{ kör: } M^0(c_{23})=1, M^0(c_{33})=0.$$

Felhasználva az előző eredményeket, a $PHT(\beta_k)$ -ra a következő értékeket kapjuk:

$$PHT(\beta_1) = M_{\min}(\beta_1) = 2,$$

$$PHT(\beta_2) = M_{\min}(\beta_2) = 1,$$

$$PHT(\beta_3) = M_{\min}(\beta_3) = 1,$$

$$PHT(\beta_7) = M_{\min}(\beta_7) - [M^0(c_{21}) + M^0(c_{33}) + M^0(c_{11})] = 2 - (0 + 0 + 1) = 1,$$

$$PHT(\beta_8) = M_{\min}(\beta_8) - [M^0(c_{31}) + M^0(c_{23})] = 2 - (0 + 1) = 1.$$

Az illeszkedési mátrixból és a $PHT(\beta_k)$ -ra kapott értékekből az ILP feladat szimplex táblája és definíciója a következő:

Kör	Helyek						b
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
β_1	1	1	0	0	0	0	2
β_2	0	0	1	1	0	0	1
β_3	0	0	0	0	1	1	1
β_7	0	0	0	1	1	0	1
β_8	0	0	1	0	0	1	1
	1	1	1	1	1	1	0

$$\mathcal{G} = \sum_{j=1}^6 x_j = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \geq 2,$$

$$x_3 + x_4 \geq 1,$$

$$x_5 + x_6 \geq 1,$$

$$x_4 + x_5 \geq 1,$$

$$x_3 + x_6 \geq 1,$$

ahol minden x_j nem negatív egészérték.

A feladat optimális megoldását egy ILP programmal nem nehéz kiszámolni. A kapott megoldásból:

$$x_1^* = 2, x_2^* = 0, x_3^* = 1, x_4^* = 0, x_5^* = 1, x_6^* = 0.$$

A minimális számú raklap, $\mathcal{G} = 4$. A megoldásnak megfelelő kezdeti jelölést

$$M^0(p_{11}) = 2, M^0(p_{12}) = 0, M^0(p_{21}) = 1, M^0(p_{23}) = 0, M^0(p_{31}) = 1, M^0(p_{33}) = 0$$

a 8.41/a. ábra mutatja. Megjegyezzük, hogy más megoldások is léteznek, mint például az

$$x_1^* = 1, x_2^* = 1, x_3^* = 1, x_4^* = 0, x_5^* = 1, x_6^* = 0,$$

$$M^0(p_{11}) = 1, M^0(p_{12}) = 1, M^0(p_{21}) = 1, M^0(p_{23}) = 0, M^0(p_{31}) = 1, M^0(p_{33}) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a rendszerben a termelési folyamat bármely terméktípus megmunkálásával kezdődhet. A raklapelosztás azonban mindkét megoldásban azonos, mégpedig a T_1 terméktípus-hoz kettő, a T_2 és T_3 terméktípusokhoz egy-egy raklapot rendelünk.

A nagyméretű egészértékű lineáris programozási feladatok (ILP) megoldása általában nehézségekkel jár, mert a probléma méretével a számítások száma exponenciálisan növekszik. A továbbiakban ezért kihasználva a probléma különleges szerkezetét, javaslatot teszünk egy gyors és hatékony heurisztikus algoritmusra.

A probléma megoldása heurisztikus algoritmussal

Az algoritmus indításakor nincs token a puffer helyeken, azaz $\mathcal{G} = 0$ (nincs raklap a gyártási területen). A vezérlőhelyek jelölése rögzített, és minden vezérlőkör pontosan egy tokent tartalmaz. A vezérlőhelyek kezdeti jelölése legyen $M_{\text{init}}(p)$, és értelemszerűen az inicializálás után a vezérlőkörökben a tokenek száma már nem változik meg.

Minden β_k elemi körre, amely nem vezérlőkör ($\beta_k \neq \beta_c$), a (8.10)-(8.13) egyenletek segítségével kiszámítjuk a $PHT(\beta_k)$ értékeket és ezeket a körökhöz rendeljük. Mint említettük, a $PHT(\beta_k)$ értéke azt a minimális számú tokent jelenti a β_k kör puffer helyein, ami garantálja a $C(\beta_k) \leq C_0$ teljesülését. Az algoritmus szerint a számításokat lépésenként végezzük. Minden lépésben kivá-

lasztunk egy alkalmas puffer helyet (p^*), a p^* helyen eggyel növeljük a tokenek számát $M(p^*)$, és egyidejűleg minden körben, amelyre a p^* hely illeszkedik, a $PHT(\beta_k)$ értékét eggyel csökkentjük. Az eljárás során minden iterációban tehát a kiválasztott helyen eggyel növeljük az $M^0(p_{ij})$ raklapszámot, a $PHT(\beta)$ értékét pedig eggyel csökkentjük.

Természetesen minden lépésben kérdés a p^* helyes választása úgy, hogy az algoritmust végén jó megoldást kapjunk. A probléma gyökere, hogy a $\text{Max}_\beta PHT(\beta_k)$ csökkentése a legszigorúbb korlát lazítását jelenti, ugyanakkor a $\sum_\beta PHT(\beta_k)$ csökkentése megfelel az összes tokenszám minimalizálási céljának. Annak érdekében, hogy jó kompromisszumot találjunk, a köröket a hozzájuk tartozó $PHT(\beta_k)$ értékek alapján először csökkenő sorrendbe rendezzük. A körök rendezett listájának első sorában azt a helyet (p^*) választjuk, amely több körre illeszkedik. Ha nincs ilyen hely a körben, akkor szabadon választhatunk. A kiválasztott helyen az $M(p^*)$ -t eggyel növeljük, és minden körben, amelyre a p^* hely illeszkedik, a $PHT(\beta_k)$ értékét eggyel csökkentjük. Ezt követően újra rendezzük a körök listáját, és megismételjük az eljárást. Az algoritmus akkor áll meg, amikor minden β_k körben a $PHT(\beta_k) \leq 0$, és ekkor megkapjuk az $M^0(p_{ij})$ jelölést.

Nézzük most az algoritmus formális leírását. Mint korábban definiáltuk, a $\mathbf{D}=[d(\beta_k, p_{ki})]_{s \times n}$ jelöli a körök és helyek az illeszkedési mátrixát, azaz $d(\beta_k, p_{ki})=1$, ha a β_k kör tartalmazza a p_{ki} helyet, egyébként 0.

Algoritmus

```

begin
  {initialization}
  for  $p \in$  helyek do
    if  $p \in$  vezérlőhelyek then  $M(p) := M_{\text{init}}(p)$ 
    else  $M(p) = 0$ ;
  end do;
  for  $\beta \in$  körök do
     $PHT(\beta) := M_{\min}(\beta) - \sum_{p \in \beta} M(p)$ ;
  end do;
  {main loop}
  Legyen  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  a  $\beta$  körök  $PHT(\beta)$  szerint csökkenő sorrendbe rendezett listája,
  amelyekre  $PHT(\beta) > 0$ ;
  If  $s=0$  then exit;
  Keressük a legnagyobb  $k \geq 1$  és a  $p^*$  helyet, így az első  $k$  kör  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ , amely illeszkedik
   $p^*$ -ra;
  do  $M(p^*) := M(p^*) + 1$ ;
  For  $i=1$  to  $s$  do  $PHT(\beta_i) := PHT(\beta_i) - d(\beta_i, p^*)$ ;
  end loop;
end.
```

Az algoritmus alkalmazása

Az algoritmus alkalmazásához tekintsük ismét a korábban bemutatott példát. A $\mathbf{D}$ mátrixból (8.19. táblázat) és a kiszámított $PHT(\beta_k)$ értékekből szerkesztett táblázat a következő:

Kör	Helyek						$PHT(\beta_k)$	$M(p_{ij})$
	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{23}	p_{31}	p_{33}		
β_1	1	1	0	0	0	0	2	
β_2	0	0	1	1	0	0	1	
β_3	0	0	0	0	1	1	1	
β_7	0	0	0	1	1	0	1	
β_8	0	0	1	0	0	1	1	

1. iteráció: A $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_7, \beta_8$ körök listáját rendezzük $PHT(\beta_k)$ szerint csökkenő sorrendbe. Az illeszkedési mátrixban a β_1 kör helyei (p_{11}, p_{12}) nem közösek más körökkel. Így a β_1 kör két helye közül egyet önkényesen választhatunk. A választásunk essen p_{11} -re, ezért az iteráció eredményeként azt kapjuk, hogy az $M(p_{11})=1$ és a $PHT(\beta_1)=1$. A $PHT(\beta_k)$ értéke a többi körben változatlan marad (egyenlő 1-el).

Kör	Helyek						$PHT(\beta_k)$	$M(p_{ij})$
	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{23}	p_{31}	p_{33}		
β_1	1	1	0	0	0	0	1	$M(p_{11})=1$
β_2	0	0	1	1	0	0	1	
β_3	0	0	0	0	1	1	1	
β_7	0	0	0	1	1	0	1	
β_8	0	0	1	0	0	1	1	

2. iteráció: Mivel a $PHT(\beta_k)$ értéke most mind az öt körben 1, nem kell újrendezni a körök listáját. Az 1. iterációban használt érv alapján, a p_{11} vagy a p_{12} helyet választhatjuk. Válasszuk ismét a p_{11} helyet, ekkor a $M(p_{11})=2$ és a $PHT(\beta_1)=0$ lesz, és így a β_1 kör ki van küszöbölve.

Kör	Helyek						$PHT(\beta_k)$	$M(p_{ij})$
	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{23}	p_{31}	p_{33}		
β_1	1	1	0	0	0	0	0	$M(p_{11})=2$
β_2	0	0	1	1	0	0	1	
β_3	0	0	0	0	1	1	1	
β_7	0	0	0	1	1	0	1	
β_8	0	0	1	0	0	1	1	

3. iteráció: Tekintsük a megmaradó $\beta_2, \beta_3, \beta_7, \beta_8$ köröket. Vegyük észre, hogy a β_2 kör két helye két körre illeszkedik (a p_{21} hely a β_2 és β_8 körökre, a p_{23} hely a β_2 és β_7 körökre). A kettő közül választhatunk. Legyen p_{21} hely a választásunk, így az $M(p_{21})=1$ és a $PHT(\beta_2)=0$, $PHT(\beta_8)=0$. A β_2 és a β_8 kör is ki van küszöbölve.

Kör	Helyek						$PHT(\beta_k)$	$M(p_{ij})$
	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{23}	p_{31}	p_{33}		
β_1	1	1	0	0	0	0	0	$M(p_{11})=2$
β_2	0	0	1	1	0	0	0	$M(p_{21})=1$
β_3	0	0	0	0	1	1	1	
β_7	0	0	0	1	1	0	1	
β_8	0	0	1	0	0	1	0	

4. iteráció: A maradék körök β_3 , és β_7 . Mivel csak egy közös hely van a két körökben (p_{31} hely),

ebben az iteráció az egyetlen lehetséges választás a p_{31} hely. Ezért az $M(p_{31})=1$ és a $PHT(\beta_3)=PHT(\beta_7)=0$. Ennél az iterációnál az algoritmus megáll, mivel elfogytak azok a körök, ahol $PHT(\beta)>0$.

Kör	Helyek						$PHT(\beta_k)$	$M(p_{ij})$
	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{23}	p_{31}	p_{33}		
β_1	1	1	0	0	0	0	0	$M(p_{11})=2$
β_2	0	0	1	1	0	0	0	$M(p_{21})=1$
β_3	0	0	0	0	1	1	0	$M(p_{31})=1$
β_7	0	0	0	1	1	0	0	
β_8	0	0	1	0	0	1	0	

Az algoritmus végén, a következő kezdeti jelölést kapjuk:

$$M^0(p_{11})=2, M^0(p_{12})=0, M^0(p_{21})=1,$$

$$M^0(p_{23})=0, M^0(p_{31})=1, M^0(p_{33})=0.$$

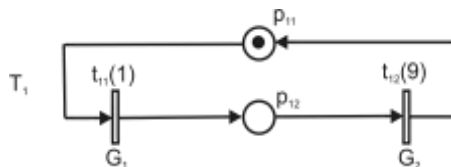
Megjegyezzük, hogy a kapott megoldás optimális (hasonlítsuk össze az eredményeket az ILP eredményeivel). A bemutatott heurisztikus algoritmust már számos példán tesztelték, és a tesztek bizonyították a hatékonyságát.

Az optimális géptütemezés (gépszekvencia)

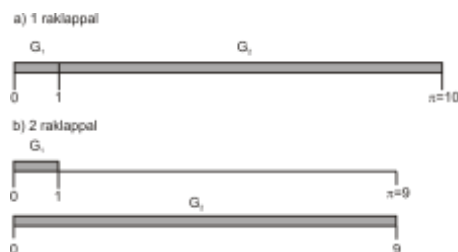
Eddig azt feltételeztük, hogy a gépszekvencia apriori adott, és a megoldandó feladat a szűkkesztmetszetet jelentő gép teljes kihasználásához szükséges minimális raklapszám meghatározása. Már korábban megmutattuk és hangsúlyoztuk, hogy a rendszerteljesítmény nemcsak a raklapok számától és elosztásától, hanem a gépszekvenciától is függ. A teljességhez ezért fontos annak az „optimális” gépszekvenciának a megkeresése is, amely minimális raklapszám ($\mathcal{Q}=4$) és elosztás mellett garantálja, hogy a szűkkesztmetszetet jelentő gép műveleti ideje pontosan C_0 legyen.

Ütemezési probléma. A következőkben π -vel jelöljük azt az időszakot, amely állandósult állapotban megfelel a szűkkesztmetszetet jelentő gép teljes kihasználtságának. Vegyük észre, hogy π -t egyszerűen a C_0 adja, azaz a szűkkesztmetszetet jelentő gép ciklusideje (8.7 egyenlet). Világos, hogy ha a műhelyrendszerű gyártás összes műveletét π hosszúságú időintervallumokban ütemezzük (ami egyszerűen $[0, \pi]$ -nek vehető), és a műveleteket periodikusan ismételjük (π periódusidővel), akkor a szűkkesztmetszetet jelentő gép teljes kihasználtsággal fog működni. Egy megvalósítható ütemezés eléréséhez két korlátot kell kezelni: az elsőbbségi és a szétválasztási korlátokat.

Az elsőbbségi korlátok alatt a termelési folyamatok technológiai korlátait értjük. Pontosabban, a műveletek közötti elsőbbségi korlátok a termelési útvonal vagy műveleti sorrend által terméktípusonként adóttak. Emlékezzünk arra, hogy a Petri háló modellben ezeket a korlátokat a folyamatkörökben az átmenetekhez kapcsolódó puffer helyekkel, illetve azok kezdeti jelölésével kezeljük (8.38. ábra).



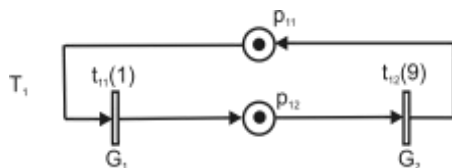
8.42. ábra: A T_1 terméktípus folyamatköre 1 raklappal



8.43. ábra: A T_1 terméktípus ütemezése 1 és 2 raklappal

Fontos felismerni, hogy ezek a korlátok a terméktípusokon végzett műveletek befejezési időpontjaitól függenek. A Petri háló modellben ez azt jelenti, hogy az átmenetek tüzelésének az ütemezési kötöttségei aktuálisan a kezdeti jelölés függvényei. Ennek a megjegyzésnek az illusztrálására tekintsük ismét a T_1 terméktípus folyamatkörét és tegyük fel, hogy csak egy raklap érhető el (kezdetben a rendszeren kívül), ahogy az a 8.42. ábrán látható. Egyértelmű, hogy a legrövidebb időtartam a két művelet ütemezéséhez, az elsőbbségi feltétel megsértése nélkül, $\pi=10$ időegység, amely megfelel a 8.43/a. ábrán látható sorrendnek.

Most tegyük fel, hogy a T_1 folyamatkörben két raklap áll rendelkezésre (8.44. ábra), ami azt jelenti, hogy a T_1 folyamatkörben egyidejűleg két egymástól független, $\pi=9$ időegységnyi időtengelyre (ez megfelel a szűk keresztmetszetet jelentő G_2 gép teljes kihasználásának) ütemezhetünk. Induláskor az első T_1 terméktípus megmunkálása folyik a G_1 gépen. Az első művelet befejezése után azonban már lehetséges, hogy a G_1 és a G_2 gépet egyszerre ütemezzük ugyanabban a periódusban ($\pi=9$ időegység), mivel a továbbiakban az elsőbbségi kényszer már nem áll fenn (8.43/b. ábra).



8.44. ábra: A T_1 terméktípus folyamatköre 2 raklappal.

Még általánosabban, megfigyelhetjük, hogy a kezdeti jelöléssel az eredeti tüzelési szekvenciát átalakíthatjuk egymástól független osztott szekvenciákká. Ha legalább egy token van minden puffer helyen, akkor annyi osztott szekvencia van a folyamatkörben, amennyi a tokenek száma. A tokenek számának növelésével mindig elérhető, hogy biztosan megvalósuljon egy lehetséges tüzelési sorrend a $[0, \pi]$ az időintervallumban. Ez azonban ellentétes lehet azzal a céllal, hogy minimalizáljuk a szükséges raklapok számát (emlékezzünk arra, hogy a raklapszám a folyamatkörök jelölésével adott).

A jó kompromisszum megtalálásához később bevezetjük az ütemezés nehézségi foka fogalmát. Most összpontosítsunk a másik ütemezési korlátra, vagyis a szétválasztási korlátra.

A szétválasztási korlátok egy adott gépen elvégzendő, egymást kölcsönösen kizáró műveletekre vonatkoznak. Egyszerűbben, ugyanarra a gépre egyidejűleg nem lehet két terméktípust ütemezni. Ezeknek a korlátoknak a teljesítéséhez az szükséges, hogy az időintervallumok, amelyek alatt ezeket a műveleteket végezzük, nem eshetnek egybe. A Petri háló modellben ez azt jelenti, hogy az azonos vezérlőkörökhöz tartozó átmenetek tüzelés időintervallumai diszjunktak.

Megjegyezzük, hogy a szétválasztási korlátokat mindig ki lehet elégíteni, ha a π periódus hossza nagyobb, vagy egyenlő, mint az összes vezérlőkörök maximális ciklusideje (C_0). Továbbá, a vezérlőkörökben az átmenetek tüzelésének az ütemezése a $[0, \pi]$ időintervallumban egyedileg

meghatározott az adott géphez tartozó terméktípus szekvenciával.

Az ütemezés nehézségi foka. Most egy olyan heurisztikus algoritmust ismertetünk, amely lehetséges megoldást ad az ütemezésre a $[0, \pi]$ időintervallumban (azaz kielégíti az előző részben részletezett feltételeket) és gondoskodik a gépszekventálási probléma közel optimális megoldásáról (vagyis a szükséges raklapszámot úgy minimalizálja, hogy a szűk keresztmetszetet jelentő gép teljesen kihasználtsa). Az algoritmus iteratív módon halad, minden iterációban egy új műveletet ütemez. Az ütemezésre jelölt termelési kört minden iterációban az ütemezés nehézségi foka alapján választjuk ki.

Vegyünk egy β_k folyamatkört és feltételezzük, hogy ennek a körnek az első z átmenete már ütemezett. Legyen

$T_k(z)$ a β_k folyamatkörben az első z számú, már ütemezett átmenetek halmaza,

$\bar{T}_k(z)$ a β_k folyamatkörben ütemezésre váró átmenetek halmaza,

$\theta_k(z)$ a z -edik átmenet tüzelésének befejezési időpontja, $(\theta_k(z) \in [0, \pi])$,

$N_k(z)$ a z számú átmenet tüzelésének ütemezésére felhasznált $[0, \pi]$ időszakok száma.

A korábban leírtak szerint világos, hogy az $\mathcal{G}_k(z)$ éppen a β_k körben a raklapokat képviselő tokenek száma. Ha $\mathcal{G}_k(z) > 1$, akkor az elsőbbségi megszorítások kielégítése érdekében az ütemezés osztott. Továbbá emlékezzünk vissza, hogy a szűk keresztmetszetet jelentő gép teljes kihasználásához szükséges, a terméktípusok β_k köréhez rendelt minimális számú raklap éppen egyenlő $M_{\min}(\beta_k)$ -val (8.10 egyenlet). Ezután legyen

$$(8.15) \quad \mathcal{G}_k^*(z) = \text{Max}\{\mathcal{G}_k(z), M_{\min}(\beta_k)\}$$

Ebből adódóan, ha $\mathcal{G}_k^*(z) = M_{\min}(\beta_k)$, akkor az osztott ütemezés megvalósítható minimális számú raklappal, különben nem, és további raklapok szükségesek. A bevezetett definíciókat és jelöléseket a 8.45. ábra mutatja.

Ezekkel a jelölésekkel a β_k folyamatkörökben az ütemezés nehézségi foka a következők szerint definiálható:

$$(8.16) \quad \delta_k(z) = \frac{\sum_{t \in \bar{T}_k(z)} \tau(t)}{[\pi - \theta_k(z)] + [\mathcal{G}_k^*(z) - \mathcal{G}_k(z)]\pi}$$

8.45. ábra: A β_k folyamatkör osztott tüzelésének ütemezése

A $\delta_k(z)$ mennyiség a β_k körben az összes ütemezésre váró folyamatidő (a β_k körben még nem

tüzelt átmenetek tüzelési időinek az összege), és az ütemezésére rendelkezésre álló idő (megfelel a világosabban árnyékolt területnek 8.45. ábrán) közötti arányt jelenti. Az algoritmus nagyon hatékony, mert a már ütemezett műveletek (átmenetek) az algoritmus következő lépéseiben már nem változnak meg. Így a következő műveletet az utolsó ütemezett művelet után, azaz a $[\theta_k(z), \pi]$ intervallumban, vagy egy új $[0, \pi]$ intervallumban lehet ütemezni, ha további raklapok állnak rendelkezésre, ezek száma a $\mathcal{G}_k^*(z) - \mathcal{G}_k(z)$ kifejezéssel adott.

Vegyük észre, hogy ha a $\delta_k(z)$ értéke nagy, akkor a szóban forgó termelési körben nehezebb ütemezni, és fordítva. A $\delta_k(z)$ tehát a termelési körök ütemezhetőségét jellemzi, vagyis az ütemezés nehézségének mértékét mutatja. Ugyanakkor az ütemezés előrehaladásával az ütemezési esélyek csökkennek, ezért először abban a körben ütemezzük, amelyben az ütemezés nehézségi foka a legnagyobb, azaz amelyhez a legnagyobb $\delta_k(z)$ érték tartozik. Azokban a körökben, amelyekben az ütemezés nehézségi foka kisebb, később könnyebb lesz a diszjunkt megszorításoknak megfelelni. E megfontolások képezik az algoritmus alapját, amit a 8.8.5 szakaszban ismertetett példán mutatunk be.

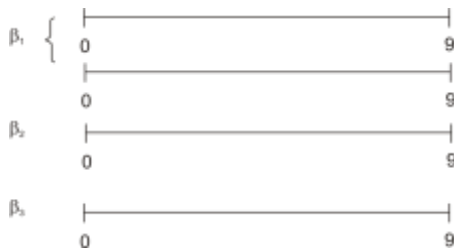
Az algoritmus alkalmazása. Tekintsük ismét a műhelyrendszerű gyártáshoz a 8.8.5 pontban bemutatott modellt (8.38. ábra), amely három folyamatkörből áll, és a körökhöz tartozó műveleti idők (8.17. táblázat):

$$\tau(\beta_1)=10, \tau(\beta_2)=6, \tau(\beta_3)=5 \text{ időegység,}$$

továbbá, a körökhöz tartozó minimális tokenszámok:

$$M_{\min}(\beta_1)=2, M_{\min}(\beta_2)=1, M_{\min}(\beta_3)=1.$$

A szűk keresztmetszet jelentő gép G_2 , $\pi=C_0=9$ időegység ciklusidővel.



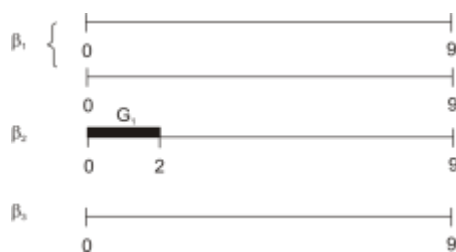
8.46. ábra: Inicializálás

0. lépés (inicializálás): Kezdetben egyetlen művelet sincs ütemezve. Mivel a $\pi=9$, az átmenetek tüzelésének ütemezésére rendelkezésre álló $[0, 9]$ időintervallumok száma minden folyamatkörre külön-külön: $\mathcal{G}_1^*(0)=2$, $\mathcal{G}_2^*(0)=1$ és $\mathcal{G}_3^*(0)=1$ a 8.46. ábra szerint. A (8.16) összefüggés felhasználásával a folyamatkörökben az ütemezés nehézségi foka:

$$\delta_1(0) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} = 0,555, \delta_2(0) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = 0,666, \delta_3(0) = \frac{5}{9} = 0,555.$$

1. lépés: Mivel $\delta_2(0) > \delta_1(0) = \delta_3(0)$, ezért először a β_2 kört választjuk, amelyben a legnagyobb az ütemezés nehézségi foka. A β_2 körben (az út sorrendet követve) az első átmenet t_{21} (8.38. ábra). Az ennek megfelelő műveletet a G_1 gép hajtja végre és a műveleti idő 2 időegység. A műveletet a lehető legkorábban, azonnal ütemezzük, azaz 0 időpontban (8.47. ábra). Ezután a β_2 körbe az ütemezés nehézségi foka megváltozik:

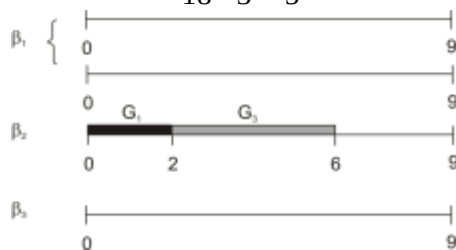
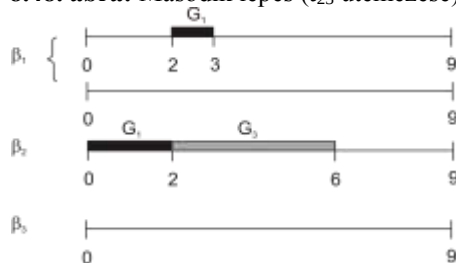
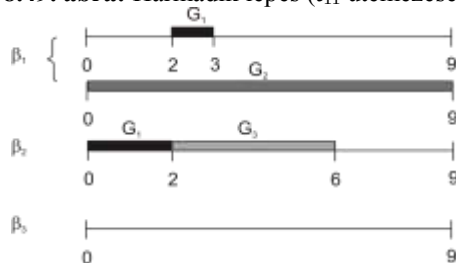
$$\delta_2(1) = \frac{6-2}{9-2} = \frac{4}{7} = 0,571.$$

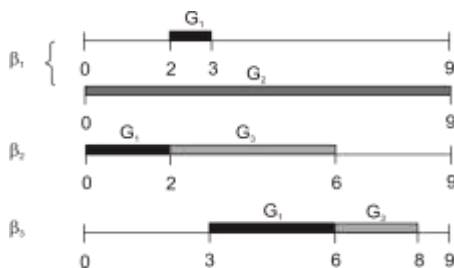
8.47. ábra: Első lépés (t_{21} ütemezése)

2. lépés: Mivel $\delta_2(1) > \delta_1(0) = \delta_3(0)$, ezért ismét a β_2 kört választjuk és a megmaradó t_{23} átmenetet ütemezzük (8.48. ábra) A β_2 körben most már minden átmenet ütemezett, és a továbbiakban csak a β_1 és a β_3 köröket kell vizsgálni.

3. lépés: Mivel $\delta_1(0) = \delta_3(0)$, ezért a β_1 és a β_3 körök közül szabadon választhatunk. A választásunk essen a β_1 körre, és ebben ütemezzük az első átmenet (t_{11}) a lehető legkorábban, azonnal. Vegyük észre, hogy ez a művelet nem kezdődhet el addig, amíg a β_2 körben a t_{21} átmenetnek megfelelő művelet be nem fejeződik, azaz a legkorábbi ütemezési idő 2 időegység. Különbösen sérülne a diszjunkt feltétel (t_{11} és a t_{21} átmenetek egyaránt a G_1 géphez tartoznak). A kapott ütemezést a 8.49. ábra mutatja. Végül a β_1 körben az új ütemezés nehézségi foka:

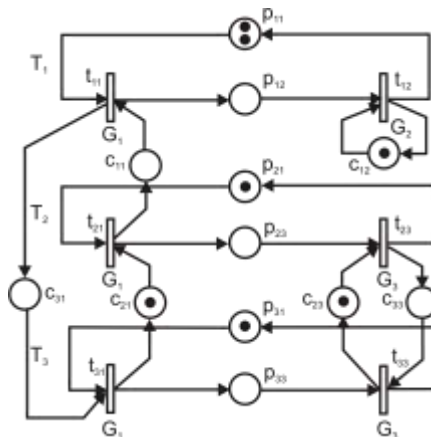
$$\delta_1(1) = \frac{9}{18-3} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

8.48. ábra: Második lépés (t_{23} ütemezése)8.49. ábra: Harmadik lépés (t_{11} ütemezése)8.50. ábra: Negyedik lépés (t_{12} ütemezése)



8.51. ábra: A teljes ütemezés

4. lépés: Mivel $\delta_1(1)=0,6 > \delta_3(0)=0,555$, ezért ismét a β_1 kört választjuk, és ütemezzük a megmaradó t_{12} átmenetet. Mivel ennek a műveletnek az időtartama 9 időegység, új időintervallumra kell ütemezni (8.50. ábra). Az ütemezésre váró átmenetek a β_3 körben a t_{31} és a t_{33} átmenetek. Úgy mint korábban most is, az átmenetek tüzelését a lehető legkorábban ütemezzük, amely egyidejűleg megfelel az elsőbbségi és a diszjunkt korlátoknak is. A teljes ütemezés a 8.51. ábrán látható.



8.52. ábra: Műhelyrendszerű gyártás optimális megoldásához tartozó Petri háló

A kapott ütemezésből az S_{G_j} gépszekvenciát (a T_i terméktípusok megmunkálási sorrendjét a G_j gépen) nem nehéz kiolvasni. A példánkban, a gépszekvenciák:

$$S_{G1}=(T_2, T_1, T_3), S_{G2}=(T_1), S_{G3}=(T_2, T_3).$$

Könnyen belátható, hogy a kapott szekvencia optimális, mivel a szűk keresztmetszetet jelentő gép (G_2) teljesen kihasznált (a G_2 ciklusideje megfelel az ütemezési időintervallumnak, $\pi=9$ időegység) és a lehető legkevesebb raklappal ($\mathcal{Q}=4$) valósítható meg. A teljes ütemezés a T_1 terméktípushoz két raklapot és a T_2, T_3 terméktípusokhoz egy-egy raklapot igényel. Megjegyezzük, a raklapigény a 8.51. ábra szerinti időintervallumok számának felel meg. Az ütemezésnek megfelelő Petri hálót a 8.52. ábra szemlélteti.

Amint a példában bemutattunk, az algoritmus minden iterációjában három alapvető lépés figyelhető meg:

1. A (8.16) egyenlet felhasználásával minden ismétlésnél a termelési körökben kiszámítjuk az ütemezés nehézségi fokát.
2. Azt a folyamatkört választjuk, amelyben a legnagyobb az ütemezés nehézségi foka.
3. A kiválasztott körben a következő műveletet a lehető legkorábban ütemezzük az adott el-

sőbbségi és a szétválasztási korlátok figyelembevételével.

Az eljárás akkor fejeződik be, amikor minden műveletet ütemezett.

8.8.8 A modell alkalmazhatósága

Megbeszéljük determinisztikus időzített Petri hálók alkalmazhatóságát és röviden bemutatjuk a rugalmas gyártórendszerek (FMS) modellezésére és elemzése használható többi modellt.

Az alkalmazhatóság határai

Az időzített Petri hálók a QN modellekhez hasonlóan hasznosak a rugalmas gyártórendszerek teljesítményének kiértékeléséhez. Amint láthattuk e fejezetben, a bemeneti adatok lényegében megegyeznek, de a Petri modell determinisztikus feldolgozási időt feltételez (ellentétben a sorbanállási hálózatok klasszikus feltevésével, ahol a kiszolgálási idő az exponenciális eloszlású). Továbbá, a kapott információk, mint a teljesítmény, a gép kihasználtság, stb. állandósult állapotra vonatkoznak.

Ugyanakkor a Petri háló modell két oknál fogva sokkal erősebb eszköz:

1. Az analitikusan sokkal könnyebben kezelhető, mint a műhelyrendszerű sorbanállási hálózatok. A kifejlesztett és bemutatott időzített esemény gráf modellel, az elemi körök ismeretében közvetlen kiszámítható a rendszerteljesítmény. Az elemi körök meghatározásához egyszerű algoritmusok állnak rendelkezésre (Martinez és Silva, 1980). Mint láttuk, az átbocsátóképesség az összes elemi kör ciklusidőinek a maximális értékétől függ.
2. A rendszer vezérlőszegmense világosan elválik az operatív szegmenstől (ellentétben a QN modellel). Ez a tulajdonság lehetővé teszi számunkra, hogy az ütemezési problémával is foglalkozzunk. A kifejlesztett alkalmazás egyértelműen megmutatta, hogy a gépeken a terméktípusok ütemezése hatással van a teljesítményre. Azt is részletesen megtárgyaltuk, hogyan lehet megtalálni a műhelyrendszerű termelés optimális irányítását úgy, hogy a szűk keresztmetszet jelentő gép minimális raklapszám mellett teljes mértékben kihasznált.

A legsúlyosabb korlátozás a modellben egyértelműen a determinisztikus feltételezés. Így nem lehet figyelembe venni a véletlenszerű eseményeket, mint például a gép meghibásodásokat. A probléma kezelésére léteznek alternatív modellek a szakirodalomban, például a sztochasztikus Petri hálók.

Sztochasztikus Petri hálók és szimuláció

Sztochasztikus Petri hálók hasonlóak az időzített Petri hálókhoz, azzal a különbséggel, hogy az átmenetek tüzelési időtartamai valószínűségi változók: Az alapmodellben (Molloy, 1982), a tüzelési időtartamok exponenciális eloszlásúak, hasonlóan, mint a sorbanállási elméletben a kiszolgálási idők. Az állandósult állapot elemzésre a klasszikus Markov-féle technikát alkalmazzák. Pontosabban a modell, az állapotok fejlődését Markov láncként kezeli, ahol átmenetek intenzitása az állapotok között rögzített, egyenlő az átmenet átlagos tüzelési intenzitásával. Ebből, az állandósult állapot analízist könnyen lehet alkalmazni az egyensúlyi valószínűségi eloszlás kiszámítására és levezethető az átlagos tüzelési intenzitásból teljesítmény mértéke, az átlagos ciklusidő, és így tovább. További részletekért lásd Natkin (1980), Zuberek (1985), és a Marsan és Chiola (1986). A rugalmas gyártórendszerek sztochasztikus Petri háló modelljét Balbo et al. (1987) vizsgálták. A sztochasztikus Petri hálók alkalmazhatósága korlátozottnak tűnik a gyakorlatban két okból. Először is, néhány erős feltételezés szükséges annak biztosításához, hogy a jelölés fejlődése valóban egy Markov folyamat, másodsor az átmeneteket nem lehet párhuzamosan tüzelni.

Ezzel szemben járhatóbb útnak látszik a szimuláció alkalmazása. A szimulációs modellben a tokeneket entitások, a helyeket Station modulok (állomások) és az átmeneteket Process modulok

modellezik. A folyamat és a vezérlőkörökben két entitástípus mozog. Értelemszerűen a folyamatkörökben a raklapok számával megegyező számú entitás. A puffer és a vezérlőhelyek között Route modulok mozgatják az entitasokat. A Petri háló működésének megfelelően egy átmenet tüzelése (adott gépen az adott termék gyártása) akkor kezdődhet meg, amikor mindkét entitástípus egyidejűleg jelen van. A Process modulokban a műveleti idő tetszőleges eloszlású valószínűségi változó lehet, és az adott művelethez rendelt erőforrás (gép) meghibásodását is modellezni lehet. További előnye a szimulációs modellnek, hogy a Route moduloknak köszönhetően a raklapok mozgatásának időigényét is kezelni tudjuk.

8.9. Ellenőrző kérdések

1. Értelmezze a csomópont, él, út, körút, fa, feszítőfa, irányítás és az összefüggőség fogalmát!
2. Mutasson be néhány tipikus logisztikai hálózatot, magyarázza meg, mit jelképeznek ezeken a csomópontok, élek!
3. Ismertesse a legrövidebb út probléma megoldásának algoritmusait!
4. Ismertesse a minimális költségű feszítőfát, alkalmazási és megoldási lehetőségeit!
5. Ismertesse a maximális folyam megoldását, mit jelent a maximális folyam - minimális vágás!
6. Értelmezze a minimális költségű folyam probléma feltételeit és célfüggvényét!
7. Ismertesse a minimális költségű folyam probléma bázismegoldását előállító algoritmust!
8. Mutassa be a hálózati szimplex módszert, mint a felsőkorlátos szimplex módszer egyik változatát!
8. Mit jelent a hálózati szimplex módszerben az elhagyott bázisváltozó?
9. Hogyan alakíthatók minimális költségű folyam problémává a szállítási és hozzárendelési feladatok?
10. Hogyan alakíthatók minimális költségű folyam problémává a legrövidebb út és a maximális folyam problémák?
11. Ismertesse a CPM és a PERT módszerek közötti különbségeket!
12. Értelmezze az események bekövetkezésének legkorábbi és legkésőbbi időpontját, a tevékenységek tartalék idejét, valamint a kritikus utat!
13. Értelmezze a Petri hálóval összefüggésben a hely, átmenet, token, jelölés és tüzelés fogalmát!
14. Ismertesse a Petri hálók működésének alapvető tulajdonságait és szabályait!
15. Ismertesse az időzített Petri hálók jellemzőit!
16. Az időzített esemény gráf definíciója, tulajdonságai és analízise.
17. Az időzített esemény gráf alkalmazása műhelyrendszerű termelés modellezésére.
18. A műhelyrendszerű termelés működésének elemzése.
19. A műhelyrendszerű termelés optimálisvezérlése.
20. Milyen módszerek ismertek a raklapok számának minimalizálására?
21. Hogyan valósítható meg a gépek optimális ütemezése?

Jegyzetek, kérdések

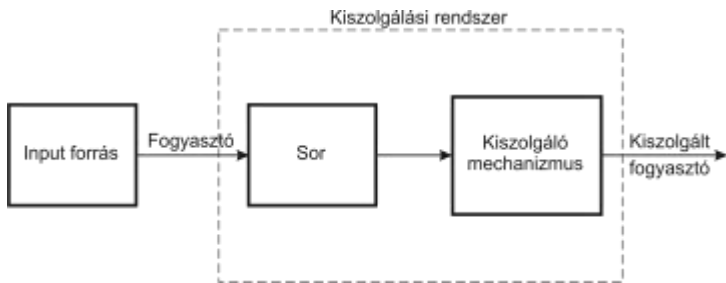
9. SORBANÁLLÁSI ELMÉLET

A sorbanállási elmélet az állás, várakozás és a kiszolgálás tanulmányozása a matematika eszközeivel. A várakozó sor kialakulása hétköznapi jelenség, ami akkor keletkezik, ha a pillanatnyi igény valamely szolgáltatásra meghaladja a szolgáltatás pillanatnyi kapacitását. A sor hossza a folyamat két jellemzőjétől függ: az igények átlagos intenzitásától és az intenzitás statisztikus ingadozásától. Ha az igények átlagos intenzitása nagyobb, mint a kiszolgáló kapacitás, akkor idővel végtelen hosszú sor alakul ki, és a rendszer összeomlik. Sor (sorbanállás) azonban a statisztikus ingadozás miatt akkor is létrejöhet, ha az igények átlagos intenzitása kisebb, mint a rendszer kapacitása.

Arra a kérdésre, hogy mekkora kapacitásra van szükség, sokszor nem könnyű válaszolni, mivel gyakran lehetetlen pontosan megjósolni, hogy a szolgáltatást igénylők mikor érkeznek, és mennyi időt igényel a kiszolgálásuk. Ha túl nagy kapacitást kötünk le, az maga után vonja a költségek növekedését. A másik oldalról a túl kicsi szolgáltató-kapacitás várakozó sorokat eredményez, amelyek idővel végtelen hosszúvá válhatnak. Ugyanakkor bizonyos vonatkozásban a várakozó sorok is növelik a költségeket, pl. az állásra kényszerített gépek idővesztése, a tétlen alkalmazottak munkabére, a várakozás miatt elvesztett vásárlók stb. közvetlen vagy közvetett veszteséget okoznak. Ezért a cél, hogy ökonomiai egyensúlyt keressünk a logisztikai szolgáltatások költsége és a várakozó sorokkal összefüggő veszteségek között. A sorbanállási elmélet maga nem oldja meg ezt a problémát közvetlenül, de a várakozó sorok különböző karakterisztikáinak és az átlagos várakozási időnek az előrejelzésével hasznos információkat nyújt a döntésekhez [57].

9.1. A sorbanállási elmélet alapjai

A legtöbb sorbanállási modell által feltételezett folyamat a következő. A szolgáltatást igénylő fogyasztók valahonnan kívülről, az ún. inputforrásból érkeznek. A fogyasztók belépnek a sorbanállási vagy kiszolgálási rendszerbe, csatlakoznak a sorhoz. Bizonyos időközönként a sor egy egyedét (tagját) valamilyen elv szerint választjuk ki a kiszolgálásra. A kiválasztott egyed megkapja az igényelt szolgáltatást, majd elhagyja a rendszert. A folyamatot a 9.1. ábra szemlélteti.



9.1. ábra. A sorbanállási folyamat

Az inputforrás: Az inputforrás egyik jellemzője a mérete. A méret az összes olyan fogyasztót jelenti, akik a szolgáltatást időről időre igényelhetik, vagyis a méret a különböző potenciális fogyasztók száma. A méret lehet véges vagy végtelen, amit néha **korlátozott** vagy **korlátlan forrásnak** is nevezünk. Mivel a végtelen eset tárgyalása messze egyszerűbb, gyakran feltételezzük a korlátlan forrást, még akkor is, ha tényleges mérete csak relatíve nagy véges szám. A véges eset vizsgálata sokkal nehezebb, mivel ilyenkor a rendszerben sorban álló fogyasztók száma befolyásolja a rendszeren kívül álló potenciális fogyasztókat. A véges feltételezés azonban elkerülhetetlen, ha az inputforrás által ge-

nerált új fogyasztókra a rendszerben várakozó fogyasztók száma szignifikánsan hat.

A sorbanállási elmélet egyik fontos kérdése annak a statisztikai formulának a megválasztása, amely szerint a fogyasztók folyamatosan generálódnak. A legegyszerűbb feltételezés a fogyasztók a *Poisson*-folyamat szerinti generálódása, vagyis az, hogy az időegység alatt érkező fogyasztók száma *Poisson*-eloszlású. Mint majd később részletezzük, ebben az esetben a fogyasztók érkezése a rendszerbe véletlenszerű, de várhatóértéke meghatározható, tekintet nélkül arra, hogy hány fogyasztó van már a rendszerben. Ezzel ekvivalens feltételezés, hogy a fogyasztók érkezései közötti időintervallumok valószínűségi eloszlása exponenciális. Ezeket az intervallumokat **érkezési időköznek** nevezzük. A fogyasztók más, nem szokásos viselkedését ugyancsak figyelembe kell venni. Például, amikor túl hosszú sor esetén a fogyasztó visszautasítja a rendszerbe való belépést, vagyis elveszik.

A sor. A sort a maximálisan megengedett fogyasztók számával jellemezzük. A sor ennek megfelelően lehet véges vagy végtelen. A legtöbb sorbanállási modell feltételezi a végtelen sort, még akkor is, ha a megengedett felsőhatár csak relatíve nagy szám. A véges sor feltételezés akkor válik szükségessé, ha a felső határ kicsi.

A kiszolgálás sorrendjének elve. A kiszolgálás sorrendjének elve azt mondja meg, hogy a sorban várakozó egyedek milyen elvek szerint lesznek kiválasztva a kiszolgálásra. Az esetek többségében a kiszolgálás az érkezés sorrendjében (*first-come-first-served*) történik, amit **szigorú prioritási elvnek** nevezünk. Néha azonban gazdasági megfontolásokból vagy műszaki okokból más elv is érvényesülhet. Például: a telefonközpontokban a kiszolgálás véletlenszerű, a javításra váró gépek között lehetnek olyanok, amelyek kijavításához a beérkezés sorrendjétől függetlenül nagyobb gazdasági érdek fűződik.

A kiszolgáló mechanizmus. A kiszolgáló mechanizmus jelenthet egy vagy több kiszolgáló egységet (szervert), egy vagy több párhuzamos kiszolgáló csatornával. Ha több kiszolgáló egység van a rendszerben, akkor a fogyasztó ezek közül eggyel kerül kapcsolatba (szervizcsatorna sor). A fogyasztó belép a kiszolgáló egység egyik párhuzamos szervizcsatornájába, és abban megkapja az összes kiszolgálást. A legtöbb elemi modell egy kiszolgáló egységet feltételez egy vagy több, de véges számú csatornával.

A kiszolgálás során eltelt időt a kiszolgálás kezdetétől a befejezéséig **kiszolgálási időnek** nevezzük. A kiszolgálási idő valószínűségi változó, amely kiszolgáló egységenként és kiszolgált egyedenként különböző lehet, de általában feltételezzük, hogy a kiszolgálási idő minden kiszolgáló egységre azonos valószínűségi eloszlású. A gyakorlatban legtöbbször azt feltételezik, hogy a kiszolgálási idő minden csatornában egymástól és a rendszer állapotától független exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Más előforduló kiszolgálási időeloszlások a degenerált eloszlás (állandó kiszolgálási idővel) és az *Erlang* (*gamma*) eloszlás.

Összefoglalva a különböző sorbanállási rendszereket, a következő jellemzők alapján lehet csoportosítani:

1. *Az input vagy érkezési folyamat jellemzői:* az egységnyi idő alatti érkezések számának eloszlása, a sorok száma, a sor maximális hossza és a szolgáltatásra igényt tartó fogyasztók maximális száma.
2. *Kiszolgálási folyamat jellemzői:* a kiszolgálási idő eloszlása, a szerverek száma, a szerverek elrendezése (párhuzamos vagy soros).
3. *A kiszolgálási sorrend elvének jellemzői:* szigorú prioritás vagy véletlen választás.

9.1.1 Egy egyszerű sorbanállási folyamat

Amint azt jeleztük, a sorbanállási elmélet nagyon sokféle, különböző típusú várakozási szituációra alkalmazható. A leggyakrabban előforduló probléma azonban a következő: a kiszolgáló egység előtt, amely több kiszolgáló csatornával is rendelkezhet, várakozó sor (ez lehet üres is) alakul ki; az inputforrásból belépő fogyasztót bizonyos várakozás után egy kiszolgálóegység (szerver) szolgálja ki (9.2. ábra).

Például az inputforrás jelentse az emberek egy csoportját, amelyből a rendszerbe belépő egyedeket a megbetegedések generálják. A kiszolgáló egység ebben az esetben egy orvosi rendelő és a szerverek az orvosok.



9.2. ábra. Elemi kiszolgálási rendszer

A szerver nem mindig egyetlen személy, lehet egy csoport, pl. szerelők csoportja, akik egyidejűleg különböző műveleteket végeznek a fogyasztó kiszolgálása érdekében. Továbbá a szerverek legtöbbször nemcsak emberek, hanem gépek, eszközök csoportjai. Ugyanúgy a várakozó fogyasztók is lehetnek gépek, pl. autók a javítóműhely előtt. Az sem szükséges, hogy a fogyasztók fizikailag várakozó sort képezzenek, a sor egyedei szétszórtnak is elhelyezkedhetnek egy területen. Pl. előfordulhat az is, hogy nem a fogyasztó megy a szerverhez, hanem fordítva a szerver keresi fel a fogyasztót (javításra váró helyhez kötött gépek). A sorbanállási elmélet alkalmazhatóságának egyedüli lényeges feltétele, hogy változzon az adott szolgáltatásra várakozó egyedek száma, azok fizikai helyzetének nincs jelentősége.

A továbbiakban elemi modellekkel foglalkozunk, amelyek legtöbbje feltételezi, hogy az érkezési időközök és a kiszolgálási idő független, ismert eloszlású valószínűségi változó.

A sorbanállási modellek jelölésére háromelemű szimbólumot ($-/-/-$) használunk, ahol az első karakter az érkezési időközök eloszlását, a második a kiszolgálási idő eloszlását, a harmadik pedig a kiszolgáló csatornák számát jelenti, pl. $M/M/1$, ahol M az exponenciális (Markov) eloszlás jele. További betűjelek: D degenerált eloszlás konstans idő esetén, E_k Erlang-eloszlás, G általános (general) eloszlás.

9.1.2 Terminológia és jelölések

A továbbiakban a következő terminológiát és jelöléseket használjuk, és később csak az eltéréseket jelezzük.

A rendszer állapota	=	a fogyasztók száma a kiszolgáló rendszerben
A sor hossza	=	a kiszolgálásra várakozó fogyasztók száma = a rendszer állapota – az éppen kiszolgált fogyasztók száma,
$N(t)$	=	a fogyasztók száma a kiszolgáló rendszerben

		$t(t \geq 0)$ időpontban,
$P_n(t)$	=	annak valószínűsége, hogy a kiszolgáló rendszerben t időpontban pontosan n fogyasztó tartózkodik,
s	=	a párhuzamos kiszolgáló csatornák száma a rendszerben,
λ	=	az érkezési ráta középértéke, ami az időegység alatt érkező új fogyasztók várható száma, ha n fogyasztó van a rendszerben,
μ	=	a kiszolgálási ráta középértéke, ami az időegység alatti kiszolgálások várható száma, ha n fogyasztó van a rendszerben.

Ha a λ_n konstans minden n -re, vagyis a λ_n nem függ az $N(t)$ -től, akkor λ -val jelöljük. Ha a kiszolgálási ráta középértéke és a működő kiszolgáló csatornák számának hányadosa (μ_n/s) konstans minden $n \geq 1$ -re, akkor ennek a konstansnak jele μ . Ebben az esetben a $\mu_n = s\mu$, ha az $n \geq s$ és minden s csatorna működik. Könnyen belátható, hogy ekkor az $1/\lambda$, illetve az $1/\mu$ az érkezési időközök, illetve a kiszolgálási idők várhatóértéke. A $\rho = \lambda/s\mu$ a kiszolgáló egység kihasználási tényezője.

Amikor a kiszolgáló rendszer elkezd működni, a rendszer állapota erősen függ a rendszer kezdeti állapotától (a fogyasztók kezdeti számától) és az eltelt időtől. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a rendszer *tranzien*s állapotban van. Bizonyos idő eltelte után a rendszer állapota függetlenné válik a kezdeti állapottól és az időtől, ekkor a rendszer elérte az állandósult (*stacionárius*) állapotot, és ezután rendszer állapotának valószínűségi eloszlása nem változik. A sorbanállási modellek többsége a stacionárius állapot feltételezésével dolgozik, mivel a tranzien s állapot vizsgálata sokkal problematikusabb. A következő fogalmak és jelölések az állandósult állapotra vonatkoznak:

- P_n annak valószínűsége, hogy pontosan n fogyasztó van a kiszolgálási rendszerben,
- L a kiszolgáló rendszerben tartózkodó fogyasztók várható száma,
- L_q a várakozó sor várható hossza,
- w a várakozási idő a rendszerben, ami tartalmazza az egyes fogyasztók kiszolgálási idejét is, ennek várhatóértéke $W = E(w)$,
- w_q a várakozási idő a sorban az egyes fogyasztók kiszolgálási ideje nélkül, ennek várhatóértéke $W_q = E(w_q)$.

Feltételezve, hogy a λ_n konstans minden n -re, bizonyítható, hogy a stacionárius sorbanállási folyamatban az

$$L = \lambda W,$$

amit *Little* eredményeként tartanak számon. Ez azt mondja ki, hogy a sorbanállási rendszerben az igények számának átlaga az érkezési ráta és a rendszerben eltöltött idő átlagának szorzatával egyenlő. Továbbá az

$$L_q = \lambda W_q.$$

Ha a λ_n nem konstans, akkor ezekben az egyenletekben a λ -t $\bar{\lambda}$ -nel helyettesítjük, ahol a $\bar{\lambda}$ hosszú időszakra vonatkoztatott átlagos érkezési ráta.

Feltételezve, hogy a kiszolgálási idő középértéke $1/\mu$ minden $n \geq 1$ -re konstans, a

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

Ezek az összefüggések nagyon fontosak, mivel ezekkel mind a négy alapparaméter azonnal kiszámítható, ha közülük egyet már ismerünk.

9.2. Példák a valódi sorbanállási rendszerekre

A sorbanállási elmélet az eddig elmondottak alapján elvontnak tűnhet, amit csak speciális esetekben lehet alkalmazni. A valóságban azonban az elmélet túlnyomó része meglepően széles területen és sokféle kontextusban használható. Azért, hogy kiszélesítsük az alkalmazhatóság horizontját, röviden ismertetünk néhány lehetőséget.

A sorbanállási rendszerek egyik fontos osztályát jelentik a kereskedelmi kiszolgáló rendszerek, amelyekkel szinte minden nap találkozunk. Nagyon sok ezek közül ún. *person-to-person* szolgáltatás állandó kiszolgáló helyekkel, mint pl. az ABC, a fodrászüzlet, a bankok stb., ahol a kiszolgálók az eladók, a fodrász, a banktisztviselő stb., a fogyasztók pedig az emberek. Más jellegű szolgáltatás a háztartási gépek javítása, amikor a szerelő (a szervert) keresi fel a fogyasztót. A kiszolgáló automaták esetében a szervert egy gép, a benzinkútnál a fogyasztó az autó.

Egy másik fontos osztályt képeznek a közlekedési és szállítási rendszerek. Ezekben a járművek a helyzetüktől függően lehetnek kiszolgáltak és kiszolgálók. Például, amikor egy autó a közlekedési lámpa előtt várakozik, akkor a lámpa a szervert, vagy a tehergépkocsik, hajók stb., amikor megrakásra vagy kirakodásra várnak, akkor a rakodógépek a kiszolgálók. Más esetekben a járművek a kiszolgálók, pl. taxik, autóbuszok.

Az utóbbi években a sorbanállási elméletet térhódítása leginkább a termelő ágazatokban és a szolgáltatások területén figyelhető meg. Az alkalmazási területek között említhetők: az anyagmozgatás, ahol az anyagmozgató gépek a szerverek és a mozgatott termékek a fogyasztók; a karbantartási rendszerek, ahol a karbantartó szerelők a szerverek és a gépek a fogyasztók; a minőségellenőrző állomások, ahol az ellenőrök a szerverek és az alkatrészek a fogyasztók.

A sorbanállási elmélet növekvő tekintélyét jelzik a társadalmi szolgáltató rendszerek területén észlelhető alkalmazások. Pl. az igazságszolgáltatási rendszerben, ahol a bíróságok a szerverek és a perek a fogyasztók, de említhetjük az egészségügyi ellátás rendszerét is.

9.1. példa: Azonosítsa a fogyasztókat és a kiszolgálókat a következő sorban állási rendszerekben: autószerelv, anyagmozgató gépek egy üzemben, nagykereskedelmi raktár, benzinkút.

9.2. példa: Tekintsünk egy fogorvosi rendelőt, és a működését értelmezzük sorbanállási rendszerként.

9.3. Az exponenciális eloszlás szerepe

A kiszolgálási rendszerek karakterét két fontos statisztikai tulajdonság határozza meg, nevezetesen az érkezési időközök és a kiszolgálási idők eloszlása. A valóságos kiszolgálási rendszerekben ezek az eloszlások majdnem bármilyen alakúak lehetnek. Egyedüli kikötés, hogy eloszlásban negatív érték nem fordulhat elő. Amikor azonban döntenünk kell az eloszlás megválasztásáról, két dolgot kell szem előtt tartani. Először, a választott eloszlás legyen realisztikus, vagyis az adott folyamatra elfogadható eredményeket adjon.

Másodszor, az eloszlás elég egyszerű, matematikailag könnyen kezelhető legyen. E megfontolások alapján a sorbanállási elméletben a legfontosabb valószínűségi eloszlás az exponenciális eloszlás.

Reprezentálja az érkezési időközöket vagy a kiszolgálási időt a T valószínűségi változó, amiről azt állítjuk, hogy exponenciális eloszlású, α paraméterrel, ekkor a sűrűségfüggvény:

$$f_T(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & \text{ha } t \geq 0, \\ 0, & \text{ha } t < 0. \end{cases}$$

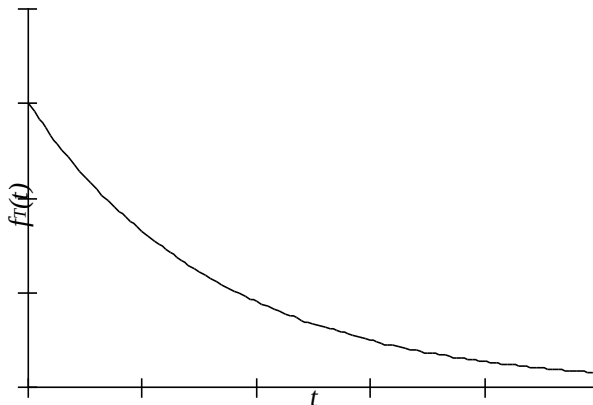
Ebben az esetben a kumulatív valószínűség (eloszlásfüggvény):

$$\left. \begin{aligned} P\{T \leq t\} &= 1 - e^{-\alpha t} \\ P\{T > t\} &= e^{-\alpha t} \end{aligned} \right\}, \text{ ha } t \geq 0.$$

Az eloszlás várhatóértéke és szórása:

$$E(T) = \frac{1}{\alpha}, \quad D(T) = \frac{1}{\alpha}.$$

Vajon az exponenciális eloszlás miért bír nagy jelentőséggel a sorbanállási elméletben? E kérdés kifejtéséhez vizsgáljuk meg a függvény hat kulcsfontosságú tulajdonságát.



9.3. ábra. Az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye

1. tulajdonság: $f_T(t)$ monoton csökkenő függvény a $t(t \geq 0)$ tartományban (9.3. ábra).

Ennek a következménye, hogy bármely szigorúan pozitív Δt -re és t -re a

$$P\{0 \leq T \leq \Delta t\} > P\{t \leq T \leq t + \Delta t\}.$$

Ez következik abból, hogy a $P(t)$ valószínűség az $f_T(t)$ görbe alatti terület Δt intervallum felett, és a görbe átlagos magassága a második valószínűségnél kisebb, mint az elsőnél. Például a $P\{0 \leq T \leq 1/2\alpha\} = 0,93$ és a $P\{1/2\alpha \leq T \leq 3/2\alpha\} = 0,38$. Ezért a T valószínűségi változó relatíve gyakran vesz fel nullához közeli kicsi értéket (9.3. ábra).

Kérdés lehet, hogy ez a tulajdonság kedvező vagy sem a sorbanállási modellek szempontjából. A válasz a szolgáltatás természetétől függ.

Ha a kiszolgáló minden esetben ugyanazt a szolgáltatást nyújtja, akkor a kiszolgálási idő közel azonos minden fogyasztó esetében, és a kiszolgálási időnek a várhatóértékhez közeli értéket kell felvennie. Ebben az esetben a középértékhez viszonyítva a kiszolgálási

idő ingadozhat, de a középértéknél sokkal rövidebb szervizidő nem engedhető meg, mert a szolgáltatás időtartama bizonyos érték alá nem süllyedhet, még akkor sem, ha nagyon gyors a kiszolgálás. E feltételeknek az exponenciális eloszlás tulajdonságai nem felelnek meg, mivel nem biztosítják a várhatóérték körüli kicsi szórást.

Más esetben viszont, amikor a fogyasztók kiszolgálásának időigénye fogyasztónként változik, akkor az exponenciális eloszlás jól leírja a szolgáltatást. Például ilyen eset a korábban említett orvosi rendelő, ahol sokszor a kezelés vagy vizsgálat rövid ideig tart, máskor viszont hosszabb időt vesz igénybe.

2. tulajdonság: Az exponenciális eloszlású véletlen időtartamok nem emlékeznek arra, hogy mióta vannak folyamatban.

Ha például egy szállítószalag hibamentes működése exponenciális eloszlású, és már 30 perce hibátlanul működik, akkor abból semmiféle következtetést nem vonhatunk le arra vonatkozólag, hogy mennyi ideig fog még hibamentesen működni. Tehát, ha bármely t időpontot választjuk is ki, és a szóban forgó véletlen időtartam nem ért véget a t időpontig, akkor az úgy tekinthető, mintha az egész folyamat t időpontban kezdődött volna.

Ezt tulajdonságot a

$$P\{T > t + \Delta t | T > \Delta t\} = P\{T > t\}$$

fejezi ki minden pozitív t -re és Δt -re. Más szóval, a maradék idő valószínűsége az esemény (érkezés, kiszolgálás, meghibásodás stb.) bekövetkezéséig azonos, tekintet nélkül arra, hogy mennyi Δt idő telt el, vagyis a folyamat elfelejti a történetét. Ez a meglepő tulajdonság a következő módon igazolható. A feltételes valószínűség definíciója szerint:

$$P\{T > t + \Delta t | T > \Delta t\} = \frac{P\{T > \Delta t, T > t + \Delta t\}}{P\{T > \Delta t\}} = \frac{P\{T > t + \Delta t\}}{P\{T > \Delta t\}} = \frac{e^{-\alpha(t+\Delta t)}}{e^{-\alpha\Delta t}} = e^{-\alpha t}$$

Tehát annak valószínűsége $e^{-\alpha t}$, hogy a folyamat $t + \Delta t$ idő előtt befejeződjék, ha már Δt ideje folyik, azaz a kérdéses valószínűség csak t -től függ, de Δt -tól nem. Más szóval, a Δt idő óta tartó folyamat befejeződésének valószínűsége ugyanakkora, mint az éppen elkezdődő. Ez a tulajdonság olyan problémáknál előnyös, ahol a kiszolgálási idő fogyasztónként változó, de nem fogadható el ott, ahol a kiszolgálási idő közel azonos, mivel az utóbbi esetben az eltelt kiszolgálási időnek jeleznie kell, hogy a szerviz mikor fejeződik be.

3. tulajdonság: A független exponenciális véletlen változók minimumainak valószínűségi eloszlása is exponenciális.

Ezt az állítást a következők szerint igazolhatjuk: Legyenek $T_1, T_2, \dots, T_n$ független exponenciális eloszlású véletlen változók $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ paraméterrel külön-külön. Legyen U , a $T_1, T_2, \dots, T_n$ változók minimális értéke szintén véletlen változó, azaz

$$U = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}.$$

Így ha T_i reprezentálja azt az időtartamot, amíg egy bizonyos esemény bekövetkezik, akkor U azt az időtartamot jelenti, amíg az n esemény közül az első bekövetkezik. Bármely $t \geq 0$ időre

$$\begin{aligned} P\{U > t\} &= P\{T_1 > t, T_2 > t, \dots, T_n > t\} = P\{T_1 > t\} P\{T_2 > t\} \dots P\{T_n > t\} = e^{-\alpha_1 t} e^{-\alpha_2 t} \dots e^{-\alpha_n t} \\ &= e^{-\sum_{i=1}^n \alpha_i t}, \end{aligned}$$

így az U változó eloszlása valóban exponenciális $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ paraméterrel.

A sorbanállási modellek érkezési időközzeit illetően ez a tulajdonság biztosít néhány lehetőséget. Nevezetesen, tekintsünk n különböző típusú fogyasztót exponenciális eloszlású érkezési időközökkel és α_i ($i=1, 2, \dots, n$) paraméterrel. A 2. tulajdonság miatt egy adott pillanattól a következő érkezés pillanatáig mérhető idő eloszlása azonos minden i fogyasztó típusra. Legyen T_i a hátralévő idő bármely i fogyasztó típus érkezési pillanatától mérve. Ekkor a 3. tulajdonság azt jelenti, hogy az U érkezési időköz a sorbanállási rendszer egészére nézve is exponenciális eloszlású

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

paraméterrel. Ennek következménye, hogy az érkezési időközök eloszlása akkor is exponenciális marad, ha a fogyasztók megkülönböztetésétől eltekintünk.

E tulajdonság jelentősége a kiszolgálási idő szempontjából még fontosabb, különösen akkor, ha a modellben több szerver van. Például, tekintsük azt az esetet, amikor minden szerver kiszolgálási ideje exponenciális eloszlású változó azonos μ paraméterrel. Legyen n az adott pillanatban működő szerverek száma, továbbá legyen T_i ($i=1, 2, \dots, n$) a hátralévő kiszolgálási idő ugyancsak exponenciális eloszlással és $\alpha_i = \mu$ paraméterrel. Ebben az esetben a 3. tulajdonság szerint az U azt az időtartamot jelenti, amely alatt a következő szerver befejezi a kiszolgálást, és ennek az időtartamnak az eloszlása is exponenciális $\alpha_i = n\mu$ paraméterrel. Ezt úgy is felfoghatjuk, hogy a sorbanállási rendszer úgy működik, mint egy egyszerveres modell $n\mu$ paraméterrel. Ezzel a lehetőséggel később gyakran fogunk élni a többszerveres modelleknél.

4. tulajdonság: Kapcsolat a Poisson-eloszlással.

Az exponenciális eloszlás szoros kapcsolatban van a Poisson-eloszlással, amit az itt bizonyításra nem kerülő tételek igazolnak.

1. tétel: Ha $X(t)$ valószínűségi változó a t idővel arányos várhatóértékű Poisson-eloszlású:

$$P\{X(t) = n\} = \frac{(\alpha t)^n e^{-\alpha t}}{n!}, n = 1, 2, \dots, n, \text{ és } E\{X(t)\} = \alpha t,$$

akkor az esemény bekövetkezéséig eltelt időintervallumot jellemző T valószínűségi változó exponenciális eloszlású.

2. tétel: Ha a T exponenciális eloszlású valószínűségi változó egy eseménysorozat két tetszőleges eseménye között eltelt időtartamot jellemzi, akkor ezen eseménysorozatban a t hosszúságú időintervallumban bekövetkező események számát leíró $X(t)$ valószínűségi változó Poisson-eloszlású, és várhatóértéke t -vel arányos.

Poisson-eloszlással jellemezhető az automatikus telefonközpontokba beérkező hívások száma, vagy a gépek meghibásodásainak száma stb. Így, az előző két tétel értelmében két telefonhívás vagy a két meghibásodás közötti időintervallum exponenciális eloszlású.

5. tulajdonság: Minden pozitív t -re a $P\{T \leq t + \Delta t \mid T > t\} \cong \alpha \Delta t$, ha Δt eléggé kicsi.

A T két esemény bekövetkezése közötti időintervallumot jellemzi, továbbá feltételezzük, hogy ebből a legutolsó esemény óta már t idő eltelt anélkül, hogy az újabb esemény bekövetkezett volna. A 2. tulajdonság értelmében azt is tudjuk, hogy annak valószínűsége,

hogy az esemény bekövetkezik egy fix Δt intervallumon belül (függetlenül az eltelt t idő nagyságától) azonos. Az 5. tulajdonság azt mondja, ha a Δt értéke kicsi, akkor ez a konstans valószínűség jól közelíthető $\alpha \Delta t$ -vel. Továbbá, ha különböző kicsi értékű Δt -ket veszünk, akkor a valószínűség arányos Δt -vel, és az arányossági tényező α . Valójában az α valamely esemény bekövetkezésének átlagos intenzitása (lásd a 4. tulajdonságot), így a Δt intervallumban az események várható száma pontosan $\alpha \Delta t$. Az egyedüli ok, ami miatt az esemény bekövetkezésének valószínűsége kicsit eltérhet ettől az értéktől az, hogy egynél több esemény következhet be, ennek a valószínűsége azonban elhanyagolható, ha a Δt kicsi.

Most nézzük az 5. tulajdonság matematikai alapjait. A valószínűség értéke rögzített nagyságú $\Delta t > 0$ -ra éppen

$$P\{T \leq t + \Delta t | T > t\} = P\{T \leq \Delta t\} = 1 - e^{-\alpha \Delta t},$$

minden $t \geq 0$ -ra. Az e^x függvényt sorba fejtve és helyettesítve:

$$e^x = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$P\{T \leq t + \Delta t | T > t\} = 1 - 1 + \alpha \Delta t - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\alpha \Delta t)^n}{n!} \approx \alpha \Delta t,$$

mivel a szumma jel mögötti kifejezés elhanyagolható, ha a Δt kicsi. Pontosabban a

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{T \leq t + \Delta t | T > t\}}{\Delta t} = \alpha.$$

Az 5. tulajdonság egy kényelmes közelítést tesz lehetővé, és az események bekövetkezésének valószínűségét könnyen kiszámíthatjuk.

6. tulajdonság: Az exponenciális eloszlás érzéketlen az aggregációra és a diszaggregációra.

Ezek a tulajdonságok elsődlegesen a Poisson-folyamatokra vonatkoznak, ezért a tárgyalásukat a Poisson-folyamatra élezzük ki, de a 4. tulajdonság segítségével összefüggésbe hozzuk őket az exponenciális eloszlással is.

Feltételezzük, hogy n különböző típusú fogyasztók Poisson-folyamat szerint érkeznek λ_i ($i=1,2,\dots,n$) paraméterrel. Továbbá feltételezzük azt is, hogy ezek független Poisson-folyamatok. Az 5. tulajdonság azt mondja, hogy az aggregált érkezési folyamat (minden egyes fogyasztó érkezése tekintet nélkül a típusára) ugyancsak Poisson-folyamat $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ paraméterrel. Más szóval, a Poisson-folyamat érzéketlen az aggregációra.

A tulajdonság első része közvetlen következik a 3. és 4. tulajdonságból. A 4. tulajdonságból alapján az érkezési időköz a fogyasztók minden i típusára külön-külön exponenciális eloszlású, λ_i paraméterrel. A 3. tulajdonság viszont azt mondja ki, hogy az összes fogyasztóra nézve az érkezési időköz azonos, exponenciális eloszlású, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ paraméterű. Ha az utóbbi állításra ismét használjuk a 4. tulajdonságot, akkor abból egyértelművé válik az aggregált érkezési folyamat Poisson volta.

A 6. tulajdonság második része (érzéketlenség a diszaggregációra) az első fordítottja. Most legyen ismert az aggregált λ paraméterű érkezési folyamat, a kérdés a diszaggregált érkezési folyamatok természete az egyes fogyasztótípusokra. Feltételezzük, hogy minden egyes fogyasztótípus érkezési valószínűsége p_i meghatározott, akkor

$$\lambda_i = p_i \lambda \text{ és } \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

A tulajdonság tehát azt mondja ki, hogy ha az aggregált érkezési folyamat *Poisson*-eloszlású, akkor különböző típusú fogyasztók érkezési folyamatainak is *Poisson*-eloszlásúaknak kell lenniük.

Tekintsünk egy példát a tulajdonság második részére. Érkezzenek *Poisson*-folyamat szerint λ paraméterrel a meg nem különböztetett fogyasztók. Minden egyes fogyasztó legyen akadályoztatva (akadály esetén a fogyasztó belépés nélkül távozik a sorbanállási rendszerből) p valószínűséggel. Ekkor a rendszerbe való belépés valószínűsége $(1-p)$. Így két fogyasztótípus különböztethető meg: azok, akik belépés nélkül távoznak és azok, akik belépnek. A 6. tulajdonság második része szerint a fogyasztók érkezése típusonként $p\lambda$ és $(1-p)\lambda$ paraméterű *Poisson*-folyamat.

9.4. A születési-halálozási folyamat

Legtöbb elemi sorbanállási modellben a fogyasztók érkezése és távozása az ún. *születési-halálozási folyamatot* követi, ezért ez a folyamat a valószínűségelméleti alkalmazások szempontjából nagyon fontos. A sorbanállási modellek és a születési-halálozási folyamat kifejezései közötti analógia könnyen felfedezhető: a születés a fogyasztó érkezésének, a halál a kiszolgált fogyasztó távozásának felel meg.

A **rendszer állapota** a t ($t \geq 0$) időpontban $N(t)$, azaz a rendszerben tartózkodó fogyasztók száma t időpontban. A születési-halálozási folyamat alkalmas arra, hogy modellezze egy populáció nagyságának változását az idő függvényében. Ehhez bevezetjük a λ_n **születési intenzitás** vagy ráta, és a μ_n **halálozási intenzitás** vagy ráta fogalmát. A λ_n azt mutatja, hogy az n nagyságú populációban mekkora a születések intenzitása, és hasonlóan μ_n a halálozások intenzitását jellemzi. (Megjegyezzük, a λ_n és μ_n itt is az n -edik állapotot jellemző várhatóértékek.) Az intenzitások függetlenek az időtől, csak a rendszer állapotától, $N(t)$ -től függenek. További definiáló feltételek:

1. Adott $N(t)=n$, esetén a születések (érkezések) közötti időközök valószínűségi eloszlása exponenciális λ_n paraméterrel ($n=1, 2, \dots$).
2. Adott $N(t)=n$, esetén a halálozások (kiszolgálások befejezése) közötti időközök valószínűségi eloszlása exponenciális μ_n paraméterrel ($n=1, 2, \dots$).
3. Egyidejűleg csak egy születés vagy halálozás történhet.

A születési-halálozási folyamat az 1 és 2 feltételek miatt speciális esete a folyamatos idejű *Markov* láncoknak. A sorbanállási modellek leírására használt folyamatos idejű *Markov* láncok könnyen kezelhetők analitikusan, és a 3. feltétel tovább egyszerűsíti a tárgyalásukat.

Szeretnénk meghatározni annak valószínűségét, hogy t időpontban a népesség nagysága $N(t)=n$, amit a

$$P_n(t) := P[N(t)=n]$$

szimbólummal jelölünk. Ehhez a következő hipotézisekkel élünk.

1. Annak valószínűsége, hogy Δt intervallumban születés történik, igen kicsi, $\lambda_n \Delta t$
2. Annak valószínűsége, hogy Δt intervallumban halálozás történik, ugyancsak igen kicsi, $\mu_n \Delta t$

3. Igen kicsi annak valószínűsége, hogy a Δt intervallumban egyszerre több születés vagy halálozás történik, ezért ez a mennyiség elhanyagolható.

Visszatérve az eredeti problémához, annak valószínűségét, hogy $t+\Delta t$ időpontban a populáció nagysága n , kifejezhetjük négy egymást páronként kizáró esemény összegeként. Ezek a következők:

1. Azon valószínűségek szorzata, melyek szerint t időpontban a populáció nagysága n : $P_n(t)$;
a Δt intervallumban nincs születés: $(1-\lambda_n\Delta t)$;
a Δt intervallumban nincs halálozás: $(1-\mu_n\Delta t)$.
2. Azon valószínűségek szorzata, melyek szerint t időpontban a populáció nagysága $n+1$: $P_{n+1}(t)$;
a Δt intervallumban nincs születés: $(1-\lambda_{n+1}\Delta t)$;
a Δt intervallumban egy halálozás történik: $\mu_{n+1}\Delta t$.
3. Azon valószínűségek szorzata, melyek szerint t időpontban a populáció nagysága $n-1$: $P_{n-1}(t)$;
a Δt intervallumban egy születés történik: $\lambda_{n-1}\Delta t$;
a Δt intervallumban nincs halálozás: $(1-\mu_{n-1}\Delta t)$.
4. Azon valószínűségek szorzata, melyek szerint t időpontban a populáció nagysága n : $P_n(t)$; a Δt intervallumban egy születés történik: $\lambda_n\Delta t$;
a Δt intervallumban egy halálozás történik: $\mu_n\Delta t$.

A négy valószínűséget így is felírhatjuk:

$$\begin{aligned} P_n(t)[1-\lambda_n\Delta t][1-\mu_n\Delta t] &= P_n(t)[1-\lambda_n\Delta t-\mu_n\Delta t+o(\Delta t)], \\ P_{n+1}(t)[1-\lambda_{n+1}\Delta t][\mu_{n+1}\Delta t] &= P_{n+1}(t)\mu_{n+1}\Delta t+o(\Delta t), \\ P_{n-1}(t)[\lambda_{n-1}\Delta t][1-\mu_{n-1}\Delta t] &= P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t+o(\Delta t), \\ P_n(t)[\lambda_n\Delta t][\mu_n\Delta t] &= o(\Delta t). \end{aligned}$$

Adjuk össze a valószínűségeket:

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)[1-\lambda_n\Delta t-\mu_n\Delta t] + P_{n+1}(t)\mu_{n+1}\Delta t + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t + \sum_{i=1}^4 o_i(\Delta t),$$

majd rendezzük az egyenletet

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^4 o_i(\Delta t).$$

Ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t).$$

A fenti egyenlethez hozzá kell még venni azt az esetet, amikor a $t+\Delta t$ időpontban az $n=0$. Annak valószínűsége, hogy $t+\Delta t$ időpontban a populáció nagysága 0, két egymástól független lehetőség összegeként adható meg. A két egymást kizáró esemény:

1. Azon valószínűségek szorzata, melyek szerint t időpontban a populáció nagysága 0: $P_0(t)$;
a Δt intervallumban nincs születés: $(1-\lambda_0\Delta t)$;
2. Azon valószínűségek szorzata, melyek szerint

t időpontban a populáció nagysága 1: $P_1(t)$;

a Δt intervallumban nincs születés: $(1 - \lambda_1 \Delta t)$;

a Δt intervallumban 1 halálozás történik: $\mu_1 \Delta t$.

E két valószínűség:

$$P_0(t)[1 - \lambda_0 \Delta t], P_1(t)[1 - \lambda_1 \Delta t][\mu_1 \Delta t] = P_1(t)\mu_1 \Delta t + o(\Delta t).$$

Adjuk össze a valószínűségeket:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)[1 - \lambda_0 \Delta t] + P_1(t)\mu_1 \Delta t + o(\Delta t),$$

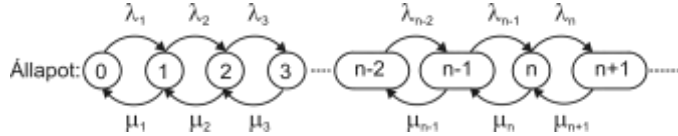
ebből

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) + \frac{1}{\Delta t} o(\Delta t),$$

végül

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t).$$

A kapott eredményeket intuitív módon az ún. állapot-átmeneti diagram segítségével is megkaphatjuk (9.4. ábra). Az ábrán az állapotokat oválissal körülvett számok, az átmeneteket a 3. feltételnek megfelelően nyilak és a föléjük írt intenzitások jelzik. Az ábrát úgy tekinthetjük, mintha egy részecske mozogna az állapotok között, ahol a nyilak jelzik a lehetséges átmeneteket. A nyilak feletti számok pedig ezen átmenetek infinitezimális rátáját adják meg. Hangsúlyozzuk, hogy ezek a számok születési és halálozási intenzitások, tehát nem valószínűségek. Ha viszont az intenzitásokat megszorozzuk a dt mennyiséggel, akkor megkapjuk azokat az ún. átmeneti valószínűségeket, amellyel az átmenetek a következő dt időtartam alatt bekövetkeznek.



9.4. ábra. A születési-halálozási folyamat állapot-átmeneti diagramja

Koncentráljunk most az n -edik állapotra. Észrevehetjük, hogy oda csak az $n-1$ -edik és az $n+1$ -edik állapotokból lehet átlépni. Hasonlóképpen az n -edik állapotot csak úgy lehet elhagyni, hogy vagy az $n-1$ -edik vagy az $n+1$ -edik állapotba jutunk. A dinamikus egyensúly miatt az is világos, hogy a két ráta különbségének, amellyel a rendszer belép az n -edik állapotba, illetve elhagyja azt, egyenlőnek kell lennie az illető állapot abszolút valószínűségeinek megváltozásával. Ez az okoskodás egyszerű eszközt ad a kezünkbe, amelynek segítségével leírhatjuk a P_n valószínűségekre vonatkozó mozgásegyenletet. A növekedés intenzitása a t pillanatban:

$$\lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t),$$

míg a csökkenés intenzitása a t pillanatban

$$(\lambda_n + \mu_n)P_n(t).$$

E kettő különbsége az abszolút valószínűség t -beli változásával (deriváltjával) egyenlő, azaz

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t).$$

Könnyű belátni, hogy ez az érvelés $n=0$ esetben is helyes eredményre vezet. Vegyük ész-

re azt is, hogy a fenti egyenlet jobb oldalának minden egyes tagja két tényező szorzata. Az egyik tényező annak valószínűsége, hogy a rendszer a t pillanatban egy bizonyos állapotban van. A másik tényező pedig arányos annak valószínűségével, hogy a rendszer egy bizonyos irányban elhagyja ezt az állapotot.

Kivéve néhány esetet, a születési-halálózási folyamat analízise, a $P_n(t)$ valószínűségek meghatározása tranziens állapotban nehézségekbe ütközik. Az $N(t)$ eloszlásának meghatározására ugyan létezik néhány megoldás, de ezek a gyakorlati alkalmazások számára túl bonyolultak. A gyakorlat szempontjából lényegesebb stacionárius állapot $N(t)$ eloszlása az előzőek alapján egyszerűen levezethető a dinamikus állapotból.

Feltételezve, hogy a $P_n(t)$ független az időtől a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n,$$

és ekkor a $P_n(t)$ idő szerinti változása

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dP_n(t)}{dt} = \frac{dP_n}{dt} = 0.$$

9.1. táblázat

Állapot	bemenő intenzitás=kimenő intenzitás
0	$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) P_1$
2	$\lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3 = (\lambda_2 + \mu_2) P_2$
.	.
.	.
.	.
$n-1$	$\lambda_{n-2} P_{n-2} + \mu_n P_n = (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) P_{n-1}$
n	$\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) P_n$
.	.
.	.
.	.

Stacionárius állapotban ezért a differenciálegyenletek differenciaegyenletekbe mennek át, azaz

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) P_n(t) &= 0, \text{ ha } n > 0, \\ -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1 &= 0, \text{ ha } n = 0. \end{aligned}$$

Az egyenleteket egyensúlyi egyenleteknek nevezzük, mivel az n -edik állapot egyensúlyát fejezik ki. Ahhoz, hogy meghatározhassuk a rendszer különböző állapotainak P_n valószínűségét, minden lehetséges állapotra fel kell írni az egyensúlyi egyenletet, és az így kapott egyenletrendszert kell megoldani (9.1. táblázat).

Az első egyensúlyi egyenletben két ismeretlen (P_0 és P_1), az első kettőben három ismeretlen (P_0 , P_1 és P_2) és így tovább található, vagyis mindig csak eggyel több ismeretlennünk van, mint egyenletünk. Ez a felépítés nagyon kényelmessé teszi az egyenletrendszer megoldását. Az első egyenletből kifejezzük P_1 -et a P_0 függvényében. Ezt követően a második egyenletet P_2 -re rendezzük, és a P_1 -re kapott kifejezéssel kiküszöböljük a P_1 -et. Így olyan összefüggést kapunk P_2 -re, amelynek a jobb oldalán ismét csak P_0 az ismeretlen. Ezt az eljárást folytatva valamennyi P_n kifejezhető P_0 -val. Végül abból a követel-

ményből, hogy a valószínűségek összegének 1-nek kell lennie, kiszámítjuk a P_0 értékét.

Alkalmazzuk ezt az eljárást:

Állapot

$$0: \quad P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$1: \quad P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 + \frac{1}{\mu_2} (\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$$

$$2: \quad P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 + \frac{1}{\mu_3} (\mu_2 P_2 - \lambda_1 P_1) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0$$

$$n-1: \quad P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} + \frac{1}{\mu_n} (\mu_{n-1} P_{n-1} - \lambda_{n-2} P_{n-2}) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} P_0$$

$$n+1: \quad P_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n + \frac{1}{\mu_{n+1}} (\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1}) = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n = \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \dots \mu_1} P_0$$

Vezessük be a

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} P_0 = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} P_0 \quad n=1,2,\dots$$

jelölést, így a stacionárius állapotban az állapotok valószínűségei:

$$P_n = C_n P_0 \quad n=1,2,\dots$$

Követelmény a valószínűségek összegére:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1.$$

A P_n -t helyettesítve, és figyelembe véve a szokásos konvenciót: az üres szorzat értéke definíció szerint 1, azaz

$$\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \right] P_0 = 1,$$

amelyből megkapjuk az elemi sorbanállási elmélet egyik legfontosabb egyenletét:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n}.$$

Ezek után az egyedek számának várhatóértéke a rendszerben:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n.$$

A sor hosszának várhatóértéke:

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n,$$

ahol s a szerverek száma a rendszerben.

A várakozási idők:

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}}, W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}},$$

ahol $\bar{\lambda}$ az átlagos érkezési ráta. Mivel a λ_n az érkezési ráta várhatóértéke, amikor a

rendszer $n(1,2,\dots)$ állapotban van, és a P_n annak valószínűsége, hogy a rendszer az n -edik állapotban van, így

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n.$$

Több kifejezésben a szummázás felsőhatára ∞ , szerencsére ezek kiszámítására a legtöbb esetben található analitikus formula. A számunkra érdekes esetekben a geometriai sorok összege használható:

$$\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \text{ bármely } x-re,$$

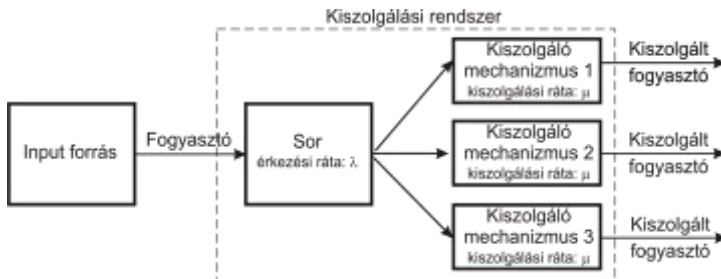
és

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ ha } |x| < 1.$$

A kapott eredmények a stacionárius állapotra érvényesek, vagyis olyan megszorítás mellett, hogy a λ_n és a μ_n olyan értékek, amelyek elérték a stacionárius állapotot.

9.5. A születési-halálozási folyamatra visszavezethető modellek

A sorbanállási rendszerek modellezésében nagy rugalmasságot biztosít a születési-halálozási folyamatnak az a tulajdonsága, hogy minden intenzitás $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ és $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ előjele csak pozitív lehet. Valószínűleg ennek köszönhető, hogy a sorbanállási elméletben a legtöbb modell ezen a folyamaton alapul. Az 1. és 2. feltételek, valamint a 3. tulajdonság miatt ezeket a modelleket gyakran **Poisson-bemenetű és exponenciális kiszolgálási idejű** modellekként említik. A különbség köztük csak abban van, hogy miként változik a λ_n és a μ_n az n függvényében. A továbbiakban négy ilyen modellt mutatunk be.



9.5. ábra. Az M/M/s modell

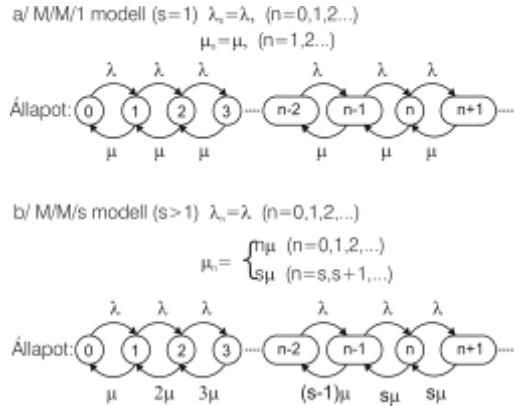
9.5.1 Az M/M/s modell

A 9.2. pontban megadott jelölés szerint az M/M/s modellben az érkezési időköz független és exponenciális eloszlású, vagyis az érkezési folyamat Poisson. A kiszolgálási idő ugyancsak független exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A párhuzamosan működő szerverek száma s pedig pozitív egész szám. E jellemzők miatt ez a modell a születési-halálozási folyamat speciális esete, ahol a közepes érkezési intenzitás (λ), valamint a közepes kiszolgálási intenzitás (μ) és a működő szerverek számának (s) hányadosa (ρ) állandó, függetlenül a rendszer állapotától (9.5. ábra).

Ha történetesen a szerverek száma 1, akkor a rendszer paraméterei $\lambda_n = \lambda, n=0,1,2,\dots$ és $\mu = \mu_n, n=1,2,3,\dots$. Vagyis az összes érkezési intenzitás egy λ , az összes kiszolgálási intenzitás pedig egy μ állandóval egyenlő. Ebben az esetben az átlagos érkezési időköz $\bar{t} = 1/\lambda$, és az átlagos kiszolgálási idő $\bar{x} = 1/\mu$. A folyamat állapot-átmeneti diagramját

a 9.6/a ábra mutatja.

Amikor a rendszerben több kiszolgálóegység működik ($s > 1$) a μ_n kiszolgálási ráta (intenzitás) kifejezése bonyolultabb. Emlékezzünk arra, hogy μ_n a kiszolgálási ráta várhatóértéke, akkor ha n fogyasztó tartózkodik a rendszerben. Amint azt az exponenciális eloszlás 3. tulajdonsága kapcsán említettük, amikor mindegyik működő kiszolgálóegység kiszolgálási rátája μ , akkor n működő kiszolgálóegység közös rátája $n\mu$. Ezért a $\mu_n = n\mu$, ha $n \leq s$, továbbá $\mu_n = s\mu$, ha $n \geq s$, azaz minden kiszolgálóegység működik.



9.6. ábra. Az M/M/s modell állapot-átmeneti diagramja

Amikor a maximális kiszolgálási ráta ($s\mu$) nagyobb, mint az érkezési ráta, azaz a

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1,$$

akkor a sorbanállási rendszerre ráilleszthető az M/M/s modell, és előbb vagy utóbb eléri a stacionárius állapotot. Ekkor a stacionárius megoldás levezethető az előző pontban tárgyalt születési-halálozási folyamatból. Azonban a P_n , L , L_q -re kapott eredmények jelentősen egyszerűsödnek.

9.5.2 Az M/M/1 modell összefüggései

Ha $s=1$, akkor a születési-halálozási folyamat C_n tényezője az alábbi alakra redukálódik:

$$C_n = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \rho^n, n=1,2,\dots$$

Ezért a

$$P_n = \rho^n P_0, n \geq 0,$$

ahol

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right)^{-1} = \left(\frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} = 1-\rho, \text{ ha } \rho < 1,$$

az üres rendszer valószínűsége.

Így a

$$P_n = (1-\rho)\rho^n.$$

Következésképpen a kiszolgáló rendszerben tartózkodó fogyasztók várható száma:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho}(\rho^n) = (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right) =$$

$$(1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}.$$

Hasonlóan a várakozó sor várható hossza:

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = L - 1(1-P_0) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

Ha a $\lambda \geq \mu$, vagyis az érkezési ráta nagyobb, mint a kiszolgálási ráta, akkor a fenti megoldás „elszáll”, mivel a P_0 kifejezésben a szummázás nem konvergens. Ebben az esetben a sor határtalanul növekszik.

A továbbiakban feltételezve, hogy a $\lambda < \mu$, most meghatározzuk a várakozási idő valószínűségi eloszlását arra az esetre, ha az érkezés véletlenszerű, és a kiszolgálás a szigorú prioritási elv szerint történik. Ha a fogyasztó érkezésekor már n fogyasztó van a rendszerben, akkor a fogyasztónak $n+1$ kiszolgálási időnek megfelelő ideig kell várakoznia, beleértve a saját kiszolgálását is. Legyenek a független kiszolgálási idők $T_1, T_2, \dots$ exponenciális eloszlású véletlen változók μ paraméterrel, és legyen

$$S_{n+1} = T_1 + T_2 + \dots + T_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

így S_{n+1} a kiegyenlített várakozási időt jelenti akkor, ha n fogyasztó van a rendszerben. Később látni fogjuk, hogy az S_{n+1} Erlang eloszlású. Mivel a

$$P\{w > t\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n P\{S_{n+1} > t\},$$

amelyből hosszadalmas számolás után kapjuk, hogy a várakozási idő valószínűségi eloszlása

$$P\{w > t\} = e^{-\mu(1-\rho)t}, t \geq 0.$$

Ennek érdekessége, hogy a w várakozási idő is exponenciális eloszlású $\mu(1-\rho)$ paraméterrel. Ezért a

$$W = E(w) = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}.$$

A W várakozási idő tartalmazza a kiszolgálás idejét is. Sok esetben azonban lényegesebb a sorban, a kiszolgálás kezdetéig eltelt idő (W_q), pl. egy orvosi rendelőben, amikor a beteg akut problémával várakozik. A W_q meghatározásához először tekintsük azt az esetet, amikor az érkezésekor nincs fogyasztó a rendszerben. Ekkor a kiszolgálás azonnal megtörténik, azaz

$$P\{w_q = 0\} = P_0 = 1 - \rho.$$

Ha $n > 0$ fogyasztó tartózkodik a rendszerben, akkor a fogyasztónak n számú kiszolgálási időnek megfelelő időtartamig kell várakoznia, így a

$$P\{w > t\} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n P\{S_n > t\} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\rho)\rho^n P\{S_n > t\} =$$

$$= \rho \sum_{n=0}^{\infty} P_n P\{S_n > t\} = \rho P\{w > t\} = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \geq 0.$$

Az eloszlás várhatóértéke a fenti eloszlásból, vagy közvetlen a $L_q = \lambda W_q$, vagy a $W_q = W - (1/\mu)$ összefüggésből számítható:

$$W_q = E(w_q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

Mintapélda:

Egy garanciális szervizelést végző karbantartó műhelybe a személygépkocsik Poisson-eloszlás szerint érkeznek. Az átlagos érkezési időköz 20 perc. A szerelőállások száma 1, és a szervizelés átlagosan 15 percet igényel.

Kérdések:

- Mi a valószínűsége annak, hogy az érkező gépkocsinak nem kell várakoznia?
- Mennyi a rendszerben tartózkodó gépkocsik száma?
- Mennyi lesz a várható várakozási idő?
- Mekkora a várakozó sor hossza?
- Mennyi ideig várakoznak a gépkocsik a kiszolgálásra?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy a várhatónál több gépkocsi van a szerviz műhelyben?
- Mekkorák a valószínűségei annak, hogy a szervizben eltöltött idő több mint 0,5, 1 és 2 óra?

Először határozzuk meg a kiszolgálási rendszer paramétereit. Az időegység legyen 1 óra, így

az érkezési ráta: $\lambda=3$ gépkocsi/óra,

a kiszolgálási ráta: $\mu=4$ gépkocsi/óra,

a kihasználási tényező: $\rho=\lambda/\mu=3/4$.

a) Az érkező gépkocsinak akkor nem kell várakoznia, ha a rendszer üres. Ennek valószínűsége:

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 3/4 = 0,25$$

b) A rendszerben tartózkodó gépkocsik száma:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{4 - 3} = 3 \text{ db}$$

c) A rendszerben töltött várható összes idő (kiszolgálás+várakozás):

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{4 - 3} = 1 \text{ óra.}$$

d) A várakozó sor hossza:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{3^2}{4 \cdot (4 - 3)} = 2,25 \text{ gépkocsi.}$$

e) A várakozási idő a kiszolgálás kezdetéig:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{3}{4 \cdot (4 - 3)} = 0,75 \text{ óra.}$$

f) Annak valószínűsége, hogy 3-nál több gépkocsi van a műhelyben:

$$P(n > 3) = \sum_{n=3}^{\infty} P_n = \sum_{n=3}^{\infty} (1 - \rho) \rho^n = (1 - \rho) \sum_{n=3}^{\infty} \rho^n = \frac{1 - \rho}{1 - \rho} \rho^3 = \rho^3 = 0,421875.$$

g) Annak valószínűsége, hogy a várakozással töltött idő a szervizben 0,5, 1 és 2 óra:

$$P(w > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-4(1-3/4)t} = e^{-t}, \text{ amelyből}$$

$$P(w > 0,5) = e^{-0,5} = 0,61,$$

$$P(w > 1) = e^{-1} = 0,37,$$

$$P(w > 2) = e^{-2} = 0,14.$$

9.5.3 Az M/M/s modell összefüggései

Amikor $s > 1$ és az $n \leq s$, akkor a C_n tényező:

$$C_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots, s,$$

és ha az $n \geq s$, akkor

$$C_n = \frac{(\lambda/\mu)^s}{n!} \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} = \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}}, \quad n = s, s+1, \dots$$

Ha $\lambda < s\mu$, akkor annak valószínűsége, hogy a sorbanállási rendszer üres:

$$P_0 = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} \right\}^{-1} = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{1}{1 - (\lambda/s\mu)} \right\}^{-1},$$

és a

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, & \text{ha } 0 \leq n \leq s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} P_0, & \text{ha } n \geq s \end{cases}.$$

Annak valószínűsége, hogy a rendszerben az összes kiszolgáló csatorna működik:

$$P(n \geq s) = \sum_{n=s}^{\infty} P_n = \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} P_0 = \frac{P_0}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \sum_{n=s}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s}.$$

Felhasználva a $\rho = \lambda/\mu s$ összefüggést a várakozó sor hossza:

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n = \sum_{j=0}^{\infty} j P_{s+1+j} = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(\lambda/\mu)^{s+1+j}}{s! s^j} P_0 = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^{s+1}}{s!} \rho \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \right) = \\ &= P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s! (1-\rho)^2}. \end{aligned}$$

A rendszerben tartózkodó fogyasztók száma pedig:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \left(W_q + \frac{1}{\mu} \right).$$

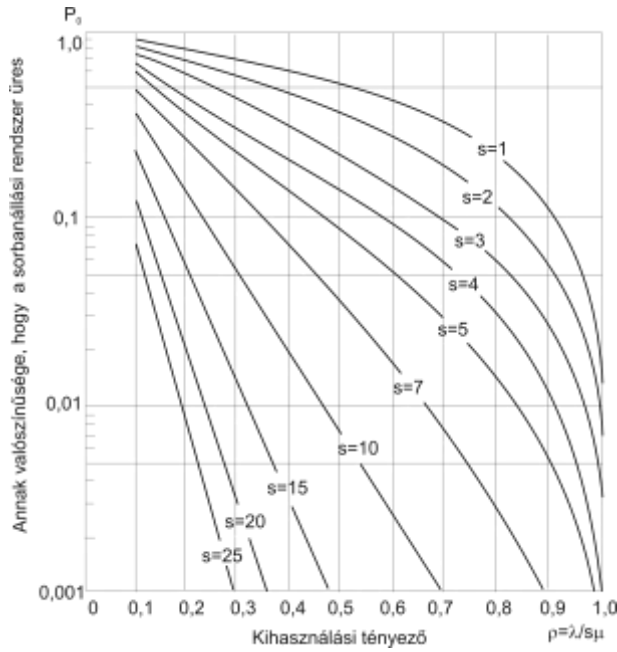
A várakozási idő a kiszolgálás kezdetéig:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda},$$

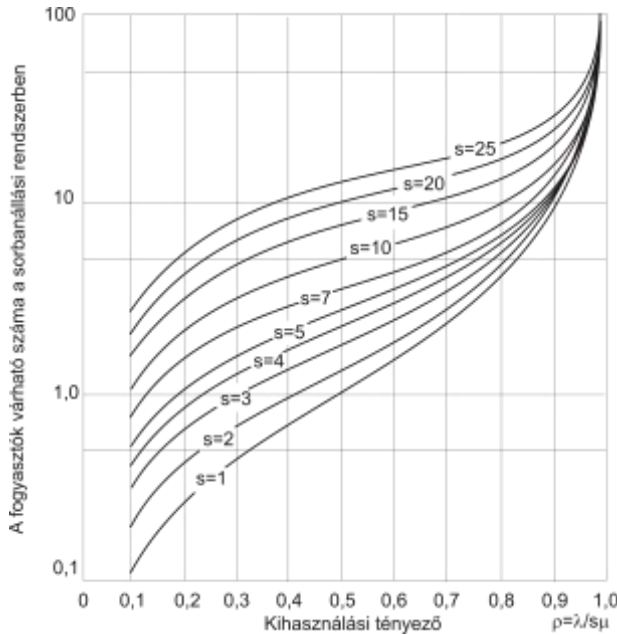
és a várható várakozási idő:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

A 9.7. és a 9.8. ábrák mutatják a P_0 és L változását a ρ kihasználási tényező függvényében különböző s értékek esetén.



9.7. ábra. A P_0 értékének változása a kihasználási tényező függvényében



9.8. ábra. Az L értékének változása a kihasználási tényező függvényében

Az egy kiszolgáló-egységes rendszerhez hasonlóan meghatározható a várakozási idő valószínűségi eloszlása. Az eredmények $t \geq 0$ -ra

$$P\{w > t\} = e^{-\mu t} \left[1 + \frac{P_0 (\lambda / \mu)^s}{s! (1 - \rho)} \left(\frac{1 - e^{-\mu t (s - 1 - \lambda / \mu)}}{s - 1 - \lambda / \mu} \right) \right]$$

és

$$P\{w > t\} = [1 - P\{w = t\}]e^{-s\mu(1-\rho)t},$$

ahol

$$P\{w = 0\} = \sum_{n=0}^{s-1} P_n$$

Ha $\lambda \geq s\mu$, akkor az érkezési ráta nagyobb, mint a kiszolgálási ráta, és ekkor a sor határtalanul növekszik. Ebben az esetben a fenti összefüggések nem használhatók.

Mintapélda:

Egy takarmánykeverő üzemből a fogyasztók tehergépkocsival szállítják el a zsákokba csomagolt és palettázott takarmányt. A gépkocsik megrakásához az üzem három targoncával rendelkezik. Egy targonca óránként 6 gépkocsit képes kiszolgálni. Az üzembe átlagosan 15 tehergépkocsi érkezik óránként. Feltételezzük, hogy a gépkocsik érkezése a Poisson folyamatot követi, a kiszolgálási idő valószínűségi eloszlása pedig exponenciális.

Kérdések:

- A munkaidő hányad részében működik mind a három targonca?
- Mennyi a kiszolgálásra várakozó tehergépkocsik várható száma?
- Mennyi időt töltenek átlagosan a tehergépkocsik az üzemben?
- Mi a valószínűsége annak, hogy egy tehergépkocsi 20 percnél hosszabb időt tölt az üzemben?

A kiszolgálási rendszer paraméterei:

- az érkezési ráta: $\lambda = 15$ gépkocsi/óra,
- a kiszolgálási ráta: $\mu = 6$ gépkocsi/óra,
- a kiszolgáló csatornák száma: $s = 3$,
- a kihasználási tényező: $\rho = \lambda / s\mu = 15/18 = 5/6$.

a) Mind a három targonca akkor működik, ha mindhárom csatorna foglalt. Ennek valószínűsége $P(n \geq 3)$. Először számítsuk ki a P_0 valószínűséget:

$$P_0 = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} \right] + \frac{(\lambda / \mu)^s}{s!} \frac{1}{1 - (\lambda / s\mu)} \right\}^{-1} = \left\{ \left[\sum_{n=0}^2 \frac{(15/6)^n}{n!} \right] + \frac{(15/6)^3}{3!} \frac{1}{1 - (5/6)} \right\}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{15}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{15}{6} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{15}{6} \right)^3 \frac{1}{1 - (5/6)}} = 0,044944.$$

A keresett valószínűség:

$$P(n \geq 3) = \sum_{n=3}^{\infty} P_n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\lambda / \mu)^n}{s! s^{n-s}} P_0 = \frac{P_0}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} =$$

$$\frac{P_0}{s!} \frac{(\lambda / \mu)^s}{1 - (\lambda / s\mu)} = \frac{0,044944}{6} \frac{(15/6)^3}{1 - (15/18)} = 0,70225.$$

A targoncák tehát a munkaidejük több mint 70%-ban működnek.

b) A kiszolgálásra várakozó tehergépkocsik átlagos száma:

$$L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} = \frac{0,044944(15/6)^3(5/6)}{6(1-5/6)^2} = 3,51124 \text{ gépkocsi.}$$

c) Ahhoz, hogy meghatározhassuk, hogy a tehergépkocsik átlagosan mennyi időt töltenek az üzemben, először ki kell számítani az üzem területén tartózkodó tehergépkocsik várható számát:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 3,51124 + \frac{15}{6} = 6,01124 \text{ gépkocsi.}$$

A rendszerben átlagosan eltöltött idő:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{6,01124}{15} = 0,40075 \text{ óra.}$$

d) Annak valószínűsége, hogy egy tehergépkocsi 20 percnél hosszabb időt tölt az üzemben:

$$P(w > 1/3) = e^{-\mu} \left[1 + \frac{P_0(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)} \left(\frac{1 - e^{-\mu(s-1-\lambda/\mu)}}{s-1-\lambda/\mu} \right) \right] =$$

$$e^{-6(1/3)} \left[1 + \frac{0,044944(15/6)^3}{6(1-5/6)} \left(\frac{1 - e^{-6(1/3)(3-1-15/6)}}{3-1-15/6} \right) \right] = 0,46198.$$

9.5.4 Az M/M/s modell véges sorral

A bevezetőben említettük, hogy a fogyasztók számával jellemzett sor lehet véges vagy végtelen. Bizonyos esetekben előfordulhat, hogy meghatározott számú fogyasztónál, amit K -val jelölünk, több fogyasztó nem tartózkodhat a sorban. Ha egy fogyasztó akkor érkezik, amikor a sor telített, akkor a fogyasztó belépését a rendszer elutasítja, és a fogyasztó így elveszik. A születési-halálzási folyamatban a belépési intenzitás középértéke az ilyen időpontokban 0-vá válik, ami miatt a véges sor kezelhetősége érdekében az $M/M/s$ modellt módosítani kell. Ezért a paraméter

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{minden } n = 0, 1, 2, \dots, K-1 - \text{ra} \\ 0 & \text{minden } n \geq K - \text{ra} \end{cases}$$

Mivel a $\lambda_n=0$ az n bizonyos értékeinél, a modellre illesztett sorbanállási rendszer mindig eléri a stacionárius állapotot.

Ezt a modellt $M/M/s/K$ -val jelöljük, amelyet a negyedik szimbólum különböztet meg az $M/M/s$ modelltől. Az $M/M/s/K$ modell jó gyakorlati példája a korlátozott befogadóképességű várakozó helység, amelyben egyidejűleg K fogyasztó várakozhat. Egy másik lehetséges interpretáció, amikor a K hosszúságú sor esetén az érkező fogyasztók már nem lépnek be a rendszerbe, mivel nem akarnak túl hosszú ideig várakozni. Az utóbbi példa gyakran fordul elő kereskedelmi egységekben.

A modell állapot-átmeneti diagramja megegyezik a 9.6. ábrával, az eltérés csak annyi, hogy a sor K állapotában az érkezés megszakad.

9.5.5 Az M/M/1/K modell összefüggései

$$C_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \rho^n, & \text{minden } n = 1, 2, \dots, K - \text{ra,} \\ 0, & \text{minden } n \geq K - \text{ra.} \end{cases}$$

Ezért a $\rho \neq 1$ -re

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^K (\lambda / \mu)^n} = \frac{1}{\frac{1 - (\lambda / \mu)^{K+1}}{1 - (\lambda / \mu)}} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}},$$

így

$$P_n = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \rho^n, \text{ minden } n = 0, 1, 2, \dots, K.$$

Az

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=0}^K n P_n = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \rho \sum_{n=0}^K \frac{d}{d\rho} (\rho^n) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \rho \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=0}^K \rho^n \right) = \\ &= \left(\frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \right) \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1 - \rho^{K+1}}{1 - \rho} \right) = \rho \frac{-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1} + 1}{(1 - \rho^{K+1})(1 - \rho)} = \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}}. \end{aligned}$$

Általában, amikor $s=1$

$$L_q = L - (1 - P_0).$$

Megjegyezzük: a fenti eredmények nem követelik meg a $\lambda < \mu$, vagyis a $\rho < 1$ feltétel teljesülését. Amikor a $\rho < 1$, az L -re adott utolsó kifejezés 0-hoz konvergál, ha a $K \rightarrow \infty$, így a kapott eredmények nem mindegyike egyezik meg a korábban tárgyalt $M/M/1$ modell eredményeivel.

A várakozási idő eloszlását hasonlóan lehet levezetni, mint az $M/M/1$ modellnél. Ebben az esetben azonban a kapott eredmény nem olyan egyszerű, a számítások komputer igénybevételét követelik meg.

9.5.6 Az $M/M/s/K$ ($s > 1$) modell összefüggései

Mivel a modellben a fogyasztók lehetséges száma K , a kiszolgálóegységek maximális száma is csak K lehet. Ezért feltételezzük, hogy $s \leq K$. Ebben az esetben a

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} \quad \text{minden } n = 1, 2, \dots, s - 1, \\ &= \frac{(\lambda / \mu)^s}{s!} \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} = \frac{(\lambda / \mu)^n}{s! s^{n-s}} \quad \text{minden } n = s, s+1, \dots, K - 1, \\ &= 0 \quad \text{minden } n > K - 1. \end{aligned}$$

Így

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} P_0, & \text{minden } n = 1, 2, \dots, K - 1, \\ \frac{(\lambda / \mu)^n}{s! s^{n-s}} P_0 & \text{minden } n = s, s+1, \dots, K - 1, \\ 0 & \text{minden } n > K - 1, \end{cases}$$

ahol

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=1}^s \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{n=s+1}^K \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}}.$$

Alkalmazva az $M/M/s$ modellnél használt levezetést, ebben az esetben az eredmény:

$$L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} [1 - \rho^{K-s} - (K-s)\rho^{K-s}(1-\rho)],$$

ahol $\rho = \lambda/s\mu$. Kimutatható, hogy

$$L = \sum_{n=0}^{s-1} nP_n + L_q + s \left(1 - \sum_{n=0}^{s-1} P_n\right).$$

A W és W_q mennyiségek hasonlóan számíthatók, mint azt az egy kiszolgáló-egységes modellnél megmutattuk.

Az exponenciális eloszlású sorbanállási modellek fontosabb összefüggéseit a fejezet végén a 9.2. táblázat foglalja össze.

9.3. példa: Egy raktári fogadóhelyre érkező egység rakományokat targoncával szállítják a tárolási helyre. Az óránként érkező rakományok száma 2. Tegyük fel, hogy a targonca elromlott, és egy óra hosszát javítják. Mi a valószínűsége annak, hogy ez alatt az idő alatt nem érkezik rakomány, 2 db rakomány érkezik, 5 vagy több rakomány érkezik?

9.4. példa: Egy bankban 4 alkalmazott szolgálja ki az ügyfeleket, akik *Poisson*-folyamat szerint érkeznek percenként átlagosan 3 fő. Az ügyfelek egy sorban állnak, és az éppen szabaddá váló alkalmazott kezd foglalkozni a következő ügyféllel. Az ügyfelek kiszolgálásának ideje átlagosan 1 perc.

Mi a valószínűsége annak, hogy mind a 4 alkalmazott foglalt? Átlagosan hány ügyfél tartózkodik a bankban, milyen hosszú a sor átlagos hossza? Mennyi időt töltenek az ügyfelek átlagosan a bankban, és mennyi ideig állnak sorban?

9.6. Nem-exponenciális eloszlású sorbanállási modellek

Az előző fejezetekben tárgyalt sorbanállási modellek a születési-halálozási folyamaton alapultak, az érkezési időközök és a kiszolgálási idők eloszlásától megköveteltük az exponenciális eloszlást. Amint azt előzőleg kifejtettük, ez a valószínűségi eloszlás számos olyan tulajdonsággal rendelkezik, amely a sorbanállási elméletben kényelmessé teszi az alkalmazását, és bizonyos típusú sorbanállási rendszerekre jól illeszthető. Sok esetben azonban téves eredményekre vezethet [47].

Az érkezési időköz exponenciális eloszlásának feltételezése azt jelzi, hogy az érkezési folyamat véletlenszerű (*Poisson* folyamat), ezért nem indokolt az exponenciálisközelítés akkor, ha az érkezési folyamat gondosan szabályozott, szinte menetrendszerű. A kiszolgálási idő eloszlása ugyancsak eltérhet az exponenciálisformától, különösen akkor, amikor a fogyasztók szolgáltatási igényei nagyon egyszerűek. Ezért fontos olyan modellek megismerése is, amelyek más alternatív eloszlásokat kínálnak.

A nemexponenciális eloszlással dolgozó sorbanállási modellek matematikai analízise jóval nehezebb, ezért csak néhány modell végeredményének bemutatására szorítkozunk a matematikai háttér tárgyalása nélkül.

9.6.1 Az M/G/1 modell

Amint a 9.1. fejezetben jeleztük az $M/G/1$ modell jelölései azt jelentik, hogy az érkezési folyamat *Poisson* (exponenciális eloszlású érkezési időközzel), a kiszolgáló egységek száma pedig 1. Mint rendszerint, e modellben is feltételezzük, hogy a fogyasztók kiszolgálási ideje független és azonos eloszlású. A kiszolgálási idő eloszlására nézve nincs megszorítás, csak annyi szükséges, hogy ismerjük, vagy becsülni tudjuk az eloszlás középértékét és szórását (σ). Mint tudjuk, ha a $\lambda/\mu < 1$, akkor a sorbanállási rendszer elérheti a stacionárius állapotot. A stacionárius állapotra vonatkozó, viszonylag könnyen levezethető eredményeket az alábbiakban közöljük:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 - \rho, \\ L_q &= \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)}, \\ L &= \rho + L_q, \\ W_q &= \frac{L_q}{\lambda}, \\ W &= W_q + \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

Meglepő, egy olyan modell esetében, amely tetszőleges kiszolgálásiidő-eloszlás alkalmazását engedi meg, hogy milyen egyszerű összefüggést kaptunk az L_q -ra. Ez a formula a sorbanállási elmélet egyik legfontosabb eredménye, mivel kezelhetővé teszi a gyakorlatban gyakran előforduló $M/G/1$ modelleket.

A több mint 90 éve ismert, L_q -ra, illetve a W_q -ra adott összefüggéseket gyakran *Pollaczek-Khintchine* formulaként említik, a francia és orosz matematikus után.

Megjegyezzük, hogy valamely rögzített $1/\mu$ várható kiszolgálási időre, a szórásnégyzet növekedésekor az L_q , L , W_q és W értékek növekednek. Ez fontos megállapítás, mivel jelzi, hogy nemcsak a kiszolgálóegység átlagos sebessége, hanem egyenletes működése is lényeges hat a sorbanállási rendszerre.

Ha a kiszolgálási idő eloszlása exponenciális, akkor a $\sigma^2 = 1/\mu^2$, amit helyettesítve megkapjuk az $M/M/1$ modellre levezetett eredményt.

A több kiszolgáló-egységes modellekre, az erőfeszítések ellenére, nem sikerült az $M/G/1$ modell eredményeihez hasonló egyszerű összefüggéseket levezetni. Néhány több kiszolgáló-egységes modellre azonban, speciális esetekben hozzáférhetők összefüggések.

9.6.2 Az M/D/s modell

Amikor a kiszolgálás rutinfeladatok végrehajtását jelenti minden fogyasztó esetében, akkor a kiszolgálási idő szórása nagyon kicsi. Az $M/D/s$ modell az ilyen fajta rendszerekre jól illeszthető, mivel a modell feltételezi, hogy a kiszolgálási idők állandók (a kiszolgálási idő

eloszlása degenerált), ami *Poisson*-érkezési folyamattal társul, rögzített λ átlagos érkezési időközzel.

Amikor egy kiszolgálóegység működik, az $M/D/1$ modell, az $M/G/1$ modell speciális esete, ahol a $\sigma^2 = 0$, ezért a *Pollaczek-Khintchine* formula a következő alakra egyszerűsödik:

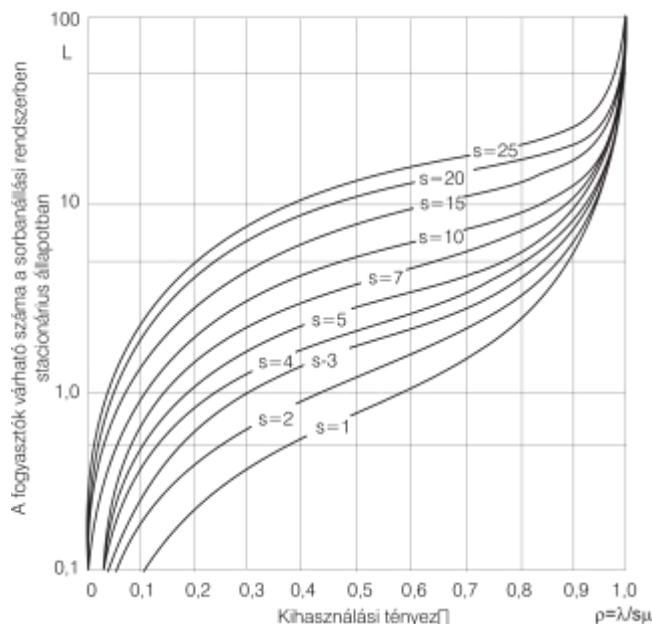
$$L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)},$$

amelyből az L , a W_q , és a W számítható. Megjegyezzük, hogy L_q és W_q pontosan fele akkora, mint az exponenciális eloszlású kiszolgálási idő esetében.

Az $M/D/s$ modell több kiszolgálóegységes változatánál a stacionárius állapotban a rendszerben tartózkodó fogyasztók eloszlásának és várhatóértékének levezetése (feltételezve, hogy a $\rho = \lambda/s\mu < 1$) meglehetősen komplikált.

Az eredmények különböző esetekre táblázatokban találhatók:

(Hillier, F. S., and O. S. Yu, with D. Avis, L. Fossett, F. Lo, and M. Reiman: Queueing Tables and Graphs. Elsevier North-Holland, New York, 1981.). Az L várhatóértékét grafikusán mutatja a 9.9. ábra.



9.9. ábra. Az L értékei az $M/D/s$ modellre

9.7. Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse az inputforrás, a sor, a kiszolgáló mechanizmus, a kiszolgálási elv fogalmát, rajzolja le a sorbanállási folyamatot!
2. Ismertesse a sorbanállási rendszert leíró jellemzőket (rendszer állapota, sor hossza, fogyasztók száma a kiszolgáló rendszerben stb.)!
3. Mutasson be néhány olyan létező kiszolgálási rendszert, amelynek működése a sorbanállási elmélettel leírható!
4. Ismertesse a *Poisson*-folyamatot és ezzel összefüggésben az exponenciális eloszlás jelentőségét!
5. Az exponenciális eloszlásnak melyek azok a fontos tulajdonságai, amelyek miatt az exponenciális eloszlás kulcs szerepet játszik a sorbanállási elméletben?

6. Ismertesse a születési-halálozási folyamatot az állapot-átmeneti diagram segítségével!
7. Hasonlítsa össze az $M/M/1$ és az $M/M/s$ modelleket, értelmezze azok összefüggéseit, rajzolja le a modellek állapot-átmeneti diagramjait!
8. Hogyan módosulnak az $M/M/1$ és az $M/M/s$ modellek összefüggései korlátozott hosszúságú sorok esetén?
9. Mikor nem alkalmazható a *Poisson*-folyamat, mutasson be néhány nemexponenciális eloszlású sorbanállási modellt?

Jegyzetek, kérdések

9.2. táblázat

Az exponenciális eloszlású sorbanállási modellek fontosabb összefüggései

Modell	Az üres rendszer valószínűsége P_0	n fogyasztó valószínűsége a rendszerben P_n	A fogyasztók száma a rendszerben L	A fogyasztók száma a sorban L_q	A várakozási idő a rendszerben W	A várakozási idő a sorban W_q
M/M/1	$P_0 = (1 - \rho)$	$P_n = (1 - \rho)\rho^n$	$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$	$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$	$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$
M/M/s	$P_0 = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{1}{1 - (\lambda/s\mu)} \right\}^{-1}$	$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 & \text{ha } 0 \leq n \leq s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}} P_0 & \text{ha } n \geq s \end{cases}$	$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$	$L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s(1 - \rho)^2}$	$W = W_q + \frac{1}{\mu}$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$
M/M/1/K	$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}$	$P_n = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \rho^n$, minden $n = 0, 1, 2, \dots, K$.	$L = \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}}$	$L_q = L - (1 - P_0)$	$W = W_q + \frac{1}{\mu}$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$
M/M/s/K	$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=1}^s \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{n=s+1}^K \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s}}$	$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, & \text{minden } n = 1, 2, \dots, K - ra, \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}} P_0 & \text{minden } n = s, s+1, \dots, K - ra, \\ 0 & \text{minden } n > K - ra, \end{cases}$	$L = \sum_{n=0}^{s-1} nP_n + L_q + s \left(1 - \sum_{n=0}^{s-1} P_n \right)$	$L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1 - \rho)^2} * [1 - \rho^{K-s} - (K-s)\rho^{K-s}(1 - \rho)]$	$W = W_q + \frac{1}{\mu}$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$
M/G/1	$P_0 = 1 - \rho$		$L = \rho - L_q$	$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)}$	$W = W_q + \frac{1}{\mu}$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

10. KÉSZLETEZÉSI ELMÉLET

A készletek jelenlétét a gazdaságban fizikai és gazdasági kényszerúségek indokolják. E kényszerek abból fakadnak, hogy sem fizikailag, sem gazdaságilag nem célszerű a terméket akkor és ott előállítani, ahol a szükséglet jelentkezik irántuk. E munkamegosztás következtében a termelés és a fogyasztás egyes szakaszai és mozzanatai **időben és térben elkülönülnek** egymástól. Ráadásul a különböző helyeken zajló termelési folyamatok **kapacitásai** is nagy különbségeket mutathatnak, amelynek okai között említhetők:

- kevés az olyan termék létezik, amelyet az igényekhez igazodó sorozatnagysággal gazdaságosan lehet termelni,

- a nem csekély gépátállítási költségek miatt a raktárra történő termelést nem lehet elkerülni,

- a termelőeszközök kapacitása és a piaci kereslet általában időben, és mennyiségben nem fed egymást (pl. szaloncukor, húsvéti nyulak és mikulások).

Más esetekben a termelés **szezonális**. Ilyen például a mezőgazdasági termelés, ahol a termesztett növények a betakarítási, szüretelési ideje évszakokhoz kötődik. Az esetleges **válsághelyzetek** előfordulása miatt, ajánlatos korlátozott raktárkészletet tartani az életfontosságú termékekből.

A termelési helyek közötti **távolságok áthidalása** időt igényel, amelyet gyakran váratlan események zavarnak meg. Sokszor nem az előállítás, hanem a szállítás ütközik időbeli korlátokba. Például a kontinensek közötti áruforgalom a hajójáratokhoz kötődik.

Így ahhoz, hogy az egymást követő folyamatok ne szaggatottan és esetlegesen, hanem folyamatosan és stabilan menjenek végbe, az ellátási-lánc és a részfolyamatok kapcsolódási pontjain szükségsszerű a készletfelhalmozás. A kiskereskedők, a nagykereskedők és a gyártók ezért kénytelenek az anyagok és termékek bizonyos mennyiségét készletezni, raktározni.

A készletezés céljai alapvetően három csoportba sorolhatók:

- a kereslet kielégítési és utánpótlási folyamatban mutatkozó, normálisnak mondható ingadozások kiegyenlítése (pl. a mezőgazdasági eredetű alapanyagok szezonális beszerzési lehetősége, a termelési folyamatok eltérő sorozatnagysága, kapacitása);

- váratlan problémák esetén manőverezési lehetőség biztosítása (az utánpótlás fennakadása, váratlan meghibásodás);

- az üzleti lehetőségek kihasználása (mennyiségtől függő árengedmények, szezonális ármozgások stb.).

Kérdés lehet természetesen, milyen eszközök segítségével döntsünk a készletezési politikáról, mikor és mennyit rendeljünk. Egy kisebb vállalkozás esetén a vállalkozó esetleg egyszerűen figyelemmel tudja kísérni a készleteit és még jó döntéseket is hozhat. A döntések azonban tudományosan megalapozott készletezési modellek nélkül sokszor még kisebb cégeknél is felesleges kiadásokkal járnak.

Mi jellemzi ezeket a modelleket?

- A készletrendszer viselkedését matematikai formában írják le;

- a modellből levezethető az optimális készletezési politika;

- a modellek legtöbbször számítógépre adaptáltak, ami lehetővé teszi a készletszintek folyamatos figyelését és jelzi az újrendelés időpontját.

A matematikai modellek a készletezési politika alapkérdéseire adnak választ. A felvetődő kérdéseket a következő esettanulmányokon keresztül próbáljuk bemutatni.

I. Egy mezőgazdasági gépgyártó cég négy ekefejes ekéihez saját maga gyárt ekevasakat. Az ekék összeszerelése folyamatos, havonta 200 db, amihez $4 \cdot 200 = 800$ db ekevasat használnak fel.

Az ekevasak gyártása szakaszos, mivel a gyártóvonal kapacitása sokkal nagyobb, mint az ekék összeszerelésének üteme. A gyártó szeretné meghatározni, mikor és mennyit gyártson az ekevasakból.

- (1) A szakaszos gyártás beállítási költsége 120000 Ft. Ez a költség tartalmazza a felszerszámozás, az adminisztráció stb. költségét. A beállítási költség nagysága azt sugallja, hogy a termelést csak nagyobb darabszám esetén célszerű indítani.
- (2) Az ekevasak nagy darabszámban való gyártása nagy készletet eredményez. A becsült készlettartási költség 30 Ft/hónap darabonként. Ez a költség magában foglalja a lekötött tőke, a tárolás, az adó, a biztosítás stb. költségét. A készlettartási költség arra ösztönöz, hogy az ekevasak gyártása kicsi tételekben történjék.
- (3) Egy darab ekevas gyártási költsége a beállítási költség nélkül 1000 Ft, ami független a gyártás darabszámától. (Általában az egy darabra eső gyártási költség állandó, vagy a darabszámmal arányosan csökken.)
- (4) A gyártó óvatos politikát követ, tiltja bármely komponens hiányos tervezését. Azonban az ekevas hiány esetenként előfordul, és a becslések szerint ez a hiány egy darabra vonatkoztatva 110 Ft/hónap veszteséget okoz. Ez a költség az utólagos felszerelés és a raktározás költségét, valamint a késés miatti bevételecsökkenést stb. tartalmazza.

II. Egy kerékpárokat forgalmazó nagykereskedőnek problémái vannak a népszerű, nem túl drága 10 sebességes modellel, ezért felülvizsgálja a készletezési politikáját. A nagykereskedő a modellt a gyártótól havonta szerzi be, és ezt követően szállítja a különböző kerékpárüzletekbe. A nagykereskedő költségeinek felülvizsgálata után a következőket állapítja meg:

- (1) A hiány költsége akkor jelentkezik, amikor az igény jelentkezésének pillanatában nincs a keresett modell a raktáron. A modellek többségét könnyű újrendelni a gyártótól, és elfogadható egy kicsi késés a szállításban. A hiány megengedhető, de veszteséget okoz. A becsült veszteség 1500 Ft kerékpáronként. Ebben a költségben benne van az üzleti hírnév csökkenése, bevételt csökkentő adminisztrációs többletköltség. Néhány modell készletezése azonban az árverseny miatt nem enged meg olyan hiányt, amely az eladásban veszteséget okoz. Ebben az esetben ugyanis az elmaradt bevétel jelenti a hiány költségét.
- (2) A készlettartás költsége (a készlet fenntartás költsége) 100 Ft kerékpáronként egy hónapra. Ez a költség tartalmazza a tőkelekötés, a tárolás, a biztosítás az adó stb. költségét.
- (3) A rendelési költség két komponense: a rendelés bonyolításának és a kerékpár árának költsége. Az elhelyezéssel és a rendeléssel kapcsolatos ügyvitel költsége 20000 Ft, a kerékpár ára 35000 Ft.

10.1. A készletezési modellek elemei

A készletezett tételek alapvetően két nagy osztályba sorolhatók. Az egyikbe tartoznak azok, amelyek valamilyen termelési folyamatban, mint anyagok vagy alkatrészecskék lesznek felhasználva. A másik csoportot az eladásra szánt késztermékek alkotják. A készletezési politika, illetve a hiány esetén követendő intézkedések a két osztály esetén nem azonosak.

A **gyártáshoz** szükséges anyagok készletezésekor a hiány miatti zavarok hatása is különböző lehet, mert

- a hiányzó anyagok esetleg helyettesíthetők vagy kölcsönözhetők;
- új anyagforrások vehetők igénybe;
- a több terméket gyártó üzem átállíthatja a termelését egy másik termékre;
- a legrosszabb esetben a gyártás leáll.

Az **eladásra** készletezett termékeknél a hiány a kereslet teljes elvesztését, vagy a bevétel csök-

kenését okozhatja. A hiány tehát minden esetben a profit csökkenését eredményezi.

A készletezési politika hatása a jövedelmezőségre kézenfekvő, ezért a politika kiválasztása függ a relatív jövedelmezőségtől. A jövedelmezőségre ható költségek: rendelési vagy gyártási költség, készlettartási vagy raktározási költség, ki nem elégített igények vagy hiány miatti veszteség költsége, bevételek, maradványköltség és az árengedményekből származó költség.

(1) A **gyártási vagy rendelési költséget**, z mennyiség esetén, a $c(z)$ függvény reprezentálja. A legegyszerűbb formula esetén a c egységár állandó, és ekkor a költség $c \cdot z$. Egy másik gyakori feltételezés, amikor $c(z)$ két komponensből áll, egy K_b konstansból és egy z -vel arányos tagból. Ekkor, ha $z > 0$, akkor a költség $K_b + cz$. A beállítási költségnek nevezett K_b a rendelés állandó költsége, ami tartalmazza a bevezetéssel, az indítással összefüggő kiadásokat (adminisztráció munkabér stb.). Az I. esettanulmányban az ekevas-gyártás beállítási (állandó) költsége 120000 Ft, a gyártási költség 1000 Ft darabonként, így a teljes költség:

$$c(z) = 120000 + 1000z, \quad \text{ha } z > 0.$$

A II. esettanulmányban a nagykereskedő rendelési költsége:

$$c(z) = 20000 + 35000z, \quad \text{ha } z > 0.$$

A rendelési költség leírására léteznek más függvények is. Mi azonban csak ezt a két függvényt fogjuk használni.

(2) A **készlettartási vagy raktározási költség** tartalmazza mindazokat a kiadásokat, amelyek a raktározás ideje alatt felmerülnek. Például a tőkelekötés, a tárolás, a bérleti díj, a biztosítás, az adók költségeit. Ez a költség kezelhető úgy, mint a készletezés során előforduló maximális mennyiség, vagy az átlagos mennyiség, vagy az igények feletti kumulált felesleges készlet függvénye.

(3) A **ki nem elégített igények vagy hiány miatti veszteség költsége** akkor jelentkezik, ha az igények nagysága meghaladja a raktáron elérhető mennyiséget. Ez a költség a modell struktúrájától függően kétféle lehet. Az első eset, amikor a pillanatnyi igény meghaladja az elérhető készletet, és később a hiány utórendeléssel megszüntethető. Ezt nevezzük *pótolható kielégítetlen igénynek*. Ekkor az utórendelés költsége plusz költségként merül fel. A második esetben az igény kielégítetlen marad (a kereslet elveszik), mert a vásárló vagy lemond a termék megszerzéséről, vagy azt máshol szerzi be (*nem pótolható kielégítetlen igény*). Az elveszett kereslet költsége a bevétel elmaradása.

A első esetben az igény egy adott pillanatban ugyan nem elégíthető ki, de ez nem jelenti a vásárló elvesztését, mivel később az igény kielégíthető, pótolható. Ennek vesztesége összetett, hosszú távon a vásárló elvesztését, az üzleti hírnév csökkenését eredményezheti, közvetve csak a későbbi bevétel és a plusz költség miatt okoz veszteséget.

A kerékpáros esettanulmányban néhány kerékpármodell árversenyben van más gyártmányokkal, ilyenkor a ki nem elégített igény nem pótolható, és a bevétel elmaradása jelenti a veszteséget.

(4) A **bevételek** nem minden esetben jelennek meg a modellben. Ha az árak és az igények kontrollja nem tartozik a vállalat hatáskörébe, és az eladásokból származó bevételek függetlenek a vállalat készletezési politikájától, akkor a bevételek figyelmen kívül hagyhatók. A ki nem elégített igények miatti bevétel elmaradásokat, mint veszteséget azonban nem lehet elhanyagolni.

(5) A **maradványérték** annak a készletmennyiségnek az értéke, amely a készletezési periódus végén megmarad. Ha a készletezés meghatározatlan számú periódusból áll és nincs elavulás, akkor nem beszélhetünk maradék tételekről. Ugyanis a periódus végén megmaradó tételek a következő periódusban elérhetők, mint kezdő mennyiségek. Ha azonban a készletezés egy periódus után befejeződik, akkor a maradvány érték a maradék tételek eladási ára, ami költséget

jelent a vállalatnak. A maradványérték negatívja a maradványköltség. A maradvány költség lehet pozitív is, ha az be van építve az eladási árba. A tárolási költséget ugyanis általában a keresletet meghaladó kínálattal tervezik, és ebbe belekalkulálják a maradványköltséget is. Ezért a maradványköltség általában elhanyagolható.

(6) Végül a **diszkontálás** az idő pénzben kifejezett értékét veszi számításba, amelyen egy meghatározott jövőbeli időpontra esedékes pénzösszeg jelenértékének a kiszámítását értjük. Amikor a vállalat tőkét köt le a készletezésre, azzal pénzt von el más alternatív céloktól. Például a pénz bankban biztonságos elhelyezhető és kamatoztatható, ezért minden jelenlegi pénzösszeg olyan jövőbeli pénzösszeggel tekinthető ekvivalensnek, amelyre a vizsgált időszak végéig a hozott kamatokkal növekszik. Tételezzük fel, hogy y_0 Ft-ot fordítunk készletbeszerzésre és az éves kamatláb 5%, akkor a befektetett tőke 1 év múlva

$$y_1 = y_0 + 0,05 \cdot y_0 = y_0(1 + 0,05)$$

értékre növekedne. Az n év múlva esedékes összeg, feltéve, hogy a kamatláb nem változik:

$$y_n = y_0(1 + 0,05)^n.$$

Az előző összefüggésből a **diszkontálási faktor**:

$$a = \frac{1}{(1 + 0,05)^n} = \frac{y_0}{y_n}.$$

A banki pénzbefektetés profitja:

$$p = y_n - y_0 = \frac{y_0}{a} - y_0 = y_0 \left(\frac{1}{a} - 1 \right),$$

amely mint elmaradt haszon, készletezési költségként jelentkezik. A faktor kiszámítása rövidebb vagy hosszabb időszakokra történhet, például akár egy hónapra is. A rövid távú tőkelekötésnél az a értéke közel 1, mivel rövid idő alatt a pénz értéke nem változik lényegesen, ezért a diszkontálási faktor elhanyagolható. Hosszú időtartamú lekötés esetén azonban a diszkontálási faktortal számítható profitvesztéset, mint költséget figyelembe kell venni. Például, ha $n=2$ év időtartamra $y_0=10000$ Ft tőkét fektetünk készletekbe, akkor annak a költsége:

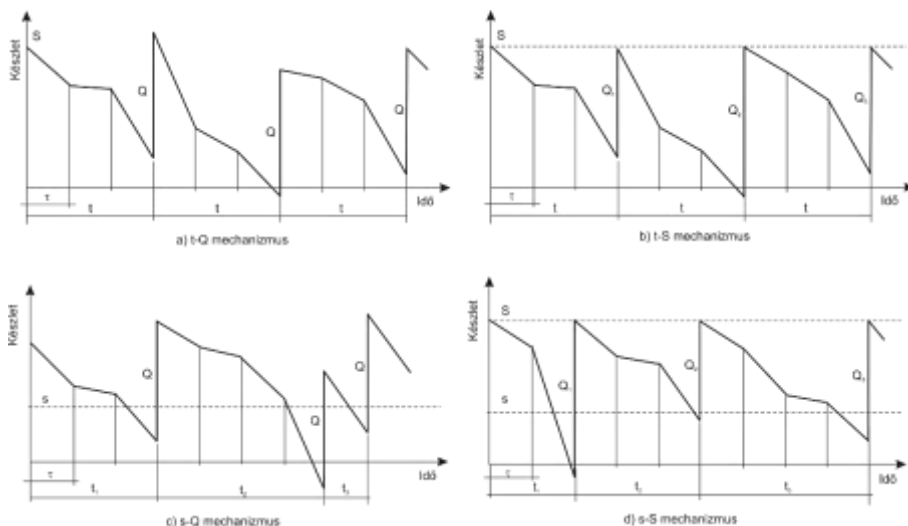
$$a = \frac{1}{(1 + 0,05)^n} = \frac{1}{(1 + 0,05)^2} = 0,9070$$

$$p = y_0 \left(\frac{1}{a} - 1 \right) = 10000 \left(\frac{1}{0,9070} - 1 \right) = 1025,36 \text{ Ft.}$$

Az optimális készletezési politika keresésére használt kvantitatív eljárásokban a cél a várható teljes költség minimalizálása, azon feltétel mellett, hogy a termék ára és a termék iránti igény felett a készletezőnek nincs kontrollja. Továbbá, a veszteség és a késedelmes bevétel miatt elmaradt haszon a hiány miatti veszteségek költségébe épített, a minimalizált költség pedig azonos a maximális jövedelemmel. Egy másik cél, amely nem kvantitatív, de nagyon fontos a gyakorlatban, hogy a készletezési politika közérthető legyen, vagyis az arra vonatkozó szabályok, hogy mikor rendeljünk és mennyit rendeljünk, legyenek egyszerűek. A politikák többsége rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

A készletezési rendszerek elméletének kérdései egyrészt a rendelés időpontjára, másrészt a mennyiségre vonatkoznak. A válaszok a **készletezés mechanizmusától** függően különbözőek lehetnek. A **rendelési időköz** attól függ, hogy a rendeléseket rögzített t időközönként kell feladni, vagy a készletutánpótlásról akkor döntünk, amikor a készlet szint valamilyen **s minimális készletszintre** csökken. A **rendelési tétel nagysága** lehet rögzített Q , vagy a rendelési tétel akkora mennyiségre szól, hogy a beérkezés után a készlet egy előre meghatározott **S maximális**

készletszintet ér el. A készletgazdálkodási mechanizmusok ezek kombinációi (10.1 ábra), így beszélhetünk (t,Q) , (t,S) , (s,Q) és (s,S) mechanizmusokról [96].



10.1. ábra. Készletezési mechanizmusok

A készletezési mechanizmussal összefüggő, további fontos alapfogalmak: nyitó- és zárókészlet, jelentésköteles készlet, biztonsági készlet és utánpótlási idő.

A **nyitókészlet** a ciklus elején rendelkezésre álló, a **zárókészlet** a ciklus végén megmaradó készlet. A **jelentésköteles készlet** a megrendeléstől a tétel leszállításáig eltelt idő (**utánpótlási idő**) alatti fogyasztás. Ha a készlethiány nem megengedett, akkor a jelentésköteles készletszint elérésekor kell a rendelést feladni. A **biztonsági készlet** az utánpótlás vagy a felhasználás véletlen ingadozásainak kiegyenlítését szolgálja.

A készletezési modellek tovább bonthatók attól függően, hogy az igény a periódusra ismert (**determinisztikus**) vagy véletlenszerű (**sztochasztikus**). Sztochasztikusnak nevezzük a készletezési problémát, amikor a periódusonkénti igény ismert eloszlású valószínűségi változó.

Egy másik osztályozási lehetőség a készletek figyelésére vonatkozik, ami lehet folyamatos vagy periodikus. A **folyamatos** figyelés esetén az újrendelés azonnal megtörténik, mielőtt a készlet egy előírt értékre csökken. A **periodikus** figyelés azt jelenti, hogy a készleteket csak diszkrét intervallumok végén, például minden hónap végén ellenőrzik, és a megrendelésre vonatkozó döntés csak ekkor történik.

Az utánpótlási idő lehet elhanyagolható (a kiszolgálási kapacitás végtelen nagy), vagy véges meghatározott idejű.

A továbbiakban olyan készletezési modellekkel, beleértve az ún. **gazdaságos tétel nagyságú modelleket** is, foglalkozunk, amelyeknél az aktuális igény ismert.

10.2. Folyamatos készletfigyelés, egyenletes igény

A leggyakrabban előforduló készletezési probléma, amellyel a kereskedőknek vagy a gyártóknak szembe kell nézniük, a következők szerint fogalmazható meg.

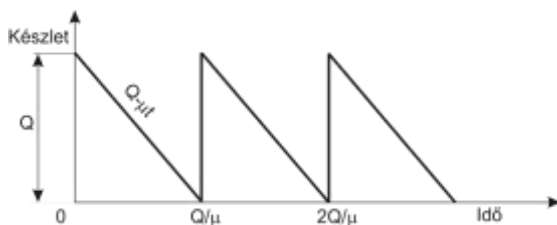
A készlet az idő függvényében csökken, amit az újrendeléssel kell feltölteni. A **rendelési tételről** feltételezzük, hogy konstans μ paraméter szerint folyamatosan fogy, ahol a μ a **felhasználási ráta**, az egységnyi idő alatti csökkenést jelenti. Továbbá feltételezzük, hogy a tételt időszakonként ugyanakkora Q darabszámban termeljük vagy rendeljük, és a Q mennyiség az igény

jelentkezésével egyidejűleg rendelkezésre áll (a véges állandó utánpótlási idő esetét később tárgyaljuk). A modellekben a K_b a **beállítás** vagy a **rendelés egyszeri állandó költsége**, a c az egy darabra eső **gyártási vagy rendelési** és a h a **darabonkénti egységnyi időtartamra eső készlettartási költség**. A feladat: meghatározni a tétel gyártásának vagy rendelésének gyakoriságát és mennyiségét úgy, hogy az időegységre eső költség minimális legyen.

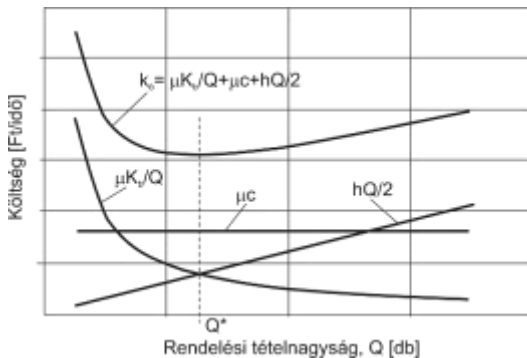
Ez ún. folyamatos figyelésű készletezési politika. Először feltételezzük, hogy a hiány nem megengedett, később ezt a feltételt mérsékeljük. Ez a modell alkalmas az I. esettanulmányban ismertetett probléma megoldására.

10.2.1 A hiány nem megengedett

A **ciklus** úgy tekinthető, mint két rendelés vagy gyártás indítása között eltelt idő. Ha például $Q=2400$ ekevasat gyártunk minden gyártási ciklusban, és a felhasználás intenzitása $\mu=800$ ekevas hónaponként, akkor a ciklus hossza $t=Q/\mu=2400/800=3$ hónap. A készletszint változását az idő függvényében a 10.2. ábra mutatja.



10.2. ábra. A készletszint változása az idő függvényében, ha a hiány nem megengedett



10.3. ábra. Az időegységre eső költségek a darabszám függvényében

A **gyártási költség** egy ciklusban:

$$\begin{cases} 0, & \text{ha } Q = 0, \\ K_b + cQ, & \text{ha } Q > 0. \end{cases}$$

A **készlettartási költséget** egy ciklusra könnyen megkaphatjuk. Egy ciklus készlete a $Q-\mu t$ egyenes alatti terület, ami az átlagos készletszint $(Q+0)/2=Q/2$, és a ciklus hosszának $t=Q/\mu$, szorzata. A fajlagos készlettartási költség h , így a készlettartási költség ciklusonként

$$\frac{Q}{\mu} h \frac{Q}{2} = \frac{hQ^2}{2\mu}.$$

Az összes készletezési költség ciklusonként:

$$K_s = K_b + cQ + \frac{hQ^2}{2\mu} \quad [\text{Ft}],$$

amit osztva a ciklus hosszával (Q/μ), az időegységre eső összes készletezési költséget kapjuk:

$$k_s = \frac{K_s}{Q/\mu} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hQ}{2} \quad [\text{Ft/idő}].$$

A függvény képét, a részköltségeket és az eredő összköltséget a 10.3. ábra szemlélteti, amelyen jól látható az eredőköltség minimum helye (Q^*).

Keressük Q -nak azt a Q^* értékét, amely a k_o értékét minimalizálja. Ezt a

$$\frac{dk_s}{dQ} = -\frac{\mu K_b}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$$

feltételből kapjuk, azaz

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}},$$

amit optimális rendelési tétel nagyságnak nevezünk. Ebből az optimális rendelési ciklus ideje:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \sqrt{\frac{2K_b}{\mu h}}.$$

Mintapélda:

Alkalmazzuk az eredményeket az ekevas-gyártási példára. A paraméterek: $K_b=120000$ Ft, $h=30$ Ft/db-hónap, $\mu=800$ db/hónap, $c=1000$ Ft/db.

Az egy ciklusban gyártott ekevasak száma, az optimális tétel nagyság:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 800 \cdot 120000}{30}} = 2530 \text{ db/ciklus.}$$

Az optimális ciklusidő, vagyis az ekevas-gyártás indításának gyakorisága

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{2530}{800} = 3,2 \text{ hónap.}$$

A készletezés havi költsége:

$$k_o = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hQ}{2} = \frac{800 \cdot 120000}{2530} + 800 \cdot 1000 + \frac{30 \cdot 2530}{2}$$

$$k_o = 875895 \text{ Ft/hónap.}$$

10.2.2 A hiány megengedett

Esetenként a hiány megengedése gazdaságos lehet, mivel az a ciklus időtartamának növekedését, és így az egy termékre eső beállítási költség csökkenését eredményezi. Magától értetődően ennek haszna a hiány miatt keletkező veszteséggel csökken.

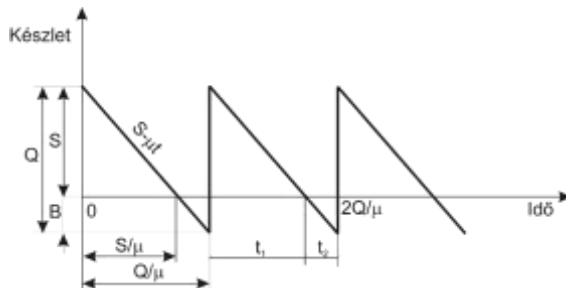
A hiány miatt jelentkező veszteség legyen p Ft/darab-hónap, amit gyakran **utórendelési költségnek** is neveznek. A ciklus elején a beszerzés vagy feltöltés után a raktári készlet legyen S (10.4. ábra).

A gyártási vagy rendelési költség egy ciklusban:

$$\begin{cases} 0, & \text{ha } Q = 0, \\ K_b + cQ, & \text{ha } Q > 0. \end{cases}$$

A készlet tartási költség egy ciklusra a *pozitív térfélre* (10.4. ábra), ha az átlagos készlet $(S+0)/2=S/2$, a készlet tartás időtartama $t_1=S/\mu$:

$$\frac{S}{2} h \frac{S}{\mu} = \frac{h S^2}{2 \mu}.$$



10.4. ábra. A készlet szint változása az idő függvényében, ha a hiány megengedett.

Hasonlóan a készlet tartási költség a *negatív térfélre*, ahol az átlagos készlethiány $[(0+(Q-S))/2]=(Q-S)/2$, a fajlagos veszteség p , és a hiány időtartama $t_2=(Q-S)/\mu$:

$$\frac{Q-S}{2} p \frac{Q-S}{\mu} = \frac{p(Q-S)^2}{2 \mu}.$$

Az összes készletezési költség ciklusonként:

$$K_{\theta} = K_b + cQ + \frac{h S^2}{2 \mu} + \frac{p(Q-S)^2}{2 \mu}.$$

Az időegységre eső összes készletezési költség:

$$k_{\theta} = \frac{K_{\theta}}{Q/\mu} = \frac{K_b \mu}{Q} + c \mu + \frac{h S^2}{2 Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2 Q}.$$

Mivel ebben a modellben két döntési változó van, S^* és Q^* , ezért k_{θ} minimum helyét a

$$\frac{\partial k_{\theta}}{\partial S} = \frac{h S}{Q} - \frac{p(Q-S)}{Q} = 0,$$

$$\frac{\partial k_{\theta}}{\partial Q} = -\frac{\mu K_b}{Q^2} - \frac{h S^2}{2 Q^2} + \frac{p(Q-S)}{Q} - \frac{p(Q-S)^2}{2 Q^2} = 0.$$

egyenletek határozzák meg, amelyeket Q -ra és S -re megoldva az optimális készlet a ciklus kezdetén:

$$S^* = \sqrt{\frac{2 \mu K_b}{h}} \sqrt{\frac{p}{p+h}},$$

a rendelés optimális nagysága:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \mu K_b}{h}} \sqrt{\frac{p+h}{p}},$$

a teljes ciklus hossza:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \sqrt{\frac{2 K_b}{\mu h}} \sqrt{\frac{p+h}{p}},$$

a megengedett maximális hiány:

$$B^* = Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2 \mu K_b}{h}} \sqrt{\frac{h}{p+h}}.$$

A két időtartam közötti arány az

$$\frac{S^*/\mu}{Q^*/\mu} = \frac{p}{p+h}$$

független a K_b beállítási költségtől.

Mintapélda:

Az ekevas-gyártási példában hiány esetén $p=110$ Ft/db-hónap a veszteség, a többi paraméter változatlan, így

$$S^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} \sqrt{\frac{p}{p+h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 800 \cdot 120000}{30}} \sqrt{\frac{110}{110+30}} = 2242 \text{ db/ciklus},$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} \sqrt{\frac{p+h}{p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 800 \cdot 120000}{30}} \sqrt{\frac{110+30}{110}} = 2854 \text{ db/ciklus},$$

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{2854}{800} = 3,6 \text{ hónap},$$

$$B^* = Q^* - S^* = 2854 - 2242 = 612 \text{ db/ciklus}.$$

Az egy hónapra eső készletezési költség:

$$k_s = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q}$$

$$k_o = \frac{800 \cdot 120000}{2854} + 800 \cdot 1000 + \frac{30 \cdot 2242^2}{2 \cdot 2854} + \frac{110 \cdot (2854 - 2242)^2}{2 \cdot 2854}.$$

$$k_o = 867273 \text{ Ft/hónap}.$$

A költséget összehasonlítva az előző példa eredményével, a hiány megengedése megtakarítást eredményez.

10.1. példa: Egy termék iránti kereslet 650 darab hetente, és ezt folyamatosan elégítik ki. A termék rendelési költsége 7500 Ft/rendelés, darab költsége 900 Ft/db. A tárolási költség darabonként és hetente 15 Ft. Milyen gyakran kell a beszerzést indítani, és mennyit kell egyszerre beszerezni, ha

- (1) a hiány nincs megengedve,
- (2) a hiány megengedett és a hiány költsége darabonként és hetenként 600 Ft ?
- (3) Mennyivel csökken a maximális készlet, ha megengedjük a hiányt?
- (4) Okoz-e veszteséget a hiány megengedése?
- (5) Mekkora a hiány és a hiány időtartama?

10.1. példa megoldása

(1) Az optimális rendelési tétel nagyság, ha a hiány nincs megengedve:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 650 \cdot 7500}{15}} = 806,23 \text{ db}.$$

A rendelési ciklusidő, ha a hiány nincs megengedve:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{806,23}{650} = 1,24 \text{ hét}$$

(2) Az optimális rendelési tétel nagyság, ha a hiány megengedett:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} \sqrt{\frac{p+h}{p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 650 \cdot 7500}{15}} \sqrt{\frac{600+15}{600}} = 816,24 \text{ db.}$$

A rendelési ciklusidő, ha a hiány megengedett:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{816,25}{650} = 1,26 \text{ hét}$$

(3) A maximális raktárkészlet, ha a hiány megengedett:

$$S^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} \sqrt{\frac{p}{p+h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 650 \cdot 7500}{15}} \sqrt{\frac{600}{600+15}} = 796,33 \text{ db}$$

A maximális raktárkészlet 806,23 db-ról 796,33 db-ra csökken.

(4) Az 1 hétre eső készletezési költség, ha a hiány nincs megengedve:

$$k_o = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c_j + \frac{hQ}{2} \quad (\text{Ft/hét}),$$

$$k_o = \frac{650 \cdot 7500}{806,23} + 650 \cdot 900 + \frac{15 \cdot 806,23}{2} = 597093,39 \text{ Ft/hét.}$$

Ha a hiány megengedett, akkor a

$$k_o = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c_j + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q}$$

$$k_o = \frac{650 \cdot 7500}{816,24} + 650 \cdot 900 + \frac{15 \cdot 796,33^2}{2 \cdot 816,24} + \frac{600 \cdot (816,24 - 796,33)^2}{2 \cdot 816,24} = 596945 \text{ Ft/hét,}$$

vagyis hiány esetén az egységnyi időre eső készletezési költség csökken.

(5) A hiány nagysága:

$$B^* = Q^* - S^* = 816,24 - 796,33 = 19,91 \text{ db,}$$

a hiány időtartama:

$$t_h^* = \frac{B^*}{\mu} = \frac{Q^* - S^*}{\mu} = \frac{816,24 - 796,33}{650} = \frac{19,91}{650} = 0,031 \text{ hét}$$

10.2. példa: Oldjuk meg a 10.1. példát úgy, hogy a hiány megengedett, és a szállítási csúszás (a hiány időtartama) 1 hét. Határozzuk meg a

- (1) a hiány nagyságát,
- (2) az optimális rendelési tétel nagyságát,
- (3) a ciklus időt, és
- (4) az egy ciklusra eső készletezési költséget

A hiány nagysága, ha a hiány időtartama $t_h = 1$ hét

$$B^* = Q^* - S^* = \mu t_h = 650 \cdot 1 = 650 \text{ db.}$$

Mivel az

$$S^* = Q^* - B^*,$$

és az

$$S^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} \sqrt{\frac{p}{p+h}},$$

amelyekből az optimális rendelési tétele nagyság:

$$Q^* = B^* + \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} \sqrt{\frac{p}{p+h}} = 650 + \sqrt{\frac{2 \cdot 650 \cdot 7500}{15}} \sqrt{\frac{600}{600+15}} = 1446,33 \text{ db.}$$

Ebben az esetben a ciklus hossza:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{1446,33}{650} = 2,22 \text{ hét,}$$

és a maximális készlet

$$S^* = Q^* - B^* = 1446,33 - 650 = 796,33 \text{ db}$$

Az 1 hétre eső készletezési költség, pedig:

$$k_o = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c_j + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q}$$

$$k_o = \frac{650 \cdot 7500}{1446,33} + 650 \cdot 900 + \frac{15 \cdot 796,33^2}{2 \cdot 1446,33} + \frac{600 \cdot (1446,33 - 796,33)^2}{2 \cdot 1446,33} = 679294,57 \text{ Ft/hét.}$$

Az 1 ciklusra eső készletezési költség, pedig:

$$K_o = t^* k_o = 2,22 \cdot 679294,57 = 1508033,95 \text{ Ft/ciklus}$$

10.3. példa: Egy termék iránti kereslet 600 db hetente, amit egyenletesen elégítünk ki. A termék rendelési költségének állandó része 5000 Ft, a darabköltsége 600 Ft a tárolási költség darabonként és hetente 10 Ft. A hiányt nem engedjük meg. Határozzuk meg, milyen gyakran kell a terméket rendelni, és mekkora az optimális rendelési tétele nagyság.

10.4. példa: Engedjük meg a hiányt a 10.1. példában, aminek a költsége 400 Ft darabonként és hetente. Kérdés ebben az esetben milyen gyakran és mennyit rendeljünk.

10.5. példa: Egy televízió készülékeket forgalmazó kiskereskedő tapasztalatból tudja, hogy a készülékek iránti kereslet egész évben egyenletes és az igény közel állandó, 600 db/év. A rendelés egyszeri költsége 10000 Ft/rendelés. A készülékek a nagykereskedelemben 50000 Ft-os egységáron szerezhetők be. Az éves készlettartási költség a beszerzési költség 20%-a. Kérdés: a kiskereskedő milyen időközönként és hány készüléket rendeljen ahhoz, hogy a készletezési költsége minimális legyen.

10.6. példa: Tegyük fel, hogy egy cikk iránti kereslet 10 kg naponta, és ezt folyamatosan elégítik ki. A termelés mindenkor beindításának költsége 50 Ft. A termelési költség darabonként 40 Ft/kg, a tárolási költség kilogrammonként és naponta 0,1 Ft, a hiányköltség kilogrammonként és naponta 4 Ft. Kérdés, érdemes-e megengedni a hiányt és mekkora legyen az optimális rendelési tétele nagyság és a rendelési ciklusidő? Milyen nagyságú folyókészletnél kell feladni a következő ciklus rendelését, ha az utánpótlási idő 4 nap. Ábrázolja a készletváltozást az idő függvényében és az ábrán jelölje meg a rendelés helyét!

10.2.3 Véges feltöltési kapacitás és a hiány nem megengedett

A gyakorlatban sokszor, különösen gyártással kapcsolatos készletezési problémákban, a feltöltés időtartama olyan hosszú, hogy az utánpótlás alatti felhasználás miatt, a maximális készlet szint jelentősen kisebb lesz a Q megrendelt mennyiségnél. Ilyenkor figyelembe kell venni a készlet

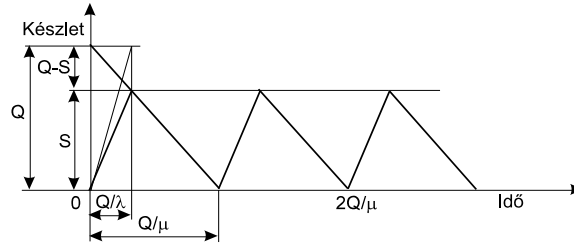
növekedését jellemző λ **feltöltési vagy érkezési rátát**. Magától értetődően ez a modell csak akkor működik, ha a $\lambda > \mu$. A készletszint változása az idő függvényében a 10.5. ábrán látható.

Először a feltöltés utáni S maximális készlet meghatározásához számítsuk ki a feltöltés Q/λ időtartama alatti $Q-S$ felhasználást. A 10.5. ábrából a

$$\frac{Q-S}{Q} = \frac{Q/\lambda}{Q/\mu} = \frac{\mu}{\lambda}$$

amelyből a

$$Q-S = \mu \frac{Q}{\lambda}.$$



10.5. ábra. A készletszint változása az idő függvényében, ha a feltöltési kapacitás véges

Ebből a maximális készlet:

$$S = Q - \mu \frac{Q}{\lambda}.$$

Az átlagos készlet pedig:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \left(Q - \mu \frac{Q}{\lambda} \right).$$

A maximális készletszint grafikusán is meghatározható (10.5. ábra), ha ismerjük a Q , λ és μ értékeket, ekkor a Q/λ és a Q/μ kiszámítható. Ezt követően a függőleges tengelyen kijelöljük a Q magasságú pontot, a vízszintes tengelyen pedig a Q/μ távolságnak megfelelő pontot, majd a két pontot összekötve megkapjuk a készletcsökkenést ábrázoló egyenest. A vízszintes tengely Q/λ pontjából húzunk egy függőleges egyenest és metszésbe hozzuk a Q magasságú vízszintes egyenessel és a készletcsökkenést ábrázoló egyenessel. Az utóbbi metszéspont adja az S értékét. Az S magasságú metszéspontot összekötve az origóval, a Q/λ időtartam alatti készletnövekedést ábrázoló egyenest kapjuk.

A továbbiakban az előző két modellnél alkalmazott eljárást követjük. A gyártási költség egy ciklusban

$$\begin{cases} 0, & \text{ha } Q = 0, \\ K_b + cQ, & \text{ha } Q > 0. \end{cases}$$

A készlettartási költség egy ciklusra, ha ciklus hossza $t=Q/\mu$, és a fajlagos készlettartási költség h , akkor

$$\frac{1}{2} \left(Q - \mu \frac{Q}{\lambda} \right) h \frac{Q}{\mu} = \frac{hQ^2}{2\mu} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda} \right).$$

Az összes készletezési költség ciklusonként:

$$K_o = K_b + cQ + \frac{hQ^2}{2\mu} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda} \right) \quad [\text{Ft}],$$

és az időegységre eső összes készletezési költség

$$k_o = \frac{K_o}{Q/\mu} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hQ}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) \quad [\text{Ft/idő}].$$

Keressük Q -nak azt a Q^* értékét, amely a k_o értékét minimalizálja. Ezt a

$$\frac{dk_o}{dQ} = -\frac{\mu K_b}{Q^2} + \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) = 0$$

feltételből kapjuk, azaz az optimális rendelési tétnagyság:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h(1 - \mu/\lambda)}},$$

ebből az optimális rendelési ciklus ideje:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \sqrt{\frac{2K_b}{\mu h(1 - \mu/\lambda)}}.$$

A maximális készlet szint optimális értéke:

$$S^* = Q^* - \mu \frac{Q^*}{\lambda}.$$

Mintapélda:

Ismét tekintsük az ekevas-gyártási problémát. Az adataink legyenek változatlanok: $K_b=120000$ Ft, $h=30$ Ft/db-hónap, $\mu=800$ db/hónap, $c=1000$ Ft/db. Az ekevas gyártás intenzitása azonban korlátozott, a $\lambda=3000$ db/hónap.

Az optimális tétnagyság:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h(1 - \mu/\lambda)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 800 \cdot 120000}{30 \cdot (1 - 800/3000)}} = 2954 \text{ db/ciklus}.$$

A maximális készlet szint:

$$S^* = Q^* - \mu \frac{Q^*}{\lambda} = 2954 - 800 \cdot \frac{2954}{3000} = 2166 \text{ db}.$$

Az optimális ciklusidő, vagyis az ekevas-gyártás indításának gyakorisága:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{2954}{800} = 3,7 \text{ hónap}.$$

A gyártás (feltöltés) időtartama:

$$\frac{Q^*}{\lambda} = \frac{2954}{3000} = 0,98 \text{ hónap}$$

Az egy hónapra eső készletezési költség:

$$k_o = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hQ}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right),$$

$$k_o = \frac{800 \cdot 120000}{2954} + 800 \cdot 1000 + \frac{30 \cdot 2954}{2} \left(1 - \frac{800}{3000}\right),$$

$$k_{\bar{o}} = 864992 \text{ Ft/hónap.}$$

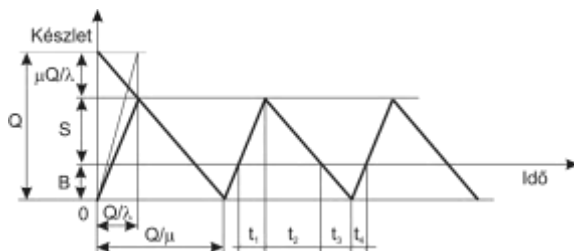
10.2.4 Véges feltöltési kapacitás és a hiány megengedett

A gazdaságos tétel nagyságú modellek legösszetettebb változata a 10.6. ábrán látható, amelyben megengedjük a hiányt, és figyelembe vesszük a készlet növekedését jellemző λ feltöltési rátát. Az ábrán az eddig használt jelöléseket alkalmazzuk, így

- μ a felhasználási ráta,
- λ a feltöltési ráta,
- Q a ciklusonként rendelt mennyiség,
- S a maximális készlet,
- B a megengedett maximális hiány,
- Q/μ a ciklusidő,
- Q/λ a feltöltési idő.

A feltöltés időtartama alatti fogyasztás az ábrából a háromszögek hasonlósága alapján $\mu Q/\lambda$. Ezt felhasználva, a számítások egyszerűsítése érdekében definiáljuk a látszólagos feltöltési intenzitás fogalmát. A 10.6. ábrából

$$\frac{Q - \mu Q / \lambda}{Q / \lambda} = \lambda - \mu.$$



10.6. ábra. A készletszint változása az idő függvényében, ha a feltöltési kapacitás véges és a hiány megengedett

A továbbiakban határozzuk meg a készletszint változását jellemző időtartamokat. A t_1 legyen az az időtartam, amíg a készletszint 0-ról S -re növekszik. Ez a látszólagos feltöltési intenzitással

$$t_1 = \frac{S}{\lambda - \mu} = \frac{1}{\lambda - \mu} (Q - B - \mu \frac{Q}{\lambda}).$$

A t_2 legyen az az időtartam, amíg a készletszint S -ről 0-ra csökken:

$$t_2 = \frac{S}{\mu} = \frac{1}{\mu} (Q - B - \mu \frac{Q}{\lambda}).$$

A t_3 legyen az az időtartam, amíg a készletszint 0-ról B -re csökken:

$$t_3 = \frac{B}{\mu}.$$

Végül t_4 legyen az az időtartam, amíg a készletszint B -ről 0-ra növekszik, amit ugyancsak a látszólagos feltöltési intenzitással fejezhetünk ki

$$t_4 = \frac{B}{\lambda - \mu}.$$

Ezt követően a szokásos módon tekintjük a költségeket. A gyártási vagy rendelési költség egy ciklusban:

$$\begin{cases} 0, & \text{ha } Q = 0, \\ K_b + cQ, & \text{ha } Q > 0. \end{cases}$$

A készlettartási költség egy ciklusra, a 10.6. ábrán a pozitív térfélre:

$$\frac{S}{2} h(t_1 + t_2) = \frac{hS^2}{2\mu} \frac{\lambda}{\lambda - \mu} = \frac{h(Q - B - \mu Q / \lambda)^2}{2\mu} \frac{\lambda}{\lambda - \mu}.$$

Hasonlóan a készlettartási költség a negatív térfélre:

$$\frac{B}{2} p(t_3 + t_4) = \frac{pB^2}{2\mu} \frac{\lambda}{\lambda - \mu}.$$

Az összes készletezési költség ciklusonként:

$$K_{\bar{o}} = K_b + cQ + \frac{h(Q - B - \mu Q / \lambda)^2}{2\mu} \frac{\lambda}{\lambda - \mu} + \frac{pB^2}{2\mu} \frac{\lambda}{\lambda - \mu}.$$

Az időegységre eső összes készletezési költség:

$$k_{\bar{o}} = \frac{K_b}{Q / \mu} = \frac{\mu K_b}{Q} + c\mu + \frac{h(Q - B - \mu Q / \lambda)^2}{2Q} \frac{\lambda}{\lambda - \mu} + \frac{pB^2}{2Q} \frac{\lambda}{\lambda - \mu}.$$

A készletezési költséget minimalizáló hiány (B^*) a

$$\frac{\partial k_{\bar{o}}}{\partial B} = -\frac{h(Q - B - \mu Q / \lambda)}{Q} \frac{\lambda}{\lambda - \mu} + \frac{pB}{Q} \frac{\lambda}{\lambda - \mu} = 0$$

egyenletből:

$$B^* = \frac{h}{h + p} Q(1 - \mu / \lambda).$$

A rendelés optimális nagysága a $\partial k_{\bar{o}} / \partial Q = 0$ feltételből számítható:

$$\frac{\partial k_{\bar{o}}}{\partial Q} = -\frac{\mu K_b}{Q^2} + \frac{h}{Q} (Q - B - \mu Q / \lambda) - \frac{h}{2Q^2} (Q - B - \mu Q / \lambda)^2 \frac{\lambda}{\lambda - \mu} - \frac{pB^2}{2Q^2} \frac{\lambda}{\lambda - \mu},$$

amelyet Q^2 -tel szorozva, a

$$-\mu K_b + hQ(Q - B - \mu Q / \lambda) - \frac{h}{2} (Q - B - \mu Q / \lambda)^2 \frac{\lambda}{\lambda - \mu} - \frac{pB^2}{2} \frac{\lambda}{\lambda - \mu} = 0.$$

Az egyenletet átalakítva, a

$$-\mu K_b + \frac{hQ^2}{2} \frac{\lambda - \mu}{\lambda} - \frac{B^2}{2} (h + p) \frac{\lambda}{\lambda - \mu} = 0.$$

A B értékét helyettesítve, a

$$-\mu K_b + \frac{hQ^2}{2} \frac{\lambda - \mu}{\lambda} - \frac{h^2 Q^2}{2} \frac{\lambda - \mu}{\lambda(h + p)} = 0,$$

$$-\mu K_b + \frac{hQ^2}{2} \frac{\lambda - \mu}{\lambda} \left(1 - \frac{h}{h + p}\right) = 0,$$

amelyből a

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h(1-\mu/\lambda)} \frac{h+p}{p}}.$$

A maximális készletszint:

$$S^* = Q^* - B^* - \mu Q^* / \lambda.$$

A ciklus hossza:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu}.$$

Mintapélda:

Az ekevas-gyártási probléma harmadik változatához képest engedjük meg a hiányt, amelynek költsége $p=110$ Ft/db-hónap, a többi adat változatlan: $K_b=120000$ Ft, $h=30$ Ft/db-hónap, $\mu=800$ db/hónap, $c=1000$ Ft/db, $\lambda=3000$ db/hónap.

Az optimális tétel nagyság:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h(1-\mu/\lambda)} \frac{h+p}{p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 800 \cdot 120000}{30 \cdot (1-800/3000)} \frac{30+110}{110}},$$

$$Q^* = 3333 \text{ db/ciklus.}$$

A maximális hiány:

$$B^* = \frac{h}{h+p} Q(1-\mu/\lambda) = \frac{30}{30+110} 3333 \cdot (1-800/3000) = 524 \text{ db.}$$

A maximális készletszint:

$$S^* = Q^* - B^* - \mu \frac{Q^*}{\lambda} = 3333 - 524 - 800 \cdot \frac{3333}{3000} = 1920 \text{ db.}$$

Az optimális ciklusidő:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{3333}{800} = 4,2 \text{ hónap.}$$

Az egy hónapra eső összes készletezési költség:

$$k_o = \frac{\mu K_b}{Q} + c\mu + \left(\frac{hS^2}{2Q} + \frac{pB^2}{2Q} \right) \frac{\lambda}{\lambda - \mu},$$

$$k_o = \frac{800 \cdot 120.000}{3333} + 800 \cdot 1000 + \left(\frac{30 \cdot 1920^2}{2 \cdot 3333} + \frac{110 \cdot 524^2}{2 \cdot 3333} \right) \frac{3000}{3000 - 800},$$

$$k_o = 857610 \text{ Ft/hónap.}$$

10.7. példa: Egy kenyérgyár napi termeléséhez 2000 kg lisztet használ fel, amit a szomszédos malomból szerez be. A számítások szerint az optimális rendelési tétel nagyság 4000 kg/ciklus. A kenyérgyárban tárolható legnagyobb készlet 3000 kg.

Kérdések:

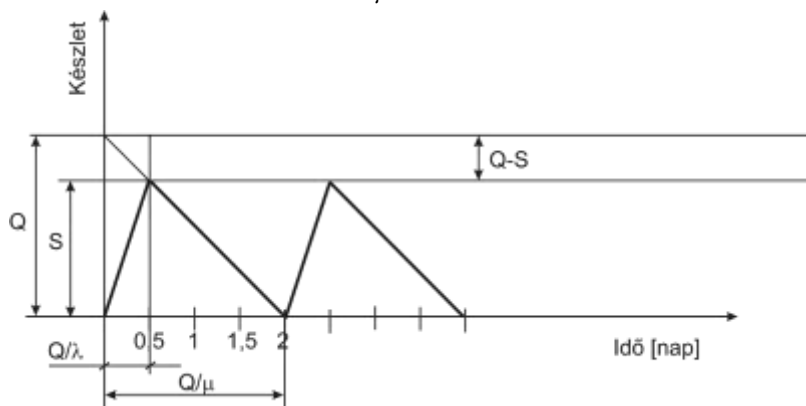
- milyen időszakonként kell rendelni, vagyis mekkora a ciklusidő hossza,
- a malom milyen ütemben szállíthat, mekkora a feltöltési ráta,
- a ciklus kezdetétől számítva a készlet mikor éri el a maximumot?

Ábrázolja a készlet változását az idő függvényében!

10.7. példa megoldása

A ciklus hossza:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{4000}{2000} = 2 \text{ nap}$$



A háromszögek hasonlóságából (lásd az ábrát), a

$$\frac{Q-S}{Q} = \frac{Q/\lambda}{Q/\mu} = \frac{\mu}{\lambda},$$

amelyből a feltöltési ráta:

$$\lambda = \mu \frac{Q}{Q-S} = 2000 \frac{4000}{4000-3000} = 8000 \text{ kg/nap.}$$

A készlet a maximumot a rendelést követően

$$\frac{Q^*}{\lambda} = \frac{4000}{8000} = 0,5 \text{ nap múlva éri el.}$$

10.8. példa: Tegyük fel, hogy egy termelési folyamat segédanyag iránti igénye 10 kg naponta, és ezt folyamatosan elégítik ki. A segédanyagot helyben állítják elő, és a termelőkapacitás 20 kg naponta. A termelés mindenkor beindításának költsége 50 Ft. A termelési költség darabonként 40 Ft/kg, a tárolási költség kilogrammonként és naponta 0,1 Ft, a hiányköltség kilogrammonként és naponta 4 Ft. Kérdés, érdemes-e megengedni a hiányt és mekkora legyen az optimális rendelési tétel nagyság és a rendelési ciklusidő? Mennyi a feltöltés és a hiány időtartama? Ábrázolja a készletváltozást az idő függvényében!

10.8. példa megoldása

Az optimális rendelési tétel nagyság, ha a hiány nem megengedett:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h(1-\mu/\lambda)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 50}{0,1 \cdot (1-10/20)}} = 141,42 \text{ kg}$$

Az 1 napra eső készletezési költség, ha a hiány nem megengedett:

$$k_o = \frac{K_o}{Q/\mu} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hQ}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)$$

$$k_o = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hQ}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) = \frac{10 \cdot 50}{141,42} + 10 \cdot 40 + \frac{0,1 \cdot 141,42}{2} \left(1 - \frac{10}{20}\right) = 407,07 \text{ Ft/nap}$$

Az optimális rendelési tétnagyság, ha a hiány megengedett:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h(1-\mu/\lambda)}} \sqrt{\frac{p+h}{p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 50}{0,1 \cdot (1-10/20)}} \sqrt{\frac{4+0,1}{4}} = 143,18 \text{ kg}$$

A hiány nagysága:

$$B^* = \frac{h}{h+p} Q(1-\mu/\lambda) = \frac{0,1}{0,1+4} \cdot 143,18 \cdot (1-10/20) = 1,75 \text{ kg}$$

A maximális raktárkészlet, ha a hiány megengedett:

$$S^* = Q^* - B^* - \mu \frac{Q^*}{\lambda} = 143,18 - 1,75 - 10 \cdot \frac{143,18}{20} = 69,84 \text{ kg}$$

Az 1 napra eső készletezési költség, ha a hiány megengedett:

$$k_s = \frac{\mu K_b}{Q} + c\mu + \left(\frac{hS^2}{2Q} + \frac{pB^2}{2Q} \right) \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$$

$$= \frac{10 \cdot 50}{143,18} + 10 \cdot 40 + \left(\frac{0,1 \cdot 69,84^2}{2 \cdot 143,18} + \frac{4 \cdot 1,75^2}{2 \cdot 143,18} \right) \frac{20}{20-10} = 406,98 \text{ Ft/nap.}$$

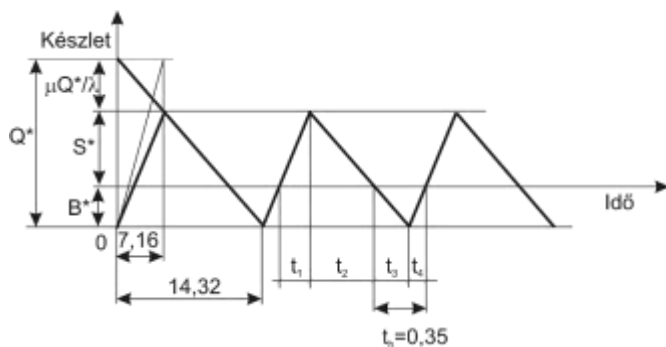
Mivel a hiány megengedése esetén az 1 napra eső készletezési költség kisebb, $406,98 < 407,07$, ezért az optimális rendelési tétnagyság $Q^* = 143,18 \text{ kg}$.

A rendelési ciklusidő, ha a hiány megengedett:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{143,18}{10} = 14,32 \text{ nap}$$

A feltöltés időtartama:

$$t_f = \frac{Q^*}{\lambda} = \frac{143,18}{20} = 7,16 \text{ nap.}$$



A hiány időtartama:

$$t_h^* = t_3 + t_4 = \frac{B^*}{\mu} + \frac{B^*}{\lambda - \mu} = \frac{1,75}{10} + \frac{1,75}{20-10} = 0,35 \text{ nap.}$$

10.9. példa: Egy keveréktakarmány napi felhasználása 80 kg/nap, a készlettartási költsége 0,5 Ft/kg nap, az ára 100 Ft/kg. A keveréktakarmány feltöltése közvetlen a takarmánygyárból történik, a gyártás kapacitása 400 kg/nap, és a gyártás indítási költsége 5000 Ft/indítás. Az optimális készlegazdálkodáshoz milyen időközönként kell indítani a gyártást? Optimális esetben mennyit kell egy alkalommal gyártani, és mennyi ideig működik a gyártás egy-egy indítás után? Mennyi

lesz a maximális készlet? Mennyi lesz a működés átlagos napi költsége? Ábrázolja a készletváltozást az idő függvényében.

10.9. példa megoldása

Véges feltöltési kapacitásnál az optimális rendelési tétel nagyság:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h(1-\mu/\lambda)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \cdot 5000}{0,5 \cdot (1-80/400)}} = 1414,21 \text{ kg.}$$

A gyártás indításának ciklusideje:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{1414,21}{80} = 17,68 \text{ nap.}$$

A gyártás egy-egy indítás követően

$$t_m = \frac{Q^*}{\lambda} = \frac{1414,21}{400} = 3,54 \text{ napig}$$

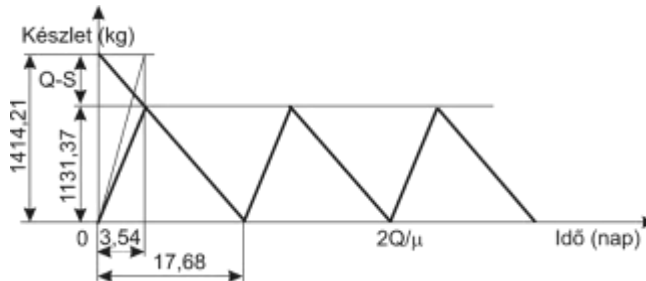
működik.

A maximális készlet a gyártás leállásakor:

$$S^* = Q^* - \mu \frac{Q^*}{\lambda} = 1414,21 - 80 \cdot \frac{1414,21}{400} = 1131,37 \text{ kg.}$$

A készletezés átlagos napi költsége:

$$\begin{aligned} k_o &= \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c + \frac{hQ}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) = \\ &= \frac{80 \cdot 5000}{1414,21} + 80 \cdot 100 + \frac{0,5 \cdot 1414,21}{2} \left(1 - \frac{80}{400}\right) = 8565,69 \text{ Ft/nap} \end{aligned}$$



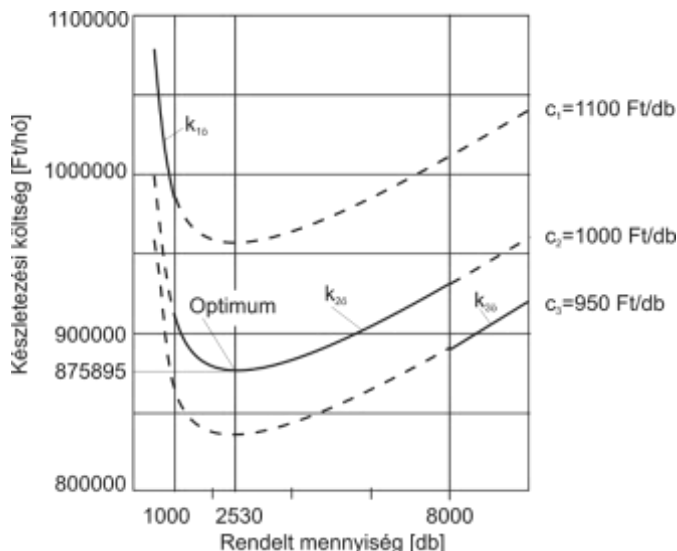
10.2.5 A rendelési tétel nagyság figyelembevétele, és a hiány nem megengedett

Az előző modelleknél feltételeztük, hogy a darabonkénti rendelési (gyártási) költség független a megrendelt vagy gyártott mennyiségtől. Ez a feltétel azonban nem mindig tartható, gyakran előfordul, hogy a c fajlagos költség csak szakaszosan állandó, vagy a Q folytonos függvénye. Például az ekevas-gyártás esetén elképzelhető a költségek következő változása:

Rendelési tétel (Q) [db]	Rendelési költség (c_j) [Ft/db]
≤ 1000	1100
1000-8000	1000
$8000 \leq$	950

Kérdés ebben az esetben, hogyan határozható meg az optimális politika. Ehhez felhasználjuk az előző eredményeket. Az időegységre eső készletezési költség:

$$k_{j\sigma} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c_j + \frac{hQ}{2} \quad [\text{Ft/idő}].$$



10.7. ábra. Az időegységre eső összes készletezési költség változó darabköltség esetén

A költségek változását a 10.7. ábra mutatja, ahol a lehetséges értékeket a folytonos vonalak jelzik. A görbékhez tartozó optimális rendelési tétnagyság könnyen meghatározható a korábban már használt négyzetgyökös formula segítségével. Ha $K_b=120000$, $h=30$ Ft/db-hónap, és $\mu=800$ db/hónap, akkor a

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 800 \cdot 120000}{30}} = 2530 \text{ db/ciklus.}$$

Ennél a rendelési tétnagyságnál csak a középső görbe értelmezett. Az időegységre eső rendelési költség:

$$k_{2\sigma} = \frac{800 \cdot 120000}{2530} + 800 \cdot 1000 + \frac{30 \cdot 2530}{2} = 875895 \text{ Ft/hónap.}$$

Az 1000 db-nál kisebb rendelést nem kell vizsgálni, mivel $c_1 > c_2$, így $k_{1\sigma} > k_{2\sigma}$. A 8000 db-nál nagyobb rendelés esetén a görbe értelmezhető szakasza monoton növekvő, ezért a Q minimális értékénél, 8000 db-nál kell kiszámítani az időegységre eső rendelési költséget:

$$k_{3\sigma} = \frac{800 \cdot 120000}{8000} + 800 \cdot 950 + \frac{30 \cdot 8000}{2} = 892000 \text{ Ft/hónap.}$$

Tekintve, hogy a $k_{2\sigma} < k_{3\sigma}$ az optimális rendelési tétnagyság 2530 db. Könnyen kiszámítható, hogy ha a fajlagos rendelési költség $c_3=950$ Ft/db helyett 900 Ft/db lenne, akkor a $k_{3\sigma}=852000$ Ft/hónap, és ekkor az optimális rendelés nagysága 8000 db/ciklus.

10.10. példa: Egy taxi-társaság havonta átlagosan 420000 liter benzint használ. A rendelési (beállítási) költség 2000000 Ft/rendelés. A tárolási költség 70 Ft/liter havonta. Az első 100000

liter benzin ára 300 Ft/liter. Ha rendelési tétel nagyság 100000 és 300000 liter közé esik, akkor 295 Ft-ot kell fizetni literenként. 300000 liter feletti rendelés esetén a benzin literenként ára 292 Ft/liter. A taxi-társaság készletezési politikájában a hiány nincs megengedve.

Határozzuk meg az optimális rendelési tétel nagyságot annak figyelembevételével, hogy a benzin ára a rendelési tétel nagyság függvénye.

Határozzuk meg, hogy milyen gyakran kell rendelni.

Ábrázolja az egy hónapra eső készletezési költséget a rendelési tétel nagyság és a benzin árának függvényében.

10.10. példa megoldása

Az optimális rendelési tétel nagyság:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K_b}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 420000 \cdot 2000000}{70}} = 154919,3 \text{ liter}$$

Az 1 hónapra eső készletezési költség

$$k_{oi} = \frac{\mu K_b}{Q} + \mu c_j + \frac{hQ}{2} \quad (\text{Ft/hónap})$$

$Q^*=100000$ liter esetén

$$k_{oi} = \frac{420000 \cdot 2000000}{100000} + 420000 \cdot 300 + \frac{70 \cdot 100000}{2} = 137900000 \text{ Ft/hó}$$

$Q^*=154919,3$ liter esetén

$$k_{oi} = \frac{420000 \cdot 2000000}{154919,3} + 420000 \cdot 295 + \frac{70 \cdot 154919,3}{2} = 134744353,37 \text{ Ft/hó}$$

$Q^*=300000$ liter esetén

$$k_{oi} = \frac{420000 \cdot 2000000}{300000} + 420000 \cdot 292 + \frac{70 \cdot 300000}{2} = 135940000 \text{ Ft/hó}$$

Az optimális rendelési tétel nagyság $Q^*=154919,3$ liter, a rendelési ciklusidő:

$$t^* = \frac{Q^*}{\mu} = \frac{154919,3}{420000} = 0,3688 \text{ hónap}$$

10.11. példa: Egy fuvarozó vállalat havonta átlagosan 40000 l gázolajat használ. A gázolaj ára 130 Ft/l, a rendelés egyszeri költsége 100000 Ft, a tárolás költsége literenként és havonta 50 Ft. Ha 200000 l felett rendel a vállalat, akkor 5 Ft/l árkedvezményt kap. A hiány nincs megengedve. Milyen gyakran és mennyit kell rendelni?

10.12. példa: Egy mezőgazdasági gépgyártó cég négy ekefejes ekéihez egy beszállítótól szerzi be az ekevasakat. Az ekék összeszerelése folyamatos, havonta 200 db, amihez $4 \cdot 200 = 800$ db ekevasat használnak fel. A rendelés egyszeri költsége 120000 Ft/rendelés. A becsült készletartási költség 30 Ft/hónap darabonként. Az ekevasak ára függ a rendelési tétel nagyságtól:

Rendelési tétel (Q) [db]	Rendelési költség (c_j) [Ft/db]
≤ 1000	1100
1000-8000	1000
$8000 \leq$	900

A gyártó szeretné meghatározni, mikor és mennyit rendeljen az ekevasakból, ha a hiány nem megengedett. Ábrázolja az egy hónapra eső készletezési költséget a rendelési tétel nagyság és az ekevas árának függvényében.

10.2.6 Megjegyzések a gazdaságos tétel nagyságú modellekhez

A modellekben feltételeztük, hogy a felhasználási ráta (μ) és a darabonkénti rendelési vagy gyártási költség (c) időben állandó. Ennek eredményeként azt kaptuk, hogy a darabonkénti rendelési (gyártási) költségnek nincs hatása a optimális megoldásra. Az eredmény evidens, mivel az időegységre eső készletezési költségben (k_d) a μc tag független Q -tól.

A modellekben kikötöttük, hogy a Q rendelési tétel nagyság minden ciklusban állandó. Az alábbi fejtegetésből azonban kiderül, hogy ez a kikötés akár eredménynek is tekinthető. Ezek a modellek ugyanis az (s, S) politika speciális esetei.

Az (s, S) mechanizmust általában a periodikus készletfigyeléssel összefüggésben említik. Ennek lényege: az újrendelést akkor kezdeményezik, amikor a készlet szint s -re csökken, és ekkor a készlet szintet egy előre meghatározott maximális S értékre emelik. Az s tehát meghatározza az újrendelési pontot. A gazdaságos tétel nagyságú modellekben, ha a hiány nem megengedett, az újrendelési ponthoz tartozó készlet szint $s=0$, ha a hiány megengedett, akkor

$$s = -B^* = -(Q^* - S^*) = -\sqrt{\frac{2\mu K_b}{p}} \sqrt{\frac{h}{p+h}}.$$

Így a gazdaságos tétel nagyságú modellekben az (s, S) politika a következők szerint értelmezhető: amikor a készlet az s újrendelési szintre csökken, akkor a készlet szintet S -re emeljük $Q=S-s$ nagyságú rendeléssel. Az utóbbi összefüggésből következik, hogy az újrendelési ponthoz tartozó készlet szint nem lehet pozitív. A $Q \geq S$ relációból (10.4. ábra) és az $S=Q+s$ összefüggésből következik, hogy az $s \leq 0$, azaz az s nem lehet nagyobb 0-nál. Az $s > 0$ politika azért sem lehet optimális, mivel az újrendelési ciklus időtartamát csökkenti, és így az időegységre eső beállítási költség növekedését eredményezi.

10.3. Periodikus készletfigyelés, változó igény

Az előző fejezetben a gazdaságos rendelési tétel nagyságot kerestük, és az eredmények azon a feltételezésen alapultak, hogy a μ felhasználási ráta minden ciklusban állandó. Amikor azonban az igényelt mennyiségek periódusonként változnak, akkor ez a feltétel már nem tartható, és a négyzetgyökös formula nem biztosít minimális költségű megoldást.

Tekintsük Wagner és Whithin modelljét, amelyben az előzőekhez hasonlóan a következő költségeket vesszük figyelembe: a K a periódus elején jelentkező **beállítási költség**, a c a darabonkénti **gyártási vagy rendelési költség**, a h az egy periódusra eső darabonkénti **készlettartási költség** [47].

Készletnek a periódus végén megmaradó mennyiséget tekintjük, ami lehet tetszőleges vagy korlátozott nagyságú. A készlettartási költség így az előző periódus szükségletét meghaladó mennyiség függvénye is. A készlettartási költség ezért némileg különbözik a gazdaságos tétel nagyságú modellben használt készlettartási költségtől, ahol az h egy darab egységnyi időre eső költséget jelentette. Világos, hogy a készlettartási költség eltérő értelmezése más készletezési politikát eredményez.

További eltérés, hogy $r_i=1,2,\dots,n$ jelenti az i -edik az időszak szükségletét. Ezen kívül feltételezzük, hogy a készlet az első periódus elején ismert nagyságú, általában 0, az n -edik periódus végén pedig 0-ra csökken. A modellekben a gyártási idő hatását elhanyagoljuk, vagyis a gyártási kapacitást végtelennek tekintjük. A periódusok elején, a gyártás, vagy a megrendelés után a ma-

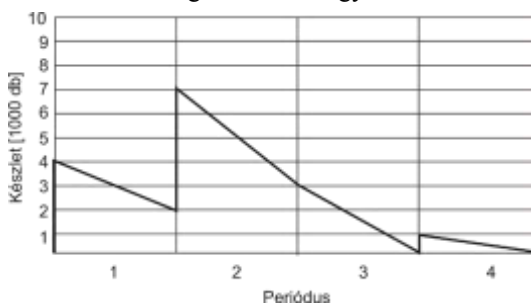
ximális készlet a probléma jellegétől függően ugyancsak lehet tetszőleges vagy korlátozott. A készletezési probléma megoldásának célja meghatározni az egyes periódusok elején a gyártandó mennyiséget úgy, hogy a teljes költséget minimalizáljuk. A modellt az ekevas-gyártási probléma következő változatával illusztráljuk.

III. A mezőgépgyártó piaci vizsgálatai kimutatták, hogy az ekék iránti igény nem egyenletes, hanem szezonális. Az előrejelzések szerint a kereslet a betakarítást megelőző szezonban (április-június) a legnagyobb, 800 db. A harmadik negyedévben a vásárlásikedv csökkenése nem jelentős, mivel 600 db eladása várható. A késő őszi és a téli időszakban (október-december) viszont a kereslet 200 darabra esik vissza. Az első negyedévben azonban újra élénkül a piac, és 400 db eke eladására lehet számítani.

A különböző számú ekefejekkel ellátott eketípusok (4, 5, és 6 vasú ekék) iránti kereslet közel azonos, így átlagosan egy ekére 5 ekevasat lehet számolni, vagyis a negyedévenkénti ekevas-szükséglet a következő:

Negyedév	I.	II.	III.	IV.
Szükséglet [db]	2000	4000	3000	1000

A igény növekedése szükségszerűen maga után vonja a részegységek gyártási vonalainak és programjainak a módosítását. A változtatások lehetővé teszik új módszerek bevezetését, és néhány részegység fejlesztését. A fejlesztés érinti az ekevas-gyártást is. Ennek következtében az ekevas-gyártás beállítási költség 200000 Ft-ra növekszik, a darabonkénti gyártási költség 1000 Ft, a készlettartási költség pedig 30 Ft. A munkabér és az eszközököltségek miatt egy ciklusban minimálisan 1.000 ekevasat kell gyártani, de a vonal kapacitása lehetővé teszi, hogy egy periódus alatt akár az egész évi szükségletet (10000 db) legyártsuk. Az ekevasakat utolsó komponensként szereljük fel az ekékre, és a szerelés gyorsan elvégezhető. A ekevasakból rövid idő alatt nagy mennyiségek gyárthatók, ezért utánpótlási idejük elhanyagolható. A feladat: meghatározni az egyes periódusokban gyártandó mennyiséget úgy, hogy a szükségletek ki legyenek elégítve, és az összes készletezési költség minimális legyen.



10.8. ábra. Az ekevas-gyártási probléma egy lehetséges megoldása

Egy szemmel láthatóan nem optimális lehetséges megoldást mutat a 10.8. ábra. Az optimális megoldás elérhető enumerációval, ahol a kombinációk száma 2^{n-1} , ezért kívánatos a megoldásra hatékonyabb eljárást keresni. Az egyik lehetséges módszer az 5. fejezetben már alkalmazott dinamikus programozás, de használható a lineáris programozás is.

10.3.1 Megoldás dinamikus programozással

A dinamikus programozás változói a készletezéssel összefüggésben a következők. Az i -edik fázis az i -edik periódussal azonosítható, az állapotok pedig megfelelnek az i -edik periódusba belépő lehetséges készleteknek, amit x_i -vel jelölünk. A z_i döntési változó a periódus elején megrendelt vagy gyártott mennyiséget jelenti. Az i -edik időszakban felmerülő költség $B_i(x_i, z_i)$ legyen

a belépőkészlet (x_i) és a gyártott mennyiség (z_i) függvénye. Az x_i készlet az első periódus elején és az utolsó periódus végén nulla, azaz $x_1 = x_{n+1} = 0$.

Emlékezzünk arra, hogy a költségek közül csak az állandó K beállítási, a darabszámmal arányos c rendelési vagy gyártási, és a h készlettartási költséget tekintjük. A szükséglet az i -edik időszakban r_i . Akkor az i -edik periódus költsége:

$$B_i(x_i, z_i) = \begin{cases} K + cz_i + h(x_i + z_i - r_i), & \text{ha } z_i > 0, \\ h(x_i - r_i), & \text{ha } z_i = 0. \end{cases}$$

Jelentse $C_i(x_i, z_i)$ az alpolitikák teljes költségét az i -edik periódus elejétől az n -edik periódus végéig, ami szintén a belépő készlet és a gyártott mennyiség függvénye, és $C_i^*(x_i)$ jelölje a $C_i(x_i, z_i)$ minimális értékét. A probléma természetéből fakadóan a korlátozó feltételek:

$$z_i \geq 0, \text{ és a } x_i + z_i \geq r_i,$$

vagyis a hiányt nem engedjük meg, amelyből a

$$z_i \geq r_i - x_i.$$

Az $x_{n+1} = 0$ előírás miatt, ami azt jelenti, hogy az utolsó periódus végén nem maradhat készlet, a z_i felülről is korlátos, azaz a

$$z_i \leq r_i + r_{i+1} + \dots + r_n - x_i$$

A legjobb alpolitikák költségei az i -edik periódus elejétől az n -edik periódus végéig így

$$C_i^*(x_i) = \min_{\substack{z_i \geq r_i - x_i \geq 0 \\ z_i \leq r_i + r_{i+1} + \dots + r_n - x_i}} \{C_i(x_i, z_i)\} = \min_{\substack{z_i \geq r_i - x_i \geq 0 \\ z_i \leq r_i + r_{i+1} + \dots + r_n - x_i}} \{B_i(x_i, z_i) + C_{i+1}^*(x_{i+1})\},$$

és mivel $x_{i+1} = x_i + z_i - r_i$, a

$$C_i^*(x_i) = \min_{\substack{z_i \geq r_i - x_i \geq 0 \\ z_i \leq r_i + r_{i+1} + \dots + r_n - x_i}} \{C_i(x_i, z_i)\} = \min_{\substack{z_i \geq r_i - x_i \geq 0 \\ z_i \leq r_i + r_{i+1} + \dots + r_n - x_i}} \{B_i(x_i, z_i) + C_{i+1}^*(x_i + z_i - r_i)\},$$

minden $i=1,2,\dots,n$ -re, ahol a C_{n+1}^* definíció szerint nulla.

Most térjünk vissza az ekevas-gyártás problémájához. A gyártási feltételekből eredően a gyártást csak akkor lehet indítani, ha a szükséglet minimálisan 1000 db, ezért 1000 db ekevasat tekintünk egy gyártási egységnek vagy tételnek. Így a periódusonkénti igények:

Periódus	1	2	3	4
Szükséglet $[r_i]$	2	4	3	1

A költségeket az egyszerűbb kezelés érdekében osszuk el 10-zel, így a $K=20$, a $c=100$ és a $h=3$. Az optimális politika meghatározására az első iterációt a negyedik periódusban kezdjük. Az utolsó periódus végén nem maradhat készlet, ezért a $C_5^* = 0$, az iterációs képlet pedig:

$$C_4^*(x_4) = \min_{\substack{z_4 \geq 1 - x_4 \geq 0 \\ z_4 \leq 1 - x_4}} \{B_4(x_4, z_4)\}.$$

Az x_i és z_i párokra a számításokat táblázatokban végezzük el. Az x_i és z_i változók értelmezési tartománya a 0 és $r_i + r_{i+1} + \dots + r_n$ közötti egész-számok halmaza. Vegyük észre azonban, hogy az alsó és felső korlátokra vonatkozó előírások:

$$z_i \geq r_i - x_i \geq 0 \text{ és } z_i \leq r_i + r_{i+1} + \dots + r_n - x_i$$

miatt a számpárok egymásnak is függvényei. Az x_i függvényében a z_i legkisebb és legnagyobb

értéke:

$$z_{i\min} = r_i - x_i \text{ és } z_i \geq 0,$$

$$z_{i\max} = r_i + r_{i+1} + \dots + r_n - x_i$$

lehet.

A negyedik periódus szükséglete $r_4=1$, így egymástól függően a belépő készlet (x_4) és a gyártott mennyiség (z_4) is csak 0 vagy 1 lehet. Az utolsó periódusra érvényes iterációs képletet felhasználva, a negyedik periódus alpolitikái a következők:

	$B_4(x_4, z_4)$			
x_4 / z_4	0	1	$C_4^*(x_4)$	z_4^*
0		120	120	1
1	0		0	0

A táblázat szerint, ha nincs belépő készlet, azaz $x_4=0$, akkor $z_4=1$, és az alpolitika költsége $C_4^*(0)=120$. Ha az $x_4=1$, akkor $z_4=0$, és az alpolitika költsége $C_4^*(1)=0$.

A második iteráció célja, hogy megtaláljuk az optimális politikát a harmadik periódus kezdetétől a negyedik periódus végéig. Ebben az esetben a formula,

$$C_3^*(x_3) = \min_{\substack{z_3 \geq 3-x_3 \\ z_3 \leq 4-x_3}} \{B_3(x_3, z_3) + C_4^*(x_3 + z_3 - 3)\}.$$

A 3. periódusban az x_3 0 és $r_3+r_4=4$ között változhat, és az előzőleg megadott összefüggésekkel, az x_3 függvényében a z_3 legkisebb és legnagyobb értékei a következők:

x_3	$z_{3\min} = 3 - x_3$	$z_{3\max} = 4 - x_3$
0	3	4
1	2	3
2	1	2
3	0	1
4		0

Az eredmények pedig a 3-4 periódusokra a következők:

	$B_3(x_3, z_3) + C_4^*(x_3 + z_3 - 3)$						
x_3 / z_3	0	1	2	3	4	$C_3^*(x_3)$	z_3^*
0				440	423	423	4
1			340	323		323	3
2		240	223			223	2
3	120	123				120	0
4	0					0	0

A táblázatban tekintjük például azt, amikor az $x_3=2$, azaz 2 egység a kezdőkészlet, ekkor z_3 legkisebb értéke $3-x_3=3-2=1$, legnagyobb értéke pedig $4-x_3=4-2=2$ lehet. Ha 1 egységet gyártunk ($z_3=1$), akkor a gyártási költség $20+100 \cdot 1=120$, a készlettartási költség $3 \cdot (2+1-3)=0$. A 4. periódusba átlépő készlet $x_4=x_3+z_3-3=0$, amelyre a $C_4^*(0)=120$, és a teljes költség $B_3(x_3, z_3)=120+0+120=240$. A táblázat utolsóelőtti oszlopába a legjobb alpolitikák költségeit, azaz $C_3^*(x_3)$ minimális értékeket írtuk be.

A harmadik iterációban keressük az optimális politikát a 2-4 periódusokra. Ebben az esetben a

$$C_2^*(x_2) = \min_{\substack{z_2 \geq 4 - x_2 \geq 0 \\ z_2 \leq 8 - x_2}} \{B_2(x_2, z_2) + C_3^*(x_2 + z_2 - 4)\}.$$

A 2. periódusban az x_2 0 és $r_2+r_3+r_4=8$ között változhat, és az x_2 függvényében a z_2 legkisebb és legnagyobb értékei a következők:

x_2	$z_{2\min} = 4 - x_2$	$z_{2\max} = 8 - x_2$
0	4	8
1	3	7
2	2	6
3	1	5
4	0	4
5	0	3
6	0	2
7	0	1
8		0

A megoldás a 2. periódustól a következő:

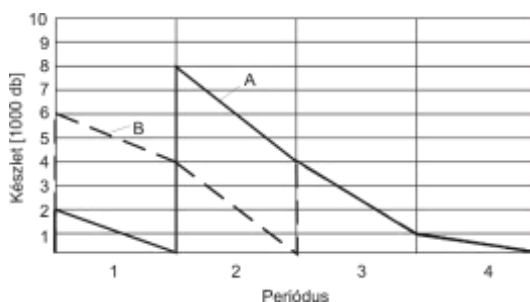
	$B_2(x_2, z_2) + C_3^*(x_2 + z_2 - 4)$										
x_2 / z_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$C_2^*(x_2)$	z_2^*
0					843	846	849	849	835	835	8
1				743	746	749	749	735		735	7
2			643	646	649	649	635			635	6
3		543	546	549	549	535				535	5
4	423	446	449	449	435					423	0
5	326	349	349	335						326	0
6	229	249	235							229	0
7	129	135								129	0
8	0									0	0

Végül az utolsó iterációval az 1-4 periódusok optimális politikáját határozzuk meg. Mivel a belépőkészlet $x_1=0$, ezért a

$$C_1^*(0) = \min_{\substack{z_1 \geq 2 \\ z_1 \leq 10}} \{B_1(x_1, z_1) + C_2^*(z_1 - 2)\},$$

Az ekevas-gyártási probléma végső megoldása:

	$B_1(0, z_1) + C_2^*(z_1 - 2)$												
x_1 / z_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$C_1^*(x_1)$	z_1^*
0			1055	1058	1061	1064	1055	1061	1067	1070	1059	1055	2 és 6



10.9. ábra. Az ekevas-gyártási probléma optimális megoldásai

A táblázat szerint két optimális megoldást kaptunk (10.9. ábra), amelyek költsége $1055 \cdot 10^4$ Ft. Az első (A) szerint 2000 darabot az első periódus, 8000 darabot a második periódus elején gyártunk. A másik optimális megoldás (B) szerint 6000 darabot az első és 4000 darabot a harmadik periódus elején kell legyártani. Az optimális megoldáshoz tartozó alpolitikák sorait a táblázatokban kiemeltük.

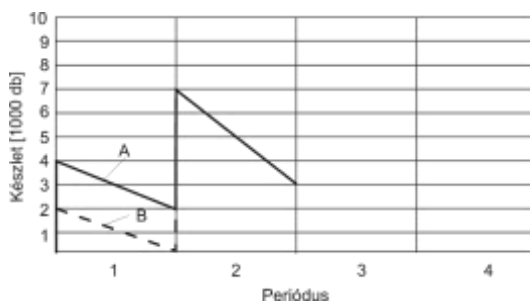
Vegyük észre, hogy a mintapéldában a darabonkénti gyártási költség (c) minden periódusban azonos, ezért ebben az esetben a c -nek a készletezési politikára nincs hatása, és a modellből akár el is hagyható.

Más a helyzet azonban akkor, ha a darabköltség változik. Például lehetséges, hogy a csúc szezonban, amikor 800 ekét gyártunk, a dolgozókat teljesen leköti az eke összeszerelés, így az ekevas gyártása csak túlórában történhet, ami a darabköltség növekedését okozza. Könnyen belátható, hogy a modell alkalmas ennek a problémának a kezelésére is.

10.3.2 A megoldás egyszerűsítése

Az előzőekben a dinamikus programozást alkalmaztuk az ekevas-gyártási probléma megoldására. Most kihasználva a modell struktúráját, ezt a közelítést egyszerűsítve, tovább fejlesztjük az algoritmust. A megoldandó feladat változatlan, amit tetszőleges igény, állandó beállítási, lineárisan változó gyártási és készlettartási költség jellemez.

Az **egyszerűsítés alapja** az a felismerés, hogy tetszőleges igény, állandó beállítási, lineárisan változó gyártási és készlettartási költség esetén optimális alpolitikát akkor kapunk, ha a gyártást nulla készletszintről indítjuk. E felismerés a következő gondolatmenet alapján könnyen belátható.



10.10. ábra. A készletezési politika különböző alternatívái

Tekintsünk egy alpolitikát a 10.6. ábrán, ahol a gyártás nulla belépőkészlettel kezdődik, és nem nulla készletszinten fejeződik be, ezért az új gyártási szakasz értelemszerűen nem nulla készlettel indul. Ez az alpolitika az ábrán az első periódus elején kezdődik és a második periódus elején végződik, amikor 5000 db ekevas gyártását indítjuk. Az alpolitikát a 10.10. ábrán folytonos

vonallal (A) újra megrajzoltuk.

Nézzünk egy alternatív alpolitikát, amely szerint 2000 db ekevasat gyártunk az első periódus és 7000 db-ot a második periódus elején. Az alternatívát (B) a szaggatott vonal jelzi a 10.10. ábrán. A B alpolitika kedvezőbb, mint A, mivel az összes költsége kisebb, ugyanis a beállítási és a gyártási költség mindkét esetben ugyanannyi, a készlettartási költség pedig B estén kisebb, mert a periódus végén nincs készlet a raktáron. Ezért B jobb, mint A, tehát A nem lehet optimális.

Az optimális politikák e jellemzője felhasználható annak eldöntésére, hogy mely politikák nem optimálisak. Pontosabban a példában adott feltételek esetén csak az a politika lehet optimális, amelyben a gyártás nulla készletszintről indul. Ráadásul, kihasználva azt, hogy ekkor az i -edik periódus elején a gyártandó mennyiség z_i kifejezhető a $0, r_i, r_i + r_{i+1}, \dots, r_i + r_{i+1} + \dots + r_n$ igényekkel, egy egyszerű és hatékony algoritmust konstruálhatók.

Feltételezve, hogy létezik optimális politika, tekintjük azt az időszakot, amely az első periódus elején kezdődő gyártástól addig tart, amíg a készletszint a nullát el nem éri. Az ezt követő periódusok teljes költségének minimálisnak kell lenni ahhoz, hogy a teljes politika optimális legyen. Így a ekevas-gyártási példában, ha az első periódusban induló gyártás után a nulla készletszintet a második periódus végén érjük el, és ez egy optimális alpolitika választásának az eredménye, akkor nincs más teendő, mint hozzávenni az utolsó két periódus optimális alpolitikáját, amelyek igénye 3000 illetve 1000 db ekevas.

C_i jelölje az $x_i=0$ -val jellemzett legjobb alpolitika teljes költségét i -edik periódus elejétől az n -edik periódus végéig. Ennek számítására alkalmas rekurzív formula a következő:

$$C_i = \min_{j=i, i+1, \dots, n} \{C_{j+1} + K + c(r_i + r_{i+1} + \dots + r_j) + h(r_{i+1} + 2r_{i+2} + 3r_{i+3} + \dots + (j-i)r_j)\},$$

ahol a j index azt a periódust jelöli, amelynek a végén a készlet először éri el a nulla szintet az i -edik periódus elején kezdődő gyártás után. A j értelmezési tartománya: $j \geq i$ és $j \leq n$. Kikötés szerint a C_{n+1} nulla, az i -től j -ig terjedő periódusokban a gyártási költség

$$c(r_i + r_{i+1} + \dots + r_j),$$

a készlettartási költség

$$h(r_{i+1} + 2r_{i+2} + 3r_{i+3} + \dots + (j-i)r_j).$$

Ez utóbbi költség a periódusok végén jelentkezik az igényen felüli többletek miatt.

A fenti formulával leírt algoritmus megoldása jóval egyszerűbb, és kisebb számításigényű, mint a dinamikus programozásnak az előzőleg használt változata. Az iterációt most is az n -edik periódusban kezdjük.

Visszatérve az ekevas-gyártási példához, először vegyük a C_4 esetet, az optimális politika a 4. periódus elejétől a tervezési horizont végéig:

$$C_4 = C_5 + K + cr_4 = 0 + 20 + 100 \cdot 1 = 120.$$

A C_3 meghatározásához két esetet kell figyelembe venni (10.11. ábra). A készlet a harmadik periódus elején kezdődő gyártás után az egyiknél a harmadik, a másikkal a negyedik periódus végén éri el a nulla szintet. Tehát j értelmezési tartománya 3 és 4, amelyhez a $C_3^{(3)}$ és $C_3^{(4)}$ költségek tartoznak. A $C_3^{(3)}$ alpolitika szerint a harmadik periódusban a gyártás a periódus igényének megfelelően r_3 , amit az előző iterációban meghatározott C_4 optimális alpolitikának kell követnie. Ezzel szemben a $C_3^{(4)}$ alpolitika azt mondja, hogy mindkét periódus igényét már a harmadik periódusban gyártsuk le, ami miatt a készlet csak a negyedik periódus végén éri el a 0

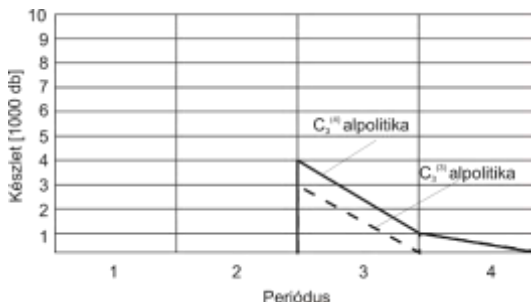
szintet. A $C_3^{(3)}$ és $C_3^{(4)}$ alpolitikák közül a kisebb lesz a C_3 költség.

$$C_3^{(3)} = C_4 + K + cr_3 = 120 + 20 + 100 \cdot 3 = 440.$$

$$C_3^{(4)} = C_5 + K + c(r_3 + r_4) + hr_4 = 0 + 20 + 100(3 + 1) + 3 \cdot 1 = 423.$$

Így a

$$C_3 = \min\{C_3^{(3)}, C_3^{(4)}\} = \min\{440, 423\} = 423.$$



10.11. ábra. Alpolitikák a 3. iterációban

A C_2 meghatározására már három esetet kell vizsgálni. A második periódus elején kezdődő gyártás után a készlet először a második, harmadik vagy a negyedik periódus végén érheti el a nulla szintet. Most a j értelmezési tartománya 2, 3, 4, ami a $C_2^{(2)}$, $C_2^{(3)}$ és $C_2^{(4)}$ költségeket eredményezi. Így C_2 költség, a $C_2^{(2)}$, $C_2^{(3)}$ és $C_2^{(4)}$ minimális értéke. A

$$C_2^{(2)} = C_3 + K + cr_2 = 423 + 20 + 100 \cdot 4 = 843,$$

$$C_2^{(3)} = C_4 + K + c(r_2 + r_3) + hr_3 = 120 + 20 + 100(4 + 3) + 3 \cdot 3 = 849,$$

$$C_2^{(4)} = C_5 + K + c(r_2 + r_3 + r_4) + h(r_3 + 2r_4) = 0 + 20 + 100(4 + 3 + 1) + 3(3 + 2 \cdot 1) = 835,$$

amelyekből a

$$C_2 = \min\{C_2^{(2)}, C_2^{(3)}, C_2^{(4)}\} = \min\{843, 849, 835\} = 835.$$

Végül C_1 számításakor 4 esetet kell tekintetbe venni. Az első periódus elején kezdődő gyártás után a készlet először az első, második, harmadik vagy a negyedik. periódus végén érheti el a nulla szintet. A j értelmezési tartománya 1, 2, 3, 4, amelyekhez a $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$ és $C_1^{(4)}$ költségek tartoznak, és most a C_1 a $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$ és $C_1^{(4)}$ költségek közül a minimális.

$$C_1^{(1)} = C_2 + K + cr_1 = 835 + 20 + 100 \cdot 2 = 1055,$$

$$C_1^{(2)} = C_3 + K + c(r_1 + r_2) + hr_2 = 423 + 20 + 100(2 + 4) + 3 \cdot 4 = 1055,$$

$$C_1^{(3)} = C_4 + K + c(r_1 + r_2 + r_3) + h(r_2 + 2r_3) = 120 + 20 + 100(2 + 4 + 3) + 3(4 + 2 \cdot 3) = 1070,$$

$$\begin{aligned} C_1^{(4)} &= C_5 + K + c(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + h(r_2 + 2r_3 + 3r_4) = \\ &= 0 + 20 + 100(2 + 4 + 3 + 1) + 3(4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1) = 1059, \end{aligned}$$

$$C_1 = \min\{C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, C_1^{(3)}, C_1^{(4)}\} = \min\{1055, 1055, 1070, 1059\} = 1055.$$

Mint látható az eredmény megegyezik az előző pontban kapott megoldással.

10.13. példa: Tegyük fel, hogy a következő 5 hónapra ismert egy cikk iránti kereslet: $r_1=2$, $r_2=4$, $r_3=2$, $r_4=2$, $r_5=3$, a beállítási költség $K=1200$ Ft/rendelés, a beszerzési ár $c=300$ Ft/db, a készlettartási költség $h=90$ Ft/db. Határozzuk meg azt az optimális rendelési ütemet, amely ki-

elégíti a havi keresleteket. Használjuk a dinamikus programozást.

10.14. példa: Oldjuk meg a 10.13. példát $300 \cdot (1 + \ln z)$ Ft beszerzési költség mellett, ahol z az egy hónapban termelt mennyiség.

10.15. példa: Oldjuk meg a 10.13. példát a 10.3.2 szakaszában ismertetett egyszerűsített algoritmussal.

10.16. példa: Fogalmazzuk meg a 10.13. példát, mint egészértékű lineáris programozási feladatot.

10.17. példa: Tekintsük a következő szituációt: egy-bizonyos terméket gyártanak, majd addig raktározzák, amíg a termelési folyamat következő szakaszában szükség nem lesz rá. A következő 3 hónapban igényelt darabszámot, a beállítási költséget és a fajlagos előállítási költséget az alábbi táblázat mutatja:

Hónap	Kereslet (db)	Beállítási költség (Ft/db)	Előállítási költség (Ft/db)
1	1	1500	2400
2	2	3000	3000
3	3	1500	2700

Kezdetben 1 egység van raktáron (az első hónap belépő készlete), és azt szeretnénk, hogy a 3. hónap végén 2 egység maradjon. Havonta legfeljebb 3 egység gyártható, azonban túlórában még egy egység gyártható 600 Ft többlet költséggel. A készletértéktartási költség 600 Ft/db.

Határozzuk meg dinamikus programozással, hány darabot kell gyártani havonta úgy, hogy az összköltség minimális legyen.

10.3.3 Megoldás dinamikus programozással általános feltételek mellett

A előző példában a korlátlan gyártási és raktározási kapacitás, valamint az $x_1 = x_{n+1} = 0$ kikötés egy viszonylag egyszerű algoritmus alkalmazását tette lehetővé. Sokszor azonban különböző okok miatt kénytelenek vagyunk korlátozásokkal élni, amelyek természetesen a készletezési költség növekedését idézik elő [22].

Az új modellben az előrelépést az jelenti, hogy abban a gyakorlat által jogosan igényelt alsó és felső korlátok írhatók elő, továbbá az eredetihez képest a költségfüggvényben a készlet fogalma is közelebb áll a valósághoz. A korlátozó feltételek következők: periódusonkénti beszerzés vagy gyártás és a feltöltés utáni készlet nem léphetnek át adott határokat, a periódusok végén pedig a készlet nem csökkenhet az előírt szint alá.

Tekintsük először modellben figyelembevett költségelemeket. Legyen K a periódusok elején jelentkező, a rendelés vagy a gyártás indításakor felmerülő állandó költség, amit rendelési vagy beállítási költségnek nevezünk. A darabonkénti beszerzési vagy gyártási költség (c_i) az új modellben periódusonként változhat, esetleg a rendelési tétele nagyság függvénye is lehet. A darabonkénti készletértéktartási költség (h_i) ugyancsak lehet állandó, periódusonként változó és a készlet nagyság függvénye.

Készletértéktartási költséget generáló készletnek az eredeti modellben a vizsgált periódus végén megmaradó mennyiséget tekintettük. A fejlesztett változatban lineáris változást feltételezve, a periódus elején és végén mérhető mennyiségek átlagával azonosítjuk a készletet, ami lehet tetszőleges vagy korlátozott nagyságú. A készlet minimumának a korlátozása a gyakorlatban általában biztonsági megfontolásokra vezethető vissza, és egy olyan minimális szint (s) előírását jelenti, ami alá a készlet soha nem csökkenhet. A készlet felsőhatárait az egy periódus alatt beszerezhető vagy gyártható mennyiség (Z), vagy a rendelkezésre álló raktárkapacitás (S) determi-

nálja.

Értelemszerűen az i -edik periódus végén megmaradó mennyiség, a készlet az $(i+1)$ -edik periódus belépőkészlete. Feltételezzük, hogy a belépőkészlet az első periódus elején ismert nagyságú, az n -edik periódus végén pedig a készlet 0-ra csökken. A modellben a fogyási ráta (egységnyi időre eső készletváltozás) helyett a készletváltozást az i -edik az periódus szükségletével r_i ($i=1,2,\dots,n$) jellemezzük.

A vázolt készletezési probléma megoldásának célja, az előzőekhez hasonlóan, meghatározni az egyes periódusok elején rendelendő vagy gyártandó mennyiséget (z_i ($i=1,2,\dots,n$)) úgy, hogy a teljes költséget minimalizáljuk. A megoldáshoz célszerűen itt is a dinamikus programozást használjuk, amelynek változói a készletezéssel összefüggésben a következők. Az i -edik fázist az i -edik periódussal azonosítjuk, az állapotok pedig feleljenek meg az i -edik periódusba belépő lehetséges készleteknek, amit x_i ($i=1,2,\dots,n$) -vel jelölünk. Az x_i készlet az első periódus elején ismert nagyságú és az utolsó periódus vagyis a tervezési horizont végén nulla, azaz $x_{n+1}=0$. A döntési változó legyen az i -edik periódus elején megrendelt vagy gyártott mennyiség (z_i). A szükséglet az i -edik időszakban pedig legyen r_i .

Az i -edik időszakban felmerülő költség $B_i(x_i, z_i)$ így a belépőkészlet (x_i) és a gyártott mennyiség (z_i) függvénye. Amint azt előre jeleztük, a költségek közül az állandó rendelési vagy beállítási (K), a darabszámmal arányos c_i beszerzési vagy gyártási és a h_i készlettartási költséget vesszük figyelembe. A készlet az i -edik periódusban a feltöltés utáni készlet x_i+z_i és a periódus végén megmaradó készlet $x_{i+1}=x_i+z_i-r_i$ átlaga, azaz

$$\frac{x_i + z_i + x_i + z_i - r_i}{2} = x_i + z_i - r_i / 2 ,$$

amit felhasználva, az i -edik periódus költsége:

$$B_i(x_i, z_i) = \begin{cases} K + c_i(z_i)z_i + h_i(x_i + z_i - r_i / 2), & \text{ha } z_i > 0, \\ h_i(x_i - r_i / 2), & \text{ha } z_i = 0. \end{cases}$$

A $B_i(x_i, z_i)$ költségfüggvényben a c_i darab- és a h_i készlettartási költség periódusonként változhat, sőt az sem szükséges, hogy $B_i(x_i, z_i)$ lineáris függvény legyen. Nagyon gyakran fordul elő, hogy nagyobb tételszám esetén kedvezményeket kapunk, azaz a darabonkénti ár (c_i) a rendelési tétel-nagyság (z_i) függvénye.

A probléma természetéből fakadóan a lehetséges korlátozások a következők:

a periódusonkénti beszerzés vagy gyártás maximalizált, $Z \geq z_i$,

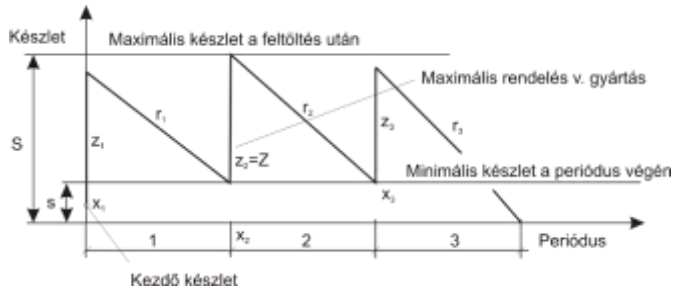
a készlet a gyártás vagy feltöltés után maximalizált, $S \geq z_i + x_i$,

a hiányt nem engedjük meg, $x_i + z_i - r_i \geq 0$,

a készlet a periódus végén minimalizált, $s \leq x_i$.

Mivel z_i -t választottuk döntési változónak, a korlátozó feltételeket az alábbiak szerint rendezzük:

$$\begin{aligned} z_i &\leq Z, \\ z_i &\leq S - x_i, \\ z_i &\geq r_i - x_i, \\ x_i &\geq s. \end{aligned}$$



10.12. ábra. Egy három periódusos modell

Az utolsó feltételt alakítsuk át a 10.12. ábrából felírható

$$x_{i+1} = x_i + z_i - r_i$$

egyenlettel, amelyből az

$$x_i = x_{i+1} + r_i - z_i.$$

Ezt helyettesítve az utolsó feltételbe és rendezve, az

$$x_{i+1} + r_i - z_i \geq s,$$

$$z_i \leq x_{i+1} + r_i - s.$$

A feltételeket összevonva:

$$\min\{Z, (x_{i+1} + r_i - s), (S - x_i)\} \geq z_i \geq \max\{r_i - x_i\}.$$

Jelentse $C_i(x_i, z_i)$ az alpolitikák teljes költségét az i -edik periódus elejétől az n -edik periódus végéig, amelyek értelemszerűen a belépő készlet és a gyártott mennyiség függvényei, és x_i belépő készlet esetén jelölje $C_i^*(x_i)$ a $C_i(x_i, z_i)$ halmaz minimális értékét.

A korlátozó feltételeket figyelembe véve a legjobb alpolitikák a

$$C_i^*(x_i) = \min_{\substack{z_i \leq \min\{Z, (x_{i+1} + r_i - s), (S - x_i)\} \\ z_i \geq \max\{r_i - x_i\}}} \{C_i(x_i, z_i)\} = \min_{\substack{z_i \leq \min\{Z, (x_{i+1} + r_i - s), (S - x_i)\} \\ z_i \geq \max\{r_i - x_i\}}} \{B_i(x_i, z_i) + C_{i+1}^*(x_i + z_i - r_i)\}$$

rekurzív formulával számíthatók minden $i = 1, 2, \dots, n$ periódusban, ahol a C_{n+1}^* definíció szerint nulla, és az

$$x_{i+1} = x_i + z_i - r_i.$$

A feladat megoldásának további feltételei:

$$\sum_{i=1}^n r_i \leq nZ + x_1,$$

azaz az összes beszerezhető vagy gyártható mennyiség és az első periódusba belépő készlet összege nem lehet kevesebb, mint az összes szükséglet. Az első periódus szükséglete pedig nem lehet nagyobb, mint az első periódusba belépőkészlet és a periódusonként maximálisan beszerezhető vagy gyártható mennyiség összege:

$$r_1 \leq Z + x_1.$$

A tervezési horizont végén az $x_{n+1} = 0$ csak akkor teljesül, ha az

$$s \leq r_n,$$

azaz a minimális készlet nem lehet nagyobb az utolsó periódus igényénél.

A leírt algoritmus alapján készített számítógép program bemutatásához tekintsük a következő példát. A program adatbeviteli képernyőjét a 10.13. ábra mutatja.

10.1. táblázat

Periódus (i)	1	2	3	4	5	6
Beszzerési ár (c_i) [ezer Ft/t]	11	18	13	17	20	10
Szükséglet (r_i) [t]	8	5	3	2	7	4
Készlettartási költség (h_i) [ezer Ft/t]	1	1	1	1	1	1

C:\Saját fejlesztés\VBMunka\Vb60\MUNKA\Készletezés\P...

Fájl Szerkesztés Számol Vége

Input adatok:

Nyitókészlet: 2 egység

Megengedett maximális készlet a feltöltés után: 9 egység

Megengedett maximális beszerzés vagy gyártás: 9 egység

Előírt minimális készlet a periódus végén: 1 egység

Rendelési vagy beállítási költség: 2 Ft/rendelés

Periódusok száma: 6 darab

	1. periódus	2. periódus	3. periódus	4. periódus	5. periódus	6. periódus
Darab költség (Ft/egység)	11	18	13	17	20	10
Készlettartási költség (Ft/egység)	1	1	1	1	1	1
Igény (egység)	8	5	3	2	7	4
Belépő készlet (egység)	2	1	0	4	2	0
Gyártott mennyiség (egység)	7	4	7	0	5	4
Készlet a feltöltés után (egység)	9	5	7	4	7	4

Az optimális politika költsége: 390

Benkő J., SZIE Logisztikai Tanszék

10.13. ábra. Az input adatok és az eredmények, 0 minimális készletszintnél.

C:\Saját fejlesztés\VBMunka\Vb60\MUNKA\Készletezés\P...

Fájl Szerkesztés Számol Vége

Input adatok:

Nyitókészlet: 2 egység

Megengedett maximális készlet a feltöltés után: 9 egység

Megengedett maximális beszerzés vagy gyártás: 9 egység

Előírt minimális készlet a periódus végén: 1 egység

Rendelési vagy beállítási költség: 2 Ft/rendelés

Periódusok száma: 6 darab

	1. periódus	2. periódus	3. periódus	4. periódus	5. periódus	6. periódus
Darab költség (Ft/egység)	11	18	13	17	20	10
Készlettartási költség (Ft/egység)	1	1	1	1	1	1
Igény (egység)	8	5	3	2	7	4
Belépő készlet (egység)	2	1	1	3	1	1
Gyártott mennyiség (egység)	7	5	5	0	7	3
Készlet a feltöltés után (egység)	9	6	6	3	8	4

Az optimális politika költsége: 412

Benkő J., SZIE Logisztikai Tanszék

10.14. ábra. Az input adatok és az eredmények előírt 1 tonnás minimális készletszintnél.

Egy vállalat anyagellátási osztályának az éves termelési program megvalósítása érdekében két-havonta az 10.1. táblázatban megadott mennyiségben (r_i) kell a gyártáshoz szükséges alapanyagokat biztosítani. A beszerzési ár (c_i) periódusonként változó, és a raktárkapacitás pedig korlátozott, $S=9$ t. Az első periódusba belépőkészlet $x_1=2$ t. A rendelési költség $K=2$ ezer Ft/rendelés, a fajlagos készlettartási költség minden periódusban egyenlő, $h_i=1$ ezer Ft/t. Határozzuk meg az optimális készletezési politikát. Kérdés, ehhez az egyes periódusokban mekkora mennyiségeket (z_i) rendeljünk, ha a minimális készletet nem korlátozzuk, majd vizsgáljuk meg, hogy milyen költségnövekedéssel jár, ha a minimális készletet 1 tonnára növeljük.

A program futásának eredményei (a periódusok belépő készletei (x_i), a periódusokban beszerzett mennyiségek (z_i) és a feltöltés utáni készletek (x_i+z_i)), nulla minimális készletszintnél a 10.13. ábrán, 1 tonnás minimális készletszintnél pedig a 10.14. ábrán láthatók. Az első esetben az összes beszerzési és készletezési költség 390 ezer Ft, ami a minimális készletszint növelésekor 412 ezer Ft-ra növekszik, azaz az 1 tonnás minimális készletszint okozta költségnövekedés 22 ezer Ft.

10.18. példa: Valamely vállalat féléves gyártási programja megvalósításához havonta szükséges alapanyagokat és azok árait az alábbi táblázat tartalmazza.

Periódus	1	2	3	4	5	6
Szükséglet	5	7	6	3	7	4
Beszerzési ár	12	17	11	17	22	18

Mivel a raktárkapacitás korlátozott a készlet $S=10$ egységnél nagyobb nem lehet. A kezdőkészlet 2, a zárókészlet 0 egység. A beszerzési költséget szeretnénk minimalizálni, mennyit és mikor vásároljunk. Oldjuk meg a feladatot dinamikus programozással.

10.3.4 Megoldás egészértékű lineáris programozással

E modellben is feltételezzük, hogy az első periódus elején a belépő készlet 0, és az utolsó (n -edik) periódus végén nem marad készlet. Legyen ismét z_i az i -edik periódus elején gyártott mennyiség, r_i az i -edik periódus szükséglete, c a darabonkénti gyártási költség, K pedig a beállítási költség. Az utóbbi, mint tudjuk, akkor jelentkezik, ha a gyártást újra indítjuk. Vezessük be továbbá a $v_i \in \{0,1\}$ változókat, ezeknek az értéke 0, ha az i -edik periódusban nincs gyártás, azaz $z_i = 0$, és 1, ha az i -edik periódusban $z_i > 0$. A **gyártási költség** ekkor:

$$K \sum_{i=1}^n v_i + c \sum_{i=1}^n z_i.$$

Készletnek most is a periódus végén megmaradó mennyiséget tekintjük, ami kifejezhető az i -edik periódusig gyártott és felhasznált mennyiségek különbségeként. A fajlagos készlettartási költség legyen h , ekkor az összes **készlettartási költség**:

$$\begin{aligned} & h(z_1 - r_1) + h(z_1 + z_2 - r_1 - r_2) + \dots + h(z_1 + z_2 + \dots + z_n - r_1 - r_2 - \dots - r_n) = \\ & = h[n-1](z_1 - r_1) + (n-2)(z_2 - r_2) + \dots + (z_n - r_n) = h \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(z_i - r_i). \end{aligned}$$

A minimalizálandó célfüggvény a fenti költségek összege:

$$z = K \sum_{i=1}^n v_i + c \sum_{i=1}^n z_i + h \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(z_i - r_i)$$

a következő feltételek mellett

10.1. lista:

Az ekevas-gyártási probléma megoldása egészértékű lineáris programozással

```

$declare z[1..4],v[1..4]
$integer z[1..4], v[1..4]
$bound v[1..4],1
$const r[1..4] = 2 4 3 1
$const K = 200
$const c = 1000
$const h = 30
$const n = 4
{celfuggveny}
Min K $sum(i := 1 to n, v[i]) + c $sum(i := 1 to n, z[i]) + h $sum(i := 1 to n - 1, (n - i) (z[i] - r[i]))
{feltetelek}
$for j := 1 to n do
    (
        z[j] <= $sum(i := j to n, r[i] v[j])
    )
$for j := 1 to n do
    (
        $sum(i := 1 to j, z[i]) >= $sum(i := 1 to j, r[i])
    )

```

Pc-Prog version 2.00

JAN 1988

The following model was read:

Maximize - 1.1E+003 Z[1] - 1.1E+003 Z[2] - 1.0E+003 Z[3] - 1.0E+003 Z[4]
 - 200 V[1] - 200 V[2] - 200 V[3] - 200 V[4] + 510

Subject to

1. + Z[1] - 10 V[1] <= 0
2. + Z[2] - 8 V[2] <= 0
3. + Z[3] - 4 V[3] <= 0
4. + Z[4] - V[4] <= 0
5. + Z[1] >= 2
6. + Z[1] + Z[2] >= 6
7. + Z[1] + Z[2] + Z[3] >= 9
8. + Z[1] + Z[2] + Z[3] + Z[4] >= 10

Variable	Bound	Variable	Bound	Variable	Bound
V[1]	1	V[2]	1	V[3]	1
V[4]	1				

Integer variables :

Z[1]	Z[2]	Z[3]	Z[4]	V[1]	V[2]	V[3]
V[4]						

Number of constraints : 8

Number of variables : 8

Discrete variables : 8

Density of A : 28.1250%

Translation time : 0.06 secs.

Calculation Time : 0.06 sec.

Summary of Results

Value Objectfunction : 10550.00000 (adapted to minimization)

Activity Level

Z[1]	:	6.00000
Z[2]	:	0.00000
Z[3]	:	4.00000
Z[4]	:	0.00000
V[1]	:	1.00000
V[2]	:	0.00000
V[3]	:	1.00000
V[4]	:	0.00000

$$z_j \leq \left(\sum_{i=j}^n r_i \right) v_j, \text{ ahol } j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\sum_{i=1}^j z_i \geq \sum_{i=1}^j r_i, \text{ ahol } j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Alkalmazzuk a modellt az ekevas-gyártási feladatra, ahol 1000 darabot tekintünk egy egységnek és a periódusonkénti szükségletek:

Periódus	1	2	3	4
Szükséglet [r_t]	2	4	3	1

Ennek megfelelően a $K=200000/1000$ db=200 Ft, a $c=1000$ Ft/db és a $h=30$ Ft/db.

A célfüggvény:

$$z = 200(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + 1000(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + 30[3(z_1 - 2) + 2(z_2 - 4) + (z_3 - 3)].$$

A feltételi egyenletek:

$$\begin{aligned} z_1 &\leq 10v_1, \quad z_2 \leq 8v_2, \quad z_3 \leq 4v_3, \quad z_4 \leq v_4, \\ z_1 &\geq 2, \quad z_1 + z_2 \geq 6, \quad z_1 + z_2 + z_3 \geq 9, \quad z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \geq 10, \\ z_1 &\geq 0, \quad z_2 \geq 0, \quad z_3 \geq 0, \quad z_4 \geq 0, \text{ egész számok,} \\ v_1 &\geq 0, \quad v_2 \geq 0, \quad v_3 \geq 0, \quad v_4 \geq 0, \text{ egész számok,} \\ v_1 &\leq 1, \quad v_2 \leq 1, \quad v_3 \leq 1, \quad v_4 \leq 1, \text{ egész számok.} \end{aligned}$$

Pc-Prog version 2.00 programcsomaggal készített megoldás szerint a célfüggvény értéke 10550 10³Ft, a változók értékei pedig: $z_1=6, z_2=0, z_3=4, z_4=0, v_1=1, v_2=0, v_3=1, v_4=0$ (10.1. lista), ami megegyezik a dinamikus programozás *B* megoldásával (10.9. ábra).

10.4. Sztochasztikus modellek

Ebben a szakaszban olyan készletezési problémákkal foglalkozunk, amelyekben a kereslet valószínűségi változó ismert valószínűségi eloszlással, vizsgálataink egyperiódusos és többperiódusos modellekre terjednek ki.

10.4.1 Egyperiódusos modell beállítási költség nélkül

A 2.5. szakaszban tárgyalt esettanulmányban 10 sebességes kerékpárok elosztásáról volt szó, Tegyük fel, hogy a nagykereskedő igen kedvező ajánlatot kap az ismert márkájú kerékpárok beszerzésére azok termelésének leállítása miatt. Ez a lehetőség ideálisnak tűnik, mert közeleg a karácsonyi szezon, és az üzleteket értesítették, hogy a modellt nem lehet utánrendelni a termelés leállítása miatt. Minden kerékpár $c=15000$ forintba kerül, és feltesszük, hogy nincs beállítási költség. A készlettartási költség $h=-11725$ Ft kerékpáronként. Ez magában foglal 275 Ft tárolási költséget, a lekötött tőke költségét, stb. valamint -12000 Ft-ot, amelyet a nagykereskedő kaphat minden kerékpárért, ami karácsony után megmarad (maradványérték). A készlettartási költség tehát a tárolási költség és kerékpárok maradványértékének a kombinációja, ami végül is negatív értéket ad. Minden kerékpárt 22000 forintért adnak el, azaz 7000 Ft a nyereség.

Még két költséget kell megvizsgálnunk: a ki nem elégített igény büntetését és a jövedelmet terhelő költségeket. Ha a kereslet meghaladja a kínálatot, azok az ügyfelek, akiknek nem jutott kerékpár, elégedetlenek a nagykereskedővel, ami átvitt értelemben büntetést jelent. Az ezzel kapcsolatos költséget úgy szokás figyelembe venni, hogy arányos a hiánnyal. A kerékpár-példában ezt a költséget elhanyagoljuk.

Ha a nettójövedelem maximumára törekszünk, akkor a modellbe be kell építeni a bevételt is. A nettójövedelem egyenlő a bevétel mínusz a felmerült (rendelési, készlettartási, hiány, stb.) költségek. Az összbevétel egyszerűen úgy adódik, hogy az igényelt kerékpárok számának és az eladási árának (22000 forint) szorzatából levonjuk a hiány és az eladási ár szorzatát. A kereslet független a készletezési politikától, ezért a „*kereslet* $\times$ *eladási ár*” elhagyható, a hiány azonban éppen az elvesztett jövedelmet testesíti meg, tehát „*hiány* $\times$ *eladási ár*” lényeges. Az ennek meg-

felelő költség hasonlóan viselkedik, mint az elvesztett bizalom (neheztelés) miatti költség, ezért e kettő belefoglalható a ki nem elégített igény miatti költségbe. A ki nem elégített igény miatti költségét ebben a fejezetben mindig így értjük. A kerékpár-példában a ki nem elégített igény költsége egyszerűen úgy adódik, hogy 22000 forinttal megszorozzuk a ki nem elégített keresletet, ha van ilyen. (Általában a bizalom elvesztése miatti költséget, amelyet a kerékpár-példában elhanyagolunk, hozzá kell adni a jövedelem kieséshez, hogy megkapjuk a ki nem elégített igény miatti teljes költséget.)

A „*kereslet $\times$ eladási ár*” független a készletezési politikától, a nettójövedelem kifejezéséből való elhagyása azt eredményezi, hogy az összköltséget negatív értékben kapjuk meg. Ezért a nettójövedelem maximalizálása itt egyenértékű az összköltség minimalizálásával.

A ki nem elégített igény miatti költség előbbi taglalása azon alapult, hogy a nem teljesített kereslet elvész. Ha a túl keresletet pótrendeléssel elégítik ki, ugyanazok az elvek érvényesek. Az összebevételt megkapjuk, ha vesszük az eladási ár (22000 Ft) és a kereslet szorzatát mínusz a pótrendelés egységár és a kielégítetlen igény szorzatát (hiányesetén). Ha a szóban forgó nagykereskedő arra kényszerül, hogy egy másik nagykereskedőtől pótolja a hiányt, ugyancsak 22000 forintért darabonként, és ehhez darabonként még 550 Ft szállítási költség is adódik, akkor a ki nem elégített igény miatti valódi költség 22550 Ft kerékpáronként. Természetesen, más költségeket is hozzá kell számolni, ami még a bizalomvesztésből eredhet.

Az előző gondolatmenet a felmerülő költségekre összpontosított, és alig szentelt figyelmet a kerékpárok iránti keresletnek. Sajnos a nagykereskedő nem tudja pontosan, mekkora lesz a kereslet az ország nyugati területén, vagyis a kereslet valószínűségi változónak kell tekintenie. Ha a kereslet valószínűségi eloszlása ismert, akkor optimális politika meghatározható. Legyen D a kereslet, mint valószínűségi változó, és jelölje $P_D(d)$ annak a valószínűségét, hogy a kereslet éppen d :

$$P_D(d) = P\{D = d\}.$$

Feltesszük, hogy $P_D(d)$ ismert minden d -re, azaz a valószínűségi eloszlása meg van adva.

Általában a következő készletezési modellt tekintjük. Egy periódusban tételeket (árakat) vásárolnak (vagy termelnek) c Ft egységáron. A készlettartási költség egységenként h Ft, amelyet a kereslet kielégítése után megmaradt mennyiség szerint kell kifizetni (ez egyenlő a fennmaradt egységek raktározási költségének és maradványértékének a különbségével). A ki nem elégített igény miatti költség p Ft egységenként ($p > c$). Feltesszük azt is, hogy kezdetben nincs indulókészlet. Jelölje y a periódus alatt beszerzett (vagy termelt) mennyiséget, és legyen D a kereslet valószínűségi változója. (Az előző modellekben z jelölte a termelt mennyiséget, x pedig a periódus belépő készletét. Itt azért vezettük be az y jelölést, hogy azzal a rendelés utáni leendő készletre utaljunk, vagyis $y = z + x$ a rendelés utáni készlet. Mivel a kezdeti készlet nulla, azaz $x = 0$, ezért itt az y és z megegyezik.)

Ez az egyperiódusos modell olyan tételek készletezésének felel meg, amelyek (1) igen gyorsan elfogynak, mint pl. a kerékpárok a példában, vagy mint egy napilap, (2) gyorsan megromlik, mint pl. a zöldségek, (3) csak egyszer kerül raktárra, mint pl. egy repülőgép prototípusának alkatrészei, (4) bizonytalan a jövője egy időszak után.

Mindezekkel együtt felmerül az a kérdés, hogy mekkora legyen a készlet. Valószínűleg több mint a várható kereslet, de biztosan kevesebb, mint a maximális kereslet. Két kockázat között kell tehát kompromisszumot kötni: (1) ha kicsi a készlet, akkor hiány jelentkezhet és hiányköltség csökkenti a nyereséget, (2) ha nagy a készlet, akkor a rendelési és a tárolási költségek nagysága miatt keletkezik veszteség. Ésszerűnek látszik azt a készletezési szintet választani, amely minimalizálja ezeknek a költségeknek a valószínűségi értelemben vett várhatóértékét.

Az eladott mennyiséget a

$$\begin{cases} D, & \text{ha } D < y \\ y, & \text{ha } D \geq y \end{cases} = \min(D, y)$$

adja meg. Ezért a felmerülő összes költség, a D kereslet és az y készlet függvénye:

$$C(D, y) = cy + p \max(0, D - y) + h \max(0, y - D),$$

ahol p az egységenkénti hiányköltség, h az egységenkénti készlettartási költség.

Mivel a kereslet valószínűségi változó, amelynek a valószínűségi eloszlása $P_D(d)$, a költség is valószínűségi változó. A költség várhatóértéke:

$$\begin{aligned} C(y) &= E[C(D, y)] = \sum_{d=0}^{\infty} [cy + p \max(0, d - y) + h \max(0, y - d)] P_D(d) = \\ &= cy + \sum_{d=y}^{\infty} p(d - y) P_D(d) + \sum_{d=0}^{y-1} h(y - d) P_D(d). \end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy a $C(y)$ költség függ a $P_D(d)$ valószínűségi eloszlástól. Gyakran azonban nehéz megtalálni ennek az eloszlásnak a pontos alakját, különösen akkor, ha a kereslet igen sok a lehetséges értéket vehet fel. Ezért a diszkrét valószínűségi változót gyakran helyettesítjük folytonossal. Ennek további előnye, hogy a folytonos keresletre vonatkozó kifejezések könnyebben kezelhetők, mint a diszkrétre vonatkozók. Ha a keresletnek igen sok a lehetséges értéke, akkor ez a közelítés általában csak kis eltéréseket ad az optimáliskészlet értékeiben. Ezért, ha csak nem jelezzük, a fejezet hátralévő részében folytonos keresletet tételezünk fel. Ennek a folytonos valószínűségi változónak a valószínűségi sűrűségfüggvényét $\varphi_D(\xi)$ fogja jelölni. (A valószínűség-elmélet szokásos jelöléseit követjük. Ha X valószínűségi változó, amelynek $f_X(y)$ a sűrűségfüggvénye, és $g(X)$ az X -nek függvénye, akkor

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f_X(y) dy.$$

Ennek megfelelően ekkor a $C(y)$ várható költséget a

$$\begin{aligned} C(y) &= E[C(D, y)] = \int_0^{\infty} [cy + p \max(0, \xi - y) + h \max(0, y - \xi)] \varphi_D(\xi) d\xi = \\ &= cy + \int_y^{\infty} p(\xi - y) \varphi_D(\xi) d\xi + \int_0^y h(y - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi = \\ &= cy + L(y) \end{aligned}$$

kifejezés adja meg, ahol az $L(y)$ a várható hiány- és a készlettartási költség összege.

Meg kell tehát keresni azt az y^0 értéket, amely minimalizálja a $C(y)$ költségfüggvényt. Az optimális rendelési tétel nagyság (y^0) az az érték, amely kielégíti a

$$\Phi(y^0) = \frac{p - c}{p + h}$$

kifejezést, ahol $\Phi(a)$ a kereslet eloszlásfüggvénye, azaz

$$\Phi(a) = \int_0^a \varphi_D(\xi) d\xi.$$

Ennek a megoldásnak a levezetését később, e szakasz végén adjuk meg.

Ha D diszkrét, akkor eloszlásfüggvénye

$$F_D(b) = \sum_{d=0}^b P_D(d),$$

és az optimális rendelési tételegyságra hasonló eredmény származtatható. Speciálisan (diszkrét D esetén), az optimális y^0 rendelési tételegység az a legkisebb érték, amelyre az

$$F_D(y^0) \geq \frac{p-c}{p+h}$$

teljesül.

Mintapélda:

Térjünk vissza a kerékpár-példánkhoz. Tegyük fel, hogy a kereslet exponenciális eloszlású, $\lambda=10000$ várhatóértékkel, azaz a kereslet sűrűségfüggvénye:

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{10000} e^{-\xi/10000}, & \xi \geq 0 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A korábban közölt költségadatok: $c=15000$, $p=22000$ és $h=-11725$.

Minthogy a kereslet-eloszlása exponenciális, a

$$\Phi(a) = \int_0^a \frac{1}{10000} e^{-\xi/10000} d\xi = 1 - e^{-a/10000}.$$

Az y^0 optimális rendelésre azt kapjuk, hogy

$$1 - e^{-y^0/10000} = \frac{p-c}{p+h} = \frac{22000-15000}{22000-11725} = 0,6813,$$

$$e^{y^0/10000} = \frac{1}{1-0,6813} = \frac{1}{0,3187}$$

$$y^0 = 10000 \ln\left(\frac{1}{0,3187}\right) = 11435.$$

Az eredmény alapján a nagykereskedőnek 11435 kerékpárt kell a karácsonyi időszakra beszereznie. Ez a szám alig több mint a kereslet várhatóértéke.

Ha a kereslet exponenciális eloszlású λ várhatóértékkel, akkor a mintapélda alapján, az y^0 -t a következő összefüggésből határozhatjuk meg:

$$y^0 = -\lambda \ln\left(\frac{c+h}{p+h}\right).$$

A modell kezdeti készlettel

Az előző modellen végezzünk egy apró változtatást, tegyük fel, hogy a nagykereskedőnek már 500 kerékpárja van raktáron. Kérdés, hogyan befolyásolja ez az optimális készletezési politikát? Általában tegyük fel, hogy a kezdeti készlet x , és az a feladat, hogy mennyi legyen y , vagyis az eladásra szánt készlet. Ekkor $y-x$ -et kell rendelni.

Felhasználható mennyiség $(y) =$ kezdeti mennyiség $(x) +$ megrendelt mennyiség $(y-x)$

A költségegyenlet majdnem ugyanaz lesz, mint az előbb, azzal a különbséggel, hogy a $c y$ helyét most $c(y-x)$ foglalja el. A feladat tehát a következő, ha $y \geq x$:

$$\min_{y \geq x} \left[c(y-x) + \int_y^{\infty} p(\xi-y)\varphi_D(\xi) d\xi + \int_0^y h(y-\xi)\varphi_D(\xi) d\xi \right].$$

Az $y \geq x$ mellékfeltételt elő kell írni, hiszen a kezdeti készlet 0-nál kisebb nem lehet. Az optimális politika a következőképpen írható le.

Azt a készletezési politikát, amely $p > c$ esetén megoldja a

$$\min_{y \geq x} \left\{ -cx + \left[\int_y^{\infty} p(\xi-y)\varphi_D(\xi) d\xi + \int_0^y h(y-\xi)\varphi_D(\xi) d\xi + cy \right] \right\}$$

feladatot, az az

$$y = \begin{cases} y^0 \\ x \end{cases}$$

adja meg, amely mellett

ha $x < y^0$, akkor a rendelés $y^0 - x$,
ha $x > y^0$, akkor nincs rendelés.

Az y^0 -t a

$$\Phi(y^0) = \frac{p-c}{p+h}$$

összefüggés határozza meg.

Tehát ha az előző mintapéldában 500 darab van raktáron, akkor az optimális politika szerint a készletet ki kell egészíteni $y^0 = 11435$ -re, azaz rendelni kell 10935 darabot. Viszont, ha 12000 db van raktáron, akkor nem rendelni semmit.

A modell nemlineáris büntetőköltséggel

Hasonló eredményeket származtathatunk akkor is, ha a tárolási költség vagy hiányköltség nem lineáris. Legyen a tárolási költség

$$\begin{cases} h(y-D), & \text{ha } y \geq D \\ 0, & \text{ha } y < D \end{cases},$$

ahol $h()$ nem szükségképpen lineáris függvény.

Hasonlóan legyen a hiányköltség

$$\begin{cases} p(y-D), & \text{ha } D \geq y \\ 0, & \text{ha } D < y \end{cases}$$

ahol $p()$ nem szükségképpen lineáris függvény.

A várható összköltség

$$c(y-x) + \int_y^{\infty} p(\xi-y)\varphi_D(\xi) d\xi + \int_0^y h(y-\xi)\varphi_D(\xi) d\xi,$$

x a raktáron levő mennyiség.

Ha $L(y)$ a várható tárolási költség és a várható hiányköltség összege. Azaz

$$L(y) = \int_y^{\infty} p(\xi-y)\varphi_D(\xi) d\xi + \int_0^y h(y-\xi)\varphi_D(\xi) d\xi,$$

akkor a várható összköltség a következő alakban írható fel:

$$c(y - x) + L(y) .$$

Az optimális politika minimalizálja ezt a kifejezést az $y \geq x$ feltétel mellett, azaz

$$\min [c(y - x) + L(y)] .$$

Ha $L(y)$ szigorúan konvex (aminek elégséges feltétele, hogy a hiányköltség és a készlettartási költség konvex, és $\varphi_D(\xi) > 0$), akkor az optimális politikát az adja, hogy

$$\begin{cases} \text{ha } x < y^0, & \text{akkor a rendelés } y^0 - x, \\ \text{ha } x \geq y^0, & \text{akkor nincs rendelés,} \end{cases}$$

ahol y^0 az az érték, amely kielégíti a

$$\frac{dL(y)}{dy} + c = 0$$

egyenletet.

Az egyperiódusos, beállítási költség nélküli, lineáris hiány- és készlettartási költségű modell eredményeinek levezetése

Egy hasznos eredmény, amely segít a várható költségeket minimalizáló politika megtalálásában, a következő. Legyen D valószínűségi változó, amelynek a sűrűségfüggvénye

$$\begin{cases} \varphi_D(\xi) & \text{ha } \xi \geq 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Jelölje a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $\Phi(a)$, akkor a

$$\Phi(a) = \int_0^a \varphi_D(\xi) d\xi .$$

Legyen definíció szerint

$$g(\xi, y) = \begin{cases} c_1(y - \xi), & \text{ha } y > \xi, c_1 > 0 \\ c_2(\xi - y), & \text{ha } y \leq x, c_2 > 0, \end{cases} \quad \text{és}$$

$$G(y) = \int_y^\infty g(\xi, y) \varphi_D(\xi) d\xi + cy ,$$

ahol $c > 0$. Ekkor $G(y)$ annál az y^0 -nál veszi fel a minimumát, amelyre

$$\Phi(y^0) = \frac{c_2 - c}{c_2 + c_1} .$$

Ennek belátásához vegyük észre, hogy definíció szerint

$$G(y) = c_1 \int_0^y (y - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi + c_2 \int_y^\infty (\xi - y) \varphi_D(\xi) d\xi + cy .$$

Deriváljuk a $G(y)$ függvényt, és a deriváltat tegyük egyenlővé nullával, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{dG(y)}{dy} = c_1 \int_0^y \varphi_D(\xi) d\xi + c_2 \int_y^\infty \varphi_D(\xi) d\xi + c = 0 .$$

Ez maga után vonja, hogy

$$c_1 \Phi(y^0) - c_2 [1 - \Phi(y^0)] + c = 0 ,$$

mivel

$$\int_0^{\infty} \varphi_D(\xi) d\xi = 1.$$

Ennek a megoldása arra vezet, hogy

$$\Phi(y^0) = \frac{c_2 - c}{c_2 + c_1}.$$

A második deriváltra a

$$\frac{d^2 G(y)}{dy^2} = (c_1 + c_2) \varphi_D(y) \geq 0$$

feltétel minden y esetén teljesül, így a kívánt eredményhez jutottunk.

Eredményünk alkalmazásához elég megmutatni, hogy a

$$C(y) = cy + \int_y^{\infty} p(\xi - y) \varphi_D(\xi) d\xi + \int_0^y h(y - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi$$

$G(y)$ alakú.

Világos, hogy $c_1 = h$, $c_2 = p$ és $c = c$, ezért az y^0 optimális rendelési téteknagyság az az érték, amelyre a

$$\Phi(y^0) = \frac{p - c}{p + h}$$

teljesül.

Tekintsük most az esetet, amikor a kezdeti készlet x , és emlékezzünk, hogy a megoldandó feladat

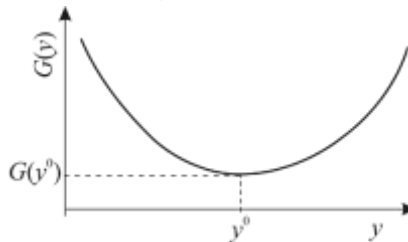
$$\min_{y \geq x} \left\{ -cx + \left[cy + \int_y^{\infty} p(\xi - y) \varphi_D(\xi) d\xi + \int_0^y h(y - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi \right] \right\}.$$

Vegyük észre, hogy a zárójelen belüli kifejezés $G(y)$ alakú, ahol $c_1 = h$, $c_2 = p$ és $c = c$. Ezért a feladat

$$\min_{y \geq x} [-cx + G(y)].$$

Mivel a $-cx$ állandó, a feladat átfogalmazható:

$$\min_{y \geq x} [G(y)].$$



10.15. ábra. A $G(y)$ függvény grafikonja

Ezért a $G(y)$ -t minimalizáló y^0 kielégíti a

$$\Phi(y^0) = \frac{p - c}{p + h}$$

egyenlőséget. Továbbá, $G(y)$ -nak konvexnek kell lennie (10.4.1. ábra), hiszen

$$\frac{d^2 G(y)}{dy^2} \geq 0.$$

Az is igaz, hogy

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{dG(y)}{dy} = c - p,$$

amely negatív, és

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{dG(y)}{dy} = h + c,$$

amely pozitív. Ezért $G(y)$ olyan alakú, mint amilyent a 10.15. ábra mutat. Tehát az optimális politika a következő:

ha $x < y^0$, akkor a készletet ki kell egészíteni y^0 -ra, mert y^0 elérhető a minimális $G(y^0)$ értékkel;

ha $x \geq y^0$, akkor nem kell rendelni, mert $y > x$ mellett minden $G(y)$ nagyobb, mint $G(x)$.

Hasonló megfontolások alapján kapható meg az optimális politika nemlineáris büntetőfüggvény esetén, ha $L(y)$ szigorúan konvex.

10.4.2. Egyperiódusos modell beállítási költséggel

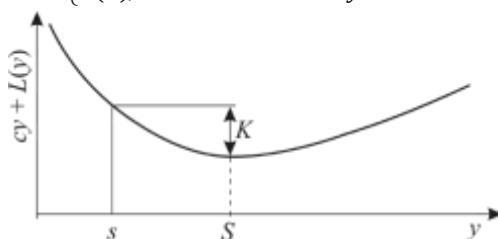
A kerékpár-példánkban eddig feltettük, hogy nincs rögzített többletköltség a karácsonyi szezonra való rendelésnél. Valójában azonban a rendelés leadásának költsége 220000 Ft, és ezt is figyelembe kell vennünk vizsgálatainknál. A beállítási költség figyelembevétele általában jelentősen megváltoztatja az eredményeket.

A beállítási költséget szokás szerint K -val jelöljük. Legyen most a hiány- és készlettartási költség lineáris. Ezek együttes hatását $L(y)$ adja meg, ahol

$$L(y) = p \int_y^{\infty} (\xi - y) \varphi_D(\xi) d\xi + h \int_0^y (y - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi.$$

A felmerülő várható összköltség így, ha y -ig rendelünk (annyit rendelünk, hogy a készlet y -ra töltődjön fel), következő:

$$\begin{cases} K - c(y - \xi) + L(y), & \text{ha } y > x, \\ L(x), & \text{ha } y = x. \end{cases}$$



10.16. ábra. A $cy + L(y)$ függvény grafikonja

Vegyük észre, hogy $cy + L(y)$ ugyanaz a várható költség, ami az előzőekben szerepelt, vagyis amikor nem volt beállítási költség. A összköltség változását a készlet (y) függvényében, a $cy + L(y)$ függvény mutatja (10.16. ábra). (Az egy periódusos, beállítási költség nélküli, lineáris hiány- és készlettartási költségű modellben $cy + L(y)$ helyett $G(y)$ szerepelt, és egzaktul megmutattuk, hogy olyan alakú, mint amilyent a 10.16. ábra mutat.) Legyen S az az y érték, amely minimalizálja a $cy + L(y)$ függvényt, legyen továbbá s az a legkisebb y^0 érték, amelyre

$$cs + L(s) = K + cs + L(S).$$

A 10.16. ábrából nyilvánvaló, hogy, ha $x > S$, akkor a

$$K + cy + L(y) > cx + L(x)$$

minden $y > x$ esetén. Ezért

$$K + c(y - x) + L(y) > L(x),$$

ahol az egyenlőtlenség bal oldala az y -ig történő rendelés várható összköltsége, a jobb oldala pedig a várható összköltség akkor, ha nincs rendelés. Tehát az optimális politika azt követeli meg, hogy $x > S$ esetén ne rendeljünk. Ha $s \leq x \leq S$, akkor megint a 10.16. ábráról látszik, hogy

$$K + cy + L(y) \geq cx + L(x), \quad \text{ha } y > x,$$

ezért

$$K + c(y - x) + L(y) \geq L(x).$$

Ismét: a nem rendelés kevésbé költséges, mint a rendelés. Végül, ha $x < s$, akkor a 10.16. ábrából az következik, hogy

$$\min_{y \geq x} [K + cy + L(y)] = K + cS + L(S) < cx + L(x),$$

vagy

$$\min_{y \geq x} [K + c(y - x) + L(y)] = K + c(S - x) + L(S) < cx + L(x),$$

tehát kifizetődő a rendelés, és akkor minimális a költség, ha S -ig rendelünk.

Az optimális politika tehát

$$\begin{cases} \text{ha } x < s, & \text{akkor } S - \text{ig kell rendelni,} \\ \text{ha } x \geq s, & \text{akkor nem kell rendelni.} \end{cases}$$

Az S értékét a

$$\Phi(S) = \frac{p - c}{p + h}$$

egyenlet határozza meg, és s az a legkisebb érték, amelyik kielégíti a

$$cs + L(s) = K + cS + L(S)$$

összefüggést.

Ez a korábban definiált (s, S) készletezési politika, amelyet kiterjedten használnak az iparban.

Mintapélda

Tekintsük ismét a kerékpár-példát, és a kereslet legyen most is exponenciális eloszlású és $\lambda = 10000$ várhatóértékkel, akkor az

$$F_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{10000} e^{-\xi/10000}, & \xi \geq 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A költségek: $K = 220000$, $c = 15000$, $p = 22000$ és $h = -11725$, így az optimális rendelési tétel nagyság:

$$y^0 = -\lambda \ln \left(\frac{c + h}{p + h} \right) = -10000 \ln \left(\frac{15000 - 11725}{22000 - 11725} \right) = 11435 \text{ db}$$

$$y^0 = S = 11435 \text{ db.}$$

Ekkor az újrendelési pontot, az s -t a következő összefüggésből számíthatjuk:

$$\begin{aligned}
 cs + p \int_s^{\infty} (\xi - s) \frac{1}{\lambda} e^{-\xi/\lambda} d\xi + h \int_0^s (s - \xi) \frac{1}{\lambda} e^{-\xi/\lambda} d\xi = \\
 = K + cS + p \int_s^{\infty} (\xi - S) \frac{1}{\lambda} e^{-\xi/\lambda} d\xi + h \int_0^s (S - \xi) \frac{1}{\lambda} e^{-\xi/\lambda} d\xi.
 \end{aligned}$$

Helyettesítve az adatokat:

$$\begin{aligned}
 15000 \cdot s + 22000 \int_s^{\infty} (\xi - s) \frac{1}{10000} e^{-\xi/10000} d\xi - 11725 \int_0^s (s - \xi) \frac{1}{10000} e^{-\xi/10000} d\xi = \\
 = 220000 + 15000 \cdot 11435 + 22000 \int_{11435}^{\infty} (\xi - 11435) \frac{1}{10000} e^{-\xi/10000} d\xi - \\
 - 11725 \int_0^{11435} (11435 - \xi) \frac{1}{10000} e^{-\xi/10000} d\xi,
 \end{aligned}$$

amelyből az

$$s = 10696 \text{ db.}$$

Az optimális politika szerint a kerékpár készletet $S = 11435$ darabra kell feltölteni, ha a pillanatnyi készlet, kisebb, mint $s = 10696$ darab, egyébként nem kell rendelni.

Közelítő megoldás, ha a kereslet exponenciális eloszlású

Érdeklődésre tarthat számot, ha általánosságban is megoldjuk a feladatot abban az esetben, amikor a D kereslet eloszlása exponenciális, azaz

$$\varphi_D(\xi) = \frac{1}{\lambda} e^{-\xi/\lambda}, \quad \text{ha } \xi > 0.$$

Legyen Δ az $S-s$ mennyiség, akkor Δ a következő egyenletből számítható:

$$e^{\Delta/\lambda} = \frac{K}{\lambda(c+h)} + \frac{\Delta}{\lambda} + 1,$$

továbbá Δ -nak jó közelítése a

$$\Delta \cong \sqrt{\frac{2\lambda K}{c+h}}.$$

Vegyük észre, hogy

$$s = S - \Delta.$$

Ezeket az eredményeket könnyen megkaphatjuk. Ha nincs beállítási költség, akkor

$$1 - e^{-s/\lambda} = \frac{p-c}{p+h},$$

vagy

$$S = \lambda \ln \left(\frac{h+p}{h+c} \right).$$

Bármely y -ra

$$\begin{aligned}
 cy + L(y) &= cy + h \int_0^y (y - \xi) \frac{1}{\lambda} e^{-\xi/\lambda} d\xi + p \int_0^y (\xi - y) \frac{1}{\lambda} e^{-\xi/\lambda} d\xi = \\
 &= (c+h)y + \lambda(h+p)e^{-y/\lambda} - \lambda h.
 \end{aligned}$$

A $cy + L(y)$ függvény értékei $y=s$ és $y=S$ esetén:

$$(c+h)s + \lambda(h+p)e^{-s/\lambda} - \lambda h = K + (c+h)S + \lambda(h+p)e^{-S/\lambda} - \lambda h,$$

amelyből a

$$(c+h)s + \lambda(h+p)e^{-s/\lambda} = K + (c+h)S + \lambda(h+p)e^{-S/\lambda}.$$

Az utóbbi egyenlet meg zárt alakban nem, csak numerikusan vagy analitikusan közelítve oldható meg. A közelítő analitikus megoldás a következő módon érhető el.

Az utóbbi egyenletet rendezve és felhasználva a $\Delta = S - s$ összefüggést a

$$e^{\Delta/\lambda} = \frac{K}{\lambda(c+h)} + \frac{\Delta}{\lambda} + 1.$$

Ha Δ/λ közel van a nullához, akkor az exponenciális függvényt Taylor-sorának első tagjával közelíthetjük, és ekkor azt kapjuk, hogy

$$1 + \frac{\Delta}{\lambda} + \frac{\Delta^2}{2\lambda} \cong \frac{K}{\lambda(c+h)} + \frac{\Delta}{\lambda} + 1,$$

amelyből a

$$\Delta \cong \sqrt{\frac{2\lambda K}{c+h}}.$$

Ez a közelítés a kerékpár példában:

$$\Delta \cong \sqrt{\frac{2 \cdot 10000 \cdot 220000}{15000 - 11725}} = 1159 \text{ db}$$

eredményt ad, amelyből $s = S - \Delta = 11856 - 1159 = 10697$ db, ami nagyon közel áll az egzakt megoldáshoz.

Modellek nemlineáris büntetőköltséggel

Hasonlóan 10.4.1.2 szakaszhoz, itt is is eléggé nyilvánvaló, hogy ezeket eredményeket kiterjeszthetjük bármilyen konvex $L(y)$ várható hiányköltségre. Ekkor $cy + L(y)$ szigorúan konvex, olyan, mint amilyent a 10.16. ábra mutat. Így az optimális rendelési politika:

$$\begin{cases} \text{ha } x < s, \text{ akkor } S - \text{ig kell rendelni,} \\ \text{ha } x \geq s, \text{ akkor nem kell rendelni.} \end{cases}$$

S értékét a

$$c + \frac{dL(y)}{dy} = 0$$

egyenlet határozza meg, és s az a legkisebb érték, amelyik kielégíti a

$$cs + L(s) = K + cS + L(S)$$

összefüggést.

10.4.3. Kétperiódusos készletezési modell beállítási költség nélkül

Az egyperiódusos modellt egy olyan kerékpár-példával szemléltettük, amelyben a nagykereskedő csak egy alkalommal tud rendelni. Igen sok esetben a rendelés periodikus, például havonta ismétlődő, és arról kell dönteni, hogy kell-e tárolni, és ha igen, akkor mennyit. A tervezési időszak lehet 2 hónap, 12 hónap, 18 hónap, vagy akármennyi. Ha csak két periódusról van szó, az egyperiódusos esetre kapott eredmény kétszeri alkalmazása nem feltétlenül adja az optimális politikát. A kétperiódusos esetre is használhatjuk az 10.3. pont alatt megismert dinamikus prog-

ramozási módszert az optimális politika megkereséséhez. Az 10.3. ponthoz viszonyítva csak az a különbség, hogy a véletlen kereslet miatt valószínűségi tulajdonságok is fellépnek.

Tegyük fel, hogy a kerékpár nagykereskedőnek lehetősége van még egyszer, mondjuk november 15-én új rendelést leadni az eredeti, október 15-én kelt rendelése után. A költségekre vonatkozó feltevéseink legyenek ugyanazok, mint az előbb.

Feltesszük azt is, hogy rendelésre a szállítás késedelem nélkül történik; az első periódus végén jelentkező hiányt (túlkeresletet) a második periódusban kielégítik (nem így a második periódus végén keletkező hiányt), a végkiárúsítás nincs megengedve. Továbbá, a két periódus, D_1 és D_2 kereslete független valószínűségi változó, azonos $\varphi_D(\xi)$ valószínűségi sűrűségfüggvénnyel. A beszerzési ár lineáris, azaz cz alakú, ahol z a rendelt mennyiség (tehát nincs beállítási költség), a hiány miatti költség és a készlettartás költség szintén lineáris, p , illetve h fajlagos költséggel.

Amint említettük, ennek a problémának nem az a megoldása, hogy kétszer egymás után alkalmazzuk az egyperiódusos megoldást. Ennél kisebb költség is elérhető, ha a problémát kétperiódusos dinamikus programozási feladatnak tekintjük. Az első periódus kezdetekor két periódus áll előttünk. A második kezdetekor egy. Az a feladat, hogy megtaláljuk az optimális politikát jellemző számokat. Látni fogjuk, ezek a számok az egyes periódusokra jellemző egy-egy számból tevődnek össze, ezeket y_1^0 és y_2^0 fogja jelölni, y_1 , és y_2 felsőindex nélkül az első, illetve a második periódus elejéig rendelt mennyiséget.

Jelölje $C_1(x_1)$ a várható költséget a kétperiódusnyi időben akkor, ha optimális politikát követünk (a költség minimális), feltéve, hogy x_1 mennyiség van raktáron. Hasonlóan, jelölje $C_2(x_2)$ a várható költséget a második periódusban, ha optimális politikát követünk, feltéve, hogy x_2 mennyiség van raktáron. Nyilván $C_1(x_1)$ az, amelyet keresünk, megtalálásához azonban, előbb meg kell találnunk $C_2(x_2)$ -t is. Az egyperiódusos modellre vonatkozó eredményünk szerint az optimális politikát a

$$\Phi(y_2^0) = \frac{p-c}{p+h}$$

egyenletből meghatározott y_2 jellemzi, azaz ha x_2 a második periódus kezdetén a raktáron levő mennyiség, akkor

$$\begin{cases} \text{ha } x_2 < y_2^0, & \text{akkor a rendelés } y_2^0 - x_2, \\ \text{ha } x_2 \geq y_2^0, & \text{akkor nincs rendelés.} \end{cases}$$

Ennek az optimális politikának a költsége:

$$C_2(x_2) = \begin{cases} L(x_2), & \text{akkor ha } x_2 \geq y_2^0, \\ c(y_2^0 - x_2) + L(y_2^0), & \text{akkor ha } x_2 < y_2^0. \end{cases}$$

$L(z)$ az egy periódus alatti várható hiány, plusz a készlettartási költség, ha z mennyiség van raktáron:

$$L(z) = \int_z^\infty p(\xi - z)\varphi_D(\xi)d\xi + \int_0^z h(z - \xi)\varphi_D(\xi)d\xi.$$

Az első periódus kezdetén felmerülő költség a $c(y_1 - x_1)$ beszerzési költségből, az $L(y_1)$ hiány és készlettartás várható költségéből és a második periódusban követett optimális politika költségéből tevődik össze. Ezért a két perióduson át követett optimális politika várható költsége:

$$C_1(x_1) = \min_{y_1 \geq x_1} \{c(y_1 - x_1) + L(y_1) + E[C_2(x_2)]\}$$

ahol $E[C_2(x_2)]$ -t a következőképp kaphatjuk meg: x_2 valószínűségi változó, amely függ a 2. periódus elején levő raktárkészlettől: $x_2 = y_1 - D_1$. Ezért a

$$C_2(x_2) = C_2(y_1 - D_1) = \begin{cases} L(y_1 - D_1), & \text{ha } y_1 - D_1 \geq y_2^0 \\ c(y_2^0 - y_1 + D_1) + L(y_2^0), & \text{ha } y_1 - D_1 < y_2^0 \end{cases}$$

A $C_2(x_2)$ is valószínűségi változó, amelynek várhatóértéke:

$$E[C_2(x_2)] = \int_0^\infty C_2(y_1 - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi = \int_0^{y_1 - y_2^0} L(y_1 - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi + \\ + \int_{y_1 - y_2^0}^\infty [c(y_2^0 - y_1 + \xi) + L(y_2^0)] \varphi_D(\xi) d\xi.$$

Minthogy a hiány megengedett, az $(y_1 - \xi)$ negatív is lehet. Vegyük észre továbbá, hogy $E[C_2(x_2)]$ valójában y_1 -nek és y_2^0 -nak a függvénye, és y_2^0 megkapható az egyperiódusos modell megoldásából. Ezért

$$C_1(x_1) = \min_{y_1 \geq x_1} \left\{ c(y_1 - x_1) + L(y_1) + \int_0^{y_1 - y_2^0} L(y_1 - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_{y_1 - y_2^0}^\infty [c(y_2^0 - y_1 + \xi) + L(y_2^0)] \varphi_D(\xi) d\xi \right\}$$

Könnyen kimutatható, hogy $C_1(x_1)$ -nek egyetlen minimuma van, ezért az optimális y_1^0 érték kielégíti a

$$-p + (p+h)\Phi(y_1^0) + (c-p)\Phi(y_1^0 - y_2^0) + (p+h) \int_0^{y_1^0 - y_2^0} \Phi(y_1^0 - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi = 0,$$

egyenletet, ahol $\Phi(a)$ az eloszlásfüggvény, azaz

$$\Phi(a) = \int_0^a \varphi_D(\xi) d\xi.$$

Ha x_1 az első periódus elején elérhető készlet, akkor az optimális politika:

$$\begin{cases} \text{ha } x_1 < y_1^0, & \text{akkor a rendelés } y_1^0 - x_1, \\ \text{ha } x_1 \geq y_1^0, & \text{akkor nincs rendelés.} \end{cases}$$

Ha a kereslet (D) valószínűségi sűrűségfüggvénye állandó (egyenletes eloszlású) 0 és t között, vagyis

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} 1/t, & \text{ha } 0 \leq \xi \leq t \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases},$$

akkor az y_1^0 -t a következő kifejezés adja meg:

$$y_1^0 = \sqrt{(y_2^0)^2 + \left[\frac{2t(c-p)}{p+h} \right] y_2^0 + \frac{t^2[2p(p+h) + (h+c)^2]}{(p+h)^2}} - \frac{t(h+c)}{p+h}$$

Végül, ha a kereslet (D) sűrűségfüggvénye exponenciális,

$$\varphi_D(\xi) = \frac{1}{\lambda} e^{-\xi/\lambda}, \quad \text{ha } \xi > 0,$$

akkor az optimális y_1^0 kielégíti a

$$(h+c)e^{-(y_1^0 - y_2^0)/\lambda} + (p+h)e^{-y_1^0/\lambda} + \frac{(p+h)(y_1^0 - y_2^0)}{\lambda} e^{-y_1^0/\lambda} = 2h+c$$

összefüggést. Egy másik módja az y_1^0 meghatározásának az, hogy bevezetjük a $z_0 = (y_1^0 - y_2^0)/\lambda$ jelölést; ekkor z_0 kielégíti az

$$e^{-z_0}[(h+c) + (p+h)e^{-y_2^0/\lambda} + z_0(p+h)e^{-y_2^0/\lambda} = 2h+c,$$

egyenletet és az

$$y_1^0 = \lambda z_0 + y_2^0$$

Mintapélda

Legyen egy termék gyártásának fajlagos költsége 2750 Ft ($c=2750$). Ha egy periódus végén marad raktárkészlet, akkor egységenként 2750 forintba kerül ($h=2750$), ha nincs maradvány, akkor nincs költség. Ha hiány mutatkozik egy periódusban, akkor 4125 Ft egységenkénti büntetőköltséget kell fizetni ($p=4125$). A kereslet egyenletes eloszlású 0 és 10 között, sűrűségfüggvénye:

$$\varphi_D \leq (\xi) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{ha } 0 \leq \xi \leq 10, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Keressük meg az optimális kétperiódusos politikát. Lineáris költségfüggvények esetén a

$$\Phi(y_2^0) = \frac{p-c}{p+h} = \frac{4125-2750}{4125+2750} = \frac{1375}{6875} = \frac{1}{5}.$$

Mivel a

$$\Phi(y_2^0) = \int_0^{y_2^0} \varphi_D(\xi) d\xi = \int_0^{y_2^0} \frac{1}{10} d\xi = \frac{y_2^0}{10} = \frac{1}{5},$$

amelyből az $y_2^0 = 10/5 = 2$.

Mivel a kereslet eloszlása egyenletes ($t=10$ paraméterrel), az optimális y_1^0 értéket a következő összefüggésből számíthatjuk:

$$\begin{aligned} y_1^0 &= \sqrt{(y_2^0)^2 + \left[\frac{2t(c-p)}{p+h} \right] y_2^0 + \frac{t^2[2p(p+h) + (h+c)^2]}{(p+h)^2} - \frac{t(h+c)}{p+h}} = \\ &= \sqrt{(2)^2 + \left[\frac{2 \cdot 10 \cdot (10-15)}{15+10} \right] 2 + \frac{10^2[2 \cdot 15 \cdot (15+10) + (10+10)^2]}{(15+10)^2} - \frac{10 \cdot (10+10)}{15+10}} = \\ &= \sqrt{4-8+184} = 8 = 5,42 \end{aligned}$$

Behelyettesítve az $y_1^0=5$ és $y_2^0=2$ értékeket $C_1(x_1)$ költségfüggvénybe, a kisebb költségértéket $y_1^0=5$ esetén kapjuk. Tehát az optimális politika így írható le: ha az x_1 kezdeti raktárkészlet nem haladja meg az 5-öt, akkor 5-ig kell rendelni (azaz a rendelés $5-x_1$), egyébként nem kell rendelni. Egy periódus múltával, a második periódus elején, ha az x_2 készlet nem haladja meg a 2-t, 2-ig kell rendelni (azaz a rendelés $2-x_2$, ahol x_2 negatív is lehet).

Ebben a kétperiódusos modellben ugyanakkora volt a büntetőköltség mind a két periódusban, noha az első periódus végén levő kielégítetlen keresletet át lehetett tolni a második periódusra, de a második periódus végén jelentkező kielégítetlen igény elveszik. Ez hiányossága a modellnek, de könnyen orvosolható azáltal, hogy különböző büntetőköltséggel számolunk az első és a második periódusban. A számítási eljárás lényegében ugyanaz marad, a változtatás nem jár külön nehézséggel.

10.4.4 Többperiódusos modellek

A kétperiódusos modellek kiterjeszthetők több, esetleg végtelen sok periódusra is. Ez a szakasz

a többperiódusos modellekre vonatkozó olyan eredményeket foglalja össze, amelyeknek gyakorlati jelentősége van.

Beállítási költség nélküli többperiódusos modell

Ez a modell a kétperiódusosnak a kiterjesztése. Tegyük fel, hogy n periódusra tervezünk, és meg akarjuk határozni az optimális készletezési politikát. Mint korábban, most is feltesszük, hogy a rendelést azonnal követi a szállítás, a hiányt a következő periódus mennyiségéből fedezzük, kivéve az utolsó periódust, a végkiárúsítás nincs megengedve. Továbbá, a periódusokban jelentkező keresletek független valószínűségi változók, azonos $\varphi_D(\xi)$ valószínűségi sűrűségfüggvény-nyel. A beszerzési ár lineáris, azaz cz alakú, ahol z a rendelt mennyiség (tehát nincs beállítási költség), az egy periódusra eső hiány miatti és tárolási költség $L(y)$. Erről feltesszük, hogy szigorúan konvex, ami teljesül, ha minden költség lineáris, és $\varphi_D(\xi) > 0$. A költségére diszkonttényezőt alkalmazunk, amelyet α jelöl: $0 < \alpha < 1$.

Az előzőhöz hasonlóan az optimális politikát az egyes periódusokhoz rendelt $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ számok jellemzik, ezeket kiszámolni meglehetősen nehéz, de az optimális politikát egyszerűen jellemzik:

Az i -edik periódus kezdetén, ($i=1,2,\dots,n$),

$$\begin{cases} \text{ha } x_i < y_i^0, & \text{akkor a rendelés } y_i^0 - x_i, \\ \text{ha } x_i \geq y_i^0, & \text{akkor nincs rendelés.} \end{cases}$$

Továbbá

$$y_n^0 \leq y_{n-1}^0 \leq \dots \leq y_2^0 \leq y_1^0.$$

A végtelen-periódusos modellben (amikor is a készletezési döntést akárhány periódusra kell meghozni) létezik egy y^0 kritikus szám, amellyel az optimális politika így írható le:

Az i -edik periódus kezdetén, ($i=1,2,\dots,n$),

$$\begin{cases} \text{ha } x_i < y^0, & \text{akkor a rendelés } y^0 - x_i, \\ \text{ha } x_i \geq y^0, & \text{akkor nincs rendelés.} \end{cases}$$

Továbbá az y^0 könnyen meghatározható, mivel az y^0 az az érték, amely eleget tesz a

$$\frac{dL(y)}{dy} + c(1 - \alpha) = 0$$

egyenletnek. Lineáris hiány (p) és készlettartási (h) költségek esetén az y^0 könnyen számítható:

$$\Phi(y^0) = \frac{p - c(1 - \alpha)}{p + h}.$$

Beállítási költség nélküli többperiódusos modell módosított változata

Az előzőek egy apró változtatással egyszerű, de érdekes eredményre vezetnek. Tekintsük az n -periódusos modellt, de most tegyük fel azt, hogy az n -edik periódus végén megmaradt készletet vissza lehet küldeni az eredeti c beszerzési árért. Hasonlóan, ha hiány (túlkereslet) van az n -edik periódus végén, azt is pótolni lehet c beszerzési áron. Ez a két módosítás valóságghúvé teszi a modellt, és ami legalább olyan fontos, meglehetősen egyszerű optimális készletezési politikát eredményez. Közelebbről, ugyanaz az y^0 szám jellemzi az összes periódust, és az optimális politika ugyanúgy írható le, mint az előbb:

Az i -edik periódus kezdetén, ($i=1,2,\dots,n$),

$$\begin{cases} \text{ha } x_i < y^0, & \text{akkor a rendelés } y^0 - x_i, \\ \text{ha } x_i \geq y^0, & \text{akkor nincs rendelés,} \end{cases}$$

ahol az y^0 kielégíti a

$$\frac{dL(y)}{dy} + c(1 - \alpha) = 0$$

egyenletet.

Természetesen ugyanez az eredmény igaz lesz a végtelen-periódusos modellre is. Ha a hiány (p) és a készlettartási (h) költségek lineárisak, akkor

$$\Phi(y^0) = \frac{p - c(1 - \alpha)}{p + h}.$$

Mintapélda

A 2.5. szakasz második esettanulmánya az ország nyugati részét ellátó kerékpár-nagykereskedőjéről szól, aki bajban van egy 10 sebességes kerékpártípus hiánya miatt. A fajlagos hiányköltséget $p=4125$ forintba becsüli. A készlettartási költség $h=275$ Ft a hónap végén megmaradt kerékpáronként. Egy kerékpár beszerzési ára $c=15000$ Ft. Minden hónap első munkanapján lehet rendelést leadni. A kereskedő minden hónapban rendel valamilyen típusú kerékpárt, ezért úgy veszi, hogy ennek a legnépszerűbb 10 sebességes kerékpárnak a rendelési költsége nulla (nincs beállítási költség). A diszkonttényező: $\alpha=0,995$. Az elmúlt időszakok tapasztalata alapján a kereslet egyenletes eloszlásúnak vehető ($t=800$):

$$\varphi_D \leq (\xi) = \begin{cases} \frac{1}{800}, & \text{ha } 0 \leq \xi \leq 800, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A kereskedő reméli, hogy hosszú ideig számíthat ennek a cikknek a forgalmára, tehát a végtelen-periódusos modellt alkalmazza. Mivel a hiány miatti és a tárolási költség lineáris, y^0 kielégíti a

$$\Phi(y^0) = \frac{p - c(1 - \alpha)}{p + h}$$

egyenletet. Mivel a kereslet eloszlása egyenletes, a

$$\Phi(y^0) = \int_0^{y^0} \varphi_D(\xi) d\xi = \int_0^{y^0} \frac{1}{800} d\xi = \frac{y^0}{800},$$

és a

$$\Phi(y^0) = \frac{p - c(1 - \alpha)}{p + h} = \frac{4125 - 15000 \cdot (1 - 0,995)}{4125 + 275} = 0,9204$$

Tehát az $y^0=800 \cdot 0,9204=736$. Vagyis, ha az x kezdőkészlet minden hónap elején kisebb, mint 736, akkor az optimális politika szerint $736-x$ kerékpárt kell rendelni; egyébként nem kell rendelni. Megjegyezzük, hogy ha ezt a politikát csak véges sok periódusra alkalmazzuk, mondjuk 24 hónapra, és

(1) a 24. hónap végén megmaradt kerékpárokat 15000 forintért el lehet adni,

(2) a 24. hónap végén jelentkező kielégítetlen keresletet pótolni lehet a beszerzési árnak megfelelő összegért, 15000 forintért (például egy másik nagykereskedőtől),

akkor a leírt $736-x$ -es rendelési politika optimális marad.

Többperiódusos modell beállítási költséggel

Valósághoz közelebb álló modellt kapunk, ha figyelembe vesszük a rendelések rögzített K beállítási költségét is. Sajnos, ekkor a matematikai formalizmus meglehetősen bonyolulttá válik, és csak az optimális politika jellemzése marad viszonylag egyszerű. Speciálisan, ha a rendelési költség $K+cz$ alakú $z>0$ esetén, és nulla, ha $z=0$, továbbá, ha $L(y)$ szigorúan konvex, akkor az optimális politika ilyen formájú lesz:

az i -edik periódus kezdetén, ($i=1,2,\dots,n$),

$$\begin{cases} \text{ha } x_i < s_i, & \text{akkor a rendelés } S_i - x_i, \\ \text{ha } x_i \geq s_i, & \text{akkor nincs rendelés.} \end{cases}$$

Ez a jól ismert (s,S) rendelési politika, amelyre már az egyperiódusos modellnél is utaltunk. Amint említettük, s_i és S_i kiszámolása, sajnos, igen nehéz mind véges, mind végtelen sok periódus esetén. Mindazonáltal nem lebecsülendő ennek az eredménynek az értéke. Még ha s_i és S_i nem is ismertek, fontos tudni, hogy ilyen formájú politikát kell alkalmaznunk, és nem más.

A (k,Q) politika a többperiódusos modellre, beállítási költség nélkül

Az előbbi modellekben a periódusok elején bármekkora mennyiséget lehetett rendelni. Most tegyük fel, hogy a következő korlátozás létezik: minden rendelési tétel valamely Q mennyiségnek a nem negatív egész számú többszöröse.

Mint eddig, most is feltesszük, hogy minden az n periódusban a keresletek azonos eloszlású, független valószínűségi változók $\varphi_D(\xi)$ valószínűségi sűrűségfüggvénnyel. A beszerzési költség lineáris, az egy periódusra eső $L(y)$, a várható hiányköltség és készlettartási költség szigorúan konvex. Az α diszkonttényező, $0 < \alpha < 1$. A készletellenőrzés a periódus kezdetén történik, azaz a készletfigyelés periodikus. A rendelés valamely rögzített Q mennyiség nem negatív egész számú többszöröse. Más szóval a rendelést valamilyen állandó nagyságú csomagméret (batch) többszöröseként kell megadni. Ha a kereslet meghaladja a kínálatot, a kielégítést eltolhatják a következő szállítmány megérkezéséig. Az utolsó periódus végén megmaradt készletet a kezdeti c beszerzési áron lehet eladni. Hasonlóan, az ekkor felmerült hiányt szintén a c beszerzési áron lehet pótolni. Ezt a modellt A. F. Veinott vezette be, és megmutatta, hogy a modellre a (k,Q) politika optimális. A (k,Q) politikát a következőképpen lehet leírni:

Ha a periódus elején a készlet kisebb, mint k , akkor Q -nak a legkisebb olyan többszörösét kell rendelni, amely a készletszintet legalább k -ra (esetleg nagyobbra) emeli, egyébként nem kell rendelni. A k paraméter minden periódusban egyenlő.

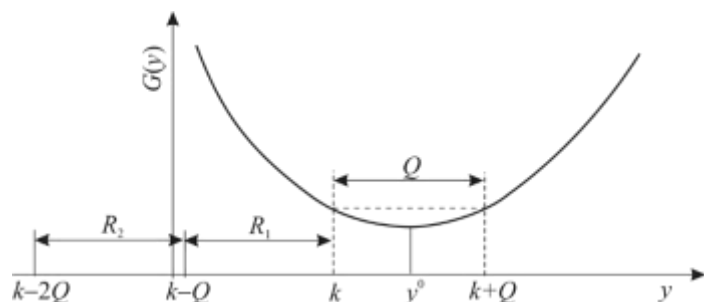
A k paramétert a következőképpen kell megválasztani: Legyen y^0 az az érték, amely minimalizálja a

$$G(y) = (1-\alpha)cy + L(y)$$

függvényt. A $G(y)$ -nak konvexnek kell lennie, mint amilyen a 10.17. ábrán látható függvény. Ekkor k olyan szám, amelyre a

$$k \leq y^0 \leq k+Q \text{ és } G(k) = G(k+Q).$$

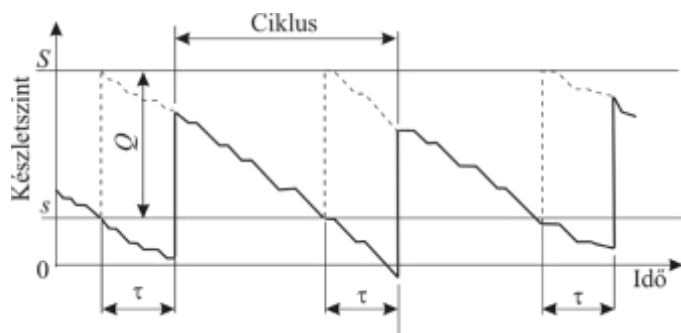
Ha a 10.17. ábra szerint egy Q hosszúságú, vízszintes egyenest illesztünk a konvexgörbére úgy, hogy az egyenes két végpontja görbén fekszik, akkor y^0 -tól balra a k az az abszcissa érték, ahol az egyenes ráül a görbére. Vegyük észre, hogy ha a kezdőkészlet (x) az R_1 sávban fekszik, akkor Q -t, ha az R_2 -ben, akkor $2Q$ -t, stb. kell rendelni.

10.17. ábra. A $G(y)$ függvény képe.

Megjegyezzük, hogy minden periódusban (végesen sok és végtelen periódus esetén is) ugyanazt a k paramétert használjuk. A végtelen esetben természetesen az utolsó periódusra nem kell kikötni semmit, sem a maradványról, sem a hiányról.

Folyamatos készletfigyelésű modell rögzített utánpótlási idővel

A 4. fejezetben ismertettük a determinisztikus, folyamatos készletfigyelésű modelleket, amelyeket gazdaságos tétel nagyságú modelleknek is neveznek. Ezekben a modellekben azt feltételeztük, hogy keresletet folytonos, azaz a készlet egy állandó paraméter (μ) szerint egyenletesen csökken. Azért neveztük ezeket folyamatos készletfigyelésű modelleknek, mert a készlet nagyságát bármely pillanatban ismerjük, és a rendelést bármikor feladható, amint a készlet eléri az újra-rendelési pontot. Ez a rendelési eljárás lényegesen különbözik a 10.4. fejezetben sztochasztikus kereslettel, valamint a periodikus készletfigyeléssel jellemezett modellekben alkalmazott eljárástól. A továbbiakban a gazdaságos tétel nagyságú modellhez hasonló modellt ismerhetünk meg azzal a különbséggel, hogy a kereslet sztochasztikus, és (s, S) típusú politikát alkalmazunk [30]. Ezt a mechanizmust csillapításos működési politikának nevezzük, amelynek fő jellemzője, hogy amikor a készlet szint s -re csökken, akkor $Q = S - s$ mennyiséget rendelünk, azaz S -re töltjük fel a készletet.



10.18. ábra. Folyamatos készletfigyelés állandó utánpótlási idővel

A keresletet követő készletmodell leírása a következő. A rendelés feladása és a szállítás befejezése közötti időtartam, az utánpótlási idő rögzített τ hosszúságú (10.18. ábra), és a τ időtartam alatt a D kereslet folytonos valószínűségi változó $\varphi_D(\xi)$ sűrűségfüggvénnyel. Feltételezzük, hogy a közepes kereslet $\mu \tau$, azaz

$$E(D) = \mu \tau,$$

ahol μ az időegységre eső várható kereslet.

Amikor a készlet eléri az s szintet, akkor $Q = S - s$ mennyiséget rendelünk, és a készlet τ idő alatt S -re töltődik fel. Ha túlereslet miatt hiány keletkezik, akkor azt a következő feltöltésből elégítjük ki, de ezt hiányköltséggel büntetjük.

A készletváltozást az idő függvényében a 10.18. ábra mutatja. Vegyük észre, hogy ez a diagram ciklusok sorozataként is felfogható, ahol egy ciklus akkor kezdődik, amikor a rendelést leszállítják, és a következő szállítás előtt fejeződik be. Ha a kereslet a τ időszak alatt nagy, akkor negatív készletszint, azaz hiány is előfordulhat. A hiányt a következő ciklusban pótolják. A 10.18. ábrán a valóságos készletszintet a folytonos vonal, az elvi készletszintet, amely a szállítási idő alatt különbözik a valóságostól, a szaggatott vonal jelzi. A szaggatott vonal által jelzett készletet **készletpozíciónak** nevezik. A készletpozíciót úgy definiálhatjuk, mint a raktáron lévő mennyiség és a megrendelt mennyiség összegéből levonjuk a hiányt pótló utánrendelést. A készletpozíció használata a készletszint mérésére kiküszöböli azt a problémát, amely akkor fordulhatna elő, ha a rendelt mennyiség nem emelné a raktáron lévő készletszintet az újrendelési pont fölé.

A modellben a következő költségeket vesszük figyelembe: a rendelési költség állandó részét (K), és a rendelt mennyiség árát (cQ) (ezeket a rendelés feladásakor kell fizetni), a készlettartási költséget, amely h Ft időegységenként és darabonként, valamint a hiányköltséget, amely p Ft, minden nem teljesített igény után. Az alkalmazott készletezési politika mellett a feladat meghatározni, milyen s szintnél mekkora Q -mennyiséget kell rendelni ahhoz, hogy az időegységre eső várható összes készletezési költség minimális legyen.

Az időegységre eső várható $C(Q,s)$ összköltség a következőkből tevődik össze: az időegységre eső $E(O_c)$ várható rendelési költség, az időegységre eső $E(H_c)$ várható készlettartási költség, és az időegységre eső $E(S_c)$ várható hiányköltség:

$$C(Q, s) = E(O_c) + E(H_c) + E(S_c).$$

A költségelemek kiszámításakor feltételezzük, hogy egyszerre csak egy rendelés van folyamatban, és az s újrendelési pont nem negatív. Az első feltevés biztosítja, hogy egy rendelés leszállítása után a rendelkezésre álló készlet mindig az újrendelési fölé esik, mert különben egyidejűleg több rendelés is futhatna. Ha p/h elég nagy, mint általában a gyakorlatban, akkor ezek a feltevések teljesülnek.

Az időegységre eső $E(O_c)$ várható rendelési költség, egyszerűen a rendelési költség és az időegységre eső várható ciklusszám szorzata. Az egy ciklusra eső rendelési költség:

$$K + cQ.$$

Az időegységre eső **várható ciklusszám** meghatározásához tegyük fel, hogy az időegység az év. Egy ciklus akkor kezdődik, amikor egy rendelést leszállítanak, és éppen a következő szállítás előtt fejeződik be. Tegyük fel, hogy $Q=500$ db/ciklus, az utánpótlási idő (szállítási csúszás) 1 hónap= $1/12$ év, az egy hónapra eső átlagos kereslet pedig 100 db/hó, vagyis éves kereslet 1200, tehát $\mu=1200$ db/év. Annak az időnek a várhatóértéke, amely alatt 500 egység fogy a készletből, nyilvánvalóan $500/1200=5/12$ év, azaz a várható ciklushossz $5/12$ év, és az egy év alatt várható ciklusszám $1200/500=12/5=2,4$. Általában a várható ciklushossz Q/μ , és az időegységre eső várható ciklusszám μ/Q , ezért az

$$E(O_c) = \frac{\mu}{Q} (K + cQ).$$

Az időegységre eső $E(H_c)$ várható készlettartási költség egyenlő a h (időegységenként és darabonként várható készlettartási költség) és az egy ciklus alatti átlagos készlet szorzatával. Felteesszük, hogy egy ciklus a tárolás tekintetében jól reprezentálja az egész időhorizontot. A 10.18. ábráról látszik, hogy a készlet a ciklus elején $Q=s-\mu\tau$, a ciklus végén $s-\mu\tau$ (feltéve, hogy a negatív készletet elhanyagolhatjuk). Ebből adódóan az egy ciklus alatti átlagos készlet közelítőleg:

$$\frac{(S - \mu\tau) + (s - \mu\tau)}{2} = \frac{S + s - 2\mu\tau}{2} = \frac{S - s + 2s - 2\mu\tau}{2} = \frac{Q}{2} + s - \mu\tau,$$

ezért az időegységre eső várható készlettartási költség

$$E(H_C) = h \left(\frac{Q}{2} + s - \mu\tau \right).$$

Az időegységre eső $E(S_C)$ várható hiányköltség az egy ciklusra eső várható hiányköltségnek és a várható ciklusszámnak a szorzata (ez utóbbról már tudjuk, hogy μ/Q). A ciklusra eső várható hiányköltség éppen p -szerese a τ időszak alatti hiányok várható számának (hiány csak akkor fordulhat elő, ha a készletszint az újrendelési pont (s) alá csökken), azaz

$$p \int_s^{\infty} (\xi - s) \varphi_D(\xi) d\xi,$$

így az

$$E(S_C) = \left[\frac{\mu}{Q} \left(p \int_s^{\infty} (\xi - s) \varphi_D(\xi) d\xi \right) \right].$$

Összegezve a $E(O_C)$, $E(H_C)$ és az $E(S_C)$ értékeit, a

$$C(Q, s) = \frac{\mu K}{Q} + \mu c + h \left(\frac{Q}{2} + s - \mu\tau \right) + \frac{p\mu}{Q} \int_s^{\infty} (\xi - s) \varphi_D(\xi) d\xi$$

Mivel két döntési változó van (Q és s), az optimális értékeket (Q^* -ot és s^* -ot) a $C(Q, s)$ két változója szerinti minimalizálással kapjuk meg, azaz a két parciális deriváltat nullává tesszük:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(Q, s)}{\partial Q} &= -\frac{\mu K}{Q^2} + \frac{h}{2} - \frac{p\mu \left[\int_s^{\infty} (\xi - s) \varphi_D(\xi) d\xi \right]}{Q^2} = 0 \\ \frac{\partial C(Q, s)}{\partial s} &= h - \frac{p\mu \left[\int_s^{\infty} (\xi - s) \varphi_D(\xi) d\xi \right]}{Q} = 0 \end{aligned}$$

Ezekből az egyenletekből:

$$(1) \quad Q^* = \sqrt{\frac{2\mu \left[K + p \int_{s^*}^{\infty} (\xi - s^*) \varphi_D(\xi) d\xi \right]}{h}}$$

$$(2) \quad \int_{s^*}^{\infty} \varphi_D(\xi) d\xi = \frac{hQ^*}{p\mu}.$$

Vegyük észre, hogy Q és s optimális értékei függetlenek a tétel rendelési egységárától, c -től.

Sajnos, explicit formában nem lehet a Q^* és s^* gyököket kiszámítani, meghatározásuk a következő iterációs eljárással lehetséges:

1. Kezdeti lépésként tegyük fel, hogy p nulla és számítsuk ki Q^* -ot az (1)-ből. Vegyük észre, hogy így éppen a determinisztikus gazdaságos tétel nagyságú modell (amelyben a hiány nincs megengedve) optimális rendelési tétel nagyságával azonos értéket kapunk.
2. Az első lépésben számított Q^* -gal oldjuk meg a (2) egyenletet s^* -ra.
3. A második lépésben kapott s^* -gal számítsuk ki újra a Q^* -t (1)-ből.
4. Ismételjük a 2. és 3. lépést mindaddig, amíg Q^* , illetve s^* egymás utáni értékei elég közel nem esnek egymáshoz.

Az eljárás gyorsan konvergál a gyökök egzakt értékéhez, ezért a gyakorlatban általában elég

néhány lépést végigszámolni.

Minthogy zártalakban az egyenleteket nem lehet megoldani, célszerű néhány speciális kereslet-eloszlást megvizsgálni. Legyen a sűrűségfüggvény **egyenletes eloszlású** 0 és t között, azaz

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{ha } 0 \leq \xi \leq t, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mivel az

$$\int_s^\infty \varphi_D(\xi) d\xi = 1 - \frac{s}{t},$$

akkor a (2) egyenlet

$$1 - \frac{s^*}{t} = \frac{hQ^*}{p\mu},$$

amelyből az

$$s^* = \frac{t(p\mu - hQ^*)}{p\mu} = t \left(1 - \frac{hQ^*}{p\mu} \right).$$

Továbbá, az (1) egyenletben az

$$\int_s^\infty (\xi - s) \varphi_D(\xi) d\xi = \frac{t}{2} + \frac{s^2}{2t} - s,$$

amit helyettesítve a

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K + \mu p t + \mu p s^{*2}}{h(t - 2\mu p s^*)}} = \sqrt{\frac{\mu}{h} \frac{2K + p t + p s^{*2}}{t - 2p s^*}}.$$

Végül, ha a kereslet sűrűségfüggvénye **exponenciális eloszlású**, azaz ha

$$\int_s^\infty \varphi_D(\xi) d\xi = e^{-s/\mu\tau}, \quad \text{ha } \xi > 0,$$

akkor a (2) egyenlet arra vezet, hogy az

$$\int_s^\infty \varphi_D(\xi) d\xi = e^{-s/\mu\tau},$$

így tehát az

$$s^* = -\mu\tau \ln \frac{hQ^*}{p\mu}.$$

Továbbá az (1) egyenletből az

$$\int_s^\infty (\xi - s) \varphi_D(\xi) d\xi = \mu\tau e^{-s/\mu\tau},$$

és a

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu K + 2\mu^2 \tau p e^{-s^*/\mu\tau}}{h}} = \sqrt{\frac{2\mu}{h} (K + \mu\tau p e^{-s^*/\mu\tau})}.$$

Mintapélda

Tekintsük a 4. fejezetben tárgyalt ekevas-gyártási példát, amelyben a beállítási költség,

$K=120000$ Ft, az ekevas ára, $c=1000$ Ft/db, a készlettartási költség, $h=30$ Ft/hó ekevasanként, a felhasználás, $\mu=800$ db/hó volt. Most azt feltételezzük, hogy a havi kereslet véletlenszerű, eloszlása egyenletes $t=0$ és 1600 között, a kereslet várhatóértéke, $\mu=800$ db/hó, az utánpótlási idő pedig $\tau=1$ hónap. A ki nem elégített igény (hiány) büntetése $p=200$ Ft ekevasanként. Határozzuk meg az optimális rendelési tétel nagyságot és az újrendelési ponthoz tartozó készlet szintet.

Az előzőleg kapott eredményeket felhasználva, először az 1. iterációs lépésben a p -t nullának vesszük, akkor a következő Q^* értéket kapjuk:

$$Q^* = \sqrt{\frac{\mu}{h} \frac{2K + pt + ps^*}{t - 2ps^*}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 800 \cdot 120000}{30}} = 2530 \text{ db.}$$

Ezzel a Q^* értékkel kiszámítjuk a 2. lépésben az s^* -ot:

$$s^* = t \left(1 - \frac{hQ^*}{p\mu} \right) = 1600 \left(1 - \frac{30 \cdot 2530}{200 \cdot 800} \right) = 841 \text{ db.}$$

A 3. lépésben, az s^* értéket felhasználva, ismét a Q^* -t számítjuk:

$$Q^* = \sqrt{\frac{800}{30} (2 \cdot 120000 + 200 \cdot 1600 + 200 \cdot 841^2 / 1600 - 2 \cdot 200 \cdot 841)} = 2885 \text{ db.}$$

Ezután megismétljük: a 2. lépést, és azt kapjuk, hogy

$$s^* = t \left(1 - \frac{hQ^*}{p\mu} \right) = 1600 \left(1 - \frac{30 \cdot 2885}{200 \cdot 800} \right) = 735 \text{ db.}$$

A további öt iterációs lépés: ($Q^*=2983$, $s^*=705$), ($Q^*=3011$, $s^*=697$), ($Q^*=3020$, $s^*=694$), ($Q^*=3023$, $s^*=693$) és ($Q^*=3024$, $s^*=693$) eredményekre vezet. Végül is a közelítő optimális rendelési tétel nagyság, $Q^*=3024$, és az újrendelési pont, $s^*=693$.

Módosítsuk most úgy a példát, hogy a kereslet legyen exponenciális eloszlású, $\mu=800$ várhatóértékkel. Az iteráció 1. lépése most is $Q^*=2530$ -at eredményez, amiből a második lépésben az adódik, hogy

$$s^* = -\mu \lambda \ln \frac{hQ^*}{p\mu} = -800 \cdot 1 \cdot \ln \frac{30 \cdot 2530}{200 \cdot 800} = 597 \text{ db}$$

Ezzel az s^* -gal az iteráció 2. lépésében azt kapjuk, hogy a

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mu}{h} (K + \mu \lambda p e^{-s^*/\mu\tau})} = \sqrt{\frac{2 \cdot 800}{30} (120000 + 800 \cdot 1 \cdot 200 \cdot e^{-597/800})} = 3232 \text{ db.}$$

A második és a harmadik lépést ismételve, néhány iteráció után a megoldás: az optimális rendelési tétel nagyság, $Q^*=3453$ db, és az újrendelési pont, $s^*=348$ db.

10.4.5 Többtermékes készletezési modellek

Az előzőekben olyan készletezési modellekkel foglalkoztunk, amelyek egy termékfeleségre vonatkoztak. A valóságban azonban a legtöbb készletezési rendszerben sokféle termék van egyidejűleg jelen, amelyek különféleképpen hatnak egymásra, például a közös tárolási és költségvetési korlátozásokon, valamint a termék helyettesítésen keresztül. Az egytermékes modellek eredményei azonban igen fontosak, mert betekintést nyújtanak a többtermékes problémák megoldásaiba, és sokszor még az is lehetséges, hogy egy N -termékes feladatot felbontsunk N darab egytermékes modellek együttesére, anélkül, hogy az optimalitás csorbát szenvedne. (Ez akkor lehetséges, ha a termékekre vonatkozó kereslet és a költségek függetlenek egymástól.) Léteznek eredmények olyan többtermékes modellekre is, amelyek nem bonthatók így fel. Például egyes modellekben egyetlen termék több helyen történő tárolása úgy tekinthető, mint különböző termékek

tárolása [30].

Van olyan többtermékes modell is, amely a többperiódusos, beállítási költség nélküli egytermékes modellel analóg. Ez a többtermékes modell N terméket és m különbözőfajta keresletet tartalmaz. A keresletfajták egy periódusban az időbeli felmerülésükkel, termékigényükkel, elfogadható helyettesítésükkel stb. jellemezhetők. A költségekre tett szokásos feltevésekkel az optimális politikát minden egyes termékre meghatározott tételszám jellemzi: ha x_{ik} az i -dik periódusban a k -dik termékből meglévő készlet, akkor y_{ik} -ig kell rendelni, ha $x_{ik} < y_{ik}$ egyébként nem kell rendelni (feltéve, hogy kezdetben $x_{1k} \leq y_{1k}$ minden k -ra).

E modellnek sok hasznos alkalmazása ismert. Például tegyük fel, hogy két terméket készletezünk, és az 1-es termék helyettesítheti a 2-est, valamint minden nem teljesített igény elvész. Ha azt a készletezési politikát választjuk, hogy a 2-es termék kielégítetlen igényét az 1-es termékkel elégítjük ki (ha ez lehetséges), megkaphatjuk az optimális politikát jellemző számokat. Ezt a példát úgy is felfoghatjuk, mint egy termék kétlépcsős készletezési modelljét, ahol a 2. lépcsőn ki nem elégíthető igényt az első lépcsőre küldik át. Egy másik alkalmazás két olyan termékre vonatkozik, amelyek bármelyike helyettesítheti a másikat. A ki nem elégített igény itt is elvész. A készletezési politika szerint bármelyik termék iránti kielégítetlen igényt a másiból elégítjük ki (ha ez lehetséges). Ezt a példát úgy is felfoghatjuk, mint egy termék két helyen történő tárolását, ahol a periódus végén az egyik helyen levő feleslegből (ha van) elégítjük ki a másik helyen levő kielégítetlen igényt (ha van).

A többtermékes készletezési modellek egy másik változata is ismert. Ebben a 2. terméket azért tárolják, hogy az 1. termék előállítását biztosítsák. Például, ha az 1. termék gépkocsi, a 2. lehet a futómű vagy a munkaerő. Az optimális politika megadja az 1. és a 2. termékből az i -dik periódusban termelendő mennyiségeket, amely bizonyos feltételek mellett minimalizálja a költségeket.

10.19. példa: Egy újságárus az újságot 60 Ft-ért szerzi be, és 75 Ft-ért adja el. A hiány miatti költség 75 Ft/db újságonként (mert a hiány pótolása kiskereskedelmi áron történik). A készlet-tartási költség 0,3 Ft/db. A kereslet eloszlása egyenletes 200 és 300 darab között. Határozzuk meg a beszerzendő újságok optimális számát.

10.19. példa megoldása

A feladat az egyperiódusos beállítási költség nélküli sztochasztikus modellel írható le. A példában $c=60$, $p=75$, $h=0,3$, és a kereslet eloszlása egyenletes, amelynek sűrűségfüggvénye:

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq \xi \leq b \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases},$$

mivel $a=200$ és $b=300$, a

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & \text{ha } 200 \leq \xi \leq 300 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye, ha $a < \xi < b$

$$\Phi(y^0) = \int_a^{y^0} \varphi_D(\xi) d\xi = \int_{200}^{y^0} \frac{1}{100} d\xi = \left[\frac{\xi}{100} \right]_{200}^{y^0} = \frac{y^0}{100} - 2.$$

Az optimális rendelési tételnagyság (y^0) az az érték, amely kielégíti a

$$\Phi(y^0) = \frac{p-c}{p+h}$$

függvényt. Helyettesítve a p , c és h költségeket, a

$$\Phi(y^0) = \frac{75-60}{75+0,3} = 0,1992.$$

Az eloszlásfüggvény értékét felhasználva, az

$$\frac{y^0}{100} - 2 = 0,1992,$$

amelyből az optimális rendelés:

$$y^0 = 100 \cdot (0,1992 + 2) = 219,92 \text{ db.}$$

10.20. példa: Tegyük fel, hogy egy repülőgép-pótalkatrész iránti D kereslet exponenciális eloszlású, $\lambda=50$ várhatóértékkel, a kereslet sűrűségfüggvénye, így

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\xi/\lambda}, & \text{ha } \xi \geq 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

A repülőgép gyártása egy éven belül megszűnik, ezért célszerű most legyártani az alkatrészek szükséges mennyiséget. A termelési költség most darabonként 300000 Ft (azaz $c=300000$), de 3000000 Ft lesz a gyártás leállítása után (azaz $p=3000000$). A készlettartási költség, amelyet a periódus végén megmaradt alkatrészek után kell fizetni, darabonként 90000 Ft. Határozzuk meg a legyártandó alkatrészek számát.

10.20. példa megoldása

A feladat modellezésére az egyperiódusos beállítási költség nélküli sztochasztikus modell használható. A kereslet sűrűségfüggvénye:

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{50} e^{-\xi/50}, & \text{ha } \xi \geq 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Mivel a kereslet exponenciális eloszlású, az eloszlásfüggvény:

$$\Phi(y^0) = \int_0^{y^0} \varphi_D(\xi) d\xi = \int_0^{y^0} \frac{1}{50} e^{-\xi/50} d\xi = 1 - e^{-y^0/50}$$

Az optimális rendelési tétel nagyság (y^0) az az érték, amely kielégíti a

$$\Phi(y^0) = \frac{p-c}{p+h}$$

függvényt. Helyettesítve a p , c és h költségeket, a

$$\Phi(y^0) = \frac{3000000-300000}{3000000+90000} = 0,8738.$$

Az eloszlásfüggvény értékét felhasználva, az

$$1 - e^{-y^0/50} = 0,8738,$$

amelyből az optimális rendelés:

$$e^{-y^0/50} = 1 - 0,8738 = 0,1262,$$

$$e^{y^0/50} = \frac{1}{0,1262},$$

$$y^0 = 50 \cdot \ln\left(\frac{1}{0,1262}\right) = 103,49 \text{ db.}$$

10.21. példa : Egy pékség naponta lát el élelmiszerüzleteket kenyérrel. A kenyér ára darabonként 120 Ft. A társaság a friss (az eladás napján sütött) kenyeret 180 Ft-ért adja az üzleteknek. Az el nem adott kenyeret visszaszállítják a társaságnak. A társaságnak van egy részlege, amely egy vagy több napnál régebbi kenyeret árusít darabonként 90 Ft-ért. Ez az összeg egyben a készlettartási költséget is jelenti. A ki nem elégített igény miatti költség becslült értéke darabonként 120 Ft. A kereslet egyenletes eloszlású 1000 és 2000 darab között, kérdés, mennyi a naponta sütendő kenyerek optimális száma?

10.22. példa: Egy diák, aki operációkutatással foglalkozik, a saját döntéseit szeretné optimalizálni. Most is egy ilyen döntést vizsgál, nevezetesen azt, mennyi pénzt vegyen fel a bankbetétjéből, hogy utazási csekket vásároljon egy nyári amerikai utazáshoz. Ugyanis már 360000 Ft-ért vásárolt utazási csekket, de lehet, hogy ez nem lesz elég. A következő táblázat mutatja, hogyan becsülte meg a költségeinek valószínűségi eloszlását:

Költség (ezer Ft)	300	330	360	390	420	450	480	510
Valószínűség	0,05	0,10	0,15	0,25	0,20	0,10	0,10	0,05

Ha történetesen kevesebbet visz, mint kellene, akkor minden 30000 Ft hiány 1 héttel megrövidítené amerikai útját, minthogy minden ott töltött hétre 45000 Ft-ot szánt, az elvesztett hetek 15000 Ft veszteséget jelentenének neki. Viszont minden 30000 Ft után az utazási csekk 300 forintjába kerül. Továbbá minden egyes ilyen az utazás után megmaradt csekk a kamatok (amelyet a bankban levő pénze hozna) elmaradása miatt 600 Ft veszteséget jelent, tehát a diák nem akar túl sok utazási csekket váltani.

Határozzuk meg ezekből az adatokból az optimális döntést arra vonatkozóan, még hány 30000 forintos utazási csekket kell beszereznie.

10.5. Összefoglalás

A bemutatott készletezési modellek meglehetősen egyszerűek, de jól mutatják az általános készletezési modellek természetét. Továbbá, jól visszatükrözik sok valóságos készletezési probléma tulajdonságait, ezért hasznosak a gyakorlatban is. Például a gazdaságos tétel nagyságú formulákat igen széles körben alkalmazzák, bár néha olyan módosítással, hogy sztochasztikus keresletet is figyelembe lehessen venni. A sztochasztikus keresletet is megengedő több-periódusos modellek igen fontosak a követendő politikák jellemzése szempontjából, például tudjuk, hogy ez a politika (s, S) típusú, noha az s és a S optimális értékeinek a kiszámítása nehézségekbe ütközhet. Mindazonáltal sok készletezési problémában kikerülhetetlen bonyodalmakkal találkozunk, ilyen például a termékek egymásra hatása. Ismeretes néhány összetett modell az ilyen problémák tárgyalására, de itt még széles a szakadék az elmélet és a gyakorlati alkalmazás között. A készletezési adatok számítógépes feldolgozása, a tudományos készletmenedzsment alkalmazásával párhuzamosan folyamatosan fejlődik.

10.6. Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse a készletezés okait, milyen kérdésekre ad választ a készletezési elmélet!

2. Milyen zavarokat okozhat a készlethiány és milyen következményekkel jár?
3. A készletezés helye az ellátási-láncban.
3. Ismertesse a rendelési vagy gyártási költség leírására alkalmas függvényeket!
4. Milyen költségelemeket tartalmaz a készlettartási költség?
5. Mit jelent a pótolható és a nem pótolható kielégítetlen igény?
6. Értelmezze a maradványértéket és a diszkontálást a készletezéssel összefüggésben!
7. Ismertesse a készletezési mechanizmusokat!
8. Csoportosítsa a készletezési modelleket!
9. Mit jelent a folyamatos készletfigyelés és az optimális rendelési tétel nagyság?
10. Rajzolja le a folyamatos készletfigyelésű modellek $Q(t)$ diagramjait készlethiány kizárása és megengedése esetén!
11. Hogyan módosulnak a folyamatos készletfigyelésű modellek diagramjai véges feltöltési kapacitás esetén?
12. Mutassa be a rendelési tétel nagyság függvényében változó rendelési költség esetén követendő eljárást!
13. Ismertesse a periodikus készletfigyelés fogalmát, értelmezze a költségeket!
14. Írja fel a *Wagner* és *Whithin* modell költség függvényét és korlátozó feltételeit!
15. Alkalmazza a dinamikus programozást a *Wagner* és *Whithin* modell megoldására!
16. Hogyan egyszerűsíthető a dinamikus programozási eljárás állandó gyártási költség esetén!
17. Mutassa be, hogyan korlátozható a maximális- és minimális készlet, illetve a periódusonkénti maximális gyártás!
18. Oldja meg a *Wagner* és *Whithin* problémát egészértékű lineáris programozással!

Jegyzetek, kérdések

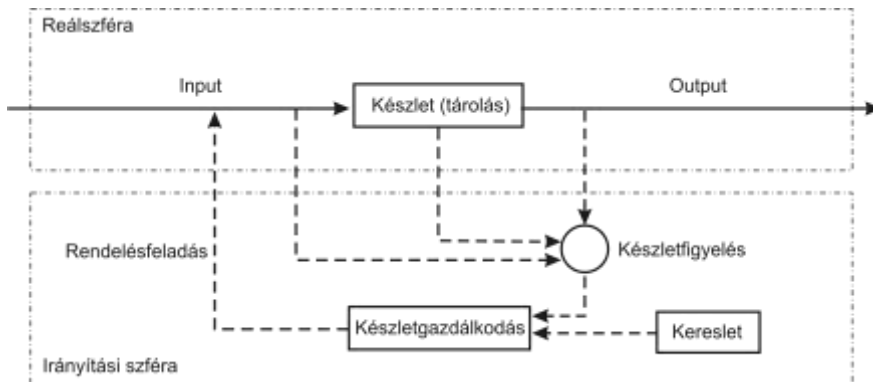
11. A VÁRHATÓ IGÉNYEK ELŐREJELZÉSE

Készletekre tulajdonképpen az input és az outputfolyamatban mutatkozó eltérések miatt van szükség. A készletekkel az outputoldalon felhasználói igényeket szolgálunk ki, ami a rendszerben készletcsökkenést eredményez. Annak érdekében, hogy a készletek az adott időpontban a szükséges mennyiségben rendelkezésre álljanak, azok pótlásról az inputoldalon gondoskodunk (11.1. ábra).

A készletezési rendszer a reál és irányítási szférában működik (11.1. ábra). A reálszférában a készletezés fizikai folyamati a beszállítás, tárolás és kiszállítás. Az irányítási szférában a készletek változásáról a készletfigyelés tájékoztatja a készletgazdálkodást, amely a kereslet vagy igények ismeretében rendelésfeladással korrigálja a készletszintet. A készletezési rendszer tehát a termelés, illetve a fogyasztás folyamatos és stabil működéséhez a szükséges mennyiségű árukészletek (anyagok, félkész-termékek, termékek, stb.) fenntartásával járul hozzá.

Az igények gyakran véletlenszerűen jelentkeznek és nem szabályozhatóak, például a kiskereskedelemben. Ha megengednénk, hogy az inputoldalon az utánpótlás is irányítás nélküli legyen, akkor a készletek kiszámíthatatlanul alakulnának, ezért a készletezés szükségszerűen irányított folyamat és az inputfolyamat irányítása a készletgazdálkodáson keresztül valósul meg.

A készletgazdálkodás működéséhez szükséges információk különbözőek lehetnek. Ha az outputok, illetve az ebből adódó készletváltozás alapján hozunk utánpótlási döntést, akkor **viisszacsatolásos** (feedback), ha a jövőben várható fogyasztást jelzik előre, akkor **előcsatolásos** (feedforward) irányításról beszélünk. A gyakorlatban sokszor e két irányítási elv kombinációja valósul meg. A determinisztikusnak tekinthető termelési folyamatokban gyakran állandó időközönként (ciklusonként) ugyanakkora mennyiségeket rendelnek.



11.1. ábra. A készletezési rendszer modellje

Könnyen belátható, hogy a készletezési rendszer mozgatórugója a kereslet vagy az igény. (Itt az igény és kereslet között nem teszünk különbséget.) Az igény az outputoldalon húzóhatást gyakorol a készletre, amelynek fontos jellemzői a mennyiség, illetve annak időbeli változása. Az igény realizálása csökkenti a készletet, ami az inputoldalon megrendelést generál. A készletezés számára ezért nélkülözhetetlen információ az adott anyagra vonatkozó, időben változó igény nagyság ismerete.

Az készletezés tárgyát képező anyagok különböző szempontok szerint csoportosíthatók, amelyek közül az igények előrejelzése szempontjából az egyik legfontosabb, hogy az

adott anyag iránti igény nagysága függ-e más anyagokra vonatkozó igényektől vagy sem. Az olyan anyagokat, amelyek felhasználása között **nem tárható fel függőség** (arányos felhasználási igény) **független keresletűeknek** nevezzük. Ilyen anyagok a göngyölegek, a munkaruha, az irodaszerek, vagy az üzemanyagok. Ezeknek a beszerzése egymástól függetlenül, önállóan szervezhető.

Az anyagok másik csoportjánál az igények összefüggenek, és arányos felhasználási igény állapítható meg. Ezek a **függő keresletű** anyagok, amelyeket egymáshoz viszonyítva meghatározott arányban használjuk fel. Például egy előre gyártott elemekből készülő kétajtós szekrény összeszereléséhez egy korpusz, két ajtó, 4db polcelem, 8 db kicsapó pánt, 16 db csavar stb. szükséges. Vagyis ezekből az adatokból pontosan kiszámítható, hogy z db szekrény gyártásához hány darab ajtóra, polcelemre, kicsapó pántra, csavarra, stb. lesz szükség.

A függő és független keresletű anyagokra vonatkozó igények előrejelzése, illetve tervezése eltér egymástól, vagyis az anyagigény meghatározásakor követett eljárás függ attól, hogy függő vagy független keresletű anyagról van szó.

Független keresletű anyagok (késztermék, általános anyagok) igénytervét előrejelzéssel, például a várható igények vállalati szintű felmérésével lehet megalapozni. A függetlenségen azt értjük, hogy más ismert anyagigényből a várható igényt nem tudjuk kiszámítani.

Függő keresletű anyagok (adott termék előállításához szükséges alapanyagok, alkatrészek, félkész termékek, stb.) esetén az igények a különböző anyagnormák, beépülési fák alapján pontosan meghatározhatóak.

Az anyagszükséglet felmérésekor nem egyforma részletességgel vizsgáljuk az anyagokat. Az anyagigények meghatározásakor különböző elemzéseket, számításokat végzünk. Azonban tekintettel az anyagok számára, ami akár több ezer féle is lehet, nem célszerű minden anyagra azonos nagyságú figyelmet fordítani, és minden anyagot azonos mélységben elemezni. Általában anyagscsoportokat képezünk, és azokat a súlyuknak vagy fontosságuknak megfelelően kezeljük. A csoportosítás különböző tulajdonságok szerint történhet. Az operatív munkavégzés szempontjából például lényeges csoportosítási szempont az anyagok értéke vagy forgalma. Az érték vagy forgalom szerinti csoportosítás eszköze lehet az ABC analízis. Egy másik szempont lehet például a vámtarifaszám, rövidítve VTJ (Vámtarifafa Termék Jegyzék) szerinti csoportosítás. A termelési folyamatban betöltött funkció szerint az anyagok lehetnek: alapanyagok, segédanyagok, energiahordozók, üzemfenntartási anyagok, késztermékek.

Az anyagszükséglet meghatározásakor alapvetően a tervidőszak elképzeléseiből, és a tervekből indulunk ki. A szükségletszámításnak ma már kialakult módszerei vannak, amelyek algoritmusai beépültek a számítógéppel támogatott termelésirányítási rendszerekbe. A több szintes beépülések szükségletszámításának alapvető eszköze a beépülési fa. Ennek alkalmazását később egy példában részletesen bemutatjuk.

11.1. A függetlenigények meghatározása előrejelzéssel

A készletezési politikák sokszor a szóban forgó cikkek eladásának vagy hasznosításának valamely előrejelzésén alapulnak. Az **előrejelzés** minden sikeres készletezési rendszer lényeges összetevője. Hangsúlyozzuk azonban, hogy az előrejelzés nem végtermék, hanem döntések meghozatalának egyik eszköze.

Előrejelzést tehetünk kvalitatív vagy kvantitatív módon (11.2. ábra). Az előbbi esetben az előrejelzés általában egy vagy több szakértő személyes véleménye vagy ítélete, és ezt véleményalkotásnak nevezzük. Például egy nagyobb kutatóegyetem minden szeptember-

ben összehívja vezető közgazdászait, hogy kikérje véleményüket a következő tanévben várható inflációról, aminek ismerete elengedhetetlen a költségvetés elkészítéséhez. Az eredmény általában a közgazdászok hosszú vitái után megegyezéssel születik meg.



11.2. ábra. Függetlenigények előrejelzési módszerei

Két különböző kvantitatív előrejelzési módszer használatos. Mindkettő, az **idősor-analízis** és a **regresszió-analízis** is ismert statisztikai módszer. Egy statisztikai idősor egyszerűen valamely valószínűségi változó számértékeinek a sorozata egy időintervallumban. Például egy meghatározott cikk napi piaczárasi készlete egy év folyamán idősort alkot. Az **idősor-analízis** olyan módszereket használ, amelyek a megfigyelt adatok alapján a szóban forgó valószínűségi változó jövőbeli értékeire adnak előrejelzést. Például a 10 sebességes kerékpárt forgalmazó nagykereskedő a pontosabb tervezéshez negyedéves eladási előrejelzést szeretne készíteni. Ehhez adatokkal rendelkezik az előző negyedévek forgalmáról, azaz rendelkezésre állnak a negyedéves eladásokat jellemző valószínűségi változó értékei, amelyekből előre jelezhetők a következő negyedév vagy negyedévek várható eladásai.

A **regresszió-analízisben** az előre jelezni kívánt változót (a függő változót) más (független) változók függvényében fejezzük ki. Például egy könyv teljes forgalma egy időszakban összefüggésbe hozható az időszak alatti postai rendelésekkel. Az előző időszak postai rendeléseinek és a teljes forgalomnak az adatai alapul szolgálhatnak egy jövőbeli időszak teljes forgalmának az előrejelzésére a korábbi postai rendelések ismeretében.

Az említett előrejelzési módszerek persze kombinálhatók egymással. Általában a véleményalkotást az idősor-analízissel együtt alkalmazzák.

Irányultság szerint az előrejelzés lehet:

- külső (például: az úthálózat várható fejlesztése),
- belső (például az eszközök várható élettartama).

Tárgya, tartalma szerint lehet:

- műszaki (például az újabb telekommunikációs technológiák megjelenése, környezetvédelmi előírások),
- gazdasági (például az infláció jövőben alakulása);
- értékesítési (például várható kereslet).

Az előrejelzésre szolgáló módszerek különböző elveken alapulnak (11.2. ábra).

11.1.1 Kísérleti módszerek

A kísérleti módszerek tényleges piaci műveletek elemzésén alapulnak. Ezek a következők:

Vevői és beszállítói felmérések. A leendő beszállítók megkérdezésén alapul. A kérdések vonatkozhatnak például a partnereknél várható fejlesztésekre, a kapacitásuk jövőbeni alakulására.

Tesztbeszerzés, próbavásárlás. Próbavásárlással jelezzük előre a beszállító várható viselkedését, a termék vagy szolgáltatás jellemzőit.

11.1.2 Véleményalkotás

Véleményalkotás során minták feldolgozásával juthatunk olyan információhoz, amiből a jövőre lehet következtetni. A mintavétel azt jelenti, hogy bizonyos személyeket kérdezzünk meg. A véleményalkotás ezért és természeténél fogva szubjektív, és alapja a szak tudás, az intuíció, a jártasság, és a tapasztalat. Általában kvalitatív kritériumokon nyugvó előrejelzést eredményez. A szokásos eljárás: összehívják a szakértők egy csoportját, akik megvitatják a problémát, majd közös véleményt alakítják ki, ami az előrejelzés alapja.

A beszerzők megkérdezése. Ez az előrejelzés a beszállítókkal közvetlen kapcsolatban álló beszerzők tapasztalatait használja. A múltbeli viselkedés felhasználható a jövőre vonatkozó elképzelések megismeréséhez is.

Brainstorming. Az ötletviharnek fordítható brainstorming az egyik legismertebb és régen használt módszer. A módszer alapfeltételezése, hogy a társas helyzet serkentőleg hat a lehető legjobb ötletek kitalálására. Társas helyzetben a résztvevők elvileg egymást motiválják és kölcsönösen erősítik a kitűzött célprobléma megoldását. A sok ember jelenlétének és véleményének köszönhetően több szempont kerül előtérbe, így lehetőség nyílik a probléma komplexebb átgondolására is.

Az ötletek továbbgondolhatóak és valószínűsíthető, hogy sokkal színesebb megoldások születnek, mint amit egy személy önmaga ki tud találni. Ráadásul az ötleteket integrálni lehet, egymásra lehet építeni, ami még inkább segíti a jó megoldások megtalálását. A módszer sikerének záloga a nyitott légkör, a szabad ötlet- és véleménynyilvánítás. A felszabadult hangulat nagymértékben növelheti a szellemi munkát végző csoport hatékonyságát. Ez persze csak akkor működik, ha a csoport tagjai között elfogadó és együttműködő viszony alakul ki, mindenki elfogadja azt a feltételezést, hogy rossz ötlet nincs. Olyan körülményeket kell teremteni, hogy a gátlóhatásokat kiküszöböljük. Gátlóhatások lehetnek: kényelmetlen környezet, bántó kritika, stb. Ezek a feltételek fontos alappillérek a módszer hatékonyságának.

Egy klasszikus brainstorming folyamat első lépése a probléma felvetés, a probléma megoldására vonatkozó kérdés vagy kérdések megfogalmazása, amire kreatív megoldásokat kellene keresni – itt kezdődik minden. Fontos a probléma és kérdések pontos, célirányos megfogalmazása. Például egy beszerzéssel kapcsolatos kérdések a következők lehetnek:

Hány évig biztosítható még az alapanyag *a* termékhez a *b* piacról?

Mikor kerül az *a* termék életgörbéje hanyatló ágba?

Mennyi lesz az igény az *a* termékből jövőre?

A jelenleg beszerzett alapanyaghoz képest milyen hasonló, új, alapanyag megjelenése várható?

Hogyan alakul a beszállítók kapacitása a következő három évben?

Milyen változások várhatók a belső igényekben?

A brainstorming-ban laikusok és szakértők egyaránt részt vehetnek. Azonban a résztvevők kiválasztásakor lényeges szempont az érintettség és a hozzáértés, ez ugyanis nagyobb valószínűséggel biztosítja az elköteleződést és a lelkesedést a feladat iránt. Ha a korábban leírt körülmények adóttak, akkor az adott probléma megoldásával kapcsolatban

mindenki és egymás előtt szabadon fejtheti ki a véleményét, javaslatait.

Az ötletelés általában nem lesz hasznos, ha parttalanul zajlik, ezért kell egy vezető, aki koordinálja a folyamatot. Nem szükséges, hogy a koordinátor a formális vezető legyen, sőt, hasznosabb, ha egy semleges személy vállalja fel ezt a szerepet. A koordináláson túl a vezető a folyamat végén összegzi, és az érintettek felé kommunikálja a munka vég-eredményét, továbbá feladata, hogy már a folyamat elején közölje, és mindvégig betartassa a szabályokat, melyek jellemzően a következők:

Mindenki azért van jelen, mert fontos a részvétele.

Egyszerre egy témával kapcsolatban zajlik az ötletelés.

Tilos egymás ötletének minősítése, azaz nem megengedett sem a nyílt egyetértés, sem a kritizálás. Erre mind verbális, mind nonverbális szinten figyelni kell.

A legvadabb ötleteket is mondják ki bátran.

Minden javaslat feljegyzésre kerül.

A feljegyzett ötleteket tovább lehet gondolni, azok fejleszthetők.

A folyamat utolsó lépése mindig az ötletek hasznosításának átgondolása, megtervezése. A flip chartra előzetesen felvázolt ötleteket a csoport jó, ha közösen értelmezi, minősíti, csoportosítja. A minősítés során át kell gondolni, melyek az átfedésben lévő vagy az egymást kizáró elemek, és mérlegelni kell ezek elvetésének, továbbfejleszthetőségének kérdését.

A brainstorming második menete az ötletek kiválogatása, kritikája. Ebben a megkérdezettek együttesen szűkítik és fejlesztik tovább egymás ötleteit. A brainstorming írásos változatát brainwriting-nak hívják.

Szakértői csoport. Az előrejelzésre gyakran szakértők véleményét használjuk fel és ezek összesítésével alakítunk ki jövőképet. A szakértők többféle módon dolgozhatnak. A két lehetséges példát emelünk ki:

önállóan, egymástól függetlenül monográfia jellegű szakvéleményt készítenek, és ezeket összesítjük,

szakértői értekezleteket, konferenciát szervezünk, és a szakértők összegző véleményt készítenek.

A vélemények kifejtésére ezen kívül még más módszerek is alkalmazhatóak, pl. a videokonferencia egyre gyakrabban alkalmazott eszköz.

A szakértőicsoport-módszerre példa azoknak a korábban említett egyetemi közgazdászoknak csoportja, akiket megkértek, hogy előrejelzést adjanak az inflációról.

Delphi módszer. Talán a legfontosabb véleményalkotási eljárás az ún. *Delphi módszer*. Ugyanúgy, mint a szakértőicsoport-módszernél, itt is a szakértők egy csoportjáról van szó (de nem együttes ülésükről). A csoportot egy vagy több döntéshozó vezeti, akik végül is felelősek az előrejelzés elkészítéséért. A döntéshozó munkáját segítő csapat a módszerrel kapcsolatos feladatokat koordinálja, értékeli. Ilyen feladatok például a kérdőívek összeállítása, az beérkező adatok feldolgozása, kiértékelése és a jelentéskészítés.

A Delphi módszer kérdőívet küld a szakértőknek, és a kitöltött kérdőíveket kiértékeli. Az első kérdőív eredményei alapján összeállítanak egy másodikat, amelyet az előző kérdőív eredményeivel együtt megküldenek ugyanazoknak a szakértőknek. A visszaérkezés után a második kérdőívre adott véleményeket is kiértékeli, és a két kérdőív eredményei alapján a döntéshozók, saját tapasztalataikat is felhasználva, megalkotják az előrejelzést. A Delphii módszer kulcsa az első kérdőív szolgáltatott információk visszacsatolása. Így minden szakértő olyan információkhoz juthat, amelyek korábban nem voltak a birtoká-

ban, és a második kérdőív kitöltésekor minden szakértő ugyanazokkal az információkkal rendelkezik.

Természetesen a Delphi módszer sikere a kérdőívek összeállításának minőségén múlik. Ha szükségesnek látszik, esetleg kettőnél többször is megismételhető a kérdőív kiküldés, például ha igen nagy az eltérés az első két kérdőívre adott válaszokban, és remény van arra, hogy a második kérdőívből nyert információ alapján a harmadik kérdőív válaszai egységesebbek lesznek.

A Delphi-módszer kivitelezéséhez ma már remek kommunikációs eszközök állnak rendelkezésre. A korábban alkalmazott telefon és fax mellett az internet új lehetőségeket nyitott. A számítógép hálózatok lehetővé teszik nagy terjedelmű dokumentumok gyors, olcsó továbbítását.

11.1.3 Idősor analízis

Empirikus és elméleti idősorok

Valamely időben lejátszódó jelenség egymást egyenlő időközökben követő időpontokban mért, megfigyelt értékeinek egymásutánját **empirikus idősornak** nevezzük. A megfigyelések sorrendjének itt fontos szerepe van, annál is inkább, mert az egymást követő empirikus adatok rendszerint nem függetlenek egymástól. Ez az oka annak, amiért az idősorok modellezése külön fejezete a statisztikai törvényszerűségek feltárásával foglalkozó módszertani könyveknek.

Az élet legkülönbözőbb területén találkozhatunk idősorok formájában jelentkező adatokkal, így például a gazdasági kategóriák időbeli alakulására vonatkozó megfigyelések, egyes biológiai, pszichológiai, orvosi megfigyelések, kísérletek, meteorológiai jelenségek, geofizikai, csillagászati mérések gyakran ilyen típusúak. Például egy bizonyos áru előző évi napi zárókészletei, a 2010. januártól 2014. decemberig tartó időszakban a negyedévi munkanélküliség értékei, az ország nyugati felét 10 sebességes kerékpárokkal ellátó nagykereskedő utolsó három negyedévi eladásai idősorokat alkotnak.

Előfordulhat az is, hogy a rendező elv nem az idő, hanem valamely más paraméter, például adott esetben a fonal hossza, amikor is a fonalszakadások gyakoriságának a megfigyelése, regisztrálása a feladat. Természetesen az alkalmazandó módszert ez a körülmény nem befolyásolja, ezért általánosságban idősorokról és idősorok elméletéről beszélünk.

A vizsgált jelenségek, változók egy része „folytonosan” létező, s ezért (legalábbis elvben) bármely időpontban megfigyelhetjük, regisztrálhatjuk értéküket, míg mások eleve csak bizonyos időpontokban vehetnek fel értékeket. Léteznek tehát olyan mennyiségek, amelyek (vagy definíciószerűen, vagy természetükből adódóan) csak bizonyos időpontokban léteznek (ilyen például a GDP, a csapadékmennyiség stb.).

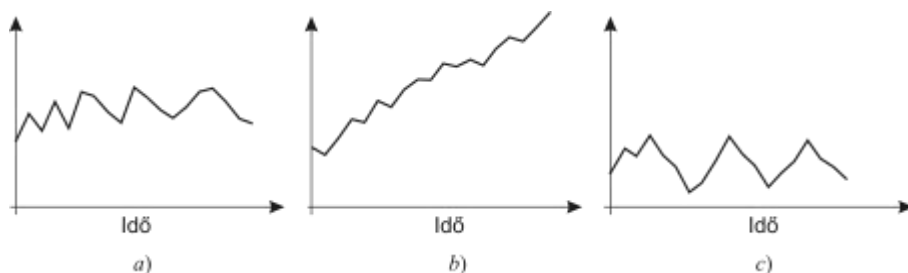
Az **empirikus idősor** és az **elméleti idősor** (folyamat) egymástól eltérő, de egymással szorosan összefüggő fogalom. Arról a koncepcióról, amely e megkülönböztetést lehetővé és egyben szükségessé teszi, külön kell szólni.

Amikor valamely időben változó jelenségre vonatkozóan megfigyeléseket, méréseket végzünk, feltesszük, hogy a kapott adatok, az **empirikus idősor** mindazon információkat tartalmazza, amelyek alapján a megkonstruálható **modell**. A modell lényegében ugyanolyan törvényszerűségek szerint működik, mint maga a sztochasztikus folyamat, amely a megfigyelt értékeket generálta. Ebben az értelemben tehát az (empirikus) idősorok valamely (diszkrét vagy folytonos paraméterű) sztochasztikus folyamat realizációi.

Az idősorok ábrázolása

Az empirikus idősorok statisztikai elemzésének egyik első lépése lehet az adatok ábrázo-

lása. Egy idősor viselkedését megjeleníthetjük grafikusán, oszlopgrafikával, vagy táblázattal. Általában az első lehetőség a leglátványosabb és a legpraktikusabb. Ekkor az adatokat egy olyan derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk, amelyben a vízszintes tengelyen az idő, a rá merőleges tengelyen pedig valamely alkalmasan választott egységben kifejezve a megfigyelt adatok értékei szerepelnek (11.3. ábra). Az ábrázolás eredményeként kapott pontthalmaz gyakran jó tájékoztatást ad az empirikus idősor néhány (elsődlegesen szembetűnő) alapvető tulajdonságáról, így például arról, van-e valamilyen jellegzetes tendencia (trend), ciklikusság, szezonális vagy véletlen ingadozás az idő-sorban. A 11.2/a) ábra állandó szint körül váltózó idősort mutat, a b) ábra szerinti idősor lineáris tendenciájú, amelyre véletlen változások szuperponálódnak, és a c) ábrán szezonális hatások figyelhetők meg.



11.3. ábra. Tipikus idősorok

A trendillesztés általános elvi kérdései

Mint hogy az idősor a múlt leírása, ezeket az adatokat a jövő előrejelzésre csak valamilyen logikai eljárással hasznosíthatjuk. Ha a múlt egyszerűen ismétlődik a jövőben, vagyis a múlt adatai megmutatják, mit várhatunk a jövőben, akkor felállíthatjuk a folyamatot jellemző **matematikai modellt**. Ha ez a modell ismert, akkor feltételeesen elfogadva bizonyos paraméterek előrejelzésre használhatók. Ha a modellt nem ismerjük, a múlt adatai akkor is sugallhatnak valamilyen tendenciát.

Egy idősor általában egyenlő időközökben mért vagy megfigyelt értékek sorozata. Ezt az időközt egységnek tekintve, a sorozat $t=1, 2, 3, \dots$ időpontokban $X_1, X_2, X_3, \dots$ valószínűségi változókkal adott, ahol a t időponthoz tartozó érték X_t . Az X_t valószínűségi változók megfigyelt, empirikus értékei legyenek a t időpillanatokban: $x_1, x_2, \dots, x_t$.

Az X_t valószínűségi változót –például egy napi árat– jellemezzük a következő összefüggéssel:

$$X_t = h_t + e_t,$$

ahol X_t a valószínűségi változó értéke a t pillanatban, h_t az idősor viselkedésétől függő kifejezés és e_t a véletlen hiba. A h_t függvény a folyamatot leíró matematikai kifejezés sokféle lehet. Nézzünk erre néhány speciális példát.

Tegyük fel, hogy

$$h_t = \frac{1}{3} X_{t-1} + \frac{1}{3} X_{t-2} + \frac{1}{3} X_{t-3} = \frac{X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3}}{3}.$$

Ez a kifejezés azt mutatja, hogy a h_t az utolsó három megfigyelés mozgóátlaga.

Ha viszont

$$h_t = \alpha X_{t-1} + (1-\alpha)X_{t-2},$$

akkor a h_t az utolsó két megfigyelés súlyozott mozgóátlaga, ahol az $0 < \alpha < 1$ a súlyozó

tényező.

Végül az utolsó példa szerint legyen

$$h_t = A + Bt.$$

Ekkor h_t az időnek elsőfokú (lineáris) függvénye, A tengelymetszettel és B meredekséggel.

Az

$$X_t - h_t$$

különbségeket **maradványoknak** nevezzük. Ezeknek valószínűségi értelemben ugyanúgy kell viselkedniük, mint az e_t véletlen hibának. Ha nem úgy viselkednek, akkor a modell nyilvánvalóan nem megfelelő.

Más példákat (modelleket) is könnyen lehet kreálni. Amikor egy modell paramétereit teljesen ismerjük, például az α súlyozó tényezőt, akkor az $X_1, X_2, \dots, X_t$ múltbeli adatokból előállíthatjuk a megfelelő h_t értékeket bármelyik modellben, és az $X_1, X_2, \dots, X_t$ ismeretében a h_{t+1} segítségével az X_{t+1} értéket is előre jelezhetjük.

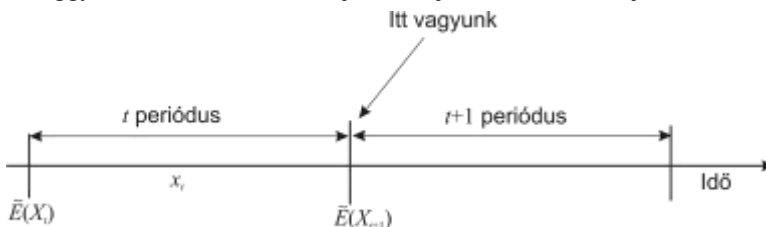
A legtöbb valószínű esetben a modell egzakt formája nem ismert, sőt akkor is, ha ismerjük a modell egzakt formáját, a modell paraméterei még ismeretlenek lehetnek. Például, ha tapasztalatból tudjuk, hogy a modell a súlyozott közép, általában nem ismerjük az α súlyozó tényező pontos értékét. Az előrejelzési eljárásban a modellt kiválasztása után általában az $X_1, X_2, \dots, X_t$ múltbeli adatokat használjuk arra, hogy valamiféle optimális becslést adjunk a paraméterekre. Ha magát a modellt sem ismerjük, akkor is léteznek bizonyos eljárások az előrejelzésre; ilyen például a *Box-Jenkins-féle* módszer, amelyről később rövid ismertetést adunk.

Előrejelzés idősorokkal

A folyamatot leíró modell és a becslésre használt előrejelzési eljárás nem teljesen azonos fogalmak. Nagyon ésszerűnek látszana az előrejelzési eljárást a folyamatmodell alapján megválasztani, de ezt a munkaigényes előkészítés miatt ritkán alkalmazzák. Ehelyett általában olyan előrejelzési módszert választanak, amely igen egyszerű, és része valamilyen számítógépes programcsomagnak, ezért gyakran kevés köze van a tényleges modellhez. Például, a munkanélküliségi arány előrejelzésére használhatunk egy olyan eljárást, amely az utolsó négy negyedév átlagán alapul, tekintet nélkül arra, hogy a

$$X_t = \frac{X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3} + X_{t-4}}{4}$$

előrejelzési eljárás (a mozgóátlag) a modellre vonatkozó idősort megfelelően követi vagy sem. Valójában, ahogy az várható, az eredeti modellre időszakos illesztést kell alkalmazni, ezért az ilyen mozgóátlagos előrejelzés pontatlan lehet. Ennek a szakasznak a hátralevő részét a leggyakrabban használt előrejelzési eljárásoknak szenteljük.



11.4. ábra. Az idősor jelölései

Az **előrejelzési feladat egy idősorra** a következőképpen fogalmazható meg. Adott a

valószínűségi változóknak egy $X_1, X_2, \dots$ sorozata (vagyis egy sztochasztikus folyamat) $E(X_1), E(X_2), \dots$ várhatóértékekkel. A valószínűségi változók eloszlása lehet azonos, de változhat is valamilyen szabály szerint. A valószínűségi változók lehetnek függetlenek és nem függetlenek is. A valószínűségi változók megfigyelt értékeit $x_1, x_2, \dots, x_t$ jelöli. Ezek ismeretében kell az $E(X_{t+1})$ jövőbeni várhatóértéket megbecsülni (11.4. ábra). A becült értéket, amely egy jövőbeni időszakra adott előrejelzést jelent, $\tilde{E}(X_{t+1})$ fogja jelölni.

Egy modell elfogadásáról döntést az előrejelzési hiba nagysága alapján hozhatunk. A múltbeli adatokat többféle módszerrel tesztelhetjük, és azt a módszert választjuk, amelynél az előrejelzési hiba a legkisebb. Az összegzett történeti hibák mérésére a két leggyakrabban használt mérőszám az átlagos abszolút eltérés (MAD) és az átlagos négyzetes hiba (MSE). A MAD az átlagos abszolút hiba, a MSE az átlagos négyzetes hiba. A különbség a kettő között az, hogy az egyik azonos súlyokat használ minden hibára, míg a másik súlyozza a hibákat a négyzetes értékek arányában. Az MSE, ellentétben a MAD-dal, büntető előrejelzési technika, a nagyobb hibát súlyosabban bünteti, mint a kisebbet.

Az **átlagos abszolút hiba (MAD)**:

$$MAD = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{E}(X_i)|$$

Az **átlagos négyzetes hiba (MSE)**:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_i - \tilde{E}(X_i)]^2$$

Sem a MAD sem az MSE nem mérlegeli, hogy a hiba pozitív, vagy negatív (alábecsült vagy túlbecsült). A MAD kifejezi előrejelzési hiba mértékét, de nem jelzi annak irányát. Az előrejelzési hibák irányának jelzésére a *bias*-t használjuk, amely a tendenciát méri, ami jelzi, hogy az előrejelzés következetesen felülbecsült vagy alulbecsült. Az ideális előrejelzési módszernél a MAD és a *bias* egyaránt nulla. A *bias* (eltérés) kiszámítása a következő képlettel történik:

$$bias = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_i - \tilde{E}(X_i)].$$

A pozitív *bias* az alulbecslést, míg a negatív *bias* a felülbecslést jelzi. Az előrejelzés pontatlanságát (a hibát) tehát a MAD és a *bias* együttesen mérik.

A következő hét előrejelzési eljárás, amelyeket példákkal is illusztrálunk, igen gyakran használt az iparban. Az első 4 eljárásban a

$$X_t = h_t + e_t,$$

összefüggésben a h_t csak az idősor $X_1, X_2, \dots, X_t$ múltbeli adataitól és az eljárás paramétereitől függ és független az időtől, amit állandó szintű becslésnek is neveznek.

11.1. példa: Egy kisvállalkozás egy nagykereskedő beszállítójaként az utóbbi három évben, negyedévenként a 11.1. táblázatban megadott darabszámban állított elő és értékesített egy bizonyos terméket. Az újévben azt szeretné tudni, hogy várhatóan mennyi terméket kell gyártania negyedévenként.

(1) Az utolsó értékre alapozott előrejelzési eljárás. A kerékpár kereskedő az utolsó negyedév eladásából (x_t) becslíti a következő negyedév várható keresletét, az $E(X_{t+1})$ -t, azaz ekkor

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = x_t$$

a jövőbeni, $t+1$ -edik időszakra adott előrejelzés. Ez a becslés meglehetősen durva, való-

színűleg nagy a szórása, mert egyelemű mintán alapul. Alkalmazása csak akkor indokolt, ha nincsenek múltbeli adataink, vagy a feltételes eloszlás szórása igen kicsi és/vagy a folyamat oly gyorsan változik, hogy a jelen helyzetet illetően a t pillanat előtt bármi lényegtelen vagy félrevezető.

11.1. táblázat

Negyedév, (i)	Eladás, (x_i) (db)
1	2700
2	3270
3	3530
4	3750
5	4040
6	4110
7	3860
8	4300
9	4690
10	4380
11	5000
12	4836

A 11.1 példa megoldása az utolsó értékre alapozott előrejelzési eljárás szerint:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = x_t = 4836 \text{ db.}$$

(2) Átlagoló előrejelzési eljárás. A kerékpár kereskedő felhasználja a múltra vonatkozó összes adatát a jövőbeli eladások előrejelzésére, vagyis úgy dönthet, hogy a jövő időszakra adott előrejelzés:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t x_i,$$

ahol: t a periódusok száma az idősorban, x_i az i -dik periódus megfigyelt értéke. Ez a becslés egyszerű és megfelelő, ha a folyamat stabil. Legyünk tekintettel arra, hogy a nagyon régi adatok esetleg torzíthatják a becslést, másrészt túl sok adattal amúgy is körülményes dolgozni, ezért a régi adatokat nem érdemes felhasználni.

A 11.1. példa megoldása az átlagoló előrejelzési eljárás szerint:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t x_i = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} x_i = 4038,83 \text{ db.}$$

(3) Mozgóátlagokra alapozott előrejelzési eljárás (MA). Az egyszerű mozgóátlagolást stacionárius idősorokra (ha a stacionárius idősorok bizonyos állandóságot mutatnak, és trendmentesek) lehet alkalmazni. A $t+1$ -edik időpontra vonatkozó előrejelzés n tagú mozgóátlaggal a következő módon számítható:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \frac{x_t + x_{t-1} + \dots + x_{t-n+1}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n+1}^t x_i,$$

ahol x_i az i -dik periódus megfigyelt értéke, n a periódusok száma a mozgóátlagban.

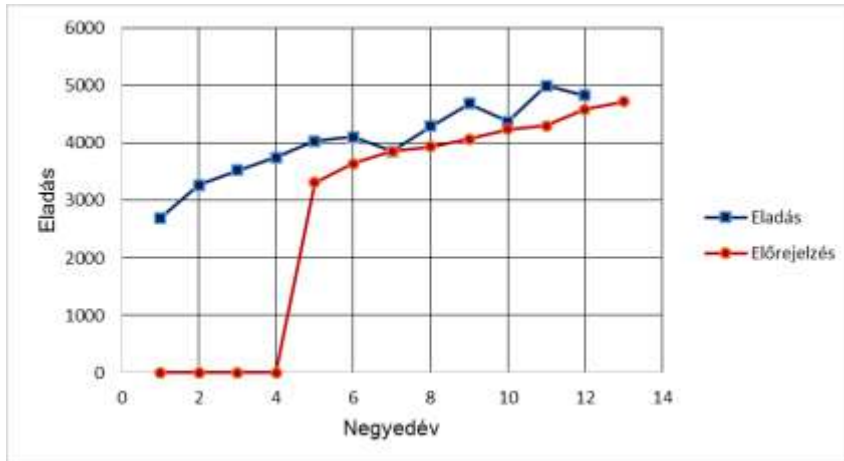
Ez a becslés csak az utolsó n periódus adatait használja. Könnyen naprakész állapotban tartható: az első megfigyelést elhagyjuk, és az utolsót hozzávesszük. Ez az eljárás magában foglalja az előző eljárások előnyeit, ugyanakkor csak a viszonylag új, és több periódus megfigyelési adatait használja fel. Hátránya az, hogy azonos súllyal veszi figyelembe a vizsgált periódusok x_i értékeit, pedig az ember azt várná, hogy az újabb adatok nagyobb súllyal essenek latba. Az n értékét tapasztalati úton lehet meghatározni, leggyak-

rabban 3 és 8 közé esik.

A **11.1. példa megoldása** a mozgó átlagokra alapozott előrejelzési eljárás szerint, ha $n=4$:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n+1}^t x_i = 4726,5 \text{ db.}$$

A példában a várható eladások tendenciája a mozgóátlagok alapján a *11.5. ábrán* látható.



11.5. ábra. A várható eladások tendenciája a mozgóátlagok alapján

(4) Előrejelzési eljárás exponenciálisan súlyozott mozgóátlaggal (EWMA)

Az exponenciálisan súlyozott mozgóátlag, más néven **exponenciálissimítás** a mozgó átlag egy speciális formája, amelyben a múltbeli adatok nem egyenlő súllyal szerepelnek. A múltbeli adatok súlya az életkoruk növekedésével geometrikusan csökken, azaz, az újabb adatok súlya nagyobb, mint a kevésbé újaké.

A mozgóátlag technika, mint azt láttuk, azt feltételezi, hogy csak az utolsó n időszaknak van hatása az előrejelzésre. Ezzel szemben az EWMA egy olyan modell, amely megfelelő súlyokkal az összes adatot felhasználja, ami csak jobb lehet annál, mint ami elveti azokat. Ugyanakkor az EWMA utolsó előrejelzése minden korábbi adat hatását tartalmazó szám, ezért csak egy számot kell megőrizni, ami képviseli a korábbi előrejelzések történetét, és így az eljárás nem igényel nagyszámú múltbeli adatot.

A legegyszerűbb EWMA modell az új átlagos igényt vagy előrejelzési szintet a tárgyidőszakra ($t+1$) az előző előrejelzésből, $\tilde{E}(X_t)$ és az előző időszak előrejelzési hibájából (e_t) határozza meg. Az utóbbi az előző időszak aktuális igénye (x_t) és az előző időszakra készített előrejelzés, $\tilde{E}(X_t)$ különbsége. Az előrejelzés:

$$\begin{aligned} \text{pillanatnyi előrejelzés} &= \text{előző előrejelzés} + \alpha \cdot (\text{előző aktuális igény} - \text{előző előrejelzés}) = \\ &= \alpha(\text{előző aktuális igény}) + (1-\alpha)(\text{előző előrejelzés}). \end{aligned}$$

A szokásos jelölésekkel:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \tilde{E}(X_t) + \alpha[x_t - \tilde{E}(X_t)] = \alpha x_t + (1-\alpha)\tilde{E}(X_t),$$

ahol: $e_t = x_t - \tilde{E}(X_t)$ az előző előrejelzés hibája, és α a simítótényező.

Az exponenciálissimítás tehát csak két adatot használ fel a következő periódus előrejelzéshez. Az egyik, az utolsó megfigyelt vagy mért érték x_t , a másik az utolsó, a t -edik pe-

riódus előrejelzése (becsült értéke), $\tilde{E}(X_t)$. Vegyük észre, hogy a kifejezés első alakja szerint a $t+1$ -edik időszak előrejelzése, $\tilde{E}(X_{t+1})$, az előző előrejelzés, valamint az előző előrejelzés súlyozott hibájának összege. A **simítótényező** értéke $0 < \alpha < 1$, amelynek a választására később visszatérünk.

Az exponenciálissimítás tehát egy speciális mozgó átlag, és ezért nevezik exponenciálisan súlyozott mozgóátlagnak (Exponentially Weighted Moving Average, EWMA). Azért speciális mozgóátlag, mert a múltbeli adatok átlagban az adatok súlya változik.

Bármelyik formulát is használjuk, az előrejelzést egyszerű kiszámítani, mert a t pillanat előtti adatokat nem kell megőrizni, csak az utolsó x_t , és az utolsó periódusra becsült $\tilde{E}(X_t)$ előrejelzés szükséges a számításhoz. Az Excel a formula második alakját használja az exponenciálissimításra.

Az exponenciálissimítás egy rekurziós eljárás, amely n számú periódusra a következő formában is megadható:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-2} + \dots + \alpha(1-\alpha)^n x_{t-n} + (1-\alpha)^{n+1} x_{t-n+1}.$$

Ebből a formából nyilvánvaló, hogy az exponenciálissimítás a legnagyobb súlyt az utolsó megfigyelésre (x_t -re) helyezi, a korábbi megfigyelésekre pedig csökkenő súlyokat.

A mozgóátlag technika és az EWMA modell (trend vagy szezonális hatásoktól mentes) között, pontosabban a periódusok száma (n) és a simítási tényező (α) között közvetlen kapcsolat mutatható ki. A mozgóátlag érzékenysége úgy csökken, ahogy az időszakok száma (n) növekszik. Az EWMA érzékenysége pedig úgy csökken, ahogy az α értéke csökken. Valójában, ha a mozgóátlagban n a periódusok száma, akkor a hozzá tartozó EWMA simítási tényező:

$$\alpha = \frac{2}{n+1} \text{ vagy } n = \frac{2-\alpha}{\alpha}$$

Így a mozgóátlag modell ($n=7$ periódussal) egyenértékű egy $\alpha=0,25$ simítási tényezővel jellemzett, trend vagy szezonális hatások nélküli EWMA modellel.

Végül, az exponenciálissimítás hatékonyságának a mértékét is meg tudjuk adni, ha a folyamat teljesen stabil, azaz ha $X_1, X_2, \dots$ azonos eloszlású, független valószínűségi változók, amelyek szórása σ . Ekkor az előrejelzés hibájának varianciája:

$$\text{var} \approx \frac{\alpha \sigma^2}{2-\alpha} = \frac{\sigma^2}{(2-\alpha)/\alpha}.$$

Az előző megállapítás alapján statisztikailag a szórásnégyzet is ekvivalens egy $(2-\alpha)/\alpha$ megfigyelésre vonatkozó mozgóátlaggal. Például, ha $\alpha=0,1$ és $(2-\alpha)/\alpha=19$, akkor az exponenciálissimítás módszere ekvivalens $n=19$ periódusos mozgóátlagra alapozott eljárással. Meg kell azonban jegyezni, hogy az exponenciálissimítás érzékenyen reagálhat arra, ha az említett feltételeink nem teljesülnek.

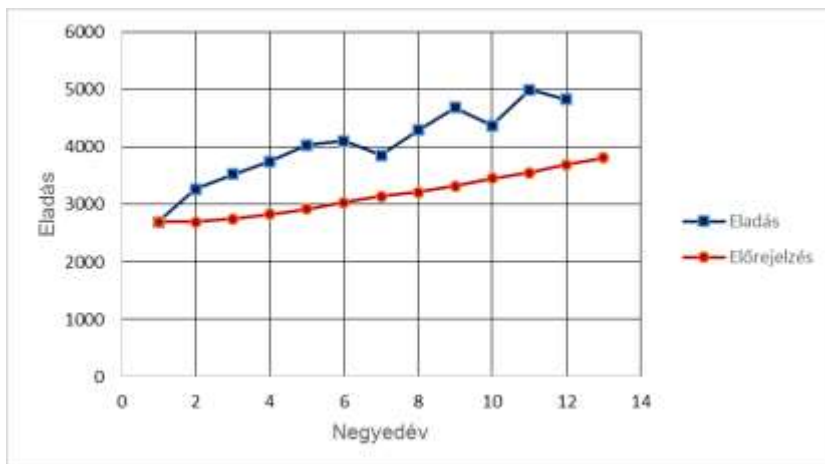
A 11.1. példa megoldása az exponenciálissimításra alapozott előrejelzési eljárás szerint, ha $\alpha=0,1$:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \alpha x_t + (1-\alpha)\tilde{E}(X_t) = 3811,48 \text{ db.}$$

A példában várható eladások tendenciája az exponenciálissimításnak köszönhetően követi a tényleges eladások tendenciáját, azonban az előrejelzés nagyon alulbecsült (11.6. ábra).

Az exponenciális simítás modellje a kereslet hirtelen és nagy változásaira lassan reagál,

az eljárás azt feltételezi, hogy az ilyen változások csak véletlenszerűek. (Később megmutatjuk, hogy az eljárást könnyen tendenciához, szezonális hatásokhoz vagy mindkettőhöz lehet igazítani). Ha a tényleges keresletnövekedést vagy -csökkenést tükröző változások a következő időszakokban is folytatódnak, akkor az exponenciálissimítás a tényleges keresletet jól nyomon követi.



11.6. ábra. A várható eladások tendenciája exponenciálissimítással

A válasz érzékenységet a kereslet változásaira a simítási tényező (α) értéke határozza meg. Amikor az előrejelző rendszerben α értéket kicsi, akkor a túlfeszített kereslet csak nagyobb biztonsági készlettel elégíthető ki. A megfelelő a simítótényezőt nehéz megválasztani. Az exponenciálissimítást úgy is tekinthetjük, mint egy statisztikai szűrőt, amely egy sztochasztikus folyamat nyers (megtűkelt) adataiból az átlagok időben változó, kisimított becsléseit szolgáltatja. Ha α -t kicsire választjuk, a válasz lassan változik, sima becslésekkel. Ha viszont α nagy, akkor a válasz gyorsan változik, nagy varianciával. Ezért a folyamat stabilitásának függvényében kell megfelelő α -t kiválasztani. Továbbá, a simítótényező „jó” értéke függ a szóban forgó sztochasztikus folyamatától is.

Az α értéke lehetőleg ne haladja meg 0,3-at, és úgy tűnik, a legjobb választás általában 0,1 körül van. Természetesen lehet nagyobb is, esetleg csak időlegesen, pl. ha például szokatlan változás várható.

Az exponenciálissimítás alkalmazásához meg kell becsülni a kezdeti előrejelzést, ezt nevezzük **kezdő becslésnek**. Az eljárás indításakor a 2. periódus előre jelzésére a megfelelő közelítés

$$\tilde{E}(X_2) = \alpha x_1 + (1 - \alpha)(\text{kezdő becslés}),$$

ahol a (kezdő becslés)-t különböző megfontolások alapján lehet megválasztani.

Amikor elegendően sok múltbeli adattal rendelkezünk, és azok ingadoznak, akkor néhány kutató azt ajánlja, hogy bontsuk az adatokat két halmazra. A régebbi adatokat tartalmazó halmaz átlaga adja a kezdő becslést, és a másik halmaz adatai képezik a vizsgálat tárgyát. Más kutatók a kezdő becslés értékének az idősor legkorábbi értékét javasolják, különösen akkor, ha az idősor adatai növekvő tendenciát mutatnak.

Egy adott adathalmazra a megfelelő α érték a múltbeli megfigyelt értékek mintáján végzett kísérlettel határozható meg (retrospektív vizsgálat). Az α választására a folyamat visszamenőleges szimulációja ad egy lehetőséget. Az α rögzített értékeire, a múlt adatait felhasználva hasonlítsuk össze az előre jelzett mennyiségeket a valóságos értékkel, és

válasszuk azt az α -t, amely valamilyen szempontból optimális. Remélhetjük, hogy a folyamat a jövőben hasonlóan fog viselkedni, mint a múltban.

(5) Előrejelzési eljárás tendenciához igazított exponenciálissimítással. Mint ahogy korábban rámutattunk, a (4) pontban ismertetett eljárás a folytonos tendenciát késedelemmel követi. Most tegyük fel, hogy a megfigyelt idősor alapján generált folyamatot véletlen ingadozásoknak kitett lineáris függvénnyel lehet leírni, amelynek a meredeksége B . A meredekséget itt **tendenciatényezőnek** nevezzük, amely a kerékpár-példában az egy periódusra eső várható forgalomnövekedést vagy forgalomcsökkenést jelzi. Ezt a modellt a következő kifejezéssel írhatjuk le:

$$X_t = h_t + e_t = A + Bt + e_t,$$

ahol X_t a t időponthoz tartozó véletlen változó, az A konstans, B a tendenciatényező, és e_t a véletlen hiba a t időpontban, amiről gyakran azt feltételezzük, hogy a várhatóértéke 0 és a szórásnégyzete állandó.

Az előző modellekben a $t+1$ -edik periódus előrejelzése csak az előző periódusok adataira támaszkodott, és az előrejelzés $t+1+m$, ($m=1,2,\dots$) periódusokra az idő szerepét figyelmen kívül hagyta. Ez az állítás a lineáris tendencia modellre nem igaz. Ez azonnal kiderül, amint bevezetjük az **előrejelzési szint** vagy simítási szint fogalmát. Ha az idősor t időpontban megfigyelt értéke x_t , akkor az előrejelzési szintet a t időpontban az S_t jelöli. Az előrejelzési szint:

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + B_{t-1}).$$

Az S_t előrejelzési szint az utolsó x_t , és a megelőző $t-1$ periódus előrejelzési szintjének (S_{t-1}) a tendenciatényezővel (B_{t-1}) korrigált lineáris kombinációja ($S_{t-1} + B_{t-1}$). Az S_{t-1} -hez tehát hozzáadjuk a B_{t-1} meredekséget, ami az időegység alatti változást jelzi.

Maga az előrejelzés a $t+1$ időpontra pedig a következő kifejezéssel számítható:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = S_t + B_t.$$

Általában azonban B_t -t nem ismerjük, így B_t -t is meg kell becsülni. Az exponenciálissimítás erre a célra is használható:

$$B_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)B_{t-1},$$

ahol B_t a tendenciatényező (meredekség) simított értéke a t periódus végén, $0 < \beta < 1$ egy másik (α -tól esetleg különböző) simítótényező. (A β választására is azok a megfontolások vonatkoznak, amit korábban az α választásáról elmondtunk.)

A tendenciatényezővel korrigált exponenciálissimítás nemcsak az $E(X_{t+1})$ -re ad jó becslést, hanem a további periódusokra is. Ez a növekedési vagy csökkenési tendenciának köszönhető. A $(t+m)$ -dik periódusra előre jelzett eladást, amelyhez a t -edik periódusra vonatkozó múltbeli adatokat használjuk fel, a következő formulával határozhatjuk meg:

$$\tilde{E}(X_{t+m}) = S_t + mB_t$$

Ezek után az előrejelzési eljárást a következők szerint foglalhatjuk össze:

(1) Felhasználva az idősor megfigyelt értékét (x_t) a t -edik periódus végén, az idősor előző előrejelzési szintjét, (S_{t-1}) a $t-1$ -edik időpontban, és a tendenciatényező előző simított értékét, (B_{t-1}) a $t-1$ -edik periódus végén, az idősor előrejelzési szintje a t időpontban a

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + B_{t-1})$$

képlettel számítható.

(2) Az idősor (1) lépésben számított előrejelzési szintjéből (S_t) a t időpontban, az idősor $t-1$ időpontjához tartozó előrejelzési szintjéből (S_{t-1}), és a $t-1$ időpont simított tendenciátényezőből (B_{t-1}) a t -edik periódus végén a simított tendenciátényező értéke:

$$B_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)B_{t-1}.$$

(3) Az idősor előrejelzése $t+m$ -edik periódusra ($m=1,2,\dots$) az

$$\tilde{E}(X_{t+m}) = S_t + mB_t$$

kifejezéssel számítható.

A kerékpár értékesítésre vonatkozó előrejelzésben, az aktuálisan értékesített kerékpárok száma a t -edik periódus végén x_t . Az eladások előrejelzési szintje a $t-1$ -edik periódus végén (S_{t-1}), és a tendenciátényező simítás szintje a $t-1$ -edik periódus végén (B_{t-1}) ismertek, így az

$$S_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} + B_{t-1})$$

kiszámítható.

Ezután az S_t ismeretében a B_t is meghatározható a következő kifejezésből:

$$B_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)B_{t-1},$$

amelyben a tendenciátényező simított értéke a $t-1$ -edik periódus végén (B_{t-1}), és az eladások előrejelzési szintje a $t-1$ -edik periódus végén (S_{t-1}) külön-külön ismertek.

Végül az eladások előrejelzése az $t+m$ -edik periódusokra

$$\tilde{E}(X_{t+m}) = S_t + mB_t.$$

A lineáris tendencia modellben a simítási eljárás elindításához, az állandószintű exponenciálissimítás modellhez hasonlóan, kezdeti értékekre van szükség. Ennek az inicializálásnak gyakori módszere, hogy egy egyenest illesztünk a múltbeli adatokra (a módszert lásd később a „Regresszió analízis” című szakaszban). Az illesztett egyenes paramétereit fel lehet használni az idősor kezdeti simítási szintjének (S_0) és a tendenciátényező (B_0) kezdeti értékének a meghatározására, így az

$$S_1 = \alpha x_1 + (1 - \alpha)(S_0 + B_0).$$

és

$$B_1 = \beta(S_1 - S_0) + (1 - \beta)B_0.$$

Ha például a 2. periódushoz tartozó előrejelzés meghatározása kívánatos, akkor az a

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \tilde{E}(X_2) = S_1 + B_1$$

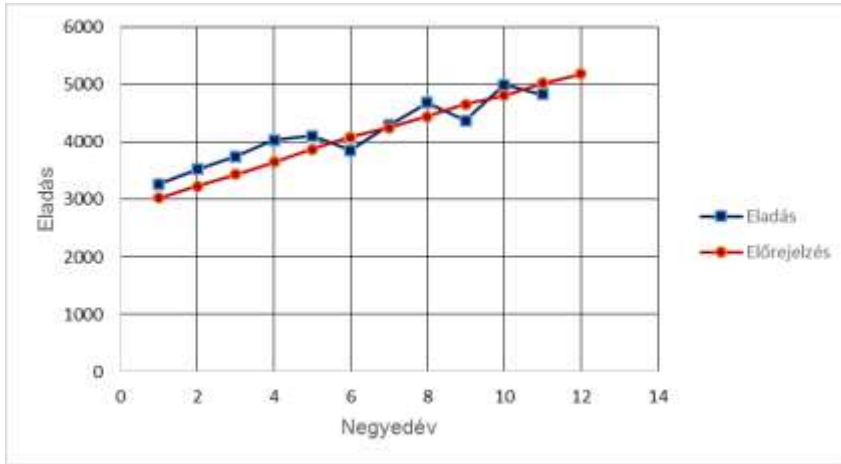
összefüggéssel számítható.

A 11.1. példa megoldása trendkorrekcióval. A tendenciátényező kezdeti értékét ($B_0=176$) lineáris regresszióval határoztuk meg az előző 12 negyedév eladási adataiból (11.1. táblázat). Az előrejelzési szint kezdeti értékét $S_0=2700$ -ra, a simítási tényezőt $\alpha=0,1$ választottuk. A bemutatott eljárást követve a tendenciához igazított exponenciálissimítással a 13. negyedévre az előrejelzés:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = 5193,04 \text{ db.}$$

A várható eladások tendenciája a 11.7. ábrán látható. A várható eladások a trendkorrekció és az exponenciálissimítás kombinációjának köszönhetően sokkal jobban illeszkednek a megfigyelt eladásokra, mint korrekciónélküli exponenciálissimításnál ese-

tén (11.6. ábra).



11.7. ábra. A várható eladások tendenciája tendenciához igazított exponenciálissimítással

11.2. példa. Tegyük fel, hogy a kerékpárok negyedévenkénti eladásai az utolsó 4 negyedévben, rendre $x_0=2750$, $x_1=2800$, $x_2=2925$ és $x_3=3040$ voltak. Használjunk a tendenciához igazított exponenciálissimítást az utolsó négy megfigyelésre alapozva, abból a célból, hogy megadjuk az ötödik periódus eladásának előrejelzését. A legkorábbi megfigyelés $x_0=2750$ legyen egyenlő a kezdeti S_0 szinttel, továbbá legyen $\alpha=\beta=0,1$. A múlt adataira (ez most négy adat) egyenest illesztettünk. Az illesztés eredményeként az egyenes egyenlete:

$$y = 99,5x + 2729,5.$$

Az egyenes meredeksége, a tendenciatényező kezdeti értéke: $B_0=100$, és az $S_0=2750$.

Az (1) lépésben, a kezdeti becsléseket felhasználva, azt kapjuk, hogy

$$S_1 = \alpha x_1 + (1 - \alpha)(S_0 + B_0) = 0,1 \cdot 2800 + 0,9 \cdot (2750 + 100) = 2845.$$

A (2) lépésben a tendenciatényező simított értéke az 1. periódus végén:

$$B_1 = \beta(S_1 - S_0) + (1 - \beta)B_0 = 0,1 \cdot (2845 - 2750) + 0,9 \cdot 100 = 99,5.$$

Ezt az eljárást, az (1) és (2) lépéseket ismételve, a 2. periódusra az

$$S_2 = \alpha x_2 + (1 - \alpha)(S_1 + B_1) = 0,1 \cdot 2925 + 0,9 \cdot (2845 + 99,5) = 2943,$$

$$B_2 = \beta(S_2 - S_1) + (1 - \beta)B_1 = 0,1 \cdot (2943 - 2845) + 0,9 \cdot 99,5 = 99,4.$$

Végül a harmadik periódusban az eredmény:

$$S_3 = \alpha x_3 + (1 - \alpha)(S_2 + B_2) = 0,1 \cdot 3040 + 0,9 \cdot (2943 + 99,4) = 3042,$$

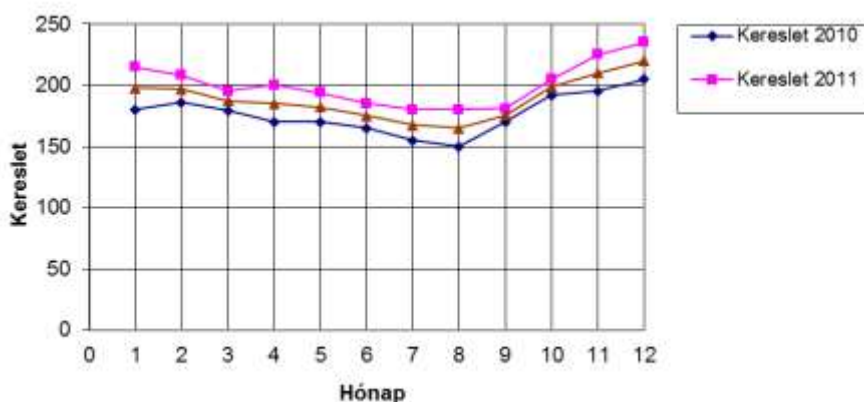
$$B_3 = \beta(S_3 - S_2) + (1 - \beta)B_2 = 0,1 \cdot (3042 - 2943) + 0,9 \cdot 99,4 = 99,4.$$

A (3) lépéssel kiszámítjuk az ötödik periódusra az eladási előrejelzés

$$F_{3+2} = F_5 = S_3 + mB_3 = 3042 + 2 \cdot 99,4 = 3241.$$

(6) Előrejelzési eljárás szezonálisan korrigált exponenciálissimítással. Az időszakonként többé-kevésbé szabályosan visszatérő magas és alacsony igények szezonális keresletet jeleznek. Például a 11.2. táblázat két egymást követő év havi keresleti adatait és ezek

átlagait tartalmazza. Az adatokból szerkesztett 11.8. ábra idősorai jól látható szezonális változást mutatnak. A kereslet mindig decemberben éri el a csúcs- és augusztusban a minimálisértéket. Az ilyen természetű idősorok vizsgálatára az exponenciális simítás modelljét úgy kell módosítani, hogy az figyelembe vegye a szezonális változásokat.



11.8. ábra. Szezonális változásokat mutató idősor

11.2. táblázat

Hónap	Kereslet			Szezonindex, $I_t = x_t / \bar{x}$
	2010	2011	Átlag, x_t	
Január	180	215	197,5	1,049
Február	186	208	197,0	1,046
Március	179	195	187,0	0,993
Április	170	200	185,0	0,982
Május	170	194	182,0	0,966
Június	165	185	175,0	0,929
Július	155	180	167,5	0,889
Augusztus	150	180	165,0	0,876
Szeptember	170	181	175,5	0,932
Október	192	205	198,5	1,054
November	195	225	210,0	1,115
December	205	235	220,0	1,168
Összesen			2260,0	12,000
Átlag, $\bar{x}$			188,3	

Az egyes szezonokban (pl. hónap, negyedév) megfigyelt értékek eltérését a teljes időszak (pl. év) átlagától a szezonindexszel fejezzük ki. A **szezonindex** nem más, mint az aktuális igény értékének és az időszak átlagos értékének normalizált hányadosa. A 11.2. táblázat szerinti példában először kiszámítjuk az aktuális (i -edik) hónap átlagos keresletét:

$$x_t = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 x_{ij} ,$$

majd a teljes időszak (1 év) átlagos havi keresletét:

$$\bar{x} = \frac{1}{12} \sum_{t=1}^{12} x_t .$$

Az előző két eredményből a szezonindexek:

$$I_t = \frac{x_t}{\bar{x}}$$

A 11.2. táblázatban például az

$$x_1 = \frac{180 + 215}{2} = 197,5, \text{ és az}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{12} \sum_{t=1}^{12} x_t = \frac{2260}{12} = 188,33.$$

Végül a szezonindex január hónapban

$$I_1 = \frac{x_1}{\bar{x}} = \frac{197,5}{188,33} = 1,049.$$

A szezonindexeket exponenciálissimítással a következő kifejezéssel aktualizáljuk:

$$I_{t+m} = \frac{\gamma x_t}{S_t} + (1 - \gamma) I_t,$$

ahol:

I_t szezonindex a t -edik időszakra,

γ a szezonindex exponenciális simítási állandója, 0 és 1 közötti érték,

m időszakok száma a szezonális mintában (éves szezonális mintában: havi adatok esetén, $m=12$, és negyedéves adatok esetén, $m=4$).

Az előrejelzési szint (simítási szint) szezonális kiigazítása a következő:

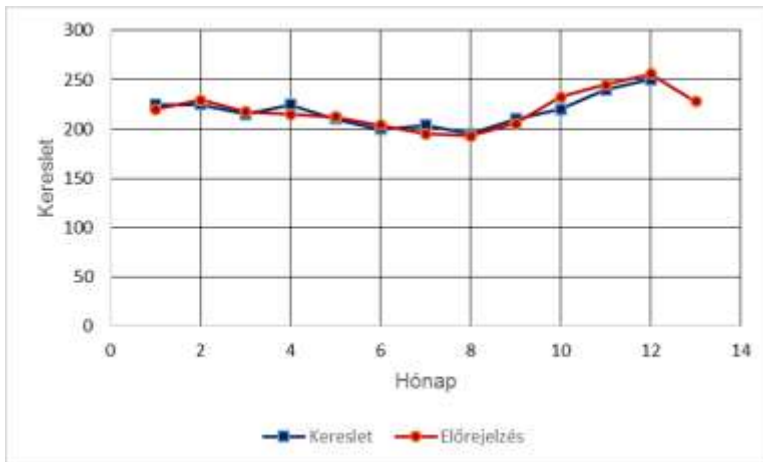
$$S_t = \frac{\alpha x_{t-1}}{I_{t-1}} + (1 + \alpha) S_{t-1}.$$

Az előrejelzés a $t+1$ -edik időszakra előrejelzés szint és a szezonális index szorzata:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = S_t I_t.$$

Előrejelzés a $t+n$ -edik időszakra is meghatározható:

$$\tilde{E}(X_{t+n}) = S_t I_{t+n}, \quad n \leq m.$$



11.9. ábra. A várható kereslet előrejelzése szezonális exponenciálissimítással

11.3. példa. Egy bizonyos termék kereslet előrejelzéshez ismerjük a 2010. és a 2011. évi (11.2. táblázat) és a 2012. évi eladásokat (11.3. táblázat). A táblázatok adatai szezonális változást mutatnak, mint az a 11.8. ábrán látható. Az 2012. évi időszorból **szetonális exponenciálissimítással** becstőljük meg a 2013. évi márciusi előrejelzést. Tegyük fel, hogy $\alpha=0,1$, $\gamma=0,3$, és a kezdeti értékek $S_1=220$, $\tilde{E}(X_1)=220$, $B_1=0$. A szezonindexeket a korábbi két év (2010 és 2011) adataiból határozzuk meg (11.2. táblázat). Az algoritmust követve, a számításokat a 11.3. táblázatban végeztük el.

11.3. táblázat

Hónap	Kereslet 2012	Simítási szint	Szezonindex		Előrejelzés	Eltérés
t	x_t	S_t	I_t	I_{t+m}	$\tilde{E}(X_t)$	$x_t - \tilde{E}(X_t)$
Január	225	220,00	1,049	1,041	220,00	5,00
Február	225	219,46	1,046	1,040	229,55	-4,55
Március	215	219,02	0,993	0,990	217,47	-2,47
Április	225	218,77	0,982	0,996	214,90	10,10
Május	210	219,80	0,966	0,963	212,41	-2,41
Június	200	219,55	0,929	0,924	204,01	-4,01
Július	204	219,12	0,889	0,902	194,88	9,12
Augusztus	195	220,14	0,876	0,879	192,87	2,13
Szeptember	210	220,39	0,932	0,938	205,37	4,63
Október	220	220,88	1,054	1,037	232,81	-12,81
November	240	219,67	1,115	1,108	244,94	-4,94
December	250	219,23	1,168	1,160	256,09	-6,09
Január (2013)		218,71	1,041		227,65	

A 11.3. táblázatban a simítási szint és a szezonindex 2012. februárra:

$$S_t = \frac{\alpha x_{t-1}}{I_{t-1}} + (1 + \alpha)S_{t-1} = \frac{0,1 \cdot 225}{1,049} + (1 + 0,1) \cdot 220 = 219,46, I_t = 1,046.$$

Ezekkel az adatokkal az előrejelzés februárra:

$$\tilde{E}(X_t) = S_t I_t = 219,46 \cdot 1,046 = 229,55.$$

Az új szezonindex a következő év (2013) januárra:

$$I_{t+m} = \frac{\gamma x_t}{S_t} + (1 - \gamma)I_t = \frac{0,3 \cdot 225}{220} + (1 - 0,3) \cdot 1,049 = 1,041.$$

A simítási szint és előrejelzés 2013. januárra:

$$S_t = \frac{\alpha x_{t-1}}{I_{t-1}} + (1 + \alpha)S_{t-1} = \frac{0,1 \cdot 250}{1,168} + (1 + 0,1) \cdot 219,23 = 218,71,$$

$$\tilde{E}(X_{t+n}) = S_t I_{t+n} = 218,71 \cdot 1,041 = 227,65$$

A 11.3. táblázat további értékeit az előzőekhez hasonlóan számíthatjuk. Például az előrejelzés 2013. márciusra:

$$\tilde{E}(X_{t+n}) = S_t I_{t+n} = 218,71 \cdot 0,99 = 216,42.$$

Az előrejelzési és a keresleti adatokat az idő függvényében a 11.9. ábra szemlélteti.

(7) Előrejelzési eljárás tendenciához igazított, szezonális, exponenciálissimítással.

Ha az idősorban a trend és a szezonális hatások egyértelműen jelentkeznek, akkor a simítási szintet és a szezonindexet egyaránt frissíteni kell minden periódusban. Ez az eljárás a következő egyenletekkel írható le.

Az előrejelzési szint:

$$S_t = \frac{\alpha x_{t-1}}{I_{t-1}} + (1 - \alpha)(S_{t-1} + B_{t-1}).$$

A tendenciatényező (meredekség) simított értéke:

$$B_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)B_{t-1}.$$

A szezonindex a $t+m$ periódusra:

$$I_{t+m} = \frac{\gamma x_t}{S_t} + (1 - \gamma)I_t.$$

Az előrejelzés a t -edik periódusra:

$$\tilde{E}(X_t) = (S_t + B_t)I_t.$$

Az előrejelzés a $t+n$ -edik periódusra:

$$\tilde{E}(X_{t+n}) = [S_t + (n+1)B_t]I_{t+n}, \text{ ha az } n \leq m.$$

11.3. példa. A tendenciához igazított szezonális exponenciálissimítás alkalmazásához ismét a 11.2. és 11.3. táblázatokban adott idősorokat használjuk fel, vagyis egy bizonyos termék kereslet előrejelzéshez ismerjük a 2010. és a 2011. évi és a 2012. évi eladásokat. A 2012. évi idősorból a **tendenciához igazított szezonális exponenciálissimítással** becslültük meg a 2013. évi márciusi előrejelzést. Tegyük fel, hogy $\alpha=0,1$, $\beta=0,1$, $\gamma=0,3$, és a kezdeti értékek $S_1=220$, $\tilde{E}(X_1)=220$, $B_1=0$, továbbá a 11.3. táblázatból felhasználjuk a korábbi két év (2010 és 2011) adataiból számított szezonindexeket is.

11.4. táblázat

Hónap	Kereslet 2012	Simítási szint	Trend	Szezonindex		Előrejelzés	Eltérés
t	x_t	S_t	B_t	I_t	I_{t+m}	$\tilde{E}(X_t)$	$x_t - \tilde{E}(X_t)$
Január	225	220,00	0	1,049	1,041	220	5,00
Február	225	219,46	-0,054	1,046	1,040	229,50	-4,50
Március	215	218,97	-0,097	0,993	0,990	217,32	-2,32
Április	225	218,64	-0,121	0,982	0,996	214,65	10,35
Május	210	219,57	-0,015	0,966	0,963	212,17	-2,17
Június	200	219,33	-0,038	0,929	0,924	203,77	-3,77
Július	204	218,89	-0,079	0,889	0,902	194,61	9,39
Augusztus	195	219,87	0,027	0,876	0,879	192,65	2,35
Szeptember	210	220,16	0,054	0,932	0,938	205,21	4,79
Október	220	220,73	0,105	1,054	1,037	232,76	-12,76
November	240	219,62	-0,016	1,115	1,108	244,87	-4,87
December	250	219,17	-0,059	1,168	1,160	255,95	-5,95
Január (2013)		218,60	-0,110	1,041		227,43	

A számítások a 11.4. táblázatban követhetők, és az eredmények a 11.10 ábrán láthatók. Például a simítási szint és a meredekség februárra:

$$S_t = \frac{\alpha x_{t-1}}{I_{t-1}} + (1-\alpha)(S_{t-1} + B_{t-1}) = \frac{0,1 \cdot 225}{1,049} + (1-0,1)(220+0) = 219,46,$$

$$B_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)B_{t-1} = 0,1 \cdot (219,45 - 220,00) + (1-0,1) \cdot 0 = -0,054.$$

Az adatokat felhasználva az előrejelzés februárra:

$$\tilde{E}(X_t) = (S_t + B_t)I_t = (219,46 - 0,055) \cdot 1,046 = 229,50.$$

A szezonindex, a simítási szint és a trend a következő év (2013) januárjára:

$$I_{t+m} = \frac{\gamma x_t}{S_t} + (1-\gamma)I_t = \frac{0,3 \cdot 225}{220} + (1-0,3) \cdot 1,049 = 1,041.$$

$$S_t = \frac{\alpha x_{t-1}}{I_{t-1}} + (1-\alpha)(S_{t-1} + B_{t-1}) = \frac{0,1 \cdot 250}{1,168} + (1-0,1)(219,17 + (-0,059)) = 218,60,$$

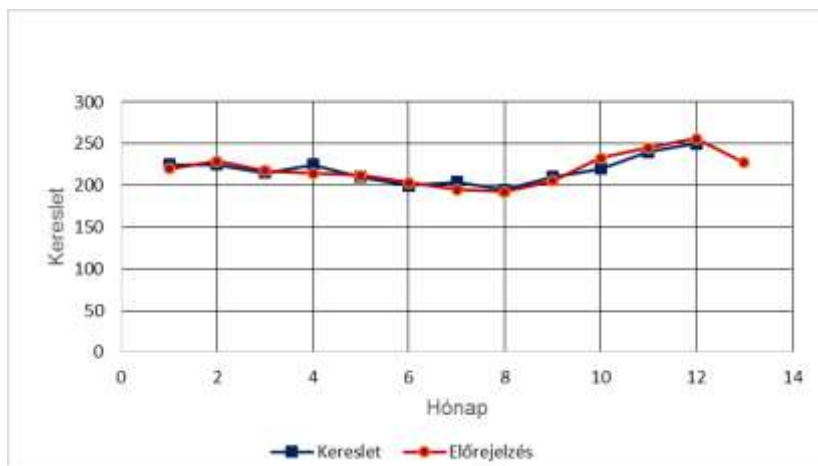
$$B_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)B_{t-1} = 0,1 \cdot (218,6 - 219,17) + (1-0,1) \cdot (-0,059) = -0,11.$$

Ezeket felhasználva az előrejelzés 2013. januárjára:

$$\tilde{E}(X_{t+n}) = [S_t + (n+1)B_t]I_{t+n} = [218,61 + 1 \cdot (-0,11)] \cdot 1,041 = 227,43$$

A további hónapokra az előrejelzést az előzőekhez hasonlóan határozhatjuk meg. Például a kérdéses előrejelzés 2013. márciusra:

$$\tilde{E}(X_{t+n}) = [S_t + (n+1)B_t]I_{t+n} = [218,61 + 3 \cdot (-0,11)] \cdot 0,99 = 216,09.$$



11.10. ábra. A várható kereslet előrejelzése tendenciához igazított, szezonális exponenciálissimítással

A Box-Jenkins módszer

Korábban jeleztük, hogy a gyakorlatban az alkalmazott előrejelzési eljárások és modellek nem mindig vannak összhangban. A Box-Jenkins-módszer elvont és bonyolult, ráadásul sok múltbeli adatot (legalább 50 periódusnyit) igényel, azonban automatikusan megteremti a modellt és az eljárás összhangját. Szerencsére az eljárást már számítógépre vitték. A programok kiszámolják a modell azonosításához szükséges minta szerinti autókorrelációkat és részleges autókorrelációkat, becslést adnak a modell paramétereire, és elvégzik a modell azonosításához szükséges vizsgálatokat is. Bár a módszer bonyolult, az általa adott előrejelzések hihetetlenül pontosak, és ha a tervezési idő rövid, akkor jobbak min-

den más módszer által nyújtott előrejelzésnél, és mi több, az eljárás az előrejelzés hibáját is méri.

11.1.4 Okozati módszerek

Ezeknél a kvantitatív módszereknél objektív kapcsolatot feltételezünk ismert tények és bizonyos jellemzők jövőbeni alakulása között.

Gazdasági modellek. Gazdasági összefüggések ismeretében a jelenségek modellezhetők. Például a lakásépítési támogatások változtatása hatással van az építőanyagok keresletére.

Mutatószámok. A beszállítókra vonatkozó mutatószámok hasznos információt tartalmazhatnak a beszerző részére. Például mennyire stabil a beszállító helyzete a piacon, milyen minőségű kiszolgálás várható tőle.

Input-output modellek. A különböző ágazatok kapcsolatban vannak egymással. Az egyik ágazatban előállított cikkek, szolgáltatások a másik szektorból anyagot, szolgáltatást igényelnek. Például a járműipar jelentős keresletet generál más ágazatokban.

Regresszió analízis

A statisztikai problémákban gyakran szerepelnek olyan adatok, ahol két vagy több változó között valamilyen összefüggés van. A regressziós számításoknál olyan elméleti függvényt keresünk, amely a változók közötti összefüggést a lehető legjobban leírja. A regressziós függvény meghatározása valamilyen feltételezett elméleti függvénynek a mért pontokra illesztését jelenti. Például ha tudjuk, hogy a vállalatunk múltbeli termelési volumenétől hogyan függött a gázfogyasztás, akkor a jövőbeni termelés terv ismeretében becsülhető a várható gázfogyasztás.

A továbbiakban csak arra az esetre koncentrálnunk, amikor ez az összefüggés lineáris, de megjegyezzük, hogy más függvények illesztésére is kidolgozott módszerek állnak rendelkezésre, ezek számítógépes programjai is elérhetőek. A közismert *Microsoft Excel* például a lineáris mellett logaritmikus, hatvány, exponenciális és polinomiális függvények is illeszthetők.

Tegyük fel például, hogy egy könyvkiadó a könyveit boltokban és postai megrendeléseken keresztül forgalmazza. Ez utóbbinál széleskörű hirdetést alkalmaz. A kereskedelmi menedzser az első évben igen érdekes lineáris összefüggést vett észre a postai rendelések és a könyvesbolti eladások között. Reméli, hogy a következő évben a postai megrendelések ismeretében az összefüggést jól tudja hasznosítani a könyvesboltokban eladható könyvek példányszámainak megállapításához.

Ha X jelöli a postai rendelések számát, Y pedig a könyvesbolti eladásokét, azt mondhatjuk, hogy az X és az Y valószínűségi változók bizonyos fokú összetartozást mutatnak. A két valószínűségi változó között természetesen nincs egyértelmű függvénykapcsolat, azaz ha ismerjük a postai rendelések számát, nem határozhatjuk meg **pontosan** a könyvesbolti eladások számát. A postai rendelések egy adott számához csak a lehetséges bolti eladásoknak egy **tartománya** tartozik, és ez fordítva is igaz. Ez a tartomány részben mérési hibából eredhet (például pontatlan összeszámlálásból), de főként a kiadott könyvek különbözőségéből adódik. Ezért nem is remélhető, hogy egyértelmű függvénykapcsolat legyen a postai rendelések és a bolti eladások között. Az azonban igaz, hogy több postai megrendelés több bolti eladással jár együtt. Mit jelenthet ekkor ez a kijelentés: hogy „a kereskedelmi menedzser az első évben igen érdekes lineáris összefüggést vett észre a postai rendelések és a könyvesbolti eladások között”. Ez azt jelenti, hogy a könyvesbolti eladások **várható száma** lineárisan függ a postai rendelések számától, azaz

$$E[Y|X = x] = \alpha + \beta \cdot x.$$

Tehát, ha a könyvekből a postai rendelések száma x , akkor a megfelelő bolti eladások átlaga közelítőleg $\alpha + \beta \cdot x$ lesz.

Más példa is említhető a **bizonyos fokú összetartozásra**. A mérnököt érdekelheti, hogy milyen az anyag szakítószilárdsága és a keménysége közötti összefüggés. A közgazdász meg szeretné jósolni az infláció mértékét a megélhetési költségek függvényében stb.

Egyes esetekben a két valószínűségi változó között tényleges függvénykapcsolat áll fenn, amely lehet lineáris is. Az előrejelzésekkel kapcsolatban az egyik változó az idő, a másik pedig az a jellemző, amelyet éppen vizsgálni akarunk. Ilyen esetet mutattunk 11.1.3 szakaszban, ahol az idősor viselkedését leíró kifejezés a következő volt:

$$h_t = \alpha + \beta \cdot t.$$

A valószínűségi változó pedig:

$$X_t = \alpha + \beta \cdot t + e_t,$$

amiből

$$E(X_t) = \alpha + \beta \cdot t.$$

Vegyük észre, hogy mind a **bizonyos fokú összetartozás**, mind a **pontos függvénykapcsolat** ugyanarra a lineáris regresszióra vezet, és a tárgyalásuk is majdnem ugyanolyan. Ezért a továbbiakban a könyvkiadási példával mindkét esetet szemléltetjük, bár a modell speciális

$$h_t = \alpha + \beta \cdot t$$

ahol t értékei 1-től kezdődően az egész számok, bizonyos egyszerűsített kifejezéseket szolgáltat. A regresszió analízisben általában X jelöli a független, és Y pedig a függő változót. Ezért az idősor modell kifejezése a megszokott jelölésekkel a következő alakú:

$$Y_t = \alpha + \beta \cdot t + e_t.$$

A legkisebb négyzetek módszere

Tegyük fel, hogy 15 könyvre vonatkozóan összegyűjtöttük a postai rendelések és a bolti eladások adatait, amelyeket a 11.5. táblázatban foglaltuk össze. Az adatokra $y = a + b \cdot x$, alakú egyenest szeretnénk illeszteni. Az a és b együtthatókat úgy szeretnénk meghatározni, hogy az egyenletbe az x különböző értékeit behelyettesítve, az eredmény az y értékeinek a lehető legpontosabb becslését adja. Az illeszkedés pontosságát azzal mérhetjük, hogy összeadjuk a pontoknak az egyenestől mért távolságnégyzeteit.

Legyen tehát, az i -dik könyv bolti eladásainak száma y_i és postai megrendelések száma x_i . Jelölje $\tilde{y}_i$, az illesztett egyenesen az x_i -hez tartozó pontot. Az illesztés jóságának mérése pedig a

$$Q = (y_1 - \tilde{y}_1)^2 + (y_2 - \tilde{y}_2)^2 + \dots + (y_{15} - \tilde{y}_{15})^2 = \sum_{i=1}^{15} (y_i - \tilde{y}_i)^2$$

menyiség.

A legjobb illesztést a legkisebb négyzetek módszerével úgy határozzuk meg, hogy azt az egyenest választjuk, amelyre a Q értéke a legkisebb. Az egyenes választása az a és b meghatározását jelenti. Ezeket a módszer szerint egyszerűen úgy kapjuk meg, hogy nullával tesszük egyenlővé Q -nak az a és a b szerinti parciális differenciálhányadosait, és megoldjuk az így kapott egyenleteket. A módszer azt eredményezi, hogy

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}},$$

és az

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x},$$

ahol az

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{és az} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}.$$

11.5. táblázat

Postai rendelések és könyvesbolti eladások alakulása

n	Postai rendelések, x_i	Bolti eladások, y_i	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	1310	4360	37065,91	1860,48
2	1313	4590	25257,24	1610,68
3	1320	4520	23171,24	1097,82
4	1322	4770	13989,24	969,28
5	1338	4760	6951,24	229,02
6	1340	5070	1961,24	172,48
7	1347	5230	-65,42	37,62
8	1355	5080	-260,09	3,48
9	1360	5550	2270,58	47,15
10	1364	5390	1854,58	118,08
11	1373	5670	8953,24	394,68
12	1376	5490	6189,24	522,88
13	1384	5810	18231,91	952,75
14	1395	6060	35195,91	1752,82
15	1400	5940	33775,24	2196,48
Σ	20297	78290	214541,33	11965,73
	$\bar{x} = 1353,13$	$\bar{y} = 5219,33$		

A 11.5. táblázatban elvégzett számítások eredményei:

$$\bar{x} = 1353,1,$$

$$\bar{y} = 5219,3,$$

$$\sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 214543,9,$$

$$\sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2 = 11966.$$

Ezeket helyettesítve az előző képletekbe, a

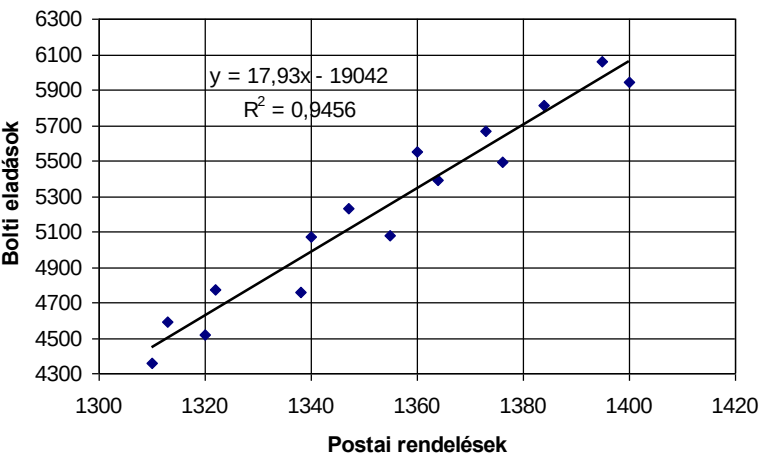
$$b = \frac{214543,9}{11966} = 17,93,$$

és az

A legkisebb négyzetek módszere alapján a bolti eladások $\tilde{y}$ becslése a postai megrendelések függvényében:

$$\tilde{y} = -19041,9 + 17,93x.$$

A könyvkiadó példa megfigyelt adatait és az azokra illesztett egyenest a 11.11. ábra szemlélteti.



11.11. ábra. A bolti eladások és a postai rendelések összefüggésének szemléltetése

11.6. táblázat

Adatok a korrelációs együttható számításához				
<i>n</i>	Postai rendelések, <i>x_i</i>	Bolti eladások, <i>y_i</i>	(<i>y_i</i> – $\bar{y}$) ²	(<i>y_i</i> – <i>a</i> – <i>b</i> <i>x_i</i>) ²
1	1310	4360	738453,78	7464,96
2	1313	4590	396060,44	8065,84
3	1320	4520	489067,11	11172,49
4	1322	4770	201900,44	11759,23
5	1338	4760	210987,11	35509,63
6	1340	5070	22300,44	7344,49
7	1347	5230	113,78	14445,64
8	1355	5080	19413,78	30015,56
9	1360	5550	109340,44	42890,41
10	1364	5390	29127,11	606,14
11	1373	5670	203100,44	8837,88
12	1376	5490	73260,44	19538,45
13	1384	5810	348887,11	1352,77
14	1395	6060	706720,44	8019,20
15	1400	5940	519360,44	14424,01
Σ	20297	78290	4068093,33	221446,71

A 11.6. táblázatból az utolsó két oszlop összegzett adatait helyettesítve a korrelációs együttható négyzete a mintapéldában:

$$r^2 = \frac{406809333 - 221446,71}{406809333} = 0,945564989.$$

Az így illesztett egyenes az előrejelzések szempontjából igen hasznos, ugyanis adott x értékekhez tartozó $\tilde{y}$ értékek jelentik az előrejelzést. A döntéshozót persze érdekli, mennyire bizonytalan ez az előrejelzés. Ezt a bizonytalanságot alkalmas feltételek mellett könnyű megkapni. A szakasz hátralevő részében mindig feltesszük, hogy

1. n pár, $(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \dots, (x_n, Y_n)$ véletlen mintát vettünk,
2. Y_i -k normális eloszlásúak, várhatóértékük $a + b \cdot x_i$, szórásuk σ (független i -től).

Az előrejelzés bizonytalanságának meghatározásában nem nagyon lényeges, hogy Y_i normális eloszlású e, de az igen, hogy a szórása állandó. Továbbá, erre a szórásra is kell becslést adnunk.

Az illeszkedés jóságát az eltérés négyzetösszeg (Q) és az $r_i = y_i - bx_i - a$ reziduális hibák s_r korrigált szórása jellemzi, ahol

$$s_r^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \tilde{y}_i)^2}{n-2}.$$

A szórásnégyzet (σ^2) torzítatlan becslését az s_r^2 adja. Az illeszkedés jóságának megítélésére gyakran használjuk a következő kifejezéssel számítható **korrelációs együttható** négyzetét:

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2}.$$

11.1.4 Összefoglalás

A természeti, gazdasági és társadalmi tényezők hatását és alakulását nem elegendő feltárni és a jelenben tanulmányozni, hanem azokat a jövőben várható kívánalmaknak megfelelően kell alakítani. A statisztika bizonyos módszerei lehetőséget nyújtanak az előrejelzésre, de csak rövid távú becsléseknél alkalmazhatók. Az előrejelzés szükségessége különböző menedzselési szinteken jelentkezhet.

A statisztika, az idősorok módszeres vizsgálata alapján, adhat bizonyos előrejelzést. Az ok és okozati jellegű összefüggések nagyobb része **statikus**, vagyis az adott időszakra vonatkozó keresztmetszeti adatok alapján jellemzi számszerűen a kapcsolatot. Ilyen esetben feltételezhető, hogy a kapcsolat a jövőben is hasonló jellegű marad, és a kapcsolatban rejlő törvényszerűség a jövőben is érvényesül. Az összefüggések kisebb része **dinamikus** jellegű, amikor idősorok között adódik ok és okozati kapcsolat. Az ilyen kapcsolatok, ha azok jellemzői hosszabb időszakra vonatkozó vizsgálat eredményei, használhatóbbak előrejelzési célokra, mint a statikus összefüggéseké. Az idősorok összefüggésén alapuló előrejelzéskor figyelemmel kell lenni az idősoroknál fellépő autokorrelációra is.

A múlt adatait össze kell gyűjteni, és az adatok tanulmányozása alapján állítható fel a megfelelő modell. A modellhez választani kell egy előrejelzési eljárást, amely összhangban működik a modellel. Az előrejelzési eljárás egy vagy több paraméter, például az exponenciálissimítás a simítási tényező, megválasztását igényelheti. A múltbeli adatok segíthetik ezt a választást.

Ebben a fejezetben több előrejelzési eljárást ismerhetünk meg. Mindegyik rendelkezik

előnyökkel és hátrányokkal. Az alkalmas eljárás kiválasztása az előrejelzést igénylő modell sajátosságaitól függ, mint például a periódusszám, vagy az alkalmazás típusa. A gyakorlatban általánosan elterjedt alapvető előrejelzési módszereket és eljárásokat a 11.7., 11.8. és 11.9. táblázatok foglalják össze.

11.7. táblázat

Kvalitatív módszerek

	1. Delphi módszer	2. Véleményalkotás
Leírás	Szakértők egy csoportját kérdőívek sorozatával keresik meg. Az első kérdőívre adott válaszokat a következő kérdőív összeállításánál felhasználják. Így minden információ, amit egy szakértő ismert, eljut a többi szakérthöz is, ezzel mindenki azonos információk alapján válaszolhat. Ez a módszer kiküszöböli a többségi vélemény pártosságát.	Ez a módszer azon alapszik, hogy néhány szakértő együtt jobb előrejelzést tud adni, mint egy személy. Nincs titoktartás, az eszmecsere támogatják. Az előrejelzést gyakran befolyásolják társadalmi tényezők, és nem mindig valós egyetértésen alapszik.
Pontosság		
Rövidtáv (0-3 hónap között)	Megfelelő és nagyon jó	Elégséges és megfelelő
Középtáv (3 hó-2 év között)	Megfelelő és nagyon jó	Elégséges és megfelelő
Hosszútáv (2 év fölött)	Megfelelő és nagyon jó	Elégséges
A fordulópont azonosítása	Megfelelő és jó között	Elégséges és megfelelő között
Tipikus alkalmazások	Hosszú távú és új termékek eladására vonatkozó előrejelzések	Hosszú távú és új termékek eladására vonatkozó előrejelzések, haszon előrejelzéssel
Szükséges adatok	Szervező állítja össze a kérdőívet, értékeli a válaszokat.	Szakértők egy csoportjától szerzett információk megvitatása nyilvános üléseken, az előrejelzésben való meg egyezés érdekében legalább két találkozó szükséges.
A számítógépes előrejelzés költsége.	2000000 Ft	3000000 Ft
Lehet-e számítógéppel számolni	igen	igen
Fejlesztés és alkalmazás időigény	2 hónap	2 hét

11.8. táblázat

Idősor-analízis

	1. Mozgó átlag	2. Exponenciálissimítás	3. Box-Jenkins módszer
Leírás	Egy idősor mozgóátlagának minden pontja a sor egy-mást követő pontjainak számtani vagy súlyozott közepe, ahol az adatokat úgy választják, hogy az időszakos és a szabálytalan hatásokat kiküszöböljék.	Ez a mozgóátlag módszerhez hasonló, csak a frissebb adatokat nagyobb súllyal veszi figyelembe. Az új előrejelzés egyenlő a régi előrejelzései plusz a régi előrejelzés hibájának bizonyos hányadával. Az adaptív előrejelzés is hasonló, csak az évszakok hatását is figyelembe veszi. Az exponenciálissimításnak sok változata ismert, néhány hatékonyabb, mint a többi, néhány összetettebb a számítások szempontjából, néhány több gépidőt igényel.	Az exponenciálissimítás a <i>Box-Jenkins</i> módszer speciális esete. Az idősort egy olyan matematikai modellbe illesztjük, amely optimális abból a szempontból, hogy a múlthoz kisebb hibát rendel, mint más modellek. Meg kell határozni a modell típusát, majd becsülni kell paramétereit. Ez a jelenleg rendelkezésünkre álló legjobb statisztikai eljárás, de ugyanakkor igen költséges és időigényes
Pontosság			
Rövidtáv (0-3 hónap között)	Elégséges és jó között	Megfelelő és nagyon jó	Nagyon jó és kitűnő
Középtáv (3 hó-2 év között)	Rossz	Elégséges és jó között	Elégséges és jó között
Hosszútáv (2 év fölött)	Rossz	Elégséges	Rossz
A fordulópont azonosítása	Elégséges	Rossz	Megfelelő
Tipikus alkalmazások	Készletirányítás kis mennyiségű cikkekre.	Termelés- és készletirányítás, haszon és más pénzügyi adatok előrejelzése.	Termelés- és készletirányítás nagy mennyiségű termék esetén, pénzügyi mérlegek előrejelzése
Szükséges adatok	Legalább két éves eladási statisztika, ha az eladás időszakosan változik, egyébként lehet kevesebb. (Természetesen, minél több annál jobb.)	Ugyanaz, mint a mozgóátlag esetén.	Ugyanaz, mint a mozgóátlag esetén, azonban itt a több múltbeli adat igen előnyös a modellazonosítás érdekében.
A számítógépes előrejelzés költsége.	150 Ft	150 Ft	30000 Ft
Lehet-e számítógéppel számolni	Igen (Microsoft Excel)	Igen (Microsoft Excel)	Igen (IBM SPSS)
Fejlesztés és alkalmazás időigénye	1 nap	1 nap	1-2 nap

11.9. táblázat

Okozati módszer

	Regressziós modell
Leírás	Az eladást gazdasági mutatókkal, vagy más belső változókkal függvénykapcsolatba hozzuk. Az összefüggéseket előzetesen statisztikailag megvizsgáljuk, majd kiválasztunk egy alkalmas függvényt és azt a legkisebb négyzetek módszerével a megfigyelt adatokra illesztjük. tetszőleges összefüggés választható valamilyen ésszerű megfontolás alapján.
Pontosság	
Rövidtáv (0-3 hónap között)	Jó és nagyon jó között
Középtáv (3 hónap-2 év között)	Jó és nagyon jó között
Hosszútáv (2 év fölött)	Elégséges
A fordulópont azonosítása	Nagyon jó
Tipikus alkalmazások	Eladások előrejelzése termékosztályok számára, haszon előrejelzés.
Szükséges adatok	Néhány év negyedéves adatai, hogy értelmes összefüggést kapjunk. Matematikailag kettővel több megfigyelés kell, mint a független változók száma.
A számítógépes előrejelzés költsége.	30000 Ft
Lehet-e számítógéppel számolni	igen
Fejlesztési és alkalmazás időigénye	Attól függ, milyen ügyesen tudjuk az összefüggést azonosítani.

11.2. A függőigények meghatározása

Függő keresletű anyagok (adott termék előállításához szükséges alapanyagok, alkatrészek, félkész termékek, stb.) igényének meghatározása a **gyártástervezés** keretei között valósul meg. A gyártástervezés során megoldandó fő feladatok a következők:

a **gyártási programtervezés** (a gyártandó végtermékek meghatározása fajta, mennyiség, minőség és időpont szerint),

a **mennyiségi tervezés** (a gyártandó alkatrészek és részegységek, illetve a beszerzendő anyagok, alkatrészek, részegységek, késztermékek mennyiségének meghatározása),

a **határidő- és kapacitástervezés** (a munkafolyamatok kezdő- és befejező időpontjainak meghatározása, a szükséges kapacitások tervezése).

A gyártási folyamat tervezésének kiindulópontja, és az összes további tervezés alapja a **gyártási program**, amely az értékesítési folyamattal szorosan összehangoltan működik. A gyártási programtervezés pontossága nagymértékben befolyásolja az egész vállalat (üzem, gyár) gyártási és irányítási rendszerének hatékonyságát, valamint az ezzel kapcsolatos logisztikai ráfordítások nagyságát.

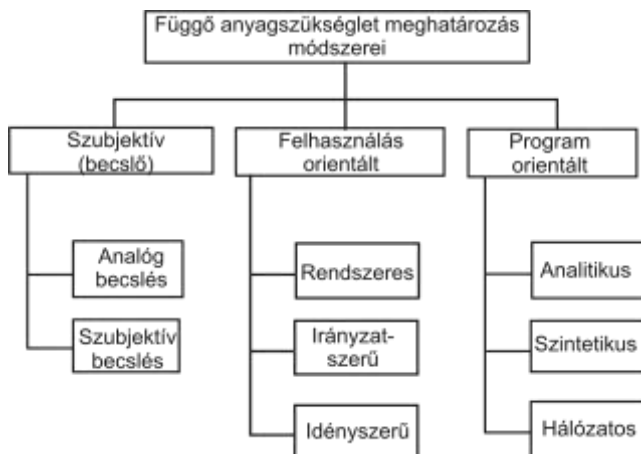
A gyártási programtervezés keretein belül kell meghatározni a gyártandó termékek fajtáját, mennyiségét és elkészítésének időpontját. Ekkor általában ún. elsődleges igényfelmérésre, azaz a terméket felvevő piac várható igényére támaszkodhatunk. Az **elsődleges igény** származhat tényleges vagy prognosztizált vevői megrendelésekből. Az optimális gyártási program kidolgozása érdekében az értékesítési prognózisok, előrejelzések alapján különböző gyártási alternatívákat kell meghatározni, esetleg szimulálni lehet a terve-

zési döntéseket.

A **menyiségi tervezés** keretében meg kell határozni a bruttó és a nettó anyagszükségletet az anyagnormák és beépülési fák alapján, illetve el kell készíteni azok beszerzési tervét.

Az **anyagszükségleten** belül háromféle igény határozható meg:

- az elsődleges anyagszükségletet az előrelátható végtermék- és alkatrészigény jelenti,
- a másodlagos anyagszükségletet az elsődleges igényként jelentkező termékek előállításához szükséges nyersanyagok, alkatrészek és részegységek mennyisége határozza meg,
- a harmadlagos anyagszükségleti terv a segéd- és üzemanyagok mennyiségét (minőség és fajta szerint) tartalmazza.



11.12. ábra. A függőigények meghatározási módszerei

Az anyagszükségleti terv elkészítésének célja az, hogy az elsődleges igényfelmérésből levezesse a másod- és harmadlagos igényeket. A különböző szintű igénymeghatározásokhoz: programorientált, felhasználás orientált és szubjektív (becslő) eljárásokat lehet alkalmazni (11.12. ábra).

11.2.1 Anyagnormák

Az **anyagnormák** olyan fajlagos mutatószámok, amelyek megadják, hogy egy termék egység gyártása, illetve egy tevékenység egység végzése mennyi anyagot igényel. Anyagnorma például az 1 m³ beton keveréséhez szükséges sóder, cement és víz mennyisége, a gépkocsi üzemanyag fogyasztása 100 km-en. Az anyagnormák a következő szempontok szerint csoportosíthatók:

Forma szerint: felhasználási norma, kihozatali norma.

Szerkezet szerint: nettó, bruttó és beszerzési norma.

Az alkalmazott meghatározási módszer szerint: statisztikai eljárással becsült norma, és műszaki gazdasági elemzéssel kalkulált norma (analitikus módszer).

Az **anyag felhasználási norma** vagy anyagnorma azt adja meg, hogy egységnyi mennyiségű termék előállítása mennyi anyagot igényel. Az **anyag kihozatali norma** ennek a reciproknak értéke, azaz egységnyi mennyiségű nyersanyagból mennyi készterméket lehet előállítani. Információtartalmát tekintve a kétféle anyagnorma azonos értékű.

Mikor melyiket használjuk, azt az dönti el, hogy mi az alkalmazás célja. Szükségletszá-

mításhoz inkább az anyag felhasználási norma alkalmazása ajánlott. Az anyag kihozatali norma elsősorban a tevékenység változás hatásfokának, hatékonyságának a mérésére alkalmas.

A szerkezet szerint megkülönböztetett anyagnormák abban különböznek, hogy a ténylegesen beépülő, átalakuló anyagmennyiségen felül (a veszteségek miatt) különböző plusz anyagmennyiségeket tartalmaznak. Így:

A **nettó anyagnorma** az elméleti anyagszükségletet tartalmazza.

A bruttó anyagnorma = nettó anyagnorma + technológiai veszteségek.

Beszerezési anyagnorma = bruttó anyagnorma + egyéb veszteségek (szállítás, raktározás, porlás, párolgás stb.)

A mennyiséget mérhetjük tömeg, térfogat, darab, stb. egységekben.

11.2.2 Szubjektív (becslő) eljárások

A **szubjektív (becslő) eljárásokat** akkor kell az anyagszükségleti terv elkészítéséhez alkalmazni, ha nem állnak rendelkezésre múltbeli értékek, amelyekre az előrejelzés támaszkodhat (pl. egy új termék kifejlesztésekor). Két változata van:

analóg becslés (ennek alkalmazásakor valamely összehasonlítható anyagra vagy termékre vonatkozó előrejelzési adatokat megpróbálják átvinni a szóban forgó anyagra vagy termékre),

intuitív becslés (az anyagfelhasználást az adott területen dolgozó szakértő személyek kikérdezésére, azok becslésére alapozzák).

Mivel mindkét módszer nagymértékben szubjektív, ezért a hibás becslés veszélye nagy. Elsősorban akkor javasolt alkalmazni, ha kicsi értékű anyagokról vagy termékekről van szó.

3.2.3 Felhasználás orientált eljárások

A **felhasználás orientált eljárások** statisztikus módszereket használnak. Akkor alkalmazzák, ha

a programorientált módszerek nem eredményesek (pl. új termékek vagy gyártástechnológiák bevezetésekor keletkező nagyszámú selejt miatt), vagy nem gazdaságosak,

a harmadlagos anyagszükségleti tervekben, ahol kisebb értékű anyagokat (segéd- és üzemanyagok, gyorsan kopó szerszámok) használnak.

Ezeknél az eljárásoknál összefüggést feltételeznek a múltbeli felhasználás és a jövőbeni igény között. Az összefüggések kimutatására és az anyagnormák meghatározására statisztikai módszerek alkalmazhatók. Ennek feltételei:

megfelelő számú adat (statisztikai minta) álljon rendelkezésre,

a múlt és a jövő körülményei hasonlóságot mutassanak, valamint az egyéb befolyásoló tényezők se változzanak lényegesen.

A **statisztikai becslésre** alapvetően kétféle módszer ismert: az összegző becslés, és a részletező becslés. **Összegző becslés** esetén egy lépésben állítjuk elő a keresett értéket (anyagnormát). **Részletező becslésnél** először elemi műveletekre, összetevőkre bontjuk a feladatot, a részműveleteket külön-külön becsljük, majd ezek összesítésével állítjuk elő az eredőbecslést.

Ha például egy mosodában a feladat meghatározni mennyi víz szükséges egy kilogramm textília kimosásához, akkor a vízmennyiség kétféle módon becsülhető:

- a) Összegző becsléssel azt becsüljük, hogy egységnyi mennyiségű textilá teljes kimosása mennyi vizet igényel.
- b) Részletező becslés esetén a mosást részműveletekre bontjuk, például előmosás, áztatás, mosás, öblítés, majd becsléssel meghatározzuk a részműveletek vízigényét, és ezeket a becsléseket összegezzük.

Példa az összegző statisztikai becslésre:

Határozzuk meg 1 kg textilá kimosásának anyagnormáját, majd azt, hogy 1000 kg textilá mosásához mennyi vízre van szükség, ha 1 kg textilá kimosásához az elmúlt 7 alkalommal a 11.10. táblázatban megadott mennyiségű vizet (q_i) használtak fel literben mérve. A 11.10. táblázat adataiból egy kilogramm textilá kimosása átlagosan

$$\bar{q} = \frac{\sum_{i=1}^7 q_i}{7} = 13,09 \text{ liter}$$

vizet igényelt, amelyből látszólag az következik, hogy várhatóan 1 kg textilá kimosásához 13,09 liter, és 1000 kg textilá kimosásához $1000 \cdot 13,09 = 13090$ liter vízre lesz szükségünk.

11.10. táblázat

Alkalom	1	2	3	4	5	6	7
Felhasználás, q_i (l/kg)	13,5	13,4	12,9	12,6	12,4	13,0	13,8

Jogos lehet a kérdés, hogy a következő, például a 8. mosás alkalmával 1 kg textilá kimosásához mennyi vízre (q) lesz szükség. Azt mondhatjuk, hogy várhatóan 13,09 liter, de a tényleges érték az adatok változása (szóródása) miatt ettől eltérhet. Ha a megfigyelt adatokról azt feltételezzük, hogy normális eloszlás szerint változnak, akkor a mosások felénél, az átlagosnál kevesebb, a mosások másik felénél pedig az átlagosnál több vizet fogunk felhasználni. A kérdésre ezért a helyes válasz: 50% a valószínűsége annak, hogy a 13,09 liter vízzel kimoshatunk 1 kg textilát. Hasonlóan, 1000 kg textilához a 13090 liter víz 50% valószínűséggel elegendő.

Ha feltételezésünk szerint a vízigény normális eloszlású, akkor a várhatóérték becslült értékével ($\bar{q}$), és a σ szórás becslült értékével, az

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2}$$

tapasztalati szórással bármilyen valószínűségi szinten becsülhető a q vízigény.

Ha 90% valószínűséggel szeretnénk megbecsülni, hogy mennyi víz lesz elegendő a következő mosás alkalmával 1 kg textilá kimosásához, (ekkor 10 esetből csak egyszer fordul elő vízhiány), akkor a következő módon járunk el.

1. A standard normális eloszlású (0 várható értékű, 1 szórású) valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

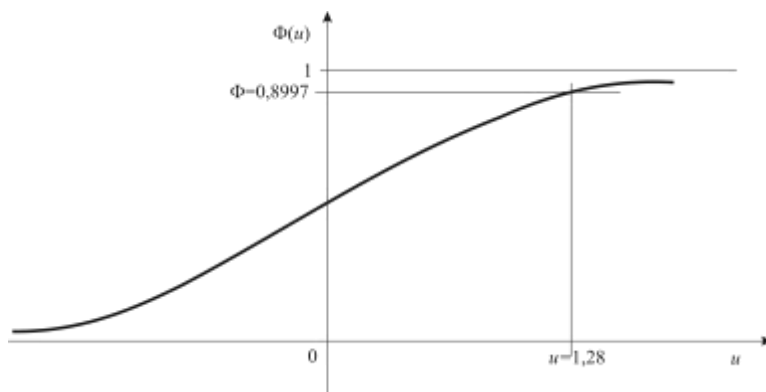
$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Ha ξ egy tetszőleges, nem nulla szórású valószínűségi változó, akkor a standard valószínűségi változó:

$$u = \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)},$$

ahol: $\xi - M(\xi)$ a ξ valószínűségi változó várhatóértéktől való eltérése, és $D(\xi)$ a szórása.

Az u valószínűségi változó értékét a $\Phi(u)$ függvény értékeit tartalmazó táblázatából olvashatjuk ki. A $\Phi(0,8997)$ eloszlásfüggvény értékhez (valószínűséghez) $u=1,28$ tartozik (11.13. ábra).



11.13. ábra: A standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye

Ha nem áll rendelkezésünkre táblázat, akkor közelítő számítással is meghatározhatjuk az u értékét. A standard normális eloszlású (0 várható értékű, 1 szórású) valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő kifejezéssel közelíthető:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} du = \varphi(u) \cdot (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) + \varepsilon,$$

ahol:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$$

a standard normális eloszlású (0 várható értékű, 1 szórású) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, a $p=0,2316419$, $b_1=0,31938153$, $b_2=-356563782$, $b_3=1,781477937$, $b_4=-1,821255978$, $b_5=1,330274429$ értékű állandók, a t paraméter

$$t = \frac{1}{1 + p \cdot u},$$

és az ε hiba $\leq 7,5 \cdot 10^{-8}$.

A bemutatott kifejezéseket és az *Excel Solver* programját használva, a következő eredményt kapjuk: $\Phi(u) = 0,899999947$ és $u = 1,281551636$. A *Solver* segítségével az u értéket úgy keressük, hogy az ε hibát minimalizáljuk.

2. A 11.10. táblázat adatait felhasználva, az átlagtól való eltérésekből kiszámítjuk a tapasztalati szórást:

$$s = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_{i=1}^7 (q_i - 13,09)^2} = 0,5.$$

3. Számítás eredménye $s=0,5$, így a várható értéktől való eltérés az előzőek alapján:

$$\Delta q = \xi - M(\xi) = u \cdot D(\xi) = u \cdot s = 1,28 \cdot 0,5 = 0,65 \text{ liter}$$

vízmenyiség, amit az átlaghoz ($\bar{q}$) hozzá kell adni ahhoz, hogy a mosások 90%-ánál ne legyen vízhiány.

4. Az összes igény tehát

$$q = \bar{q} + \Delta q = 13,09 + 0,65 = 13,74 \text{ liter.}$$

Ha ennyi vizet biztosítanánk minden egyes kilogramm textilra kimosásához, akkor 10 esetből várhatóan csak egyszer fordulna elő a vízhiány.

További kérdés, hogy a kapott eredmény azt jelenti-e, hogy 1000 kg textilra kimosásához $1000 \cdot 13,74 = 13740$ liter víz szükséges a 90%-os valószínűségi szint eléréséhez. A válasz egyértelműen nem, mivel a nagyobb mennyiség ingadozásai, az átlagtól való eltérések nagyobb eséllyel egyenlítik ki egymást. Nagyobb mennyiségű textilra esetén ezért a vízigény szórása csökken. Ha az 1 kg textilra vonatkozó szórás 0,5, akkor az $n=1000$ kg textilra esetén a szórás:

$$s' = \frac{n \cdot s^2}{\sqrt{n}} = \frac{1000 \cdot 0,5^2}{\sqrt{1000}} = 7,9 \text{ liter.}$$

Ekkor a

$$\Delta q_{1000} = u \cdot s' = 1,28 \cdot 7,9 = 10,11 \text{ liter.}$$

Ha tehát egyszerre 1000 kg textilát kell kimosni, akkor

$$q_{1000} = \bar{q}_{1000} + \Delta q_{1000} = 13090 + 10,11 = 13110,11 \text{ liter}$$

vízről kell gondoskodni. Ez a vízmennyiség 1000 kg textilra kimosásához 90% biztonsággal elegendő.

A példa eredményéből kiolvasható, hogy centralizált készletből ugyanakkora igény ugyanakkora biztonsággal olcsóbban elégíthető ki, mint megosztott készletekből. Vagyis a centralizált készlet nagysága kisebb lehet, mint a megosztott készletek összege. Azt is mondhatjuk, hogy az ingadozó igényeket a centralizált készlet magasabb biztonsági szinten képes kielégíteni. A vállalatok nem véletlen töreksenek nagy elosztóraktárak, logisztikai központok létesítésére. (Ezzel természetesen nőnek a szállítási távolságok, amit szintén figyelembe kell venni. Optimalizáláskor ezért egyidejűleg több szempontot kell szem előtt tartani.)

Példa a részletező statisztikai becslésre:

Egy kilogramm textilra mosásához az elmúlt 7 alkalommal a 11.11. táblázatban látható mennyiségű vizet használtak fel műveletenként részletezve és literben mérve. Kérdés mennyi a textilra mosás teljes anyagnormája.

11.11. táblázat

Alkalom/művelet	1	2	3	4	5	6	7
Előmosás (l)	4,05	4,02	3,87	3,78	3,72	3,90	4,14
Mosás (l)	7,42	7,37	7,09	6,93	6,82	7,15	7,59
Öblítés (l)	2,03	2,01	1,94	1,89	1,86	1,95	2,07

A számítások elvégzése után kapott eredményeket a 11.12. táblázat foglalja össze. Az összesítés után az utolsó sorban a számok megegyeznek a 11.10. táblázat 2. sorában közölt számokkal.

11.12. táblázat

Alkalom/művelet	1	2	3	4	5	6	7	Átlag	Szórás
Előmosás (l)	4,05	4,02	3,87	3,78	3,72	3,90	4,14	3,93	0,15
Mosás (l)	7,42	7,37	7,09	6,93	6,82	7,15	7,59	7,20	0,28
Öblítés (l)	2,03	2,01	1,94	1,89	1,86	1,95	2,07	1,96	0,08
Összesen (l)	13,5	13,4	12,9	12,6	12,4	13,0	13,8	13,09	0,50

A statisztikai eljárás viszonylag egyszerű, megbízható és nagyon eredményes. A számítógéppel támogatott információs rendszerek elterjedésével várható, hogy a statisztikai eljárás egyre könnyebbé válik, és az anyagnormák statisztikai úton történő számításának jelentősége nő fog. Hátránya, hogy új termékek, illetve a befolyásoló tényezők megváltozása esetén közvetlen nem alkalmazható.

11.2.4 Programorientált anyagszükséglet tervezés

A **programorientált anyagszükséglet tervezési módszerrel** a mennyiségek és az időpontok egzakt módszerekkel (determinisztikus módon) határozhatók meg, és elsősorban a másodlagos anyagszükségleti terv készítéséhez használhatók. A szakirodalomban három változatával lehet találkozni:

- analitikus tervezés (alapja a tényleges vásárlói megrendelés és/vagy a tervezett értékesítési, illetve gyártási program, valamint darabjegyzék),
- szintetikus tervezés (a darabjegyzék helyett az alkatrész-felhasználási kimutatásokat használja),
- tervezés hálózattal (beépülési fa) a végtermék tervezett mennyiségéből kiindulva határozza meg a beépülő anyagokra, félkész termékekre vonatkozó igényeket.

A felsorolt módszerek alapját egzakt számítások képezik, azonban a kapott eredmények értékelésekor figyelembe kell venni a tényleges megvalósulásakor fellépő bizonytalansági tényezőket (az alapanyag minőségének, technológiai paraméterek ingadozását, stb.). Ezek miatt az előzetes elemzéssel számított analitikus normák általában nem teljesen egyeznek meg a tényleges normákkal.

Anyagszükséglet tervezés gráfokkal

Egy vállalat által előállított végtermékekhez szükséges részegységek, alkatrészek számát az összeállítási rajzok segítségével adhatjuk meg. Azt a terméket, amely más termékbe nem épül be **végterméknek**, azt a terméket, amelybe más termék beépül, de még nem végtermék **félkész terméknek**, és végül azt a terméket, amelybe nem épül be más termék, **alkatrésznek** fogjuk nevezni. Az alkatrész fogalmát gyűjtőnévként használjuk függetlenül attól, hogy vásárolt, gyártott alapanyag, vagy komplett részegység. Vagyis a szükséglettervezési rendszer elemeit három nagy csoportba soroljuk, végtermékek, röviden termékek, félkész termékek, illetve alkatrészek. Az összeállítási rajzok elemei többféleképpen megadhatók, összeállítási fával, gozinto-gráffal és darabjegyzékkel.

Termék összeállítási fa

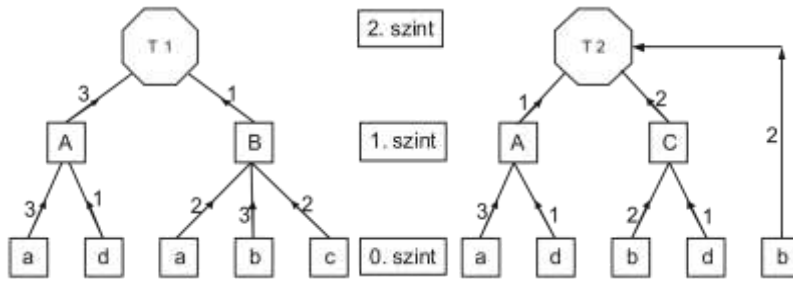
Az **összeállítási fa** (eredetfának is nevezik) a végtermék összes komponensét tartalmazza, mégpedig az egyes szerelési fázisok sorrendjében. Például a **0-adik szint** (11.14. ábra) megfelel a nyersanyagoknak, illetve elemi alkatrészeknek, míg a legmagasabb gyártási szint, mondjuk az **N-edik szint** a végterméknek. A több helyen előforduló azonos alkatrészeket (pl. csavarok) minden szerelési szinten ábrázolni kell, ahol előfordulnak.

Egy összeállítási fa nem más, mint egy körmentes irányított fa, amelynek

- pontosan egy olyan csomópontja van, ahova nem vezet él, ez a fa gyökere,
- a gyökéren kívül minden más csomópontba egy él vezet,
- a gyökérből minden csomópontba egy út vezet.

A gráf különböző szintjein elhelyezkedő csomópontok megfelelnek az egyes gyártási szinteken elhelyezkedő termékeknek (A, B, C, a, b, stb.). Az élek irányítása a beépülés irányát mutatja. Legyen a_{ij} az i, j élhez rendelt érték, amely azt mutatja, hogy az i -edik alkatrészből közvetlenül mennyi (db, kg, m, stb.) épül be a j -edik alkatrészbe. Az a_{ij} -t

gyakran **input koefficiensnek**, vagy **termelési koefficiensnek** nevezik.

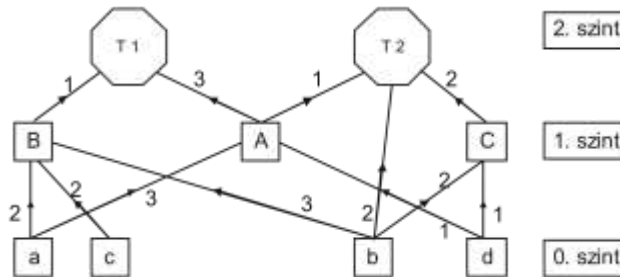


11.14. ábra. Termék összeállítási fa

A 11.14. ábra két végtermék (T1 és T2) összeállítási fa struktúráját szemlélteti, amelyek A, B, C félkész termékekből, és a, b, c, d elemi alkatrészekből épülnek fel. Ügyeljünk arra, ha egy i, j él több összeállítási fában is előfordul, például az (a-A) és (d-A) élek, akkor azokhoz azonos a_{ij} értékek tartozzanak.

Gozinto-gráf

A termék összeállítási fa a termékek ábrázolásának jól áttekinthető formája, de a redundancia (ugyanazon elemek többszöri ábrázolása) miatt, számítástechnikai szempontból a kezelésük nem a leghatékonyabb. Kompaktabb ábrázolást tesz lehetővé az ún. **gozinto-gráf** (11.15. ábra), amelynek a neve egy szójátékból ered (the part that goes into her).



11.15. ábra. Gozinto-gráf

Az élek pontosan ugyanazt jelentik, mint a 11.14. ábrán bemutatott gráfon, de a **gozinto-gráfon** minden alkatrész csak egyszer jelenik meg. Így ugyan romlik a gráf áttekinthetősége, de ugyanakkor sok hibát kiküszöbölhetünk általa. Ha valamely részegységben az összetevőket megváltoztatjuk, pl. termékfejlesztés során, akkor ezt csak egy helyen kell módosítani. Hagyományos összeállítási fa alkalmazása esetén, az összes terméken, illetve részegységen végig kell menni, és a módosítást minden olyan helyen végrehajtani, ahol az érintett (módosított) alkatrész előfordul.

Ezek a gráfok a gépiparban ciklusmentesek, vegyipari alkalmazásoknál előfordulnak ciklusok (pl. finomítási eljárásoknál), amikor a végterméket, vagy egyes részterméket újra visszavezetik ugyanabba a folyamatba.

Az összeállítási fák az ipari gyakorlatban leggyakrabban **darabjegyzék** formájában állnak rendelkezésünkre. Ide tartoznak a receptúrák a vegyiparban, anyaglisták az építőiparban, összetevők a textiliparban stb. Leginkább az építőköcka elv szerinti felosztással lehet találkozni, amely különálló „dobozokba” csoportosítja az egyes elemek tartozékait, az ismétlődő egységeket természetesen csak egyszer részletezve. A 11.9. ábrán látható T1 és T2 termékek darabjegyzékét látjuk a 11.13. táblázatban.

11.13. táblázat

T1 végtermék

Jelölés	Alkatrésztípus	Mennyiség
A	félkész termék	3
B	félkész termék	1

T2 végtermék

Jelölés	Alkatrésztípus	Mennyiség
A	félkész termék	1
C	félkész termék	2
b	elemi alkatrész	2

A félkész termék

Jelölés	Alkatrésztípus	Mennyiség
a	elemi alkatrész	3
d	elemi alkatrész	1

B félkész termék

Jelölés	Alkatrésztípus	Mennyiség
a	elemi alkatrész	2
b	elemi alkatrész	3
c	elemi alkatrész	2

C félkész termék

Jelölés	Alkatrésztípus	Mennyiség
b	elemi alkatrész	2
d	elemi alkatrész	1

Miután elkészült a végtermékeket és az egyes félkész termékek, alkatrészek beépülését ábrázoló gráf vagy darabjegyzék, amely a szerelési szinteken kívül mutatja a beépülő mennyiségeket is, következhet a bruttó alkatrészigény meghatározása.

A bruttó alkatrészigény meghatározása

A számításokhoz először ábrázoljuk a 11.14. ábrán látható gráfot az **A** mátrixszal (11.14. táblázat) Az **A** mátrix elemei az élekhez rendelt a_{ij} értékek, ahol $i=1,2,..m$, $j=1,2,..m$. Például az a -adik sorban és B -edik oszlopban az $a_{ij}=2$ azt jelenti, hogy a B félkész termékbe az a alkatrészből 2 db épül be. Ez a mátrix a közvetlen beépüléseket mutatja, ezért a **közvetlen ráfordítás mátrixának** nevezik.

11.14. táblázat

A közvetlen ráfordítás mátrixa (A)

i/j	T1	T2	A	B	C	a	b	c	d
T1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A	3	1	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	2	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	3	2	0	0	0	0	0
b	0	2	0	3	2	0	0	0	0
c	0	0	0	2	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	1	0	0	0	0

A termelés-programozás feladata a vevők közvetlen igényeinek ismeretében meghatároz-

ni az egyes termékekből, félkész termékekből és alkatrészekből gyártandó vagy beszerzendő mennyiségeket. Jelölje a $\mathbf{t}^T = [t_1, t_2, \dots, t_m]$ vektor a vevők közvetlen igényeit, amit **tervvektornak** nevezünk. A tervvektorban nemcsak végtermékek, hanem olyan félkész termékek és alkatrészek is előfordulhatnak, amelyeket a vevők a végtermékeken kívül rendelnek, például pótalkatrészként. Legyen $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_m]$ a végtermékek és az ezekbe beépülő elemek összes mennyiségét leíró vektor, amit úgy kapunk, hogy a vevők közvetlen igényeihez (t_i) hozzáadjuk a beépülő mennyiségeket.

$$x_i = t_i + \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_j \quad \text{ahol } i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,m.$$

Rendezzük az egyenletet:

$$t_i = x_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_j,$$

amelyet tömören, vektori alakban is felírhatunk:

$$\mathbf{t} = \mathbf{x} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x},$$

ahol $\mathbf{E}$ az egységmátrix. Ebből a gyártandó vagy beszerzendő mennyiségek:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{t},$$

ahol a $\mathbf{T} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ inverz mátrixot a **teljes ráfordítás mátrixának** is nevezik. A teljes ráfordítás mátrix elemei azt mutatják, hogy a j -edik termék hány i -edik alkatrészt vagy félkész terméket tartalmaz.

11.15. táblázat

Az $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ mátrix

i/j	$T1$	$T2$	A	B	C	a	b	c	d
$T1$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$T2$	0	1	0	0	0	0	0	0	0
A	-3	-1	1	0	0	0	0	0	0
B	-1	0	0	1	0	0	0	0	0
C	0	-2	0	0	1	0	0	0	0
a	0	0	-3	-2	0	1	0	0	0
b	0	-2	0	-3	-2	0	1	0	0
c	0	0	0	-2	0	0	0	1	0
d	0	0	-1	0	-1	0	0	0	1

Először számítsuk ki az $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ mátrixot (11.15. táblázat). Ez egy olyan kvadratikus mátrix, amelynek diagonálisában minden elem 1, a többi elem pedig az $\mathbf{A}$ mátrix elemeinek mínusz egyszerese. A mátrix inverze a $\mathbf{T} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ mátrix, amely a teljes ráfordítás mátrixa (11.16. táblázat). Az inverz mátrix számítása munkaigényes művelet (lásd a 13.1.10 szakaszban), a Microsoft Excelben azonban az INVERZ.MÁTRIX(tömb) függvénnyel egyszerűen elvégezhető.

Legyen a tervvektor $\mathbf{t}^T = [30, 25, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$, akkor az összes gyártandó vagy beszerzendő késztermék, félkész termék és alkatrész a $\mathbf{T}$ mátrix és a $\mathbf{t}$ vektor skaláris szorzata:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{t}.$$

11.16. táblázat

A teljes ráfordítás mátrixa, (T)

<i>i/j</i>	<i>T1</i>	<i>T2</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>T1</i>	1	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>T2</i>	0	1	0	0	0	0	0	0	0
<i>A</i>	3	1	1	0	0	0	0	0	0
<i>B</i>	1	0	0	1	0	0	0	0	0
<i>C</i>	0	2	0	0	1	0	0	0	0
<i>a</i>	11	3	3	2	0	1	0	0	0
<i>b</i>	3	6	0	3	2	0	1	0	0
<i>c</i>	2	0	0	2	0	0	0	1	0
<i>d</i>	3	3	1	0	1	0	0	0	1

A kijelölt mátrixszorzást (lásd a 13.1.4 szakaszban) elvégezve, a 11.17. táblázat utolsó oszlopában megkapjuk a termelési programot, vagyis az $\mathbf{x}$ vektor elemeit, amelyek szerint például az *a* alkatrészből 405 darabot, a *b* alkatrészből 240 darabot, kell gyártani, vagy beszerezni.

Ha ismerjük a $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_m]$ fajlagos termék, félkész termék és alkatrész költségeket, akkor az összes költség:

$$K = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}.$$

11.17. táblázat

	<i>T1</i>	<i>T2</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>		<i>t</i>		<i>x</i>
<i>T1</i>	1	0	0	0	0	0	0	0	0		30		30
<i>T2</i>	0	1	0	0	0	0	0	0	0		25		25
<i>A</i>	3	1	1	0	0	0	0	0	0		0		115
<i>B</i>	1	0	0	1	0	0	0	0	0		0		30
<i>C</i>	0	2	0	0	1	0	0	0	0		0	=	50
<i>a</i>	11	3	3	2	0	1	0	0	0		0		405
<i>b</i>	3	6	0	3	2	0	1	0	0		0		240
<i>c</i>	2	0	0	2	0	0	0	1	0		0		60
<i>d</i>	3	3	1	0	1	0	0	0	1		0		165

11.2.5 A gyártástervezési és - irányítási rendszerek

A gyártástervezési és - irányítási rendszerek a meghozandó döntések központosítási mértékének függvényében: centralizáltak, részben centralizáltak (területenként központosítottak) és decentralizáltak lehetnek.

A **centralizált** gyártástervezési és - irányítási rendszereknél valamennyi, a gyártás végrehajtására (a sorozat nagyságra, a megrendelések teljesítési határidejére stb.) vonatkozó döntést, központilag hoznak meg, így a gyártásnál csupán végrehajtási tevékenységet végeznek. Az ilyen ún. erőforrás tervező rendszerek működésének előfeltételei:

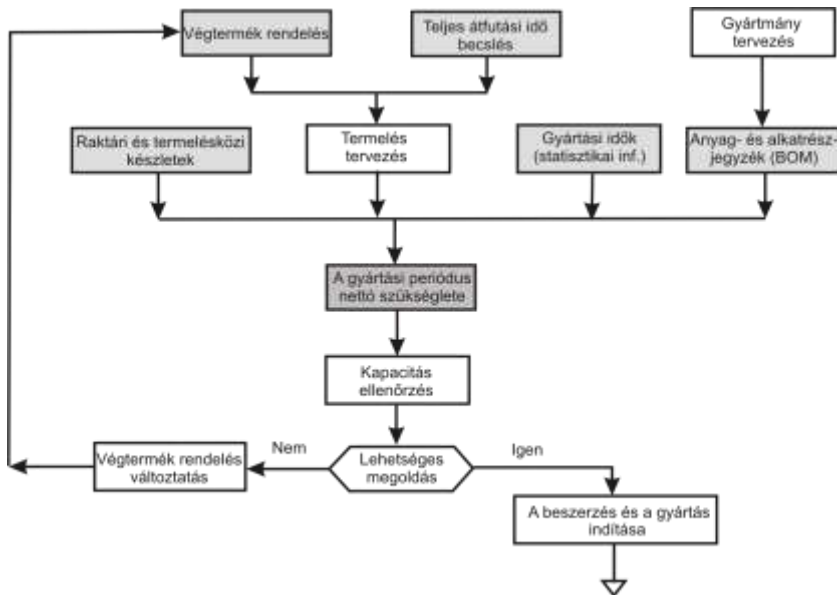
a központnak folyamatos visszajelzéseket kell kapnia a gyártás rendszerállapotairól (ez csak on-line módon valósítható meg),

a központ rendelkezik a valóságos gyártási folyamatot pontosan leíró szimulációs modellel, amely minden pillanatban alkalmas a döntések meghozatalához szükséges információk előállítására.

A **részben centralizált** gyártástervezési és -irányítási rendszer esetén csak azoknak a termelési egységeknek (üzemeknek) a termelési folyamatát tervezik és irányítják központilag, amelyek a rendelés átfutását illetően kritikus szűk keresztmetszetet jelentenek. A központi szűk keresztmetszetek tervezésére és irányítására az OPT (*Optimized Production Technology* - optimalizált gyártástechnológia) rendszert dolgozták ki.

A **decentralizált** gyártástervezési és -irányítási rendszerekben a hierarchiaileg fölrendelt szinteken csak a tervezéshez és a döntéshez szükséges keretfeltételeket írják elő, miközben a termelési folyamatokat közvetlen az alárendelt döntési szintekről irányítják. Ez a rendszer lehetővé teszi az ún. napi programok szerinti munkaszervezést (például a JIT-elvű anyagellátást és termelést), amelynek minden szakaszában –kezdve a nyersanyagok beszerzésétől egészen a végszerelésig és kiszállításig– minden tevékenység aktuális „lehívások” alapján történik. Ilyen rendszerek a japán Kanban-rendszer és a szinkronizált gyártás.

Az MRP-rendszerek. Az első professzionális erőforrás-tervező rendszert a 60-as években az IBM fejlesztette ki MRP I. néven (Material Requirement Planning). Ez a rendszer elsősorban az anyagszükséglet tervezést támogatta. Az MRP I.-et később az igényeknek megfelelően továbbfejlesztették, és MRP II. (Manufacturing Resource Planning) néven széles körben elterjedt.



11.15. ábra. Az MRP II működésének egyszerűsített folyamata

Mindkettő azonos logikai alapon működő tervezési, irányítási rendszer. Központi része az általános adatbázis, amelyben többek között megtalálható a megrendelések nyilvántartása, a raktár és termelésközi készletek adatai, az anyag- és alkatrészjegyzék, a gyártási ütemterv, a gyártási rendszer kapacitási, stb. (11.15. ábra). Az MRP II rendszer kapacitás-ellenőrző funkcióval is rendelkezik, továbbá lehetőséget nyújt pénzügyi információs rendszer kialakítására, valamint a kutatás-fejlesztéshez, a marketing tevékenységhez szükséges adatok tárolására és feldolgozására.

Az OPT-rendszer néven –ugyancsak az USA-ban– kifejlesztett rendszer adatbázisa megfelel az MRP-rendszerek adatbázisának, de eltér a két rendszer tervezési módszere. Az OPT segítségével meghatározhatók a gyártási folyamat szűk keresztmetszetei, segíti a keresztmetszetek optimális leterhelésének tervezését, a rendelési és az átfutási idők, va-

lamint a forgó készletek csökkentését. Az OPT rendszer alapjául szolgáló fontosabb (gyártásfilozófiai) szabályok a következők:

A gyártási folyamatot és nem a kapacitást kell kiegyenlíteni.

Valamely kapacitás elérhetősége és kihasználása nem ugyanazt jelenti.

A szűk keresztmetszet kapacitása vagy átfutási ideje miatt elvesztegetett egy óra, az egész rendszer szempontjából egy óras veszteséget jelent.

A szűk keresztmetszeteken kívül megtakarított egy óra nem okoz átfutási idő csökkenést.

A szállítási és a gyártási sorozatnak nem kell feltétlenül megegyeznie.

A gyártási sorozatnagyság nem konstans.

A gyártási terv elkészítésekor valamennyi feltételt ellenőrizni kell, az átfutási idő ennek a tervnek lesz az eredménye, és előre nem lehet meghatározni.

Az egyedi optimumok összege nem azonos a teljes rendszer optimumával.

A darabjegyzékek alapján a szűk keresztmetszetek megkeresése és a kapacitások meghatározása előre haladó határidő tervezéssel, a teljes gyártási folyamat kritikus és nem kritikus területekre való felosztása.

A szűk keresztmetszeteket változó kapacitásokkal, sorozatnagyságokkal és rendelési sorrendekkel lehet optimalizálni.

Visszafelé haladó határidő tervezést kell alkalmazni annak érdekében, hogy ellenőrizni lehessen az előző lépésben kapott kapacitáselosztás, a gyártási és szállítási sorozatnagyságok, illetve a rendelési sorrendek hatását az egyéb területekre. Amennyiben az utolsó lépésben újabb szűk keresztmetszetek adódnak, a rendszer paramétereinek és keretfeltételeinek módosításával, az eljárás megismételhető mindaddig, amíg újabb szűk keresztmetszetek fedezhetők fel.

11.2. példa: Tegyük fel, hogy az előző előrejelzés 2083 volt, a szóban forgó változó tényleges értéke pedig 1975, a változó legrégibb értéke 1945. Használjuk az utolsó négy megfigyelésre alapozott mozgóátlagos módszert, hogy megtaláljuk a következő periódusra szóló előre jelzést.

11.2. példa megoldása

Az előző előrejelzés $\tilde{E}(X_t) = 2083$, az $x_t = 1975$, az $n = 4$ és a $x_{t-n} = x_{t-4} = 1945$.

Az előrejelzés a szóban forgó $t+1$ -edik időszakra:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \sum_{i=t-n+1}^t \frac{x_i}{n}$$

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n+1}^t x_i = \frac{1}{n} (x_{t-3} + x_{t-2} + x_{t-1} + x_t).$$

Az előrejelzés a t -edik időszakra:

$$\tilde{E}(X_t) = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n}^{t-1} x_i = \frac{1}{n} (x_{t-4} + x_{t-3} + x_{t-2} + x_{t-1}).$$

Az első kifejezésből a másodikat kivonva:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) - \tilde{E}(X_t) = \frac{1}{n} (x_t - x_{t-4})$$

és rendezve

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \tilde{E}(X_t) + \frac{1}{n} (x_t - x_{t-4}).$$

Végül az adatokat behelyettesítve, a keresett előrejelzés

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = 2083 + \frac{1}{4}(1975 - 1945) = 2090,5.$$

Könnyen belátható, hogy az utolsó kifejezés általánosítható:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \tilde{E}(X_t) + \frac{1}{n}(x_t - x_{t-n})$$

11.3. példa: Tegyük fel, hogy az előző előrejelzés 2083 volt, a szóban forgó változó tényleges értéke pedig 1975, $\alpha=0,2$. Használjuk az exponenciálissimítást, hogy megtaláljuk a következő periódusra szóló előrejelzést.

11.3. példa megoldása

Az előző előrejelzés $\tilde{E}(X_t) = 2083$, az $x_t=1975$ és az $\alpha=0,2$.

Az előrejelzés a következő periódusra, a t -edik időszakra:

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \alpha x_t + (1-\alpha)\tilde{E}(X_t) = 0,2 \cdot 1975 + (1-0,2) \cdot 2083 = 2061,4,$$

vagy

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \tilde{E}(X_t) + \alpha[x_t - \tilde{E}(X_t)] = 2083 + 0,2 \cdot [1975 - 2083] = 2061,4.$$

11.4. példa: Az előző előrejelzés 782 volt, a szóban forgó változó tényleges értéke pedig 794, és $\alpha=0,1$. Használjuk az exponenciálissimítást, hogy megtaláljuk a következő periódusra szóló előrejelzést.

11.5. példa: Tegyük fel, hogy az előző előrejelzés 782 volt, a szóban forgó változó tényleges értéke pedig 794, a változó legrégibb értéke 810. Használjuk az utolsó három megfigyelésre alapozott mozgóátlagos módszert, hogy megtaláljuk a következő periódusra szóló előre jelzést.

11.6. példa: Mi lesz az előrejelzéssel, ha az exponenciálissimításban α értéke 0 vagy 1?

11.6. példa megoldása

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \alpha x_t + (1-\alpha)\tilde{E}(X_t)$$

Ha $\alpha=0$, akkor

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = \tilde{E}(X_t)$$

vagyis az előrejelzés egyenlő az előző (utolsó) előrejelzéssel.

Ha $\alpha=1$, akkor

$$\tilde{E}(X_{t+1}) = x_t$$

vagyis az előrejelzés egyenlő a szóban forgó változó előző tényleges értékével. A t -edik időszakot megelőző időszakok nincsenek hatással a t -edik időszak előrejelzésre.

11.3. Ellenőrző kérdések

1. Hasonlítsa össze a függő és a független keresletű igényeket!
2. Csoportosítsa a független keresletű igények előrejelzési módszereit!
3. Ismertesse a véleményalkotás módszereit!
4. Mutassa be az idősorok elméletével kapcsolatos alapfogalmakat!
5. Ismertesse a mozgó átlagokra és az exponenciálissimításra alapozott előrejelzési eljárásokat.

6. Ismertesse a tendenciához igazított és a szezonálisan korrigált exponenciálissimítást.
7. Milyen okozati előrejelzési módszereket ismer?
8. Hogyan használható a regresszió analízis előrejelzésre?
9. Csoportosítsa a függő keresletű igények előrejelzési módszereit!
10. Ismertesse az előrejelzésekhez használható anyagnormákat!
11. Ismertesse a függő keresletű igények meghatározására alkalmas szubjektív becslő eljárásokat!
12. Mutassa be a felhasználás orientált eljárásoknál alkalmazott statisztikai módszereket!
13. Ismertesse a függő keresletű igények meghatározására alkalmas programorientált anyagszükséglet tervezési eljárásokat!
14. Hasonlítsa össze a termék összeállítási fá, a gozintó-gráf és a darabjegyzék felépítését.
15. Ismertesse a termék összeállítási fára alapozott bruttó alkatrészigény meghatározását.
16. Milyen számítógéppel segített gyártástervezési és irányítási módszereket ismer?

Jegyzetek, kérdések

12. LOGISZTIKAI RENDSZEREK SZIMULÁCIÓJA

A szimuláció általában számítógépre adaptált, a valós rendszerek viselkedését utánzó módszerek és alkalmazások széles gyűjteménye. Az alkalmazások megtalálhatók a tudomány és a termelés majdnem minden ágában. Például a társadalmi csoportok viselkedésének szimulációja konfliktus helyzetekben, a biológiai rendszerek szimulációja, a termelési rendszerek szimulációja, a pilóták kiképzésére használt repülőgép szimulátor, a személygépkocsik szimulációja széleskörűen mind közismert eszközök és eljárások. Napjainkban a szimuláció a számítógépek és a szoftverek fejlődésének köszönhetően sokkal közismertebb és erőteljesebb eszköz, mint bármikor korábban.

A szimuláció más analitikai módszerekhez hasonlóan magában foglalja a vizsgált rendszert és annak modelljét, vagyis a szimuláció rendszermodellezéssel dolgozik, ahol a rendszer lehet létező vagy megvalósítandó eszköz vagy folyamat, például egy ipari üzem gépekkel, emberekkel, szállítóeszközökkel és tároló helyekkel. A rendszerek tanulmányozásának célja a teljesítmények mérése, a működés javítása, illetve új rendszerek esetén azok tervezése. A rendszer irányítói a naponta ismétlődő műveletekről olyan ismeretekkel szeretnének rendelkezni, mint például: mi a teendő akkor, ha egy üzemben egy fontos gép meghibásodik.

A szimulációs technikák fejlődésének és alkalmazásának igazán nagy lendületet a nagysebességű számítógépek megjelenése adott. Ennek köszönhetően a szimuláció a logisztikai operációk tervezésének is fontos kísérleti eszköze lett. A közelmúltban számos új szoftver jelent meg a piacon. A szoftverek között a csúcstechnikát azok a grafikus programozású rendszerek jelentik, amelyek egyetlen programsor leírása nélkül is képesek összetett rendszerek állapotváltozóinak időbeni alakulását és statisztikai jellemzőit meghatározni.

Eddig a hangsúlyt a logisztikai folyamatok és operációk matematikai modellezésére és megoldására helyeztük. Ennek a megközelítésnek az a nagy előnye, hogy felfedi a rendszerek struktúrájának a lényegét, ezáltal bepillantást nyerünk a rendszeren belüli ok-okozati viszonyokba. Ezért, ha olyan matematikai modellt tudunk felállítani, amely a problémát adekvátan leírja és ráadásul analitikusan vagy numerikusan kezelhető, akkor a matematikai modellt a szimulációval szemben előnyben kell részesíteni. Sokszor találkozunk azonban olyan problémákkal, melyek matematikai szabályokkal (formulákkal) nem írhatók le, vagy azok megoldására nem találunk sem analitikus, sem heurisztikus módszereket. Ez leggyakrabban olyan sztochasztikus folyamatoknál jelentkezik, amelyeket nagyszámú valószínűségi változó jellemez, esetleg különböző típusú eloszlásokkal. Ilyenkor a modellezés egyetlen járható útja a szimuláció.

12.1. Mit jelent a szimuláció?

A szimuláció a vizsgált rendszer részeinek viselkedésére vonatkozó tényeken és feltételezéseken alapuló imitációja, azzal a céllal, hogy ismereteket szerezzünk a rendszer egészének viselkedéséről. A szimulációs modell tehát a rendszer működését annak közvetlen leírása helyett, a rendszer egyes elemeinek egyedi eseményein keresztül írja le. Pontosabban, a rendszert olyan összetevőkre vagy elemekre bontjuk, amelyek viselkedése a rendszer minden állapota és lehetséges bemenete esetén megjósolható, legalábbis valószínűségi értelemben.

Az elkészült modellt úgy működtetjük, hogy véletlenszám-generátorral eseményeket szimulálunk az elemek viselkedésének megfelelő valószínűségi eloszlás szerint. Az eredmény a rendszer tulajdonságait és időbeli működését tükröző szimuláció. Megismételve ezt az eljárást a rendszer különböző konfigurációira és működési politikáira, az eredmények összevetése után kiválaszthatjuk a legígéretesebb változatot vagy változatokat. A szimuláció tehát abban segít, hogy adott technikai és működési feltételek mellett megtaláljuk a legjobb megoldásokat, illetve

elkerüljük a gazdaságtalan működést.

Azt is mondhatjuk, a szimuláció lényegében nem más, mint a rendszer modelljén végzett mintavető kísérletek sorozata. Az adatok és a számítások nagy tömege miatt a szimulációs modellt általában számítógépre adaptáljuk. Segítségével az adott termelési folyamat gyenge pontjait, rosszul működő elemeit már a tervezés fázisában felfedezhetjük, és még a megvalósítás előtt kiszűrhetjük ezeket a problémákat.

12.2. A modell felállítása és működés

Tekintsük a 9. fejezetben megismert $M/M/1$ sorbanállási modellt (*Poisson*-féle bemenet, exponenciális kiszolgálási idők, egy kiszolgáló). Bár ez a modell, mint láttuk analitikusan is megoldható, tanulságos lesz szimulációval is tanulmányozni. A rendszer működése a következő: az érkező ügyfél beáll a sorba, kiszolgálják, majd távozik. A szimulációs modell feladata ebben az esetben, összhangba hozni az ügyfél érkezését és kiszolgálását. A megoldásra a számítógépen két módszer áll rendelkezésünkre: az ún. rögzített időnövekmény és az esemény növekmény módszer.

A **rögzített időnövekmény módszerében** a következő kétlépéses eljárást alkalmazzuk. Feltételezve, hogy a folyamat kezdetén a rendszer adott időpontban valamely állapotban van, először növeljük az időt egy adott rögzített mennyiséggel, mondjuk 1-el. (Az időt számláló "rendszeróra" értékéhez adjunk 1-et.) Ezután meghatározzuk, milyen esemény történt az elmúlt rövid időtartam alatt, és mi a rendszer pillanatnyi állapota. Ezt a két lépést annyszor ismételjük, ahányszor csak akarjuk, illetve ahányszor csak szükséges.

Az említett $M/M/1$ sorbanállási problémában minden eltelt egységnyi idő alatt csak kétféle esemény történhet: egy vagy több érkezés és egy vagy több kiszolgálás befejezése. Sőt, ha az időegységet elég rövidnek választjuk, akkor az egynél több érkezésnek és az egynél több kiszolgálás befejezésének valószínűsége is elenyésző. Ezért a két lehetséges esemény egy ilyen időintervallumban: egy ügyfél érkezése és egy ügyfél kiszolgálásának a befejezése.

Mindkét eseménynek ismerjük a valószínűségét. (Az érkezési időközök és a kiszolgálási idők egyaránt független exponenciális eloszlású valószínűségi változók.) Ezért a számítógépnek csak véletlen számokat kell generálnia, amely azt szimulálja, hogy az esemény bekövetkezett-e vagy sem.

Tegyük fel, hogy egy ügyfél érkezésének a valószínűsége az adott időegység alatt 0,007, akkor a számítógépnek a lehetséges 1000 érték (000, 001, ..., 999) közül kell véletlenszerűen egyet generálnia. Az ügyfél érkezés eseményéhez hét számot rendelünk az 1000 érték közül (legyen ez a hét érték mondjuk 000, 001, ..., 006), a többi érték annak fog megfelelni, hogy az esemény nem következik be. A generált véletlen szám egy tényleges kimenetet fog reprezentálni.

A számítógép, ismervé a kiszolgálási idők eloszlását, ugyanilyen módszerrel szimulálja a kiszolgálás befejezésének az eseményét (feltéve, hogy az adott időpontban egy ügyfél tartózkodik a kiszolgáló csatornában). Ha nincs ügyfél a rendszerben, akkor természetesen a számítógép automatikusan azt mondja, hogy az adott idő alatt nem fejeztek be kiszolgálást. Hasonlóképpen egy számláló jegyezheti a sorban éppen várakozók számát.

Tehát minden „időlépés” után a számítógép feljegyzi az imént említett adatokat, és minden egyéb információt, ami a rendszer működése szempontjából fontos. Például feljegyezheti a rendszerben lévő ügyfelek számát, az éppen kiszolgált ügyfél várakozási idejét. Ha elég ezeknek a valószínűségi változóknak a középértékét megbecsülni (a teljes eloszlás helyett), akkor a számítógép egyszerűen csak hozzáadja az esedékes értéket a korábbiak összegéhez. A szimulációs mintaátlagot ezután úgy kapjuk meg, hogy a teljes összeget elosztjuk a minta méretével, nevezetesen most az eltelt időegységek számával, illetve az összes ügyfelek számával.

Az **eseménynövekmény módszerében** a rendszeróra által mutatott idő az előző eljárástól eltérően rögzített helyett változó időközökkel növekszik. A szimuláció alatt az idő addig halad előre, amíg a következő esemény be nem következik. A számítógép ezt úgy valósítja meg, hogy kiszámítja, mikorra várhatók a következő események, és az első ilyen eseményre ugrik, majd feljegyzi a változást. A lépéseket annyiszor ismételjük, ahányszor csak szükséges.

12.1. táblázat

Sor-szám	Véletlen számok		Szimulált folyamat				
	az érkezési folyamat	a kiszolgálási folyamat	Érkezési időköz	Kiszolgálási időtartam	Érkezési időpont	Kiszolgálás befej. időpontja	Várakozási idő
	szimulációjához		$t_{érk}$	t_{kisz}	$T_{érk}$	T_{kisz}	t_w
1	0,90	0,63	16,0	6,9	16	22,9	0,0
2	0,39	0,63	3,5	6,9	19,5	29,8	3,4
3	0,45	0,64	4,1	7,0	23,6	36,8	6,2

Az $M/M/1$ sorbanállási példánkban a számítógépnek két jövőbeli eseményt kell szimulálnia, nevezetesen a következő érkezést ($T_{érk}$) és a következő kiszolgálás befejezését (T_{kisz}), ha éppen van ügyfél a kiszolgálási csatornában. Ezeket az időpontokat a számítógép program az érkezési időközök ($t_{érk}$) és a kiszolgálási idők (t_{kisz}) valószínűségi eloszlásából vett véletlen megfigyelésekből származtatja. Mint korábban említettük, a megfigyelést a számítógép véletlen szám generálásával végzi. Tehát minden pillanatban, amikor egy érkezés vagy egy kiszolgálás befejeződött a számítógép meghatározza, mennyi idő múlva várhatók a következő események, és hozzáadja ezt az időt a rendszeróra akkori idejéhez. Az elmondottak a *12.1. táblázatban* is követhetők.

A szimulációs vizsgálatok első lépése az, hogy elkészítsük a vizsgálandó rendszer modelljét. Ez a lépés feltételezi a rendszer valóságos működésének és a vizsgálat céljának alaposan ismeretét. Ezek birtokában elkészíthetjük a valódi rendszer logikai diagramját. A diagramban a rendszert összetevőkre (elemekre) bontjuk, amelyeket a diagram vonalai kötnek össze egymással. Az összetevők maguk is további elemekre bonthatók. (A felbontás mélységéről csak a feladat alapos átgondolása után és a célok ismeretében dönthetünk.) Az elemekre működési szabályokat állapítunk meg. Ezek a működési szabályok megjósolják a megfelelő elem által generált eseményeket, esetleg valószínűségi eloszlás alakjában. Ezután nem kell mást tennünk, mint az összetevőket a köztük lévő viszonyok alapján összekapcsolni. Lényegében a szimulációs modellépítés két fázisból áll: először egyszerűbb, többé-kevésbé önálló részeket (ezek akár alrendszerek is lehetnek, mint például egy egyszerű sorbanállási rendszer) fogalmazzunk meg, majd ezeket a részeket összerakjuk a természetes rendjük szerint.

Miután meghatároztuk az elemeket, a működési szabályokat és a logikai kapcsolatokat, a modellt részletesen ellenőrizzük. Az ellenőrzést úgy valósíthatjuk meg, hogy a szimulációt nagy vonalakban számítógéppel végigkövetjük, annak megállapítására, hogy a bemenetek a megfelelő forrásból származnak-e, és a kimenetek elfogadhatók-e a következő összetevő számára. Ezen kívül, a modell egyedi elemeinek belső működését is ellenőrizni kell.

Hangsúlyoznunk kell, hogy a szimulációs modellnek, mint akármilyen más modellnek, nem kell a valóságos rendszert tökéletesen tükröznie. A tapasztalat szerint a szimulációs modellek többségének az a hibája, hogy túlságosan részletekbe menő. Ilyenkor a modell könnyen jelentéktelen részletek tömegévé válhat, és kevés információ megszerzése is igen sok programozást és gépidőt igényelhet. Az sem szorul magyarázatra, hogy ha nem tudjuk megragadni a rendszer lényegét, akkor az eredmények is nehezebben értelmezhetők.

A valószínűségi eloszlásokkal kapcsolatban felmerülhet az a kérdés, hogy a múltbeli adatok

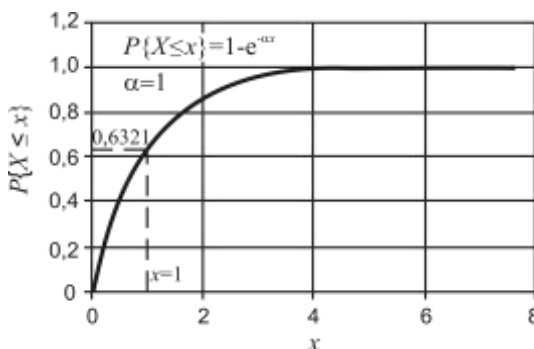
gyakoriság-eloszlását használjuk-e, vagy keressünk elméleti eloszlást, amely a legjobban illeszkedik az adatainkhoz. Ez utóbbi eljárás jobbnak tűnik, mert elkerüli, hogy reprodukáljuk a múlt egyes időszakaszainak a sajátosságait.

12.3. Véletlen számok és a valószínűségi eloszlásokból vett véletlen megfigyelések generálása

A véletlen számok adott tartományon belül képzett olyan számok, amelyek meghatározott gyakorisággal, de teljesen véletlen sorrendben következhetnek egymás után. A számok előfordulási gyakorisága bármilyen lehetséges eloszlást követhet. Számunkra a legfontosabbak az egyenletes eloszlású véletlen számok, mert ezekből az összes többi eloszlás szerinti véletlen szám előállítható.

Egyenletes eloszlású véletlen számokat különböző módszerekkel lehet képezni (pl. dobókockával 1-6, rulettel 0-36 közötti egyenletes eloszlású véletlen számok sorozata állítható elő). A számítógépekhez fejlesztett programozási nyelvek többsége rendelkezik véletlen számokat generáló függvénnyel, amelyekkel folyamatosan tetszőleges számú véletlen szám állítható elő.

Hogyan lehet valamely valószínűségi eloszlásból vett véletlen megfigyeléseket generálni, ha adott az egyenletes eloszlású véletlen számoknak egy sorozata? Egyszerű diszkrét eloszlások esetében semmi más nem kell tenni, mint egymáshoz rendelni a véletlen számok lehetséges és a valószínűségi eloszlás értékeit.



12.1. ábra. Véletlen megfigyelés generálása az eloszlásfüggvényből

Bonyolultabb eloszlásokra is lényegében hasonló a válasz, jóllehet a konkrét eljárás valamivel körülményesebb. Az elsőként megválasztjuk az $F(x)=P\{X \leq x\}$ eloszlásfüggvényt, ahol X a szóban forgó valószínűségi változó. Az eloszlásfüggvényt reprezentálhatja a függvényre felírt egyenlet, a függvény grafikus ábrája, vagy olyan táblázat, amely megadja az x értékeit az $F(x)$ 0 és 1 közötti egyenlő közű értékeire. A második lépésben kellően sokjegyű véletlen tizedes számot generálunk 0 és 1 között (esetleg megfelelően sok nullával az elején), és eléje helyezzük a tizedesvesszőt. Az utolsó lépésben $P\{X \leq x\}$ -et egyenlővé tesszük a kapott véletlen számmal, és az így kapott egyenletet megoldjuk x -re. Az x -nek ez az értéke a valószínűségi eloszlásból vett véletlen megfigyelés [47]. Ezt az eljárást a 12.1. ábra szemlélteti, ahol egy exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényét grafikusán ábrázoltunk, és a véletlen szám történetesen 0,6321.

Ha az adott valószínűségi eloszlás folytonos, akkor az előbb vázolt eljárás a folytonos eloszlást olyan diszkrétrel közelíti, amelynek szabálytalanul elhelyezkedő pontjai azonos valószínűségűek. Ebből semmi baj sem származik, mert a közelítés tetszőleges pontosságú lehet, ha elég sokjegyű véletlen számot használunk.

Számítógépen tárolt táblázatba foglalni az eloszlásfüggvény értékeit lényegében egyenértékű a "kézi" grafikus eljárással. A táblázatból kereső módszernek az a hátránya, hogy a táblázat ösz-

szeállítása munkaigényes, továbbá a korlátozott tárolókapacitás miatt pontatlanságok is előfordulhatnak. A másik említett módszer az egyenlet felírása az eloszlásfüggvényre, majd annak a pontnak a megkeresése, amelyre a függvény egyenlő a kapott véletlen számmal. Ez néhány fontos valószínűségi eloszlásnál egyszerű egyenlet megoldáshoz vezet. Más eloszlások esetében általában időigényes numerikus módszerek szükségesek ahhoz, hogy a megoldást megtaláljuk. Szerencsére fontosabb valószínűségi eloszlásokhoz a véletlen megfigyelések generálására hatékony technikákat fejlesztettek ki.

Tekintsük például a 12.1 ábrán is látható exponenciális eloszlást, amelynek eloszlásfüggvénye:

$$P\{X \leq x\} = 1 - e^{-\alpha x},$$

ahol $x \geq 0$ és $1/\alpha$ az eloszlás várhatóértéke. Az egyenlet megoldási módszerben ezt a függvényt egyenlővé tesszük egy 0 és 1 közé eső véletlen tizedes számmal (amelyet r jelöl). Így az

$$1 - e^{-\alpha x} = r,$$

azaz

$$e^{-\alpha x} = 1 - r$$

Vegyük mindkét oldal természetes logaritmusát:

$$\ln(e^{-\alpha x}) = \ln(1 - r),$$

amelyből

$$x = \frac{\ln(1 - r)}{-\alpha}$$

a kívánt véletlen megfigyelés az exponenciális eloszlásból.

Megemlítjük, hogy más, bonyolultabb, de gyorsabb módszereket is kifejlesztettek az exponenciális eloszlás kezelésére. Minthogy a 0 és 1 az közé eső véletlen szám nem más, mint a 0 és az 1 közötti megfelelő beosztású diszkrét egyenletes eloszlásból vett véletlen megfigyelés az $(1-r)$ is véletlen tizedes szám. Ezért, hogy a kivonást megtakarítsuk, a gyakorlatban rögtön $(1-r)$ -et generáljuk, ami ugyanaz, mint r generálása.

Az exponenciális eloszlásra vonatkozó eredmény természetesen kiterjeszthető az *Erlang-féle* (gamma-) eloszlásra. A k darab független, exponenciális eloszlású valószínűségi változó összege, ha mindegyiknek a várhatóértéke $1/k\alpha$, *Erlang*-eloszlású k alakparaméterrel és α várhatóértékkel. Ezért, ha adott k véletlen tizedes szám sorozata 0 és 1 között, mondjuk $r_1, r_2, \dots, r_k$, akkor az *Erlang*-eloszlásból vett véletlen megfigyelés

$$x = \sum_{i=1}^k \frac{\ln(1 - r_i)}{-k\alpha},$$

ami úgy is felírható, hogy

$$x = -\frac{1}{k\alpha} \ln \left\{ \prod_{i=1}^k (1 - r_i) \right\}.$$

Itt is megtakaríthatjuk a kivonásokat az előzőhöz hasonlóan, ha közvetlenül $(1-r_i)$ -t generáljuk r_i helyett.

A normális eloszlásból vett véletlen megfigyelések generálására különösen egyszerű módszert ad a centrális határeloszlás tétele. Mivel egy véletlen tizedes szám lényegében egyenletes eloszlású 0 és 1 között, a középértéke $1/2$, szórása $1/\sqrt{12}$. Ezért az említett tétel szerint n véletlen tizedes szám összege közelítőleg normális eloszlású az $n/2$ középértékkel és a $\sqrt{12}$ szórással. Ha tehát $r_1, r_2, \dots, r_n$ véletlen tizedes számok, akkor

$$x = \frac{\sigma}{\sqrt{n/12}} \sum_{i=1}^n r_i + \left(\mu - \frac{n}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{n/12}} \right)$$

véletlen megfigyelés egy közelítőleg normális eloszlásból, amelynek várhatóértéke μ , szórása pedig σ . Ez a közelítés nagyon pontos, még kis n -ek esetén is, kivéve az eloszlás legszélét. Gyakran ezért 5 és 10 közötti n értéket használnak. Az $n=12$ nagyon kényelmes érték, mert ki-küszöböli a négyzetgyököket az előbbi kifejezésből.

A χ^2 (*chi-négyzet*)-eloszlás *standard* normális eloszlások összege. Ha tehát az $y_1, y_2, \dots, y_n$ 0 várhatóértékű és 1 szórású normális eloszlásból vett véletlen megfigyelések, amelyeket az előbb leírt módon kaptunk meg, akkor az

$$x = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

egy n szabadságfokú *chi-négyzet*-eloszlásból vett véletlen megfigyelés.

12.4. A szimulációs programok működése

A szimulációs modellek a vizsgált rendszer logikai vagy matematikai modelljei, amelyek számos strukturális és kvantitatív közelítést és feltételezést tartalmaznak a valóságos rendszerhez viszonyítva. A logikai modell rendszerint, mint számítógép program jelenik meg, amely a modell viselkedésére vonatkozó kérdésekre ad válaszokat, feltéve, hogy a modell hű reprezentációja a rendszernek. Az utóbbi esetben remélhetjük, hogy új ismereteket szerezhethetünk a rendszer viselkedéséről. Mivel a valós rendszer helyett a számítógép programban változtathatjuk a bemenő paramétereket és a modell viselkedését, egy sor kérdésre lényegesen olcsóbb és gyorsabb válaszokat kapunk. Ugyanakkor a kísérletezés során előforduló hibák nem járnak olyan drámai következményekkel, mint amikor azokat a valóságban követjük el. A számítástechnika fejlődése és a számítási költségek csökkenése sok más területhez hasonlóan kedvezően hat a logikai modellek komputer analízisében rejlő lehetőségek kihasználására.

A komputer szimuláció olyan módszer, amely a valóságos rendszerek működését, tulajdonságait imitáló szoftvert használ a valóságos rendszerek modelljeinek tanulmányozására, numerikus kiértékelésére. Praktikusán a szimuláció a valós létező, vagy megalkotandó rendszer komputerizált modelljének tervezési és alkotási folyamata, azzal a céllal, hogy adott feltételek és inputok esetén lehetőséget teremtsen a rendszer viselkedésének jobb megértésére. A szimuláció nem az egyedüli eszköz egy modell tanulmányozására, mégis a leggyakrabban választott módszer, aminek oka, hogy amikor a rendszer valóság-hű modelljére van szükség, akkor ennek a szimulációs modellek jobban megfelelnek. A szimulációs modellek ugyanis kevésbé követelnek komplexitást csökkentő megszorításokat. Más módszerek alkalmazása, sokkal több és drasztikusabb, a modell érvényességét csökkentő, egyszerűsítő feltételt igényel.

A számítógépes szimulációt rendszerint nagy szaktudással és sok munkával megvalósított modellépítés és programozás előzi meg. A szimulációs modell programozója általában nem azonos a modell alkotójával, mivel a kódoláshoz magas szintű programozási ismeretekre van szükség. Az egyedi fejlesztés eredménye általában egy olyan program, amely csak néhány feladat típus szimulációs vizsgálatához alkalmazható.

A digitális számítógépek megjelenésével szinte egy időben, az 1950-es és az 1960-as években általános célú programnyelveket, például a **FORTAN**-t használták a szimulációs programok megírására. Ezek a programnyelvek általában a szimulációt támogató csomagokkal is rendelkeztek. Később jelentek meg a speciális célú szimulációs nyelvek, mint a **GPSS**, **Simscrip**, **SLAM**, **SIMAN**, és biztosítottak sokkal jobb, kényelmesebb programozási környezetet a felhasználóknak. E nyelvek rendkívül népszerűek voltak és széles körben nyertek alkalmazást.

A szimulációs programcsomagok tervezésénél a cél (az egyedi fejlesztéstől eltérően), hogy a szimulációs eszköz ne csak egy-egy feladat, hanem a valós problémák széles skálájának megoldására legyen alkalmas. E fejlesztési koncepció eredményei azok a minden elemükben menüvezérelt programcsomagok, amelyekkel a modellezés könnyen és gyorsan megvalósítható, és amelyeknél fokozott hangsúlyt helyeztek a képi megjelenítésre. Az alkalmazó minden részletre kiterjedő, rajzfilmszerű mozgóképpel kísérheti végig a teljes szimulációs folyamatot. A szimulációs programcsomagok olyan egyéni elemekkel kiegészíthető fejlesztő eszközök, amelyekkel a felhasználó különböző típusú gyártási (termelési) és logisztikai feladatokat elemezhet saját személyi számítógépén.

Az utóbbi években jelentek meg az ún. magas szintű szimulátorok, amelyeket elsősorban a könnyű használhatóság, az interaktív grafikus felhasználói felület, a menük és a dialógusok jellemeznek. A szimulátorban a rendelkezésre álló szimulációs modell elemekből választhatunk, azokat összekapcsolhatjuk, paraméterezhetjük és a programot futtatva a rendszerkomponensek mozgását, változását grafikusán megjeleníthetjük (animálhatjuk). Legtöbb szimulátor alkalmazási területe erősen korlátozott (pl. gyártás, kommunikáció), és általában nem rugalmasak. Sokak szerint ezek a szoftvercsomagok túl messzire mentek azzal, hogy feláldozták a rugalmasságot a könnyű használat oltárán.

A felhasználók a hazai szoftver piacon számos, árban és szolgáltatások tekintetében eltérő szimulációs programcsomag vagy szimulátor közül válogathatnak (*Taylor II*, *Taylor ED*, *ARENA*, *Witness*). Ezek közül a teljesség igénye nélkül, inkább demonstrációs céllal két csomagot, a *Taylor II*-t [94] és az *Arena*-t [59] mutatjuk be.

12.4.1 Mintapéllda

A *Taylor II*. és az *Arena* lehetőségeinek bemutatásához most tekintsünk egy olyan egyszerű példát, amit a 9. fejezetben már analitikusan megoldottunk. Így nemcsak a szimulációt tanulmányozhatjuk, hanem módunk lesz az eredmények összevetésére is.

Egy garanciális szervizelést végző karbantartó műhelybe a személygépkocsik *Poisson*-eloszlás szerint érkeznek. Az átlagos érkezési időköz 20 perc. A szerelőállások száma 1, a szervizelési idő átlagosan 15 perccel igényel és exponenciális eloszlású.

Emlékeztetőül az analitikus megoldás, amelynek input paraméterei: érkezési ráta $\lambda=3$ gépkocsi/óra, kiszolgálási ráta $\mu=4$ gépkocsi/óra, a kihasználási tényező $\rho=\lambda/\mu=3/4$ a következő eredményeket szolgáltatta. A rendszerben átlagosan $L=3$ db gépkocsi tartózkodik, a várható várakozási idő $W=1$ óra, a várakozó sor átlagos hossza $L_q=2,25$ gépkocsi, a várakozási idő a kiszolgálás kezdetéig (a sorban eltöltött idő), $W_q=0,75$ óra.

12.4.2 A Taylor II. szimulátor

A *Taylor II* a könnyű alkalmazhatóságot, a menükkel támogatott grafikus környezetet és a programozási rugalmasságot egyesíti magában. A programcsomag az áttekinthető és kényelmes menü rendszer mellett számtalan segítséget nyújt bonyolult modellezési problémák megoldásához. Az elemzéshez az eredmények mind grafikus, mind pedig numerikus formában megjeleníthetők [59].

A programcsomag segítségével a vizsgált rendszer elemeit és azok kapcsolatait tartalmazó tervrajzát a számítógép képernyőjén készíthetjük el úgy, hogy képernyőn elhelyezzük a különböző elemek: gépek, átmeneti tárolók, szállítószalagok, raktárak, szállítóeszközök utak, kiszolgáló személyzet stb. szimbólumait. A modellben megjeleníthetjük a teljes gyártó rendszert, ezen belül a gyártórendszer egyes elemeit, mint például a gyártócellákat, a szállító rendszert, az egyes munkahelyeket, a szállítási utak hálózatát, valamint a tárolási és rakodási területeket. A model-

lezett rendszer tervrajzában szintén definiálhatjuk az egyes termékek útvonalait is.

A gyártmányok és az erőforrások megjeleníthetők kétdimenziós (2D) bittérkép rajzokkal, vagy háromdimenziós (3D) test ábrázolás segítségével. Mindkét esetben az elemeket könyvtárból választhatjuk ki, vagy a felhasználó saját maga definiálhatja a szükséges elemábrázolásokat. Ha nem elegendőek a program által biztosított két és háromdimenziós (2D, 3D) képek, akkor egyszerűen hozzárendelhetünk különböző (saját tervezésű) ikonokat az erőforrásokhoz és a termékekhez, valamint alkalmazhatunk saját háttérrajzot is. Ha mindet magvalósítunk, a modell úgy fog kinézni, mint a valóságos rendszer. Természetesen az elemek mozgásának sebessége is beállítható, így akár az elemek valós idejű mozgását is imitálhatjuk. A nézőpont megváltoztatásával a modell képe szabadon nagyítható, elmozdítható és elfordítható, még a szimuláció alatt is.

Az elemek közötti kapcsolatokat a modell építője definiálja grafikus formában az egyes elemek közötti kapcsolat megrajzolásával és a logikai feltételek megadásával. Az alkalmazó teljes szabadságot élvez a gyártott termékek modellbeli haladásának (mozgásának) kijelölésében, ami az egyszerű feltételektől mentes esettől a bonyolult termék-specifikus és logikai feltételekkel leírt kapcsolatokig terjedhet.

A modell elemek valóságos működését utánzó, rajzfilmszerű megjelenítés két- és háromdimenziós ábrázolásban (2D, 3D) is lehetséges. Ennek célja kettős: egyrészt az ellenőrzés, másrészt a modell működésének életszerű bemutatása. Láthatóvá tehetők a termelés műveletei között a különböző gyártmányok mozgásai, a gépeket kiszolgáló kezelők és a szállító berendezések mozgásai, valamint a gyártmányok különböző várakozó sorai. A szállítóeszközök valósághűen működtethetők, a gyártmányok a modellben megadott szabályoknak megfelelően mozognak a gyártó sorokban, és a termékek elhelyezését a raktárakban ugyancsak a valóságnak megfelelő képek kísérik. A különböző erőforrások állapotát (áll, foglalt, várakozik stb.) szintén azonnal kiírja a program.

A modell részleteinek leírásához nagyszámú előre definiált paramétert alkalmazhatunk (mint például a ciklusidő, beérkezési sebesség, gyártási tétel darabszám stb.), de természetesen saját paramétereinket is hozzáadhatjuk a megoldási szabályokhoz. Az előre definiált paraméterek a következők:

- ciklusidő és átlagos érkezési idő,
- tárolási kapacitás,
- meghibásodási magatartás,
- plusz idők, mint például a szerszámcsere vagy beállítási idő,
- szállítmány darabszám, amikor a bemeneti és a kimeneti elem darabszám különbözik egymástól (például összeszerelésnél),
- hulladék és újrafeldolgozás mértéke,
- rögzített, változó és hitel költségek,
- hozzáadott értékek,
- a gyártási darabszám méretek,
- sorbanállási típusok (FIFO, LIFO, SPT, véletlen, a felhasználó által definiált stb.),
- a következő feladat kiválasztásának stratégiája,
- termék belépési és kilépési feltételek,
- következő művelet kiválasztása,
- ütemezési lehetőségek, időtáblázat alkalmazásával,
- szállítóeszköz és szállítószalag sebesség meghatározása,
- karbantartás tervezése,
- munkaórák száma,
- raktározási lehetőségek adott méretek alapján.

A programcsomag a modell működésének pontosabban leírásához a fentiekén kívül még számos lehetőséget kínál. Ilyenek például:

- a műveletek hozzárendelése az erőforrásokhoz (fontossági mátrix),
- tároló, illetve nem tároló tulajdonságú szállító rendszerek,
- egy irányban, vagy két irányban használható utak, az úton történő áthaladás engedélyezésével illetve tiltásával,
- ellenőrzési szintek hosszú idejű tárolóknál,
- egyéni beállított tulajdonságok a modell különböző elemeihez (például súly, szállítási dátum, szín stb.).

Az események valószínűségi eloszlásának megválasztása döntő fontosságú a szimulációban. A program számos eloszlásfüggvényt ismer, mint például a *normális*, *negatív exponenciális*, *Erlang*, *lognormal* és *egyenletes (uniform)* eloszlásokat. Ezen kívül a modell készítője a saját tapasztalati eloszlásfüggvényét is definiálhatja. Az eloszlásfüggvényeket alapvetően ciklusidő, gyártmány méret, két meghibásodás közötti átlagos idő, a javítások közötti átlagos idő meghatározására használjuk, de természetesen a modellben tetszőleges egyéb szerepkörben is alkalmazhatjuk azokat.

A modell definiálása után elkezdhető a szimuláció, amely megmutatja az egyes termékek, elemek mozgását az elkészített modellen belül. A szimuláció befejezése után azonnal hozzáférhetővé válnak a szimuláció során kiszámított jellemzők: az egyes elemek várakozási ideje, a gyártott termékek száma, a termékek kibocsátási ideje, az egyes elemek kihasználtságának mértéke (százaléka), a teljes rendszer működési költsége. A modellen gyorsan megvalósíthatók a szükséges módosítások, melyek után az adott változat eredményessége azonnal megvizsgálható.

A szimulációs algoritmus nagyon rövid szimulációs futási időket biztosít. A szimulációt meghatározott ideig, vagy meghatározott feltétel teljesüléséig lehet futtatni. A szimulációt bármikor meg lehet szakítani. Ekkor megnézhetjük az eredményeket, vagy megváltoztathatjuk a paramétereket. A szimuláció általában a rendszer alap (üres) állapotából indul, de mód van arra, hogy kézi adatbevitellel kezdőértékeket állítsunk be az elemekhez, vagy a szimulációs program által biztosított "meleg indítás" utáni állapotból folytassuk a szimulációt.

A szimuláció alatt átkapcsolhatunk lépésenkénti üzemmódra, ahol lehetséges az összes esemény vagy az események egy csoportjának nyomkövetése.

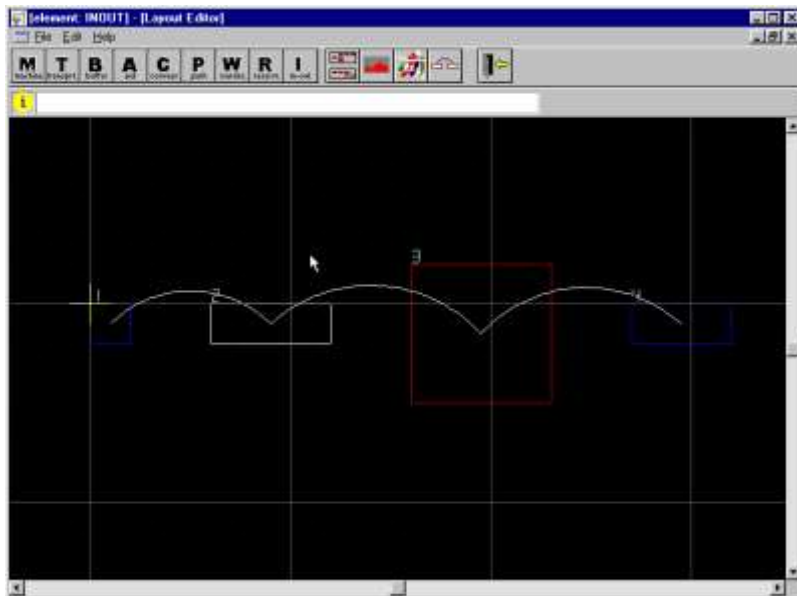
A *Taylor II* biztosítja azt a lehetőséget is, hogy az optimális megoldás kereséséhez nagyszámú szimulációt futtassunk le, a paraméterek automatikus változtatásával úgy, hogy közben ne is kelljen foglalkoznunk a számítógéppel. Az eredmények, amelyeket a szimuláció szolgáltat a következők:

- kihasználási fokok (százalékok),
- várakozási idők,
- felrakási idők,
- a gyártott termékek száma és költség összetétele.

12.4.3 Mintapélda modellezése a Taylor II. szimulátorral

A szimulációs program alkalmazásának első lépése a modellt alkotó **entitások** (elemek, termékek és elemcsoportok) megadása. Az **elemek** a logisztikai rendszerben működő be- és kimeneti pontok, gépek, folyamatos és szakaszos működésű szállítóeszközök, pufferek, utak stb., a **termékek** a rendszer által mozgatott, megmunkált, feldolgozott anyagok, félkész és késztermékek. Nagyobb, sok elemet tartalmazó modellek elemei csoportokba (clusterekbe) rendezhetők, ezeket nevezzük **elemcsoportoknak**. A második lépés rendszerben működő eszközök kapacitásainak, a termékek ki- és belépési feltételeinek, statisztikai tulajdonságainak, a műveletek időszükséglete-

inek, költségének stb. a megadása.



12.2. ábra. A modell elemei és azok elrendezése

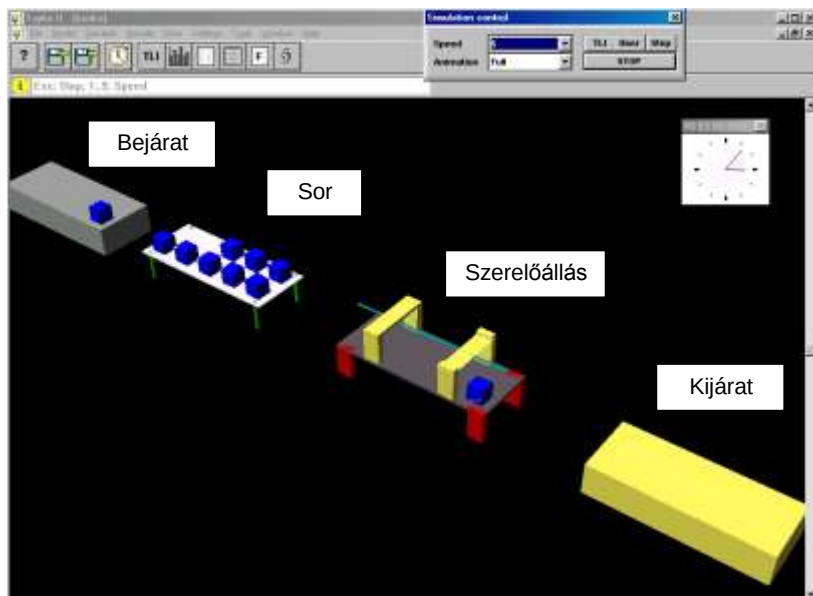
12.3. ábra. Az elemek, műveletek és szakaszok paramétereinek megadása

A *Taylor II*-ben megadhatjuk:

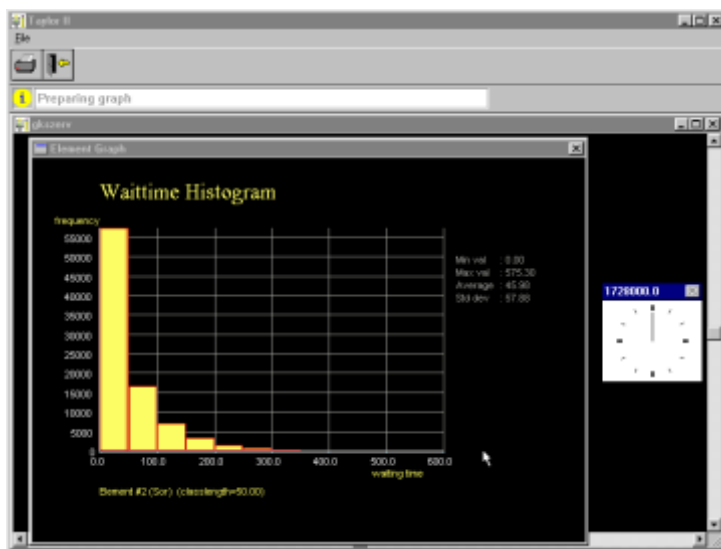
- az **elemek** (element) paramétereit (kapacitás, belépési feltétel, kilépési feltétel, elérhetőség, sorbanállási elv, állandó és változó költség, kamatláb stb.);
- a **műveletek** (job) paramétereit (időszükséglet és annak eloszlása, batch méret);
- a **szakaszok** (stage) paramétereit (a megelőző és a követő állomások);
- a **termékek** (product) paramétereit (név, méret);

a **készletek** (stock) paramétereit (a termékek mennyisége az egyes szakaszokon).

A példában a modell elemei a be- és kilépési pontok, bejárat (1), kijárat (4), a szerelőállás előtti sor (2) és a szerelőállás (3) (12.2. ábra). A műveletek a belépés, a várakozás, a javítás és a kilépés.



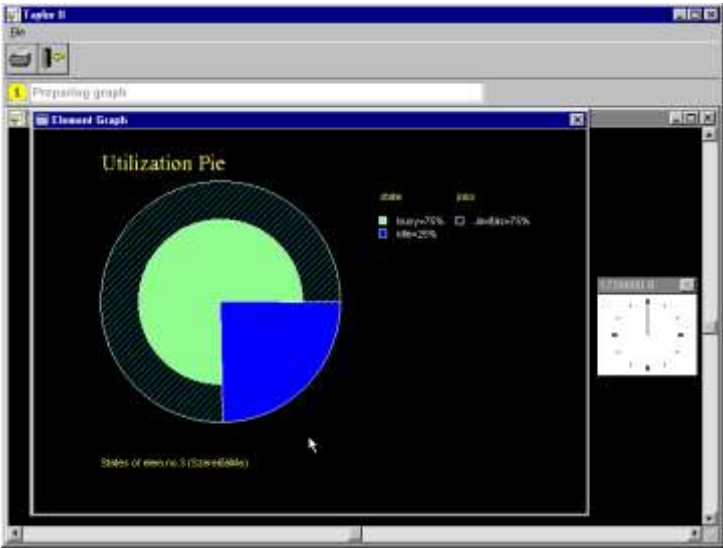
12.4. ábra. A modell rajzfilmszerű megjelenítése a szimuláció alatt



12.5. ábra. Várakozási idő a sorban

Az aktuális elem kiválasztása után annak paramétereit, a hozzárendelt műveletek és szakaszok paramétereivel együtt a 12.3. ábrán bemutatott képernyőn adhatjuk meg. Az ábrán a szerelőálláshoz tartozó paramétereket látjuk. A szerelőállás kapacitása 1, a szervizelési idő 15 perc és a szervizelési idő eloszlása pedig exponenciális. A szimuláció futtatásához még meg kell adni a

szimuláció időtartamát, ami akár több nap is lehet.



12.6. ábra. A szerelőállás kihasználtsága

A szimuláció lefutása után az eredmények egyszerűen megjeleníthetők. A felhasználó a számszerűsített eredményekből képet alkothat a modell működéséről. Összehasonlíthatja a különböző tervváltozatokat és kiválaszthatja az általa legjobbnak minősített variánszt.

Az eredmények tetszés szerint grafikusan ábrázolt függvények (grafikonok, hisztogramok) formájában és táblázatosan (elem, művelet és költség riportok) tekinthetők meg. A 12.5. ábrán a várakozási idő hisztogramját és annak paramétereit (minimum, maximum, átlag és szórás) láthatjuk a szerelőállás előtti sorban. A 12.6 ábra a szerelőállás kihasználási diagramját szemlélteti. A szerelőállás 75%-osan kihasznált, ami megfelel az érkezési és kiszolgálási ráta arányának ($\rho=\lambda/\mu=3/4$).

gkszerv Taylor II Element report Date: 26-05-1999 Time: 17:46

Cluster	Elnr	Elname	Produced	AvgQueue	Util	Down
0	1	Bejárat	86336	1.00	99.96	
0	2	Sor	86336	2.13		
0	3	Szerelőállás	86336	0.75	74.62	
0	4	Kijárat				

12.7. ábra. Riport a modell elemeiről

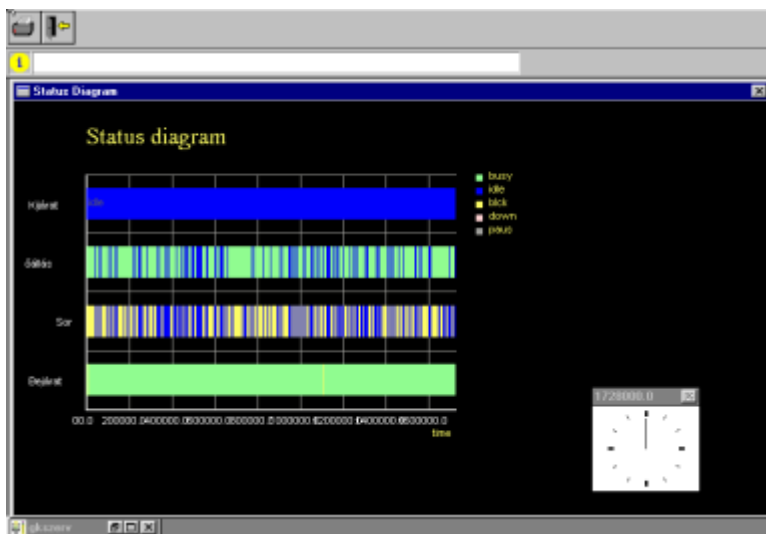
gkszerv Taylor II Job report Date: 26-05-1999 Time: 17:51

Cluster	J_nr	Jobname	Produced	Proces	AvgQueue	AvgWait
0	1	Belépés	86336	86336	1.00	20.0
0	2	Várakozás	86336	86336	2.13	42.7
0	3	Javítás	86336	86336	0.75	14.9
0	4	Kilépés				

12.8. ábra. Riport a modell műveleteiről

A modell elemeiről és a műveletekről készült riportok (12.7 és 12.8 ábrák) szerint a sor átlagos hossza (AvgQueue) $L_q=2,13$, a várakozási idő (AvgWait) a sorban $W_q=42,7$ perc, a javítási idő

14,9 perc. Ezeket összehasonlítva az analitikus megoldás eredményeivel megállapíthatjuk, hogy a szimuláció jól közelíti az egzakt megoldást.



12.9. ábra. A modell elemeinek állapota

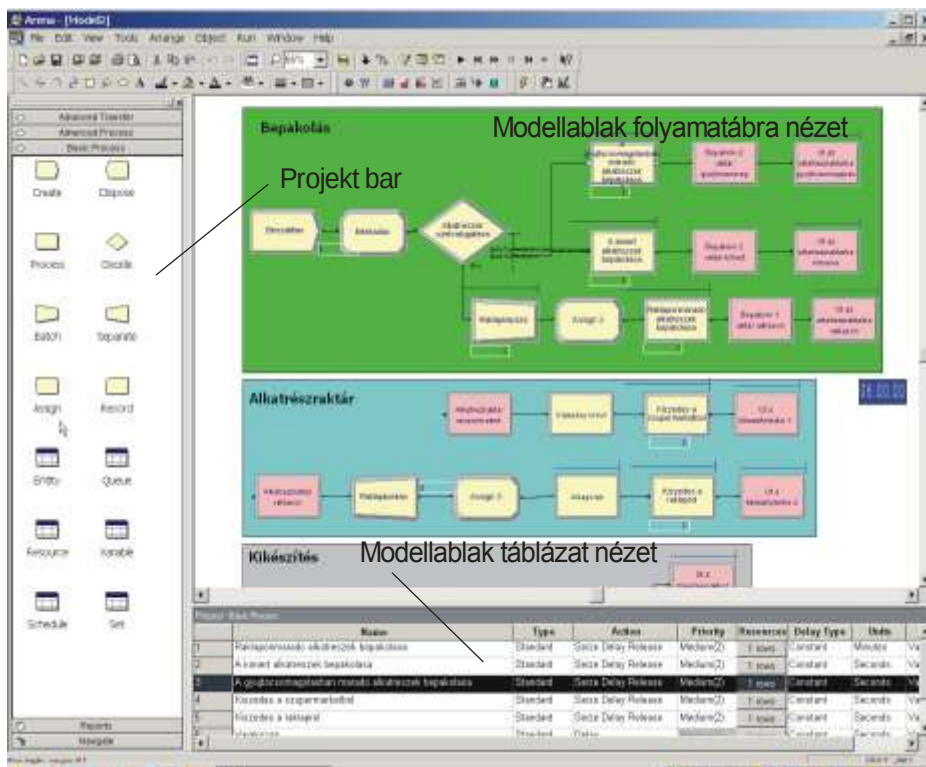
A 12.9. ábra a modell elemeinek státuszát (működik, tétlen, blokkolt, meghibásodott, szünetel) szemlélteti az idő függvényében. A bejárat a 99,96%-os kihasználtságnak megfelelően állandóan működik. A szerelőállás előtti sorban a szerelőállás foglaltsága miatt várakozásra kényszerített, blokkolt, (világos színű vonalak) és az üres sort jelentő, tétlen, (sötét színű vonalak) státuszok váltogatják egymást. A szerelőállás az idő 75-ában működik (világos színű vonalak) 25%-ában pedig tétlen (sötét színű vonalak).

12.4.4 Az Arena szimulátor

Az **Arena** a magas szintű szimulátorokat jellemző könnyű használatot kombinálja a szimulációs nyelvek rugalmasságával, és emellett még biztosítja a teljesen általános célú **Microsoft® Visual Basic®** és **C** nyelvek használatát is. Teszi ezt olyan módon, hogy a grafikus szimulációs modellben alternatív és kicserélhető sablonokról (template-ekről) gondoskodik, és az analízis modulok is kombinálhatók azért, hogy a szimulációs modellek széles körét korrekt módon építhessük fel.

Az áttekinthető kijelzés és a könnyű alkalmazás érdekében a modulok ún. panelekbe rendezetten alkotnak sablonokat. A panelek között mozogva teljesen különböző képességekkel rendelkező szimulációs modelleket konstruálhatunk. A legtöbb esetben, ugyanabban a modellben különböző panelekről származó modulok keverten is használhatók.

A hierarchikus felépítésével az **Arena** fenntartja a modellezés rugalmasságát. Az ún. modellablakba bármikor áthúzhatók alacsonyabb szintű modulok a **Blocks** és **Elements** panelekről, és keverhetők a magasabb-szintű modulokkal. Az alacsonyabb szintű modulok rendelkeznek a **SIMAN** szimulációs nyelv adta rugalmassággal. Ugyanakkor írhatunk **Visual Basic** vagy **C/C++** kódú részleteket döntési algoritmusok futtatására, vagy adatelérési rutinokat külső adatbázisok eléréséhez. Tervezhetünk, létrehozhatunk saját modulokat is (a modulok valójában **SIMAN** komponensekből állnak) és ezeket saját sablonokba gyűjthetjük. Az elmondottak alapján az **Arena** alkalmazásakor nem kell kompromisszumokat kötni a könnyű alkalmazhatóság és a rugalmasság között.



12.10. ábra. Az Arena modellezési környezete

Az **Arena** alkalmazásablakban a modellezéskor három területen dolgozunk: a Project Bar-on, a Modellablak folyamatábra nézeten és a Modellablak táblázat nézeten (12.10. ábra). A **Project Bar**-on elérhető, a folyamatok definiálására hivatott **Basic Process**, **Advanced Process** és **Advanced Transfer** panelek tartalmazzák a **moduloknak** nevezett modell formákat (alakzatokat):

- a **Reports** panel lehetővé teszi a szimulációs eredmények kijelzését;
- a **Navigate** panel a modell különböző szempontok szerinti megjelenítését segíti, beleértve a hierarchikusan felépülő almodellek közötti navigációt is.

A **modellablaknak** két fő területe van. A folyamatábra nézet (*flowchart view*) a grafikákat, beleértve a modulokból felépített folyamatábrát, az animációt és egyéb rajzi elemeket tartalmazza. Az alsó ablak a táblázat nézet (*spreadsheet view*) a modell adatokat jelzi ki táblázatosan, mint pl. az idő, a költség és más paraméterek.

A **Project Bar**-on elérhető **modulok** (alakzatok) lehetnek folyamatábra elemek és adatmodulok. A modulok az adott folyamat szimulációhoz szükséges információkat tárolják. Az egymáshoz kapcsolt folyamatábra modulok (pl. *Create*, *Dispose*, *Process*, *Decide*, *Transport*, *Assign* stb.) határozzák meg, hogy mi történik és milyen sorrendben a szimuláció alatt. E modulok működését befolyásoló paraméterek a modulokhoz rendelt dialógusablakokban adhatók meg. Például a *Process* modul működéséhez meg kell nevezni az erőforrásokat (*Resources*), azok kapacitását, a folyamat időigényét, annak eloszlását stb.

Az **adatmodulok** (*Entity*, *Queue*, *Resource*, *Variable* stb.) bizonyos objektumhalmazok tulajdonságait leíró modulok, vagyis adatobjektumok, amelyekre a folyamatábra modulok hivatkozhatnak. Például az előzőleg említett *Process* modulban a *Resource* adatmodul valamelyik rekordjára vagy rekordjaira hivatkozunk. Az adatmodulok mezői a modellablak táblázatnézetében

jelennek meg és tölthetők fel.

A folyamatábrán áramló objektumokat (alkatrészek, járművek stb.) **entitásoknak** nevezzük. Az entitások változtathatják a státuszukat, hatnak más entításokra és a rendszer állapotára, illetve maguk is más entítások hatásainak lehetnek kitéve. Az entitások dinamikus objektumok, amelyeket rendszerint a szimulációban hozunk létre a *Create* modul segítségével, majd a rendszeren átfolyva a kilépési ponton, ez a *Dispose* modul, elhagyják a rendszert. Léteznek olyan entitások is, amelyek soha nem hagyják el a rendszert, állandó körforgásban vannak. Az entitások másolhatók, csoportosíthatók (batch képzés) és szeparálhatók (batch bontás). Az entitások tulajdonságai az *Entity* adatmodulban adhatók meg.

Az **attribútumok** az entításokhoz kapcsolódnak és egyéni jelleget kölcsönözhetnek azoknak. Az attribútum közös jellemzője egy entitás típusoknak, de specifikus értéket adva alkalmasak az azonos típusú entitások megkülönböztetésére is. Például erre szükség lehet akkor, amikor a FIFO elvet szeretnénk alkalmazni. Egy attribútumot úgy lehet elképzelni, mint egy címkét, amely minden entitácson megtalálható, de a címkén lévő szöveg különbözhet, és egyéni jelleget adhat az entitásnak.

A **global variables** (változók) az egész rendszerre vonatkozó tulajdonságokat jellemeznék tekintet nélkül arra, hogy mennyi és milyen entitások találhatók a rendszerben. A modellben számos, különböző változó definiálható, de mindegyik egyedi. Az **Arena**-ban kétféle változót különböztetünk meg: beépített változók (pl.: number in queue, number of busy servers, current simulation clock time stb.) és a felhasználó által definiált változók (pl.: átlagos kiszolgálási idő, utazási idő, pillanatnyi szállítmány tömege stb.). Az attribútumokkal ellentétben a változók nem kapcsolódnak egyedi entításokhoz, hanem az egész rendszerre vonatkoznak. A változók az entitások számára elérhetők, és sok esetben az entitások képesek a változók értékét megváltoztatni.

A változók sok- és különféle célra használhatók. Például két állomás közötti szállítási idő a modellben lehet mindenütt ugyanakkora, ilyenkor célszerű a *Szállítási idő* nevű változót definiálni. Az **Arena** változók lehetnek vektorok, mátrixok, és így kényelmesen listákba vagy kétdimenziós táblázatokba rendezhetők. Itt jegyezzük meg, hogy az **Arena** változók, attribútumok, modulnevek stb. nem tartalmazhatnak ékezetes karaktereket. Ez a megszorítás az oka annak, hogy a magyar szavakat az általunk fejlesztett modellben ékezet nélkül írjuk.

Az entitások kiszolgálását végző objektumok a **resources** (erőforrások), amelyek lehetnek emberek, eszközök, tárolóhelyek stb. korlátozott méretekkel. Az erőforrások igénybevételét jelentő lehetséges tevékenységek (actions): **seize** (megfogás), **delay** (késleltetés) és **release** (elengedés). Ezek a tevékenységek késedelem nélkül, egymást követően, vagy időeltolódással, valamilyen feltételhez kötötten jelentkezhetnek. Az erőforrásokat úgy kell elképzelni, hogy azok az entitásokhoz rendelve és nem fordítva, mivel egy entitást egyidejűleg több erőforrás is kiszolgálhat. Egy erőforrás több egyedi egységből (unit of resource) álló csoportot is reprezentálhat. Ez hasznos lehet akkor, amikor azonos egységek működnek párhuzamosan, például egy áruházban a pénztárak. Az egységek száma a szimuláció futása alatt változtatható, például a sorok hosszától függően pénztárakat nyithatunk meg és zárhatunk be.

Amikor egy entitás a modellben megadott szekvenciának megfelelően nem tud tovább mozogni, mert a soron következő művelet erőforrása foglalt, akkor várakozásra kényszerül. A várakozások helyei a **Queues** (sorok). A sorok az **Arena**-ban saját névvel rendelkeznek, megadható a kapacitásuk, például korlátozott kapacitású tároló, továbbá megadható a sor kiszolgálásának elve (típusa), ami lehet FIFO, LIFO stb.

A szimuláció eredményeinek követését szolgálják az ún. **Statistical Accumulators**-nak (statisztikai akkumulátoroknak) nevezett változók, amelyek az entitások, a sorok, az erőforrások, folyamatok, állomások stb. statisztikai jellemzőiről gyűjtenek adatokat. Például az adott időpontig

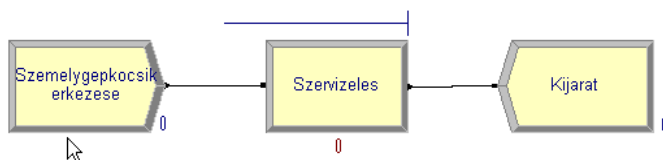
létrehozott entitások számáról, az összes várakozási időről, az adott soron átmenő entitások számáról, adott sorban eltöltött leghosszabb időről stb.

Alapvetően a szimuláció során minden az **events** (események) körül forog. Az esemény azt jelenti, hogy egy adott időpontban történik (érkezik, befejeződik, távozik stb.) valami, ami megváltoztathatja az attribútumok, a változók és a statisztikai akkumulátorok értékét. Az események követhetőségét az ún. **event calendar** teszi lehetővé, amelyben az **Arena** az eseményekre vonatkozó információkat tárolja. Egy esemény rekord tartalmazza az entitás azonosítóját, az esemény időpontját és magát az eseményt. A kalendárium tetején mindig a legutolsó esemény helyezkedik el.

12.4.5 A mintapélda modellezése Arena szimulátorral

A strukturális modell felépítése

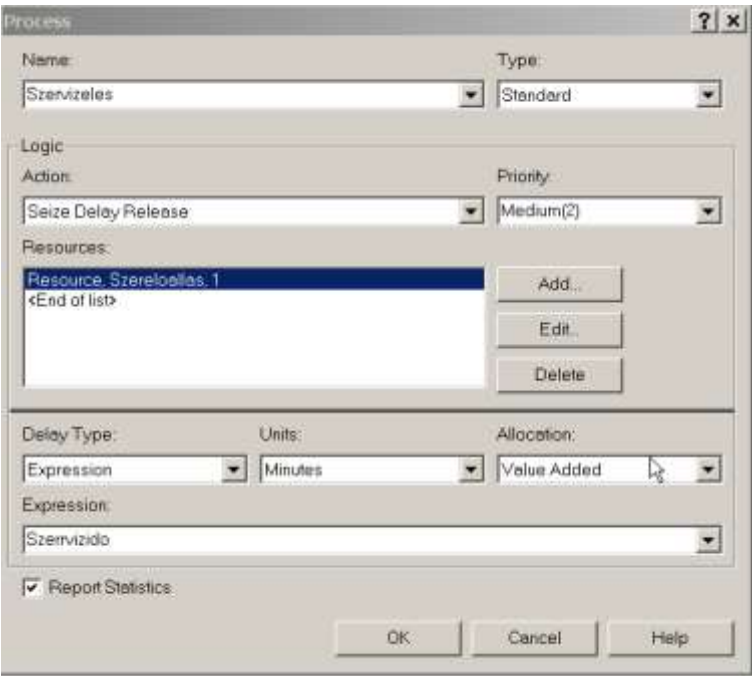
A szerviz műhely területen megvalósuló folyamat logikai hálóját a 12.11. ábra szemlélteti, amelyen a modellbe szerkesztett *flowchart* modulok és a köztük lévő kapcsolatok láthatók. A modellablakba helyezett modulok a **Basic Process** és az **Advanced Process** panelekhez tartoznak, amelyeket korábban a modellhez csatoltunk a **File->Template panel->Attach** menüponttal.



12.11. ábra. A szervizelési folyamat modellje

12.12. ábra. A szervizelési folyamat modellje

A modell belépési pontja a „Személygépkocsik érkezése” nevű *Create* modul (12.11. ábra). A *Create* modul feladata az entitások létrehozása, amelynek dialógusa a 12.12. ábrán látható. A modulban létrehozott „Szgk” nevű entitások a személygépkocsik, amelyek exponenciális eloszlás szerint érkeznek, 20 perces érkezési időközzel. A modul nevét: „Személygépkocsik érkezése”, az entitás típusát: „Szgk”, az érkezési időköz típusát: *Random(Expo)*, az érkezési időközt: 20 és az érkezésenkénti entitások számát: 1 a dialógusablak megfelelő mezőjébe írjuk be (12.12. ábra). A logikai folyamatban az *Create* modult a „Szervizelés” nevű *Process* modul követi (12.11. ábra).



12.13. ábra. A „Szervizeles” nevű Process modul dialógusa

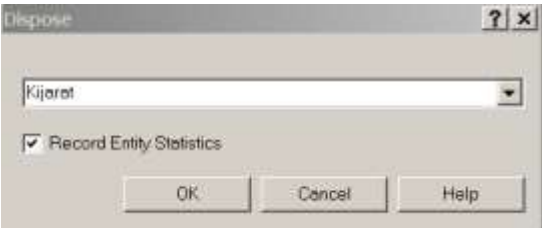
A 12.13. ábra a Process modul dialógus ablakát jeleníti meg, amelyben kiválasztjuk a szervizelési folyamatra jellemző Action mezőt (Seize Delay Release), megadjuk az erőforrásokat (Resources) és végül beállítjuk a folyamat végrehajtási idejét. A végrehajtási (szervizelési) időt jellemző Delay Type mezőt Expression-re, a mértékegységet (Units) percre, és az egy gépkocsi szervizelési idejét (Expression) „Szervizido”-re állítjuk. A szerviz idő gépkocsinként átlagosan 15 perc és exponenciális eloszlású, így a „Szervizido” nevű kifejezés értéke EXPO(15), amit az Advanced Process panelen található Expression adatmodulban lehet megadni.

12.2. táblázat

A „Szervizeles” nevű „Process” modul erőforrásának jellemző adatai

Resource - Basic Process									
	Name	Type	Capacity	Busy / Hour	Idle / Hour	Per Use	StateSet Name	Failures	Report Statistics
1	Szereloallas	Fixed Capacity	1	0.0	0.0	0.0		0 rows	☒

Double-click here to add a new row.



12.14. ábra. A „Kijarat” nevű Dispose modul dialógusa

A folyamatokhoz, mint az a 12.13 ábrán látható, erőforrásokat („Szereloallas”) is rendelhetünk. Az erőforrás paramétereit a 12.2. táblázat foglalja össze.

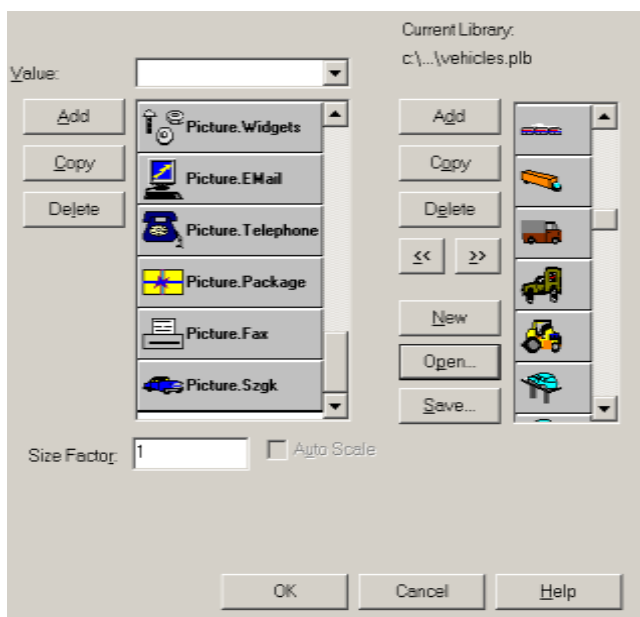
Az entitások a „Kijarat” nevű Dipose modulon keresztül hagyják el a rendszert (12.14. ábra).

Animáció

A modulok alapértelmezésben ún. alap animációt kínáltak fel. Az alap animáció általában elegendő annak eldöntésére, hogy a modellünk megfelelően működik-e. A modellünket azonban sokszor szeretnénk még realisztikusabb külsővel felruházni. A modell realisztikusabbá tételében fontos szerepet játszik az animáció, ami általában egyszerű, de rendkívül időigényes fejlesztési tevékenység. Nagyvonalakban a ráfordítandó idő attól függ, hogy milyen részletesen akarjuk megjeleníteni a folyamatot. Látni fogjuk, hogy az animáció csinosítása és finomítása nemcsak örömet szerez, hanem akár megszállottsággá is válhat.

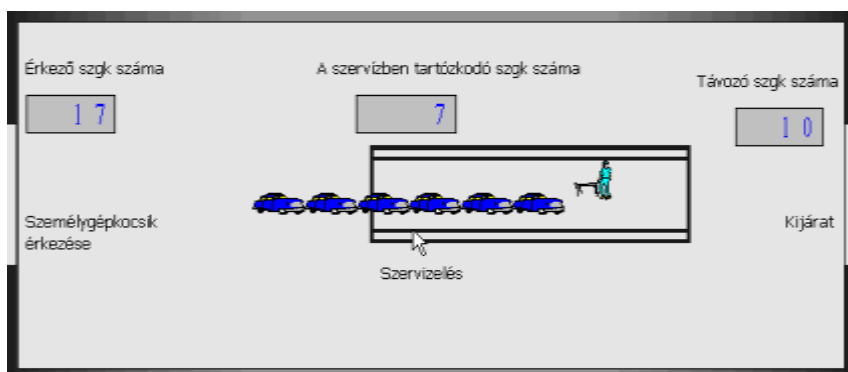
Az animációnak három komponense van: entitások, sorok, és változók. Az entitások melyek az *Entity* adatmodulban találhatóak, akkor láthatók, mikor egyik modulból a másikba mozognak, illetve mikor sorban állnak. Mindenegybes alkalmazott *Process* modulhoz az **Arena** automatikusan hozzáad egy animációs sort, amely a futtatás alatt megmutatja a sorban várakozó entitásokat. A modulban tartózkodó, illetve a modult elhagyó entitások számát jellemző változókat (*Variables*) szintén az **Arena** helyezi a modellbe.

Új entitás és erőforrás képeket az **Entity Picture Placement** (entitáskép elhelyező) és a **Resource Picture Placement** (erőforráskép elhelyező) ablakokban készítjük el, amit az *Edit > Entity Pictures* menüponttal, illetve az *Animate* eszköztáron található *Resource* gombbal nyithatunk meg. A megnyíló ablak baloldala a már elérhető entitás képeket tartalmazza a hozzárendelt nevekkkel együtt (12.15. ábra). Az ablak jobboldalán a képeket tartalmazó könyvtárakat érhetjük el, amelyek fájlokban tárolt képek gyűjteményei. Egy entitáshoz képet úgy rendelhetünk, hogy a *Value* mezőben kiválasztjuk az entitást, majd a jobboldali könyvtárban rákattintunk a választott képre, végül a „<<” gombbal a képet átmásoljuk a baloldalra.



12.15. ábra. Az Entity Picture Placement (entitáskép elhelyező) ablak

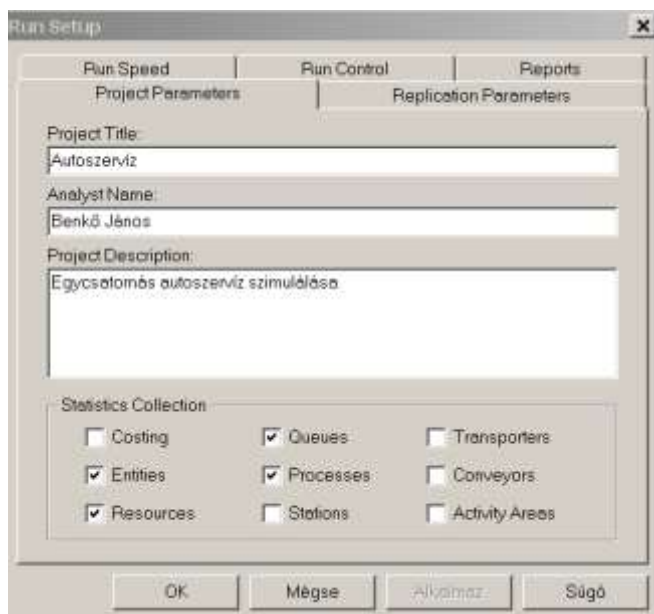
Az **Arena** több kép-könyvtárat tartalmaz, egy kezdeti ikoncsomaggal. Modelljeink animálása előtt érdemes végignézni ezeket az ikonokat (kiterjesztésük: *.plb). Természetesen építhetünk és létrehozhatunk új, saját kép-könyvtárakat is az *New* (új) gomb választásával. Az új saját tervezésű képeinket elmenthetjük későbbi használatra.



12.16. ábra. Alaprajz a szervizelési folyamat animálásához

Most nézzük, hogyan lehet logisztikai folyamatokat animálni, illetve az ehhez szükséges állomásokat és útvonalakat az animációnkba illeszteni. Ehhez először elkészítjük a szimulált folyamatok helyét jellemző alaprajz méretarányos rajzát valamilyen rajzoló program segítségével, amit a *Copy->Paste* parancsokkal az **Arena** programban megjeleníthetünk. Megjegyezzük, az **Arena** *File->DXF Import* menüpontjával *dxf* formátumú **AutoCad** rajzokat közvetlenül is importálhatunk. A 12.16. ábrán látható alaprajz **Corel Draw**-val készült, és azt egyszerűen bemásoltuk az **Arena** programba.

A modell ellenőrzése és paramétereinek beállítása



12.17. ábra. A *Run Setup Project Parameters* dialógusablak

Mielőtt futtatnánk a modellt, ellenőrizzük a hibákat. Ezt megtehetjük úgy, hogy a **Run Interaction** eszközsoron a **Check** gombra (✓) kattintunk, vagy a **Run>Check Model** menüpontot választjuk, amit a klaviatúrán az F4 funkció billentyű lenyomásával is elérhetünk. A válasz egy kis ablakban jelenik meg, és ha szerencsénk van, akkor az üzenet következő: „*No errors or warnings in model*”. Ha nincs szerencsénk, akkor a megjelenő hibaüzenet leírja a hibát. Hibaüzenet esetén használjuk a **Find** opciót a hiba megkereséséhez.

A modell szintaktikai ellenőrzése (**Run>Check Modell**) után, a szimuláció helyes működése és

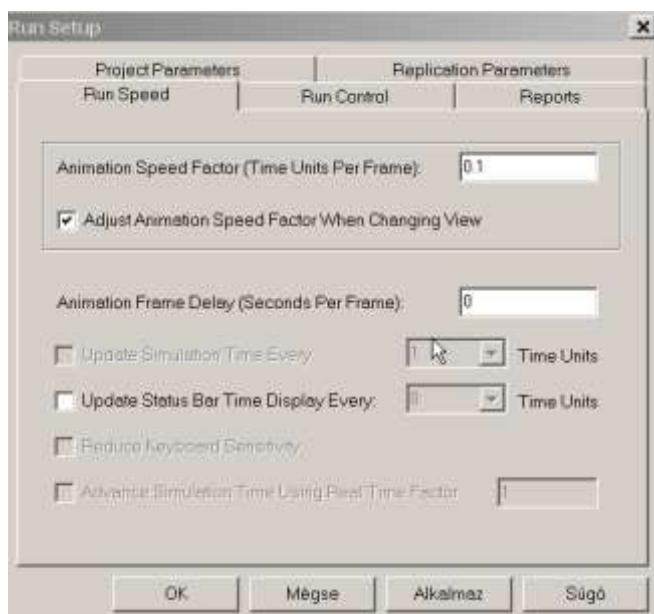
kényelmes követhetősége érdekében még a futás előtt célszerű beállítani a futás paramétereit. A **Run->Setup** menüpontokkal megnyitjuk 12.17. ábrán látható ablakot, és a *Project Parameters* fülre kattintva a megnyíló ablakba beírhatjuk a projekt címét, és az analízist végző személy nevét.

A *Replication Parameters* fülre kattintva, a 12.18. ábra dialógusa nyílik meg, ahol az ismétlések számát (*Number of Replication*), a szimuláció kezdetét (*Start Date and Time*), a beállási időt és időegységet (*Warm-up Period, Time Units*), az ismétlés hosszát és időegységet (*Replication Length, Time Units*), a munkanap hosszát órákban (*Hours Per Day*) és az alap időegységet (*Base Time Units*) állíthatjuk be.

12.18. ábra. A Run Setup ReplicationParameters dialógusablak

Nyissuk meg a *Run Speed* dialógus ablakot (12.19. ábra), ahol az *Animation Speed Factor* mező értékét változtatva megváltoztathatjuk a futás sebességét. Az érték az egy képre eső időegységet jelenti. A szimuláció futása alatt az animáció sebességét növelhetjük vagy csökkenthetjük. A modell futtatása közben a „<” billentyű lenyomásával lassítjuk, a „>” billentyű lenyomásával gyorsítjuk az animációt. Ha e billentyűk valamelyikét lenyomjuk, akkor megjelenik az aktuális animációs sebesség értéke (factor) az állapotjelző sor bal sarkában.

A szimuláció futása alatt, megállíthatjuk a szimulációt a **Run** eszközsorban a **Pause** gombra kattintva, **Run>Pause**, vagy az **Esc** billentyűvel. Ez ideiglenesen felfüggeszti a szimulációt, és a *User interrupted* üzenet jelenik meg a képernyőn az állapotjelző sorban. Ha a **Pause** módban duplán kattintunk az animációban látható entitásokra, akkor megnyílik az *Entity Summary* párbeszédablak, amely listázza az entitás attribútumok minden értékét. Ez nagyon hasznos lehet egy modell tesztelése közben. Ezen kívül a **Run** eszközsorban használhatjuk a **Step** gombot a szimuláció lépésenkénti végrehajtására. A **Go** gombbal pedig tovább futtathatjuk a megszakított szimulációt.



12.19. ábra. A Run Setup Run Speed dialógusablak

A modell futtatása

A **Run>Go** menüopcióval, vagy az eszközsoron a **Go** gombbal elindítva a programot látható, hogy a rendszeren áthaladó kék személygépkocsikon (entitásokon) kívül, még az animált számlálók is megjelennek a szimuláció futtatása során. Egy számláló tartozik minden egyes *Create*, *Process* és *Dispose* modulhoz és kettő a *Decide* modulhoz. A *Create*, *Decide* és *Dispose* modulok számlálói eggyel növekednek valahányszor egy entitás belép a modulba. A *Process* modul esetében a számláló a modulban tartózkodó entítások számát mutatja az adott pillanatban, beleértve az erőforrásra várakozó és már feldolgozás (megmunkálás) alatt álló entításokat is. Ha a **Run > Fast-Forward** menü opciót (vagy a **Fast-Forward** gombot) választjuk, akkor ezeket a számlálókat (és az entításokat a sorokban) csak a futás végén frissíti a program, akkor is, ha megszakítjuk a futást vagy nézetet váltunk a modellen.

A modell futásának befejezésekor az **Arena** megkérdezi, hogy akarjuk-e látni az eredményeket. Ha a **Yes** gombra kattintunk, akkor megnyílik a **Category Overview Report** (Kategóriánkénti áttekintő jelentés) ablaka (12.20. ábra) (ez az alapbeállítás). Természetesen a jelentésben csak a **Run Setup Project Parameters** dialógusablakban (12.17. ábra) kiválasztott statisztikák jelennek meg. Ha a dialógusablakban a **Statistics Collection** jelölő négyzetek valamelyikét üresen hagyjuk, akkor a hiányzó statisztika helyett „No Summary Statistics Are Available” (Az összesítő statisztika nem elérhető) üzenetet kapunk.

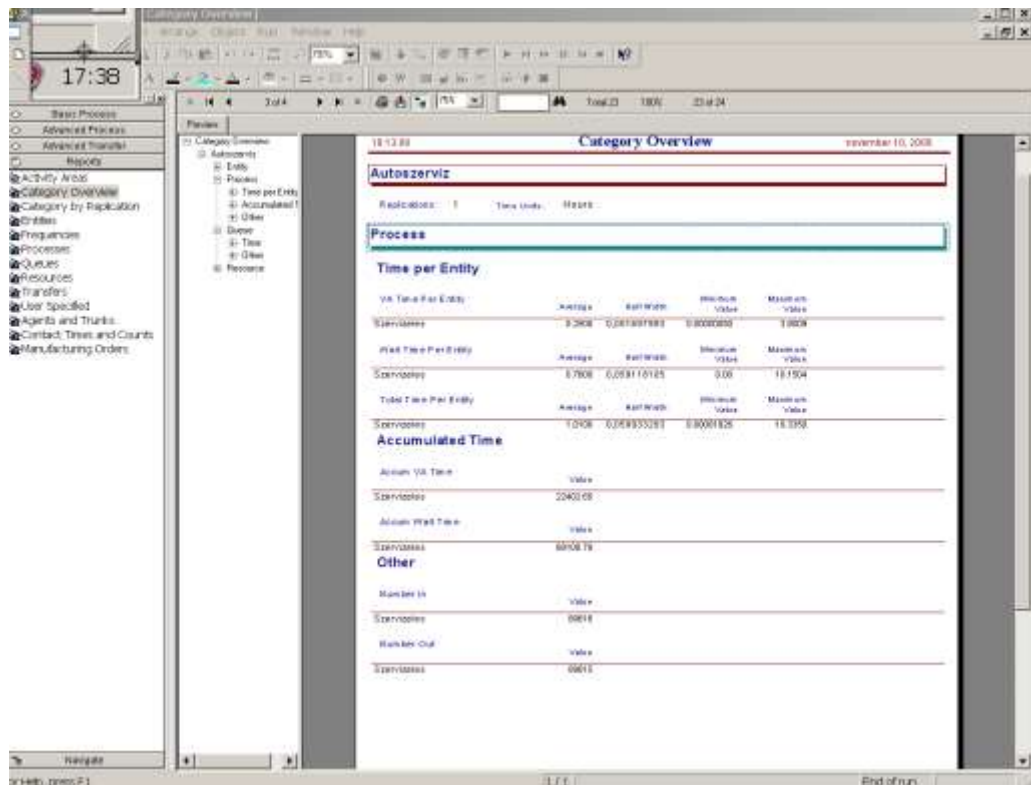
Az eredmények megtekintése és értelmezése

A jelentésablak baloldalán, a **Preview** fül alatti fastruktúrájú jelentések között (12.20. ábra) navigálhatunk vagy a gördítő gombokkal, valamint a jelentésablak bal felső sarkában elérhető léptető gombokkal az egyik jelentésről a másikra ugorhatunk. A jelentés, mint már említettük, csak olyan statisztikát állít elő, amelyet a **Run>Setup** párbeszédablakban a **Project Parameters** fül alatt **Statistics Collection** területen bejelöltünk. A modellünk esetében ezek az *Entity*, *Process*, *Queue* és *Resource* statisztikák.

A jelentésünkben háromféle statisztika található: ellenőrző (*tally*), folytonos (*persistent*) és számláló (*counter*). A negyedik statisztika típus a kimeneti adatok (*output*) csak a többszörös

ismétlés (*multiple replication*) esetén érhető el. Az ellenőrző statisztika a *Record* modulok által gyűjtött folyamatidőt, várakozási időt és intervallum időket tartalmaz. A folytonos idejű statisztikákban a sorokban várakozó entitások száma, az eszköz használat és az eszköz kihasználtság szerepelnek. A számlálók a kumulált időt, belépő, kilépő és az összes feldolgozott entitások számát tartalmazzák.

Az ellenőrző és a folytonos statisztikákban egyaránt megjelenik a becslt átlag 95%-os konfidenciaszintjéhez tartozó konfidencia határ. A statisztikákban a *Half Width* a konfidencia intervallum felét jelenti, feltételezve, hogy a konfidencia határok a becslt átlaghoz viszonyítva $\pm$ irányban szimmetrikusak. A statisztikák ezen kívül rögzítik a megfigyelt értékek minimális és maximális értékét is.



12.20. ábra. A Category Overview jelentésablak

Minden egyes ismétlés végén a program minden megfigyelt statisztika stacionárius (hosszú futás) várhatóértékére megkísérli kiszámítani a 95%-os konfidenciaszinthez tartozó konfidencia határokat, és ehhez az ún. „batch mean” eljárást használja. Az **Arena** először ellenőrzi, hogy elegendő adat gyűlt-e össze a kritikus statisztikai hipotézis (korrelálatlan tételek) vizsgálatához, ami a „batch-means” módszerhez szükséges. Ha nincs elég adat, akkor „Insufficient” (nem elegendő) felirat jelenik meg a jelentésben, és a jelentés nem tartalmazza a konfidencia intervallumot. Ha már van elegendő adat a korrelálatlan tételek teszteléséhez, de a vizsgálat hibát jelez, akkor „Correlated” (korrelált) felirat jelenik meg, és nincs konfidencia határ. Végül, ha elegendő adat gyűlt össze, és a hipotézisvizsgálat is sikeres, akkor a konfidencia határ és a várhatóérték is megjelenik a jelentésben. Az **Arena** így kizárja a megbízhatatlan konfidencia határok használatát.

Hibás eredményekre vezet, ha a rövid futási idő alapján próbálunk konklúziókat levonni, ezért nagyon fontos a futás hosszának és az ismétlések számának helyes meghatározása. Megjegyez-

zük a modellünk riportja 1 ismétlésre és 3000 óra futási időre vonatkozó eredményeket tartalmaz, és ennél a futási időnél valamennyi adat hipotézisvizsgálata sikeresnek bizonyult.

Az eredmények értékelése

A szimuláció eredményeinek értékeléséhez az összefoglaló Category **Overview Report**-ot (Kategóriánkénti áttekintő jelentés) használjuk fel. A további részletek *Preview* fül alatt (12.20. ábra) megnyitható további jelentésekben tanulmányozhatók. Tekintettel arra, hogy az első ránézésre bonyolultnak tűnő jelentések tanulmányozása és értelmezése nagy gyakorlatot és némi statisztikai ismeretet is igényel, az egyes eredményekhez magyarázatot is fűzünk.



12.21. ábra. A Category Overview jelentés alapadatai

Entity				
Time				
VA Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Szgi	0.2500	0.001697993	0.000000050	3.8009
NVA Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Szgi	0.00	0.000000000	0.00	0.00
Wait Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Szgi	0.7600	0.059118105	0.00	10.1504
Transfer Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Szgi	0.00	0.000000000	0.00	0.00
Other Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Szgi	0.00	0.000000000	0.00	0.00
Total Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Szgi	1.0100	0.059933283	0.00001826	10.3350
Other				
Number In	Value			
Szgi	89615			
Number Out	Value			
Szgi	89615			
WIP	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Szgi	3.0170	0.180344814	0.00	37.0000

12.22. ábra. A Category Overview jelentés az entitásokról

A jelentés első sorában (12.21. ábra), a cím alatt az ismétlések száma (*Replications*), és az alkalmazott időegység (*Time Units*) olvasható, amiből kiderül, hogy a további adatok a jelentésben 1-szeres ismétlésre vonatkoznak, azaz a szimuláció időtartama 30000 óra volt, és az idő dimenziójú adatok mértékegysége óra. A második sorban a rendszerből kilépő entitások száma jelenik meg (*System Number Out*). A jelentés szerint tehát a műhelyben 30000 óra alatt 89615 db személygépkocsit szervizeltek. (A riportban az angolszász jelölési rendszer szerint a vessző nem tizedes vesszőt, hanem ezres határolót, a pont pedig tizedes pontot jelent.)

Process

Time per Entity

VA Time Per Entity	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Szervizeles	0.2500	0.001697993	0.00000050	3.8009
Wait Time Per Entity	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Szervizeles	0.7600	0.059118105	0.00	10.1504
Total Time Per Entity	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Szervizeles	1.0100	0.059933283	0.00001926	10.3360

Accumulated Time

Accum. VA Time	Value
Szervizeles	22402.65
Accum. Wait Time	Value
Szervizeles	68108.79

Other

Number In	Value
Szervizeles	89616
Number Out	Value
Szervizeles	89615

12.23. ábra. A Category Overview jelentés a folyamatokról

Az entitásokról a jelentés következő része **Entity** alcím alatt közöl információkat (12.22. ábra), amelyből megtudhatjuk, hogy 1 személygépkocsi, a rendszeren átlagosan 1,01 óra alatt halad keresztül. Ez az idő a következők szerint oszlik meg: a műveleti idő (*VA Time*, *Value Added Time*), amikor foglalkozunk a személygépkocsival (szerviz tevékenységet végzünk) 0,25 óra és a várakozási idő (*Wait Time*) 0,76 óra.

Az **Entity Other** alcím alatti számok a belépő, a kilépő és a még feldolgozás alatt álló (*WIP Work In Process*) entitásokról tájékoztatnak. (A rendszerben tartózkodó személygépkocsik száma: 3,017 egyenlő a *WIP* mennyiséggel.)

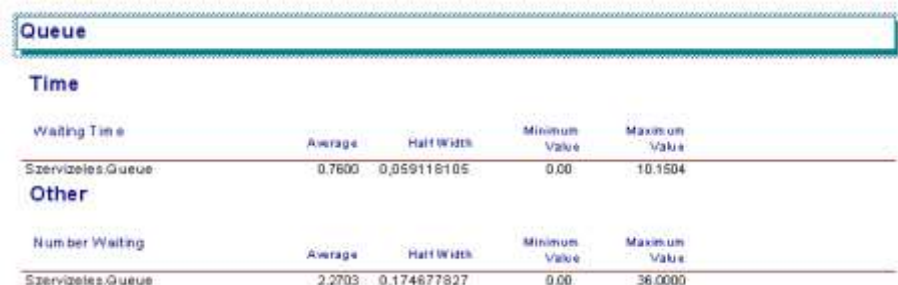
A **Process** cím alatt az egy személygépkocsira (entitásra) eső műveleti, várakozási és összes idők láthatóak (12.23. ábra). A teljes szerviz idő (*Total Time Per Entity*): 1,01 óra. A *VA time Per Entity* érték: 0,25 óra = 15 perc, ami megegyezik az input adatként megadott exponenciális eloszlású szerviz idő 15 perces paraméterével. A szervizelés kezdetéig eltelt várakozási idő (*Wait Time Per Entity*): 0,76 óra, és ez közelítőleg azonos az analitikus megoldás eredményével.

A **Process/Accumulated Time** cím alatt az előzőleg felsorolt, egy entitásra eső idők kumulált értékei találhatók. Ennek értelmezéséhez tekintsük a szervizelés hasznos kumulált idejét:

22402,65, ami az átlagos szervizelési idő (0,25 óra/szgk) és a szervizelt személygépkocsik számának (89615 szgk) a szorzata.

A jelentés következő szakaszában a **Queue** cím alatt a sorokban átlagosan eltöltött időről és a sorokban átlagosan várakozó entitások számáról, vagyis a sorok átlagos hosszáról tájékozódhatunk (12.24. ábra).

A sorban eltöltött egy entitásra eső idő a **Time/Waiting Time** cím alatt olvasható. A „Szervizes.Queue” az egy entitásra (személygépkocsira) eső várakozási idő: 0,76 óra. Ez majdnem megegyezik az egzakt megoldással. Hasonló megállapításra juthatunk a **Queue/Other/Number Waiting** cím alatt olvasható adatból is, a várakozó sor átlagos hossza: 2,2703 szgk.



Queue				
Time				
Waiting Time	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Szervizes.Queue	0.7600	0.059118105	0.00	10.1504
Other				
Number Waiting	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Szervizes.Queue	2.2703	0.174677827	0.00	36.0000

12.24. ábra. A Category Overview jelentés a sorokról

Az eredmények szempontjából talán a legfontosabbak az erőforrások működésére, kihasználtságára vonatkozó adatok, amelyek a **Resource** cím alatt találhatók, ezért ezeket az eddigieknél kicsit mélyebben fogjuk vizsgálni. Minden egyes erőforrásról az **Arena** két kihasználási statisztikát készít, az egyik az **Instantaneous Utilization** (pillanatnyi kihasználtság) a másik a **Scheduled Utilization** (ütemezett kihasználtság).

Az **Instantaneous Utilization**-t (pillanatnyi kihasználtság):

$$\frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{B(t)}{M(t)} dt,$$

ahol:

- $U(t)$ az erőforrás kihasználtsága a t időpontban, ha $M(t) > 0$, ha az $M(t) = 0$, akkor az $U(t) = 0$,
- $B(t)$ a foglalt erőforrás kapacitás a t időpontban,
- $M(t)$ az ütemezett erőforrás kapacitás a t időpontban,
- T a szimuláció időtartama.

A jelentésben megjelenő *Instantaneous Utilization* tehát az idő szerint súlyozott átlagos kihasználtságot jelenti. Fontos tudni, hogy az **Arena** számol azokkal az időközökkel is, amikor nincs ütemezett kapacitás, $M(t) = 0$, azaz a T idő tartalmazza azokat az időközöket is, amikor a kihasználtság, $U(t) = 0$. Ez statisztika hasznos lehet, mert a kihasználtságot az idő függvényében követi, azonban óvatosan kezelendő, mert bizonyos körülmények között meglehetősen rossz eredményeket produkálhat.

Scheduled Utilization (ütemezett kihasználtság) egyenlő

$$\frac{\frac{1}{T} \int_0^T B(t) dt}{\frac{1}{T} \int_0^T M(t) dt} = \frac{\int_0^T B(t) dt}{\int_0^T M(t) dt},$$

azaz, az időben átlagosan foglalt erőforrás kapacitás és az időben átlagosan ütemezett erőforrás kapacitás hányadosa. Ebben az esetben a nullával való osztás nem jelentkezik problémaként, mivel az ütemezett erőforrásnak mindig létezik elérhető kapacitása (egyetlen helyzetben állhat elő probléma, ha az erőforrás még nem jelent meg a modellben).

Különböző feltételek mellett a kétféle kihasználási mutató mindegyike hasznos információt nyújthat. Ha azonban egy erőforrás kapacitása állandó a szimuláció alatt (pl. az erőforrás nem hibásodik meg, és nem kerül inaktív állapotba), a jelentésben a kétféle kihasználtság értéke azonos. Ha azonban ütemezés kapcsolódik egy erőforráshoz (mint az általunk vizsgált modellben is), és az ütemezett kapacitások nullák vagy pozitív konstansok, akkor a jelentésben megjelenő **Instantaneous Utilization** (pillanatnyi kihasználtság) értékek azt mutatják, hogy az erőforrás átlagosan mennyire volt foglalt az egész futtatás ideje alatt (beleértve a nulla kapacitású, azaz a nulla kihasználtságú periódusokat is). Az $U(t)$ függvény görbájéről leolvasható, hogy az ütemezés mennyire követi az erőforrás elvárásait, ez hasznos lehet pl. személyzet tervezés vizsgálatakor. A jelentésben szereplő másik mutató, a **Scheduled Utilization** (ütemezett kihasználtság) azt jelzi, hogy átlagosan mennyire volt foglalt az erőforrás az idő elteltével, amikor elérhető volt, azaz a kapacitása nem volt nulla.

Például tekintsük azt a helyzetet, amikor az erőforrást úgy ütemezzük, hogy a T idő $2/3$ részében elérhető, kapacitása 1, és a fennmaradó T idő $1/3$ részében nem elérhető, kapacitása 0. Feltételezzük továbbá, hogy az erőforrás a teljes elérhetőségi idő 50%-a alatt, azaz

$$1/2 \times 2/3 \times T = 1/3 \times T$$

ideig foglalt. Erre a példára készített jelentésben az **Instantaneous Utilization** (pillanatnyi kihasználtság) mutató:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{B(t)}{M(t)} dt = \frac{1/2 \times 2/3 + 0}{1} T = 0,3333.$$

Ez azt mutatja, hogy az erőforrás az egész futtatási időhöz (T) viszonyítva az idő $1/3$ részében lesz kihasznált.

Resource				
Usage				
Instantaneous Utilization	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Szereleolias	0.7468	0,007569508	0.00	1.0000
Number Busy	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Szereleolias	0.7468	0,007569508	0.00	1.0000
Number Scheduled	Average	Half Width	Minimum Value	Maximum Value
Szereleolias	1.0000	(insufficient)	1.0000	1.0000
Scheduled Utilization	Value			
Szereleolias	0.7468			
Total Number Seized	Value			
Szereleolias	88616.00			

12.25. ábra. A Category Overview jelentés az erőforrásokról

A **Scheduled Utilization** (ütemezett kihasználtság) mutató:

$$\frac{\int_0^T B(t)dt}{\int_0^T M(t)dt} = \frac{1/2 \times 2/3 \times T}{2/3 \times T} = 0,5000,$$

amely szerint az erőforrás elérhetőségi idejéhez viszonyítva az erőforrás 1/2 részben lesz kihasznált. A példában az **Instantaneous Utilization** (pillanatnyi kihasználtság) mutató kisebb vagy egyenlő mint a **Scheduled Utilization** (ütemezett kihasználtság) mutató.

12.3. táblázat

A mintapélda analitikus megoldásának összehasonlítása a szimulációk eredményeivel

Adat	Analitikus	Taylor II.	Arena
A rendszerben tartózkodó gépkocsik száma [db]	3,0000	3,1300	3,0170
Szerviz idő [óra]	0,2500	0,2483	0,2500
Várakozási idő a kiszolgálás kezdetéig [óra]	0,7500	0,7117	0,7600
A rendszerben eltöltött idő [óra]	1,0000	0,9600	1,0100
A várakozó sor hossza [db]	2,2500	2,1300	2,2700
Kihasználási tényező [%]	75,0000	74,6200	74,6800

A jelentés szerint (12.25. ábra.) a szerelőállás pillanatnyi kihasználtsága (*Instantaneous Utilization*) 0,7468, ami elfogadható. Az effektív munkaidőre vonatkozó ütemezett kihasználtság (*Scheduled Utilization*) a korábbi magyarázatnak megfelelően megegyezik pillanatnyi kihasználtsággal, mivel a szerelőállás a szimuláció teljes időtartamra ütemezett.

Végül a 12.3. táblázatban az összehasonlíthatóság érdekében összegeztük a különböző formákban megjelenő eredményeket.

12.5. Az alkalmazási lehetőségekről

A szimulációt igen széles körben használják a tudomány, a gazdaságirányítás, a termelés, a szolgáltatás, közlekedés, elosztás stb. területén. E területeken örök problémát jelent az egymást követő tevékenységek, műveletek kapacitásainak összehangolása. A teljesség igénye nélkül csak néhány példát említünk a módszer sokrétű alkalmazhatóságának bemutatására:

gyártósor működésének szimulációja a műveletközi anyagtároló helyek és anyagmozgató eszközök kapacitásának meghatározására,

karbantartási műveletek szimulációja a karbantartó részleg optimális méretének megállapítására,

közúti csomópontokban, kereszteződésekben a lámpajelzések szimulációja, a legrövidebb várakozási idők meghatározására,

áruházak, nagykereskedelmi elosztó raktárak működésének szimulációja az optimális készletek megállapítására és az elosztás irányítási rendszerének elemzésére,

telefonhálózat szimulációja a leggazdaságosabban működést biztosító kapacitások meghatározására.

A szimulációt általában azért alkalmazzuk, hogy előre jelezzük a diszkrét időpontokban változó állapotú rendszerek stacionárius viselkedését. Előírt kezdeti feltételekkel indított futtatások sorozatával azonban a szimuláció egy rendszer tranziens (átmeneti) viselkedésének a leírására is alkalmas, továbbá differenciálegyenletek használatával a szimulációt olyan rendszerekre is kiter-

jeszthetjük, amelyek állapotai folytonosan változnak az időben.

A szimuláció igen sokrétű eszköz, de természetesen nem csodaszer, sőt a természetéből eredendően pontatlan módszer. Inkább statisztikai becsléseket nyújt, mint egzakt eredményeket, és inkább csak összehasonlítja a lehetséges változatokat, mint megadja az optimálist. Nem titok az sem, hogy a szimuláció a probléma tanulmányozásának lassú és költséges módja. Az előkészítés sok időt, a programok megvásárlása pedig jelentős összegű befektetést kíván. Érdemes megfontolni, célszerűbb-e a programot bérelni, esetleg szakértőkkel együtt, mint megvásárolni.

A rendszer működését leíró szimuláció eredményei nehezen áttekinthető számsorok formájában jelennek meg, ezért az ok-okozati összefüggések tanulmányozása további alapos elemzést igényel. A modell paramétereinek érzékenységi analízise igen költséges. Az egyetlen út ugyanis minden egyes paraméter lehetséges értékeivel egy új szimulációs sorozat lefuttatása volna, ami viszonylag drága és kevés információt nyújt. Ezzel szemben a szimuláció lehetőséget ad arra, hogy kísérleteket végezzünk egy rendszerrel vagy politikával anélkül, hogy azt ténylegesen megvalósítsanak és működtetnénk. Ez még akkor is olcsóbb, ha gyakran a statisztikailag megbízható eredmények eléréséhez meglepően hosszú szimulációs futtatások szükségesek.

Nem kérdéses, hogy a szimuláció a logisztikai tervezésben és gyakorlatban fontos helyet foglal el. Szinte felbecsülhetetlen értékű eszköz azoknak a problémáknak a megoldásában, amelyekre az analitikus módszerek nem használhatók.

12.6. Ellenőrző kérdések

1. Mikor indokolt a szimuláció alkalmazása?
2. Milyen elemi részekből épül fel a szimulációs modell?
3. Hogyan működik a szimulációs program a számítógépen?
4. Ismertesse a véletlen számok előállításának módját!
5. Hogyan lehet valamilyen valószínűségi eloszlásból véletlen megfigyeléseket generálni?
6. Mi jellemzi a szimulációs programcsomagokat?
7. Milyen paramétereket kínál a *Taylor II.* a modell leírásához?
8. Milyen eloszlásfüggvényeket használ a *Taylor II.*, és mi a teendő akkor, ha nem találunk megfelelő eloszlásfüggvényt?
9. Ismertesse az Arena szimulátor modellezési környezetét!
10. Ismertesse az Arena folyamat- és adatmodulok szerepét!
11. Ismertesse az Arena animációs lehetőségeit!
12. Milyen alapértelmezett eredményeket szolgáltat az Arena szimulátor?

Jegyzetek, kérdések

13. MATEMATIKAI EMLÉKEZTETŐ

13.1. Mátrixszámítás

Egy **mátrix** számok táblázatos elrendezése. Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 0 & -15 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

egy 3x2-es („háromszor kettes”) mátrix, ami azt jelenti, hogy olyan téglalap alakú elrendezés, amelyben három sor és két oszlop van. (A mátrixokat a könyvben kövér nagybetűkkel jelöljük.) A táblázatos elrendezésben szereplő számokat a mátrix elemeinek hívjuk. Például a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Egy 2x3-as mátrix, amelynek elemei 2, 3, 1, 0 -1, és 4. Általános formában egy $n \times m$ -es mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nm} \end{bmatrix} = \|a_{ij}\|,$$

ahol $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm}$, jelöli a mátrix elemeit, amelyek száma $n \times m$. A mátrixot gyakran röviden $\|a_{ij}\|$ -vel jelöljük, ahol a_{ij} a mátrix i -edik sorában és j -edik oszlopában álló elem minden $i=1, 2, \dots, n$ és $j=1, 2, \dots, m$ esetén.

A mátrixok között fontos szerepet játszanak azok a speciális mátrixok, amelyeknek csak egyetlen sora vagy egyetlen oszlopa van, ezeket **vektoroknak** nevezzük. A vektorok lehetnek sor- és oszlopvektorok. A sorvektor

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n],$$

alakú, az oszlopvektor pedig

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

A vektorokat kövér kisbetűkkel jelöljük. Ha jelezni akarjuk, hány eleme van a vektornak, akkor n -dimenziós vektort, röviden n -vektornak mondjuk. Például az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

neve 4-vektor.

A mátrixok nem számok, ezért nincs eleve adott összegük, szorzatuk. Alkalmazásokban azonban sokszor kívánatos, hogy a mátrixokon értelmezzünk olyan műveleteket, amelyek

hasonlítanak a számok körében végzett műveletekre. A mátrixok tipikus alkalmazási területe a lineáris algebra. Például az

$$(13.1.) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

három ismeretlent tartalmazó és három egyenletből álló egyenletrendszer a_{ij} , x_j és b_j értékei mátrixok alakjában a következő formában írható:

$$(13.2.) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Ha ezt a kifejezőmódot egy igen egyszerű szorzási szabállyal kapcsoljuk össze, az $\|a_{ij}\|$ i -edik sorának és az $\|x_j\|$ j -edik oszlopának elemeit összeszorozzuk, és a szorzatokat összeadjuk, akkor a (13.1.) egyenleteket kapjuk. Ezt a szabályt tetszőleges sorú és oszlopú mátrixra általánosíthatjuk azzal a feltétellel, hogy a baloldali mátrix oszlopainak a száma egyenlő a jobboldali mátrix sorainak a számával.

13.1.1 Két mátrix egyenlő

Tegyük fel, hogy $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ és $\mathbf{B} = \|b_{ij}\|$ két olyan mátrix, amelyeknek külön-külön ugyanannyi soruk és ugyanannyi oszlopuk van. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ egyenlő

$$(13.3.) \quad \mathbf{A} = \mathbf{B},$$

akkor, ha minden megfelelő elemük egyenlő ($a_{ij} = b_{ij}$ minden i és j esetén).

13.1.2 Mátrixok összeadása és kivonása

Az $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{B}$ mátrix összegét úgy képezzük, hogy összeadjuk a mátrixok megfelelő elemeit:

$$(13.4.) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C},$$

ahol

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Például:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 & 11 \\ -11 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 12 \\ -11 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Hasonlóképpen a különbségre az

$$(13.5.) \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B} = \mathbf{C},$$

ahol

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

Például:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & -8 & -11 \\ 11 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -10 \\ 11 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

13.1.3 Mátrixok szorzása skalárral

Egy mátrixot úgy szorzunk meg egy λ számmal, hogy minden elemét megszorozzuk λ -val:

$$(13.6.) \quad \lambda \mathbf{A} = \mathbf{B},$$

ahol:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Például:

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 5 \\ 0 & -5 & 20 \end{bmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy a skalárral való szorzást kivéve (ahol csak egy mátrix szerepel) a műveleteket csak akkor értelmezhetjük, ha a két mátrix a soraikat és oszlopaikat tekintve ugyanolyan méretű. A műveletek igen egyszerűek, mert csak: az elemek közötti szokásos aritmetikai műveleteket kell elvégezni.

13.1.4 Mátrixok szorzása mátrixszal

A mátrixok szorzása nagyon fontos művelet, amely az eddigieknél sokkal bonyolultabb.

$$(13.7.) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C},$$

ahol:

$$(13.8.) \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m_A} a_{ik} b_{kj}.$$

Az $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{B}$ mátrix szorzata az a $\mathbf{C}$ mátrix, amelynek az i -edik sorában és j -edik oszlopában álló elemet úgy kapjuk meg, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorában levő minden elemet megszorozzuk a $\mathbf{B}$ mátrix j -edik oszlopában álló megfelelő elemmel, és aztán ezeket a szorzatokat összeadjuk. Ezért a mátrixok közötti szorzásnak akkor és csak akkor van értelme, ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora a $\mathbf{B}$ mátrixnak ($m_A = n_B$). Tehát, ha $\mathbf{A}$ $n_A \times m_A$ -es mátrix, $\mathbf{B}$ pedig $n_B \times m_B$ -es mátrix, akkor a szorzatuk, a $\mathbf{C}$ mátrix $n_A \times m_B$ -es mátrix:

Például:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 0 \cdot 5 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 12 & 4 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}$$

Értelemszerűen, fordított sorrendben nem szorozhatjuk össze ezeket a mátrixokat, a

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

nincs értelmezve. Jegyezzük meg, hogy ha mind $\mathbf{AB}$ -nek mind $\mathbf{BA}$ -nak van értelme, kevés kivételtől eltekintve az

$$(13.9.) \quad \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Tehát a mátrixok szorzása a tulajdonságait tekintve lényegesen különbözik a számok szorzásának a tulajdonságaitól. Hogy megértsük, miért éppen így definiáltuk a mátrixok

szorzatát, tekintsük ismét a (13.1.) egyenletrendszert.

Ezt mátrixalakban sokkal tömörebben is felírhatjuk:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b},$$

ahol:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

A mátrixok szorzatát ezért vezettük be a leírt módon. Jegyezzük meg jól, hogy mátrixok osztását nem értelmezzük.

Bár a mátrixszorzás az aritmetikai szorzás bizonyos tulajdonságaival nem rendelkezik, a mátrixműveletek eleget tesznek az alábbi szabályoknak:

$$(13.10.1.) \quad \mathbf{A+B=B+A},$$

$$(13.10.2.) \quad (\mathbf{A+B})+\mathbf{C=A+(B+C)},$$

$$(13.10.3.) \quad \mathbf{A(B+C) = AB+AC},$$

$$(13.10.4.) \quad \mathbf{A(BC) = (AB)C},$$

ha a mátrixok méretei lehetővé teszik a jelzett műveletek végrehajtását.

13.1.5 A mátrixok egész számú hatványai

Az egészszámú hatványozás a mátrixszorzásra vezethető vissza. Például

$$\mathbf{A^2=AA}.$$

Ha n és m egész kitevő, akkor az

$$(13.11.) \quad \mathbf{A^n=AA \dots A},$$

$$(13.12.) \quad \mathbf{A^nA^m=A^mA^n=A^{n+m}}.$$

13.1.6 Transzponált mátrix

A transzponálás egy olyan mátrixművelet, amelynek nincs aritmetikai analógiája. Ez nem más, mint az oszlopok és sorok felcserélése, ami sokszor hasznos a szorzás kívánt sorrendű elvégzése szempontjából.

Az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltját $\mathbf{A^T}$ -vel jelöljük, és ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

akkor az

$$\mathbf{A^T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

13.1.7 Zérus mátrix

A $\mathbf{0}$ zérus mátrix a 0 számmal analóg mátrix. A $\mathbf{0}$ zérus mátrixnak minden eleme 0, például a

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bármilyen $\mathbf{A}$ mátrixra

$$(13.13.) \quad \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0}\mathbf{A} = \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{0},$$

ahol a $\mathbf{0}$ zérus mátrix olyan méretű, hogy a műveletek elvégezhetők.

13.1.8 Egységmátrix

A 0 és az 1 olyan számok, amelyek különleges szerepet játszanak az aritmetikában. Analóg módon vannak különleges mátrixok, amelyek hasonló szerepet játszanak a mátrixok körében. Az 1-es számmal analóg az $\mathbf{E}$ **egységmátrix**. Az egységmátrix egy négyzetes mátrix, amelynek a főátló kivételével minden eleme nulla. A főátló a bal fent induló és jobbra lefelé tartó átló, amelynek elemei 1-gyel egyenlők. Az

$$(13.14.) \quad \mathbf{A} = \mathbf{E},$$

ahol az

$$(13.15.) \quad a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases}.$$

Például:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{E}$ sorainak és oszlopainak számát tetszőlegesen rögzíthetjük. Az $\mathbf{E}$ azért analóg az 1-es számmal, mert bármilyen $\mathbf{A}$ mátrixra

$$(13.16.) \quad \mathbf{E}\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E},$$

ahol $\mathbf{E}$ minden esetben olyan méretű, hogy a szorzásoknak van értelmük.

13.1.9 Konjugált mátrix

Az adott négyzetes mátrix ($\mathbf{A}$) transzponált mátrixának ($\mathbf{A}^T$) aldeterminánsaival alkotott négyzetes mátrix. Jelölése: $\mathbf{A}^*$.

Példa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}$ transzponáltja:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A konjugált mátrix az aldeterminánsokkal:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} + & \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

A konjugált mátrix:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -8 & 4 & -2 \\ 12 & -10 & -3 \end{bmatrix}$$

13.1.10 A mátrix inverze

A $\mathbf{B}$ mátrix az $\mathbf{A}$ mátrix inverze, ha

$$(13.17.) \quad \mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}.$$

Az inverz mátrix jelölése

$$(13.18.) \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

A négyzetes mátrix inverzét a következőképpen írhatjuk fel:

$$(13.19.) \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|},$$

ahol: az $\mathbf{A}^*$ az $\mathbf{A}$ mátrix konjugáltja, és $|\mathbf{A}|$ az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa. Az $\mathbf{A}^{-1}$ meghatározását a következő sorrendben végezzük, kiszámítjuk az $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{A}^*$ mátrixokat, majd az $|\mathbf{A}| \mathbf{E} = \mathbf{A} \mathbf{A}^*$ összefüggésből az $|\mathbf{A}|$ determinánst, és végül az $\mathbf{A}^{-1}$ -et. Például:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -12 & -6 & 12 \\ -10 & 3 & -22 \\ 6 & -21 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| \mathbf{E} = \mathbf{A} \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -96 & 0 & 0 \\ 0 & -96 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-96} \begin{bmatrix} -12 & -6 & 12 \\ -10 & 3 & -22 \\ 6 & -21 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1250 & 0,06250 & -0,1250 \\ 0,1042 & -0,03125 & 0,2292 \\ -0,0625 & 0,21875 & 0,0625 \end{bmatrix}$$

Megjegyezzük az inverz mátrix számítására léteznek más, kényelmesebb számítási mód-szerek is.

13.1.11 A mátrix felbontása részmátrixokra

Egyes esetekben célszerű egy mátrixot néhány kisebb blokkra, részmátrixra felbontani. Például egy 3×4 -es mátrix felbontása a következő lehet:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

ahol a részmátrixok:

$$\mathbf{A}_{12} = [a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14}], \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

Ekkor a műveleteket részmátrixonként végezhetjük, ha a blokk mérete olyan, hogy a műveletet megengedi.

Például, ha a 4×1 -es $\mathbf{B}$ mátrixot úgy osztjuk blokkokra, hogy

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

akkor az $\mathbf{AB}$ szorzat

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_{21}b_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix}.$$

A részmátrixokra bontás egyik fontos alkalmazása, hogy lehetővé teszi egy $m \times n$ -es mátrix n sorvektorra vagy m oszlopvektorra bontását. A mátrix tulajdonságai e vektorok a segítségével vizsgálhatók. Ennek bemutatására, tekintsük egy ugyanolyan típusú (oszlop-, vagy sor-) n -vektoroknak az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ halmazát.

Definíció: A vektorok $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ halmazát lineárisan összefüggőnek nevezzük, ha vannak olyan $c_1, c_2, \dots, c_m$ számok, nem mind nulla, hogy

$$(13.20.) \quad c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0}.$$

Egyébként a vektorok lineárisan függetlenek.

Például, ha $m=3$ és

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= [1 \quad 1 \quad 1], \\ \mathbf{x}_2 &= [0 \quad 1 \quad 1], \\ \mathbf{x}_3 &= [2 \quad 5 \quad 5]. \end{aligned}$$

Az összefüggőség meghatározásához a

$$c_1 + 2c_3 = 0$$

$$c_1 + c_2 + 5c_3 = 0$$

$$c_1 + c_2 + 5c_3 = 0$$

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + c_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

egyenletrendszert kell megoldani. Az első egyenletből a

$$\frac{c_1}{c_3} = -2, \text{ illetve a } c_1 = -2c_3$$

Az utóbbi eredményt a második egyenletbe helyettesítve a

$$-2c_3 + c_2 + 5c_3 = c_2 + 3c_3 = 0,$$

$$\frac{c_2}{c_3} = -3.$$

Az utolsó egyenletet c_3 -al elosztva, a

$$\frac{c_1}{c_3} \mathbf{x}_1 + \frac{c_2}{c_3} \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = \mathbf{0},$$

és az előző eredményeket helyettesítve, a

$$2\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = \mathbf{0},$$

amelyből az

$$\mathbf{x}_3 = 2\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2.$$

Tehát $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ lineárisan összefüggők, mivel az egyiket ki lehet fejezni a többiek lineáris kombinációjaként. Ha viszont az

$$\mathbf{x}_3 = [2 \quad 5 \quad 6].$$

lenne, akkor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ is lineárisan független lenne.

Definíció: Vektorok egy halmazának a **rangja** a halmazból választható lineárisan független vektorok maximális száma.

Az előbbi példában az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ vektorok rangja 2 volt, majd az $\mathbf{x}_3$ megváltoztatása után 3 lett.

Definíció: A vektorok egy halmazának **bázisa** a halmazból vett olyan lineárisan független vektorok, amelyek lineáris kombinációjaként a halmaz minden eleme előállítható (azaz a halmaz minden vektora a bázisvektorok számszorosainak az összege).

Az előbbi példában, mielőtt $\mathbf{x}_3$ -at megváltoztattuk, $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ bázisa a $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ halmaznak.

1. Tétel: Vektorok egy halmazából választott r lineárisan független vektor akkor és csak akkor bázisa a halmaznak, ha a halmaz rangja r .

Ezekből a vektorokra vonatkozó eredményekből a mátrixokra is származtathatunk bizonyos fontos tudnivalókat.

Definíció: Egy mátrix **sorrangja** a mátrix sorvektoraiból álló halmaz rangja. A mátrix **oszloprangja** a mátrix oszlopvektoraiból álló halmaz rangja.

Például az előbbi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix sorrangjáról megállapítottuk, hogy 2. Meg lehet mutatni, hogy az oszloprangja is 2. Ez nem véletlen, amint a következő eredmény mutatja.

2. Tétel: Bármely mátrix sorrangja és oszloprangja megegyezik egymással. Ezért csak: a mátrixok rangjától beszélünk.

Az utolsó fogalom, amelyet meg kell beszülnünk, a mátrixok inverze. Tudjuk, hogy minden nem nulla k számnak van inverze, azaz reciproka, $k^{-1}=1/k$, amellyel

$$kk^{-1} = k^{-1}k = 1.$$

Van-e ennek analógiája a mátrixok körében? Vagyis igaz-e, hogy bármely nem nulla $\mathbf{A}$ mátrix esetén létezik $\mathbf{A}^{-1}$ mátrix, amellyel

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Ha $\mathbf{A}$ nem négyzetes (azaz sorainak és oszlopainak a száma különböző), akkor a válasz mindig nem, mert $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$ különböző méretűek lennének, tehát nem lehetnének egyenlők egymással. Ha viszont $\mathbf{A}$ négyzetes, akkor a válasz az, hogy bizonyos feltételek mellett a kérdésre pozitív válasz adható, amint azt az 13.3. tételben látni fogjuk.

Definíció: Egy mátrixot **nem szingulárisnak** nevezünk, ha rangja megegyezik a sorainak és oszlopainak számával. Egyébként a mátrix **szinguláris**.

A definíció szerint csak négyzetes mátrix lehet nem szinguláris. Hasznos módszert nyújt a mátrixok nem szingularitásának a vizsgálatára az a tény, hogy egy mátrix pontosan akkor nem szinguláris, ha determinánsa nem nulla.

3. Tétel:

a) Ha $\mathbf{A}$ nem szinguláris, akkor létezik egy egyértelműen meghatározott nem szinguláris $\mathbf{A}^{-1}$ mátrix, az $\mathbf{A}$ inverze, amellyel $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

b) Ha $\mathbf{A}$ nem szinguláris és $\mathbf{B}$ olyan mátrix, hogy $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$ vagy $\mathbf{BA}=\mathbf{E}$, akkor $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$.

c) Csak nem szinguláris mátrixnak van inverze.

Példaként tekintsük az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixot. Az $\mathbf{A}$ rangja 2, tehát a mátrix nem szinguláris. Ezért $\mathbf{A}$ -nak van inverze, amely történetesen

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Ezért az

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 & 5 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-5) \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és az

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 - 4 \cdot 1 & 1 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 5 + (-5) \cdot 1 & 1 \cdot (-4) + (-5) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A mátrixműveletek elvégzése kézi számolással a módszertől függetlenül mindig munkaidőigényes, ezért a számításokhoz célszerű számológép programot használni. A sokak számára elérhető Excel program mátrixfüggvényei:

MDETERM(tömb): Egy tömb mátrix-determinánsát számítja ki.

MSZORZAT(tömb1;tömb2): Két tömb mátrix-szorzatát adja meg. Eredményként olyan tömböt ad, amely ugyanannyi sort tartalmaz, mint a tömb1 és ugyanannyi oszlopot, mint a tömb2.

INVERZ.MÁTRIX(tömb): Egy tömbben található mátrix inverz mátrixát adja eredményül.

13.2. A valószínűség és a valószínűségi változó fogalma

13.2.1 A valószínűség fogalma

Ha valamely E esemény megfigyelésére N számú kísérletet végzünk, és a kísérletben az E esemény bekövetkezéseinek a száma (más szóval a gyakorisága) n , akkor a

$$p = P(E) = \frac{n}{N}$$

hányadost az E esemény **valószínűségének**, más szóval **relatív gyakoriságának** nevezzük.

Az E esemény kiegészítő valószínűsége:

$$q = 1 - p = \frac{N - n}{N}.$$

Bármely esemény valószínűsége 0 és 1 közé esik. A lehetetlen eseménynek 0, a bizonyosnak az 1 valószínűség felel meg.

13.2.2 Feltételes valószínűség

Az A esemény megvalósulásának valószínűségét, azon feltétel mellett, hogy a B esemény megvalósul, feltételes valószínűségnek nevezzük. Ezt a következőképpen jelöljük:

$$P(A|B),$$

és többnyire így olvassuk: „az A esemény, feltéve, hogy a B bekövetkezett”.

Szemben az A eseménynek a B eseményre vonatkoztatott feltételes valószínűségével gyakran használjuk az A valószínűsége helyett az A „a priori” valószínűsége kifejezést. Ilyen módon azt a tényt húzzuk alá, hogy nem foglalkozunk valamely más esemény megvalósulásával.

13.2.3 Valószínűségek összeadása és szorzása

Annak valószínűsége, hogy bizonyos egymást kizáró A és/vagy B (A egyedül, B egyedül, vagy A és B együttesen) események valamelyike bekövetkezik, az A és B **események valószínűségének összegével** egyenlő:

$$P(A + B)$$

Legyen például egy dobozban 5 fekete, 3 fehér és 2 piros golyó. Annak valószínűsége, hogy a dobozba vaktában benyúlva fehér golyót emelünk ki $3/10=0,3$. A piros golyó kiemelésének valószínűsége $2/10=0,2$. Annak valószínűsége, hogy pirosat vagy fehéret $0,2+0,3=0,5$.

Események együttesének valószínűsége:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Ha az események kölcsönösen kizárják egymást, azaz

$$P(A+B) = 0,$$

akkor

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Annak valószínűsége, hogy bizonyos együtt is bekövetkezhető A és B események mindegyike bekövetkezik (együttesen valósul meg), a szóban forgó **valószínűségek szorzatával** egyenlő:

$$P(AB)$$

Az összetett valószínűségek összefüggése:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Az előző példában annak valószínűsége, hogy a dobozba egymásután, vaktában kétszer benyúlva először fehéret, majd piros golyót emelünk ki, ha az először kihúzott golyó visszatesszük $0,3 \cdot 0,2 = 0,06$. Ha nem tesszük vissza az először kihúzott golyót, akkor $0,3 \cdot 2/9 = 0,067$.

13.2.4 A valószínűségi változó

Ha valamely ζ változó a következő értékeket veheti fel:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

rendre az alábbi valószínűségekkel:

$$p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n),$$

ahol

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1,$$

akkor (diszkrét) **valószínűségi változónak** nevezzük, ζ -vel jelöljük, lehetséges értékeit pedig x_i -vel.

Egy teljes eseményrendszer elemi eseményeihez rendelt ζ valószínűségi változó **diszkrét** eloszlású, ha a lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Például, ha két kockával való dobásnál a dobott számok összegét vizsgáljuk, akkor az elemi események száma véges: $6^2=36$. A valószínűségi változó legyen a dobott számok összege $\zeta=i+k$ (i az egyik, és k a másik kockán látható pontok száma), ami szintén véges:

$$\zeta=i+k=2, 3, 4, \dots, 12.$$

A dobott számok összege tehát diszkrét valószínűségi változó.

Egy teljes eseményrendszer elemi eseményeihez rendelt ζ valószínűségi változó **folytonos** eloszlású, ha lehetséges értékei folytonosan töltene ki egy vagy több véges intervallumot, vagy a teljes $(-\infty, +\infty)$ intervallumot.

Például folytonos valószínűségi változóhoz jutunk, ha egy R sugarú kör alakú céltáblára lövünk (feltételezve, hogy a céltáblát eltaláljuk), és a becsapódás helyét vizsgáljuk. Ennél a kísérletnél az elemi események száma (a céltábla pontjainak a számossága) nem megszámlálható. A valószínűségi változó (ξ) lehetséges értékei legyenek a találat helyének a középponttól való távolsága r . Az r értékek a $[0;R]$ intervallum pontjai, ugyancsak nem megszámlálhatóak, ezért a $\xi=r$ folytonos valószínűségi változó.

A valószínűségi változó értelmezéséből következik, hogy ha ξ egy valószínűségi változó, akkor annak konstanssal való szorzata, négyzete, négyzetgyöke, stb. ugyancsak valószínűségi változó. Tehát, ha ξ valószínűségi változó, akkor annak bármely valós függvénye

$$\eta=g(\xi)$$

is valószínűségi változó.

Ugyancsak a valószínűségi változó értelmezéséből következik, hogy két vagy több valószínűségi változó összege, szorzata vagy hányados stb. is valószínűségi változó. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók, akkor ezek bármely n változós valós függvénye

$$\eta=g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

is valószínűségi változó.

13.2.5 A valószínűségeloszlás és a sűrűségfüggvény

Ahhoz, hogy egy valószínűségi változó teljesen jellemezve legyen, ismernünk kell az általa felvehető értékek (x_i) összességét, valamint a felvehető értékek előfordulásának valószínűségét $p(x_i)$.

Diszkrét valószínűségi változó esetén ezeket meg is tudjuk határozni. A ξ diszkrét valószínűségi változó minden egyes x_i értékéhez tartozik egy

$$p_i = p(x_i) = P(\xi = x_i)$$

valószínűség.

Folytonos valószínűségi változó esetén azonban általában bármely x_i értékre a $P(\xi=x_i)=0$, így csak azt tudjuk megmondani, hogy a ξ valószínűségi változó milyen valószínűséggel esik az $[x_i; x_i+\Delta x_i]$ intervallumba.

Ennek megfelelően diszkrét valószínűségi változó esetén a valószínűségi változóról a **valószínűségeloszlás**, folytonos valószínűségi változó esetén a **sűrűségfüggvény** ad közelebbi felvilágosítást.

Diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlása

Definíció. Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, amely véges számú vagy megszámlálhatóan végtelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ lehetséges értékeket rendre $p_1, p_2, \dots, p_n$ valószínűségekkel vesz fel, akkor az összetartozó

$$(x_i; p_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

számpárok összességét a ξ diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlásának nevezzük, amennyiben eleget tesz a következő feltételeknek:

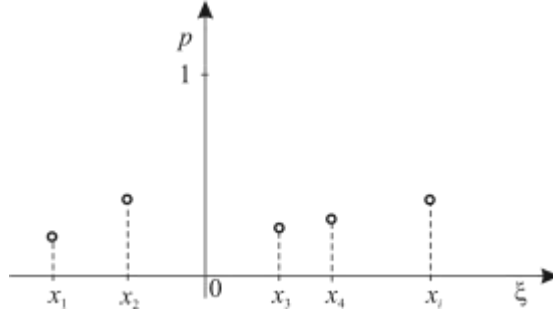
(1) tetszőleges i -re:

$$0 \leq p_i \leq 1,$$

(2) mivel egy teljes eseményrendszer elemi eseményeihez rendelt számértékek $x_1, x_2, \dots, x_n$, szükségképpen

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n P(\xi = x_i) = 1.$$

Bármely diszkrét valószínűségi változó esetén teljesül az (1) és (2) feltétel, és megfordítva, ha ezek teljesülnek, akkor van olyan diszkrét valószínűségi változó, amelynek eloszlása a éppen az adott $(x_i; p_i)$ számpárokhoz vezet.



13.1. ábra: Diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlása

Ha ismert egy ξ diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlása, a $(x_i; p_i)$ számpárok összessége, akkor annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó lehetséges értékei a valós számegegyenes $[a; b]$ intervallumába esnek, megegyezik az $[a; b]$ intervallumba eső valószínűségi változókhoz tartozó valószínűségek összegével. Vagyis, ha a valószínűségi változóknak az $[a; b]$ -beli lehetséges véges számú értékei $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+m}$, akkor a

$$P(a \leq \xi \leq b) = \sum_{i=j}^{j+m} p_i.$$

A diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlás grafikonját a 13.1. ábra szemlélteti. Azt az x_1 értéket, amelyhez a legnagyobb valószínűség tartozik, a változó **legvalószínűbb értékének** nevezzük.

Folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

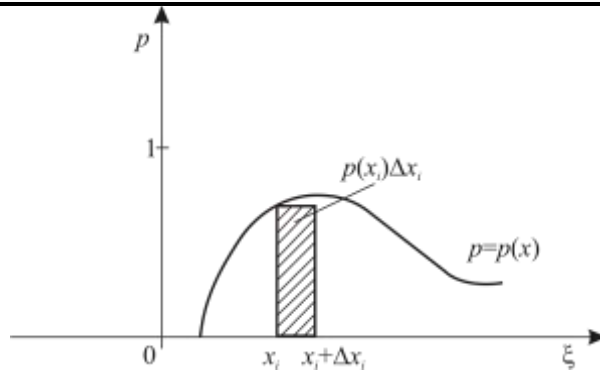
Amennyiben ξ folytonos valószínűségi változó, a valószínűségi változó tetszőleges $\xi = x_i$ értékére $p_i = P(\xi = x_i) = 0$. A ξ folytonos valószínűségi változó minden x_i értékéhez tehát nem rendelhető $p_i \neq 0$ valószínűség. Helyette a ξ folytonos valószínűségi változóhoz egy, a valós számok halmazán értelmezett folytonos (illetve véges számú hely kivételével folytonos) $y = p(x)$ függvényt rendelünk. Ennek az a tulajdonsága, hogy ha a valószínűségi változó bármely x_i helyét tartalmazó Δx_i intervallum hosszát megszorozzuk $p(x_i)$ -vel, ez a szorzat közelítőleg megadja annak a valószínűségét, hogy a ξ valószínűségi változó az $[x_i; x_i + \Delta x_i]$ intervallumba esik (13.2. ábra), azaz a

$$p(x_i) \Delta x_i \approx P(x_i \leq \xi \leq x_i + \Delta x_i)$$

illetve a

$$p(x_i) \approx \frac{P(x_i \leq \xi \leq x_i + \Delta x_i)}{\Delta x_i}.$$

A közelítés annál jobb, minél kisebb Δx_i , és amennyiben a jobb oldali hányadosnak létezik határértéke, az ily módon értelmezett $p(x)$ függvényt a ξ valószínűségi változó **sűrűségeloszlásának** vagy röviden **sűrűségfüggvényének** nevezzük. Az értelmezésből következik, hogy a sűrűségfüggvény olyan függvény, amelynek értéke nem valószínűség, hanem olyan számérték, amelyhez az ún. „átlagvalószínűség” közeledik, ha Δx_i minden határon túl csökken.



13.2. ábra: Folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

Definíció. Ha ξ folytonos valószínűségi változó, amely meghatározott valószínűséggel esik a valós számegyenes bármely intervallumára, akkor a folytonos (illetve véges számú elsőfajú szakadási hely kivételével folytonos) $y=p(x)$ függvényt a ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezzük, amennyiben az eleget tesz a következő feltételeknek:

(1) a valós számegyenes bármely x értékére a

$$p(x) \geq 0,$$

(2) tetszőleges $a < b$ valós számokra az

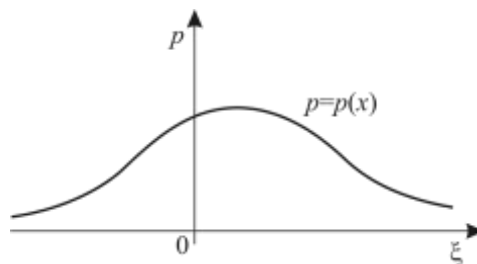
$$\int_a^b p(x) dx = P(a \leq \xi \leq b),$$

(3) a teljes valós számegyenesre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

Minden folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye eleget tesz e kikötéseknek és viszont: minden olyan, a valós számegyenesen értelmezett függvény, amely eleget tesz az (1), (2) és (3) feltételeknek, felfogható egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvényének.

Megjegyzés. A folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye megfelel a diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlásának. Ez az analógia jól szemléltethető a sűrűségfüggvény geometriai interpretációja alapján. Ugyanis:

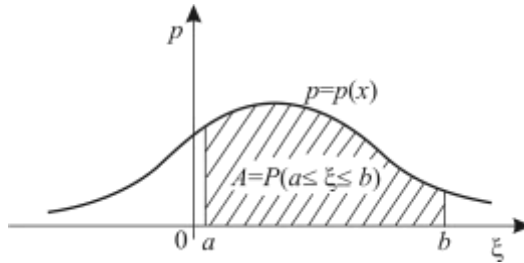


13.3. ábra

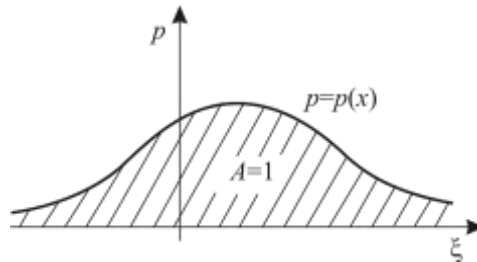
(1) A $p(x)$ sűrűségfüggvény nem negatív függvény, ami azt jelenti, hogy görbéje mindenütt a valós tengely fölött helyezkedik el (13.3. ábra). Ez felel meg annak a feltételnek, hogy diszkrét valószínűségi változó esetén a valószínűségi változó minden lehetséges értékéhez pozitív valószínűség tartozik.

$$(2) \quad \int_a^b p(x) dx = P(a \leq \xi \leq b)$$

azt jelenti, hogy a sűrűségfüggvény görbéjének $[a; b]$ intervallumbeli görbe alatti területének mérőszáma megadja annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó az $[a; b]$ intervallumba esik (13.4. ábra). Ez felel meg annak a feltételnek, hogy diszkrét valószínűségi változó esetén annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó az $[a; b]$ intervallumba esik, megegyezik az intervallumbeli valószínűségi változók lehetséges értékeihez tartozó valószínűségek összegével.



13.4. ábra



13.5. ábra

(3) A sűrűségfüggvény $(-\infty, +\infty)$ intervallumbeli integrálja: egyenlő 1-gyel (13.5. ábra). Ez felel meg annak a feltételnek, hogy diszkrét valószínűségi változó esetén:

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n P(\xi = x_i) = 1.$$

13.2.6 Valószínűségi változók eloszlásfüggvénye

A valószínűségi változók igen sokféle típusúak lehetnek. A sok különböző típusú valószínűségi változó értékének véletlen ingadozásának egyöntetű tárgyalása érdekében, bevezetjük az ún. **eloszlásfüggvény** fogalmát.

Definíció. Tetszőleges ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a valós x -ek halmazán értelmezett

$$F(x) = P(\xi \leq x)$$

függvény, amely megadja annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó x -nél kisebb értéket vesz fel.

Az eloszlásfüggvények diszkrét és folytonos valószínűségi változó esetén analóg tulajdonságúak. Éspedig:

- (1) $F(x)$ monoton nem csökkenő,
- (2) minden x pontban balról folytonos,
- (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Az (1), (2), (3) feltétel minden eloszlásfüggvényre teljesül, és viszont, minden (1), (2), (3) feltételnek eleget tevő függvény eloszlásfüggvénynek tekinthető.

Ha már ismerjük az $F(x)$ eloszlásfüggvényt x minden értékére, akkor meg tudjuk határozni annak a valószínűségét, hogy ξ az $[a; b]$ intervallumba esik (a és b valós számok), mégpedig

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$$

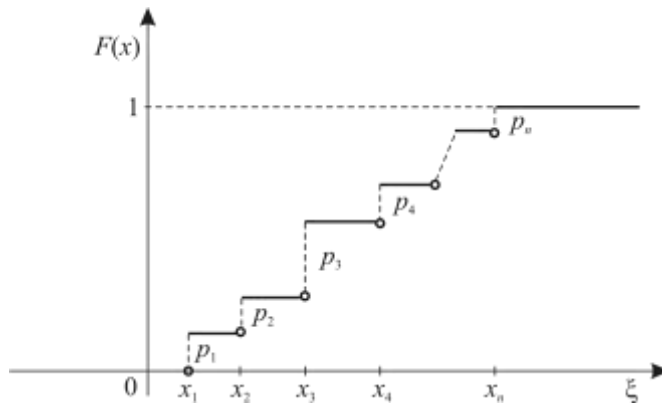
Az eloszlásfüggvény mindezen tulajdonságait diszkrét és folytonos változó esetén külön igazoljuk.

Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

Ha ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó, mely az $x_1, x_2, \dots, x_n$ lehetséges értékeit $p_1, p_2, \dots, p_n$, pozitív valószínűségekkel veszi fel (13.6. ábra), akkor eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(\xi = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

Vagyis az eloszlásfüggvény értéke egy tetszőleges x helyen megegyezik a valószínűségi változó x -nél kisebb értékeihez tartozó valószínűségeinek összegével.



13.6. ábra: Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

1. Tétel. Ha egy ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, akkor annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó a lehetséges értékeket tartalmazó $[a; b]$ intervallumba esik, azaz

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$$

2. Tétel. A véges sok értéket felvevő diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye monoton nem csökkenő, balról folytonos, lépcsős (szakaszonként konstans) függvény, amelynek ugráshelyei a valószínűségi változó lehetséges értékei: $x_1, x_2, \dots, x_n$ (az x_i -ket növekvő sorrendben írtuk le), ugrásainak nagysága pedig a $p_1, p_2, \dots, p_n$, valószínűségek (13.6. ábra), így

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \xi \leq x_1 \\ \sum_{i=1}^k p_i, & \text{ha } x_k < \xi \leq x_{k+1} \\ 1, & \text{ha } \xi \geq x_n \end{cases}$$

Mindezek alapján egy véges sok értéket felvevő diszkrét valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényének görbéje a 13.6. ábrán látható alakot veszi fel.

Megjegyzések.

(1) Ha a diszkrét valószínűségi változó nem véges, hanem megszámlálható sok értéket vesz fel, akkor lehet, hogy az eloszlásfüggvény nem lépcsős függvény. Ugyanis előfordulhat, a valószínűségi változó lehetséges értékei mindenütt sűrűn helyezkednek el, sehol sincs olyan intervallum, amelyben az eloszlásfüggvény konstans volna.

(2) Minthogy diszkrét eloszlású valószínűségi változó esetén a valószínűségi változó minden lehetséges x_i értékéhez tartozik egy p_i valószínűség, azért itt az eloszlásfüggvény helyett célszerűbb a

$$p_i = P(\xi = x_i), \quad i=1, 2, \dots$$

valószínűségeloszlással dolgozni. A p_i számok meghatározzák az eloszlásfüggvényt és megfordítva, ha ismerjük az eloszlásfüggvényt, akkor annak ugrásai megadják a p_i számokat.

Folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

A folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvényére is érvényes a

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$$

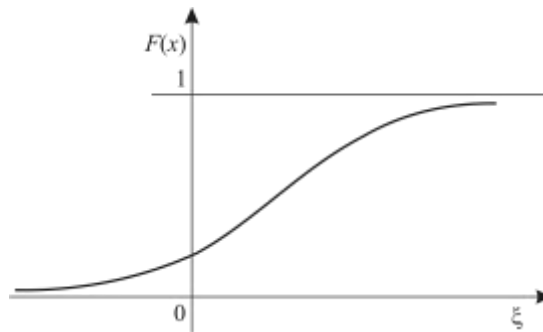
reláció, amely a sűrűségfüggvény felhasználásával

$$F(b) - F(a) = \int_a^b p(x) dx.$$

A sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény értelmezéséből következik, hogy a $p(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt,$$

amelynek következménye a következő tétel.



13.7. ábra: Folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

1. Tétel. Ha a ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye mindenütt (vagy véges sok ugráshely kivételével) folytonos, akkor $p(x)$ folytonossági helyein a

$$p(x) = F'(x).$$

2. Tétel. Egy folytonos (ill. véges számú ugráshely kivételével folytonos) $p(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$ (13.7. ábra) monoton, nemcsökkenő, folytonos függvény, amelynek határértéke $x \rightarrow -\infty$ esetén 0, és $x \rightarrow +\infty$ esetén 1, azaz

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Két valószínűségi változó együttes eloszlása

Ha ξ és η ugyanazon a H halmazon értelmezett valószínűségi változók, akkor azok együttes eloszlása, a $\zeta=(\xi, \eta)$ kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó eloszlása, az összes

$$(\xi, \eta) \in H$$

számpárok, illetve pontok és a hozzá tartozó

$$P(\xi, \eta)$$

valószínűségek eloszlása.

Az együttes eloszlás diszkrét, ha a $\zeta=(\xi, \eta)$ síkvektor, illetve a végpontjainak megfelelő síkbeli pont csak véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket vehet fel. Belátható ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy a ξ és η valószínűségi változók külön-külön diszkrétnek legyenek. Tehát ha ξ lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$, η lehetséges értékei $y_1, y_2, \dots$, akkor a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó lehetséges értékei az (x_i, y_j) értékek között vannak, ahol $i, j = 1, 2, \dots$. A

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = r_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

valószínűségek meghatározzák a (ξ, η) diszkrét valószínűségi vektorváltozó eloszlását, mégpedig

$$P(\xi, \eta) \in H = \sum_{(x_i, y_j) \in H} r_{ij}$$

A (ξ, η) vektorváltozó r_{ik} együttes valószínűségei segítségével meghatározható, külön-külön a ξ és η változók valószínűségei is. Éspedig alkalmazva a

$$P(\xi = x_i) = p_i, \text{ és a } P(\eta = y_j) = q_j$$

jelöléseket, a

$$\sum_{j=1}^{\infty} r_{ij} = p_i, \text{ és a } \sum_{i=1}^{\infty} r_{ij} = q_j.$$

Az együttes eloszlás folytonos, ha van olyan (legfeljebb véges számú görbe pontjai kivételével) folytonos $p(x, y)$ függvény, amely a következő tulajdonságú:

(1) Az (xy) síkon mindenütt

$$p(x, y) \geq 0.$$

(2) Az (xy) sík bármely H tartományán

$$P[(\xi, \eta) \in H] = \iint_H p(x, y) dx dy.$$

(3) A teljes (xy) síkon

$$\int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1.$$

Bebizonyítható, ha van ilyen $p(x, y)$ függvény, akkor csak egy ilyen van, és ezt a függvényt a ξ és η valószínűségi változók **együttes sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Minden folytonos kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye eleget tesz az (1), (2) és (3) feltételeknek, és megfordítva: minden olyan (a valós számsíkon értelmezett) kétváltozós függvény, amely eleget tesz az (1), (2) és (3) feltételeknek, egy folytonos kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényének tekinthető.

A (ξ, η) vektorváltozó $p(xy)$ együttes sűrűségfüggvénye meghatározza a folytonos valószínűségi vektorváltozó eloszlását, mégpedig

$$P[(\xi, \eta) \in H] = \iint_H p(x, y) \, dx \, dy$$

Ha ξ és η együttes eloszlása folytonos, akkor ξ és η külön-külön is folytonos eloszlásúak és sűrűségfüggvényeik:

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \, dy,$$

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \, dx.$$

Két valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvénye

Ugyanazon a halmazon értelmezett ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye az (xy) síkon értelmezett azon $F(x, y)$ függvény, amely a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó bármely lehetséges (x, y) értékére megadja annak a valószínűségét, hogy a ξ változó x -nél és ugyanakkor az η változó y -nél kisebb értéket vesz fel. Vagyis

$$F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y).$$

Az együttes eloszlásfüggvény diszkrét esetben:

$$F(x, y) = \sum_{j=-\infty}^y \sum_{i=-\infty}^x r_{ij},$$

Az együttes eloszlásfüggvény folytonos esetben:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x p(x, y) \, dx \, dy$$

ahol $p(x, y)$ az együttes eloszlás sűrűségfüggvénye.

Az együttes eloszlásfüggvényből parciális deriválással az együttes sűrűségfüggvény meghatározható:

$$p(xy) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Az együttes eloszlásfüggvény tulajdonságai:

- (1) Az $F(x, y)$ függvény x és y változók monoton nem csökkenő függvénye.
- (2) Ha x és y közül legalább az egyik a $-\infty$ -hez tart, akkor

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0, \text{ és } \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0,$$

ha x és y mindegyike a ∞ -hez tart, akkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = 1.$$

- (3) Az $F(x, y)$ függvény ún. vegyes második differenciája a

$P(x \leq \xi < x + \Delta x, y \leq \eta < y + \Delta y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)$ reláció miatt nemnegatív érték.

Minden kétdimenziós eloszlásfüggvény eleget tesz az (1), (2) és (3) feltételeknek, és megfordítva: minden kétváltozós függvény, amely rendelkezik az (1), (2) és (3) tulajdonságokkal, felfogható kétdimenziós eloszlásfüggvénynek.

Ha ismertek a $\zeta=(\xi, \eta)$ kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvényei, akkor meghatározhatók e vektor komponenseinek, ξ -nek és η -nak mint közösleges (egydimenziós) valószínűségi változóknak az eloszlásfüggvényei is. Ugyanis legyen a ζ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye $F(x,y)$, és létezzen ennek folytonos sűrűségfüggvénye $p(x,y)$, akkor ξ eloszlásfüggvényét $F_1(x)$ -szel, η eloszlásfüggvényét $F_2(y)$ -nal, jelölve nyilvánvaló, hogy

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) dx \right] dy$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) dy \right] dx$$

A valószínűségi változó függvénye

Ha $y=f(x)$ egy bizonyos függvény, akkor $Y=f(\xi)$ az ξ valószínűségi változó függvénye és maga is valószínűségi változó. Az ξ valószínűségi változó Y függvénye várhatóértékének nevezzük a következőt:

$$M(Y) = M[f(\xi)] = \sum_{i=1}^n f(x_i) p(x_i).$$

Valószínűségi függvénynek nevezzük azt a $p(\xi)$ függvényt, amely a $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$ diszkrét értékeket veszi fel. A következő felírásmódot is használjuk:

$$p(x_i) = P(\xi = x_i).$$

Valószínűségi eloszlásfüggvény:

$$F(x_i) = P(\xi \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i).$$

Kiegészítő (komplementáris) eloszlásnak nevezzük a következő függvényt:

$$P(\xi > x) = 1 - P(\xi \leq x).$$

13.2.7 Valószínűségi változók függetlensége

Két valószínűségi változót függetlennek nevezünk, ha a hozzájuk tartozó teljes eseményrendszerek függetlenek. Ez az értelmezés teljesen megfelel annak a természetes felfogásnak, hogy két valószínűségi változót akkor nevezünk függetlennek, ha az a tény, hogy az egyik egy meghatározott értéket vesz fel, az nem befolyásolja a másik véletlen ingadozását.

Definíció. A ξ és η valószínűségi változók függetlenek, ha tetszőleges $a \leq b$ és $c \leq d$ szám-párok esetén:

$$P(a \leq \xi \leq b, c \leq \eta \leq d) = P(a \leq \xi \leq b) P(c \leq \eta \leq d).$$

Ez a definíció kiterjeszthető több valószínűségi változó esetére is.

Definíció. A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha tetszőleges $a_i \leq b_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) számok esetén

$$P(a_1 \leq \xi_1 \leq b_1, a_2 \leq \xi_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq \xi_n \leq b_n) = \prod_{i=1}^n P(a_i \leq \xi_i \leq b_i).$$

Könnyen belátható, hogy az n független valószínűségi változó közül tetszőlegesen kiválasztott $s \leq n$ valószínűségi változó is független. Viszont az n független valószínűségi változó páronkénti függetlenségéből még nem következik azok teljes függetlensége.

A valószínűségi változók függetlenségére megadott e definíciók tetszőleges valószínűségi változóra érvényesek. Megadhatók azonban ezzel ekvivalens definíciók külön diszkrét és külön folytonos valószínűségi változóra.

Diszkrét valószínűségi változók függetlensége

Definíció. A ξ és η diszkrét valószínűségi változók függetlenek, ha i és j minden lehetséges értékére teljesülnek a

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j)$$

összefüggések.

Tehát két független valószínűségi változó együttes eloszlását ξ és η eloszlása meghatározza. Ez a definíció általánosítható több diszkrét valószínűségi változó esetére is.

Definíció. A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ diszkrét valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha lehetséges értékeik bármely $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}$ rendszerére fennáll a

$$P(\xi_1 = x_{k1}, \xi_2 = x_{k2}, \dots, \xi_n = x_{kn}) = \prod_{j=1}^n P(\xi_j = x_{kj})$$

összefüggés.

Folytonos valószínűségi változók függetlensége

Definíció. A ξ és η folytonos valószínűségi változók függetlenek, ha minden valós x és y számra

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$$

vagyis. ha ξ és η kétdimenziós eloszlásfüggvénye megegyezik a ξ és η változók eloszlásfüggvényeinek szorzatával, azaz

$$F(x, y) = F_1(x, y)F_2(x, y).$$

Hasonlóan értelmezhető több valószínűségi változó függetlensége is.

Definíció. A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ folytonos valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ valós számok bármely rendszerére érvényes a

$$P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n) = \prod_{j=1}^n P(\xi_j = x_j),$$

illetve az

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \prod_{j=1}^n F_{\xi_j}(x),$$

reláció, ahol $F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye, $F_{\xi_j}(x)$ pedig a ξ_j valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

A következőkben bizonyítás nélkül közlünk a független valószínűségi változókra vonatkozó néhány (a későbbiek során felhasználásra kerülő) tételt.

1. Tétel. Egy konstans, vagyis egy olyan valószínűségi változó, mely egyetlen értéket vesz fel, minden valószínűségi változótól független.

2. Tétel. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, és $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$, az x valós változó folytonos függvényei, akkor az $\eta_1 = g_1(\xi_1), \eta_2 = g_2(\xi_2), \dots, \eta_n = g_n(\xi_n)$ valószínűségi változók is függetlenek.

Ennek a tételnek speciális esete, ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, akkor az $\eta_i = a_i \xi_i + b_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) valószínűségi változók is függetlenek. (a_i és b_i tetszőleges konstan-

sok.)

3. Tétel. Ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, és mindegyiknek létezik sűrűségfüggvénye, akkor

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_i(x_i)$$

ahol: $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye, $p_i(x_i)$ pedig a ξ_i valószínűségi változó ($i = 1, 2, \dots, n$) sűrűségfüggvénye.

E tétel megfordítása is igaz. Ha a

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_i(x_i)$$

reláció fennáll, akkor a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek.

13.2.8 Valószínűségi változó várhatóértéke

A valószínűség számítás és alkalmazásai szempontjából fontos szerepük van a valószínűségi változóra jellemző bizonyos konstansoknak, melyek a valószínűségi változó eloszlása, illetve eloszlásfüggvénye segítségével határozhatók meg. E konstansok közül, amelyek a valószínűségi változó általános, kvantitatív jellemzésére szolgálnak, különösen fontosak a matematikai várhatóérték, a szórás és a különböző rendű momentumok.

A diszkrét valószínűségi változó várhatóértéke

Egy ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek $x_1, x_2, \dots, x_N$, a megfelelő valószínűségek pedig $p_1, p_2, \dots, p_N$, ($i = 1, 2, \dots, N$). Végezzünk N független megfigyelést ξ értékére! Ha N nagy szám, akkor a valószínűségi változó jelentése szerint, körülbelül Np_1 esetben lesz $\xi = x_1$, Np_2 esetben $\xi = x_2$, és így tovább. Képezzük az N megfigyelés során megállapított ξ értékek számtani közepét, erre közelítőleg az

$$\frac{Np_1 \cdot x_1 + Np_2 \cdot x_2 + \dots + Np_N \cdot x_N}{N} = \sum_{i=1}^N p_i x_i$$

érték adódik. Ez nem más, mint a valószínűségi változó lehetséges értékeinek a megfelelő valószínűségekkel súlyozott számtani közepe. (Ugyanis a valószínűségekkel súlyozott számtani közép

$$\frac{\sum_{i=1}^N p_i x_i}{\sum_{i=1}^N p_i} = \sum_{i=1}^N p_i x_i, \text{ mivel } \sum_{i=1}^N p_i \approx 1.$$

$\sum_{i=1}^N p_i x_i$, tehát olyan számérték, amely körül a valószínűségi változó megfigyelt értékeinek számtani közepe ingadozik.

Definíció. Ha a ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots, x_N$, és a megfelelő valószínűségek $p_1, p_2, \dots, p_N$, akkor a valószínűségi változó várhatóértéke

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^N p_i x_i$$

feltéve, hogy a tagok száma véges vagy pedig a jobb oldalon álló sor abszolút konvergens.

A folytonos valószínűségi változó várhatóértéke

A folytonos valószínűségi változó várhatóértékét a diszkrét valószínűségi változó várhatóértékéhez hasonló módon határozzuk meg.

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó, melynek $p(x)$ sűrűségfüggvénye folytonos (illetve véges számú ugráshely kivételével folytonos). Végezzünk ξ értékére sok független megfigyelést. A sűrűségfüggvény értelmezéséből következik, hogy annak a valószínűsége, hogy ez az érték az $(x_i; x_i + \Delta x_i)$ intervallumba esik:

$$P(x \leq \xi \leq x + \Delta x) \approx p(x_i) \Delta x_i.$$

A megfigyelt értékeknek a $p(x_i) \Delta x_i$ valószínűségekkel súlyozott számtani közepe közelítőleg

$$\frac{\sum_i x_i p(x_i) \Delta x_i}{\sum_i p(x_i) \Delta x_i}$$

Ez a közelítés annál jobb, minél kisebb Δx_i . Ez indokolja folytonos valószínűségi változó esetén a valószínűségi változó várhatóértékének, mint a valószínűségekkel súlyozott értékek számtani közepének, következő értelmezését.

Definíció. Ha a ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. $p(x)$ folytonos, illetve véges számú ugráshely kivételével folytonos, akkor várhatóértéke:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx,$$

feltéve, hogy a jobb oldali improprius integrál konvergens.

Megjegyzések

(1) A ξ valószínűségi változó megfigyelt értékeiből képezett középértéknek az $M(\xi)$ várhatóérték körüli ingadozására a nagy számok törvénye utal. Egyelőre csak megjegyezzük, hogy a középérték és a várhatóérték között hasonló a kapcsolat, mint egy esemény relatív gyakorisága és annak valószínűsége között.

(2) Az $M(\xi)$ várhatóérték csak ξ eloszlásától függ, így beszélhetünk ξ eloszlásának várhatóértékéről is.

(3) Nem minden valószínűségi változónak van várhatóértéke.

Diszkrét valószínűségi változó esetén, ha ξ végtelen sok értéket vehet fel, akkor az $M(\xi)$ véges érték nem biztos, hogy létezik. Például legyenek ξ lehetséges értékei:

$$\xi = 2, 2^2, 2^3, \dots,$$

és a megfelelő valószínűségek:

$$p = \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$$

Ehhez a valószínűség eloszláshoz tartozó várhatóérték nem létezik, mert a

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \frac{1}{2^i}$$

végtelen sor divergens.

Folytonos valószínűségi változó esetén sem mindig létezik várhatóérték.

Többdimenziós valószínűségi változó várhatóérték-vektora

Ha a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ n dimenziós valószínűségi vektorváltozó eloszlása ismert, akkor koordinátái $M(\xi_i)$ várhatóértéke ($i=1, 2, \dots, n$) is ismert. Ezek a várhatóértékek egy vektor koordinátáiként foghatók fel. Ezt az $M(\xi) = (M(\xi_1), \dots, M(\xi_n))$ vektort nevezzük a ξ valószínűségi vektorváltozó **várhatóérték-vektorának**.

Definíció. A $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó várhatóérték-vektora

$$M(\xi) = (M(\xi_1), M(\xi_2), \dots, M(\xi_n)),$$

ahol $M(\xi_1), M(\xi_2), \dots, M(\xi_n)$ a vektorváltozó koordinátáinak várhatóértéke. Speciálisan, ha

$$\xi = (\xi, \eta),$$

akkor

$$M(\xi) = (M(\xi), M(\eta)).$$

13.2.9 A valószínűségi változó szórása

A valószínűségi változó várhatóértéke még nem jellemzi egyértelműen a valószínűségi változót, annak eloszlását. Különböző eloszlásoknak is lehet azonos várhatóértéke, viszont különböző várhatóértékű valószínűségi változók is rendelkezhetnek egyéb azonos tulajdonságokkal.

E tulajdonságok közül egyik legfontosabb a valószínűségi változó várhatóérték körüli ingadozása, vagyis a valószínűségi változó által ténylegesen felvett értéknek a várhatóértéktől való eltérése, a várhatóérték körüli szórása. Így tehát egyik feladat olyan számadat bevezetése, amely alkalmas módon jellemzi a valószínűségi változó ingadozásának, szórásának mértékét.

Kézenfekvő volna ezen ingadozás mérőszámaként a valószínűségi változó és saját várhatóértéke különbségének a várhatóértékét, a

$$H(\xi) = M(\xi - M(\xi))$$

értéket bevezetni. Ez azonban minden valószínűségi változó esetén nulla. Ugyanis $M(\xi)$ konstans volta miatt, a várhatóértékre vonatkozó 4. tétel értelmében

$$M(\xi - M(\xi)) = M(\xi) - M(\xi) = 0.$$

Ezért az $M(\xi - M(\xi))$ nem alkalmas a várhatóérték körüli ingadozás mérésére.

A valószínűségi változó várhatóértéktől való eltérése abszolút értékének várhatóértéke az ún. **várható eltérés**:

$$E(\xi) = M(|\xi - M(\xi)|)$$

már általában nullától különböző érték. Ez az érték jól tájékoztat az eltérés nagyságáról, és így alkalmas az ingadozás mérésére. Mégsem szokás használni, mert az abszolút érték miatt számítástechnikailag nehézkes.

Az ingadozás mértékszámaként leggyakrabban a fogalmilag valamivel mesterkéltbb, de számítástechnikailag egyszerűbb és matematikai szempontból előnyös ún. **szórást** használjuk, amelynek értelmezése a következő.

Definíció. Tetszőleges ξ valószínűségi változó szórása, $D(\xi)$ a valószínűségi változó és várhatóértéke eltérése négyzetének várhatóértékéből vont pozitív négyzetgyök (feltéve, hogy ez véges érték). Vagyis

$$D(\xi) = +\sqrt{M[(\xi - M(\xi))^2]}$$

A $D(\xi)$ szórás tehát mindig nemnegatív számérték, amely csak akkor nulla, ha $P(\xi=c)=1$, ahol c tetszőleges konstans.

A szórás, illetve a szórásnégyzet meghatározásának egyszerűsítésére szolgál a következő két tétel.

1. Tétel. Ha egy ξ valószínűségi változó $D(\xi)$ szórása létezik és 0-tól különböző, akkor a szórásnégyzet megegyezik a változó négyzetének várhatóértéke és a változó várhatóértéke négyzetének különbségével. Vagyis

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2.$$

E tétel következménye a 2. tétel.

2. Tétel. Bármely valószínűségi változó négyzetének várhatóértéke nagyobb, mint a változó várhatóértékének négyzete

$$M(\xi^2) \geq [M(\xi)]^2.$$

Megjegyzés. Az $M(\xi)$ várhatóértéket $\bar{x}$ -val, a $D(\xi)$ szórást pedig gyakran σ -val jelöljük. Ezekkel a jelölésekkel a szórás, ha a ξ valószínűségi változó lehetséges értékei $x=x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\sigma_x^2 = M[(x - \bar{x})^2] = (x_1 - \bar{x})^2 p(x_1) + (x_2 - \bar{x})^2 p(x_2) + \dots + (x_n - \bar{x})^2 p(x_n)$$

A 1. tétel szerint pedig a

$$\sigma_x^2 = M(\bar{x})^2 - [M(x)]^2.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, amely az $x_1, x_2, \dots, x_n$ lehetséges értékeit $p_1, p_2, \dots, p_n$ valószínűségekkel veszi fel, és várhatóértéke $M(\xi)$, akkor szórásnégyzete

$$D^2(\xi) = M([\xi - M(\xi)]^2) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - M(\xi))^2$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló sor konvergens, vagy - az előző tétel felhasználásával:

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i \right)^2$$

amennyiben a jobb oldali sorok konvergenssek.

Folytonos valószínűségi változó szórása

Ha ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $p(x)$, akkor szórásnégyzete

$$D^2(\xi) = M([\xi - M(\xi)]^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) (x - M(\xi))^2 dx,$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló improprius integrál létezik. Vagy

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \right]^2,$$

amennyiben a jobboldali improprius integrálok léteznek.

Megjegyzés. (1) Nem minden valószínűségi változónak van véges szórása. Diszkrét valószínűségi változó esetén, ha ξ végtelen sok értéket vesz fel, akkor nem biztos, hogy a

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - M(\xi))^2$$

sor konvergens, és így nem biztos, hogy van véges szórása.

Folytonos valószínűségi változónak sincs szórása, ha az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)(x - M(\xi))^2 dx,$$

improprius integrál nem létezik.

(2) Egyszerűbb számítás miatt szokás a valószínűségi változókat úgy transzformálni, hogy az új változó várhatóértéke 0, szórása 1 legyen. Az ily módon transzformált valószínűségi változót **standard valószínűségi változónak** nevezzük.

Definíció. Standard valószínűségi változó az olyan változó, amelynek várhatóértéke 0 és szórása 1.

Tétel. Tetszőleges, nem nulla szórású ξ valószínűségi változóból standard valószínűségi változó képezhető, ha vesszük a valószínűségi változó várhatóértéktől való eltéréseinek és szórásának hányadosát. Ha ξ tetszőleges valószínűségi változó, akkor

$$\xi^* = \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}$$

standard valószínűségi változó.

Többdimenziós valószínűségi változó szórása

A $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ n -dimenziós valószínűségi vektorváltozó várhatóérték körüli ingadozását nyilván nem lehet egyetlen számmal jellemezni. Az ingadozásról a $D(\xi_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) ingadozások bizonyos felvilágosítást adnak ugyan, de ez hiányos, mert a $D(\xi_i)$ értékek csak a koordinátatengelyekre való vetületek ingadozását jellemzik, a koordinátatengelyek választása pedig önkényes. Sokkal jobb mérték kapható ξ ingadozására, ha ξ egy tetszőleges egyenesre való vetületének ingadozását vizsgáljuk.

Legyen $m_i = M(\xi_i)$ és P_0 az $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ koordinátákkal megadott pont, továbbá legyen g egy tetszőleges P_0 ponton áthaladó egyenes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ iránykoszinuszokkal ($\alpha_1, \dots, \alpha_n$

tehát valós számok, és $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$). Képezzük a

$$\zeta_g = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\xi_i - m_i)$$

valószínűségi változót! Ennek szórásnégyzete

$$D^2(\zeta_g) = M(\zeta_g^2)$$

mivel $M(\zeta_g) = 0$. Bevezetve a

$$D_{ij} = M[(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j)],$$

jelölést, ezzel

$$D^2(\zeta_g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} \alpha_i \alpha_j.$$

Megjegyzés. D_{ij} -t a ξ_i és ξ_j valószínűségi változók kovarianciájának szokás nevezni. A D_{ij} együttthatókkal a ξ valószínűségi vektorváltozó. tetszőleges egyenesre való vetületének szórása kiszámítható, és így ξ ingadozása jellemezhető a

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & & & \\ \cdot & & & \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}$$

ún. szórás mátrixszal, ahol a főátlóban levő D_{ij} számértékek az egyes változók szórásnégyzetei. (Feltételezzük, hogy e mátrix determinánsa $|\mathbf{D}| > 0$, ugyanis a $D^2(\zeta_g)$ értelmezése miatt a $|\mathbf{D}|$ determináns mindig nemnegatív, a $|\mathbf{D}| = 0$ elfajult esetet pedig kizárjuk.) Speciálisan, ha $\zeta = (\zeta, \eta)$ kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó, akkor (ingadozása a

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

szórás mátrixszal jellemezhető, ahol

$$D_{11} = D^2(\xi) \text{ a } \xi \text{ változó szórásnégyzete,}$$

$$D_{22} = D^2(\eta) \text{ az } \eta \text{ változó szórásnégyzete,}$$

$$D_{12} = D_{21} = M[(\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))] \text{ a } \xi \text{ és } \eta \text{ változók kovarianciája.}$$

A szórásra vonatkozó néhány tétel

A következőkben a szórásra vonatkozó néhány tételt ismertetünk. Ezek rávilágítanak a szórás olyan tulajdonságaira, melyek alapján a szórás előnyben részesül minden más ingadozásjellelmezővel szemben (például várható eltérés stb.).

1. Tétel. Egy konstans szórása nulla. Vagyis

$$D^2(c) = 0.$$

2. Tétel. Két független valószínűségi változó összegének szórásnégyzete megegyezik a két valószínűségi változó szórásnégyzetének összegével. Vagyis

$$D^2(\xi + \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta),$$

illetve

$$D(\xi + \eta) = \sqrt{D^2(\xi) + D^2(\eta)}.$$

3. Tétel. Véges sok, páronként független valószínűségi változó összegének szórásnégyzete megegyezik az egyes változók szórásnégyzetének összegével. Vagyis

$$D^2(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = D^2(\xi_1) + D^2(\xi_2) + \dots + D^2(\xi_n),$$

röviden

$$D^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n D^2(\xi_i),$$

illetve

$$D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^n D^2(\xi_i)}.$$

4. Tétel. Konstans szorzó abszolút értéke kiemelhető szórásjele alól

$$D(c\xi) = |c|D(\xi).$$

5. Tétel. Véges sok, páronként független $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változó és $c_1, c_2, \dots, c_n$ konstans esetén

$$D^2(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_n\xi_n) = c_1^2 D^2(\xi_1) + c_2^2 D^2(\xi_2) + \dots + c_n^2 D^2(\xi_n),$$

röviden

$$D^2\left(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2 D^2(\xi_i),$$

illetve

$$D\left(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2 D^2(\xi_i)}.$$

6. Tétel. A szórás értékét a valószínűségi változóhoz adott konstans nem befolyásolja. Vagyis

$$D(c + \xi) = D(\xi).$$

IRODALOMJEGYZÉK

1. **Ackoff, Russell L.-Maurice W. Sasieni:** Fundamentals of Operations Research. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968.
2. **Aho, A V.- Hopcroft, J. E.- Ullman, J. D.:** Számítógép algoritmusok tervezése és analízise. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982.
3. **Archibald, R. D.-Villória, R. L.:** Hálós irányítási módszerek (CPM/PERT). Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Bp. 1971.
4. **Arena Standard Edition User's Guide.** Rockwell Software, 2004.
5. **Arena Professional Edition Reference Guide.** Rockwell Software, 2000.
6. **Balbo, G.-Chiola, G.-Franceschines, G.-Molinear Roet, G.:** Generalized Stochastic Petri Nets for the Performance Evaluation of FMS, Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, NC, April 1987.
7. **Ballou R. H.:** Basic Business Logistics Transportation, Material Management, Physical Distribution. Prentice-Hall International Inc. 1987.
8. **Ballou R. H.:** Business Logistics Management. Prentice-Hall International Inc. 1992.
9. **Bellman, R.:** Dynamic programming. Princeton, 1957.
10. **Benkő J.:** A többkörzetes centrumprobléma megoldása kötött korlátok esetén. Kézirat, Gödöllő, 1987.
11. **Benkő J.:** Algoritmus a járatszerkesztési probléma számításigényének csökkentésére. A+CS, 32. évf. 5.sz. 1987.
12. **Benkő J.:** A szállítási feladat megoldása a korlátozás és szétválasztás módszerével. Kézirat, Gödöllő, 1988.
13. **Benkő J.:** Egykörzetes centrumkeresés részben kötött telephellyel. Kézirat, Gödöllő, 1988.
14. **Benkő J.:** Anyagmozgatási folyamatok tervezése. Egyetemi jegyzet, GATE, Gödöllő, 1989.
15. **Benkő J.:** A körutazási feladat megoldása dinamikus programozással. Járművek, Mezőgazdasági Gépek, 37. évf. 11. sz. 1990.
16. **Benkő J.:** Szállításszervezés fejlesztés a gabonaiparban. Kandidátusi értekezés, ATE Gödöllő, 1990.
17. **Benkő J.:** Számítógépes szállításiirányítási rendszerek fejlesztése. Járművek, Mezőgazdasági Gépek, 38. évf. 6.sz. 1991.
18. **Benkő J.:** Transport Organization System in the Hungarian Grain Processing Industry. Baseline study report, 1st International Course on Food Processing, IAC, Wageningen, 1991.
19. **Benkő J.:** Investment Allocation Model at ABC Gerderland. Bulletin of the University of Agricultural Sciences, Gödöllő, 1991/1992.
20. **Benkő J.:** Route planning on transportation network. Hungarian Agricultural Engineering, Nr.3/1993.
21. **Benkő J.:** Járatszerkesztés korlátozott járműkapacitással. Járművek, Építőipari és Mezőgazdasági Gépek, 40. évf. 10.sz. 1993.
22. **Benkő J.:** Hálózati problémák. Logisztikai évkönyv '95. (Szerk.: Knoll I.), MLE, Budapest, 1995. 35-48 p.
23. **Benkő J.:** Solution of Periodic Review Inventory Model with General Constrains. Hungarian Agricultural Engineering 15/2002 62-64 p.
24. **Benkő J.:** Logisztika I. Szent István Egyetemi Kiadó, Gödöllő, 2010.
25. **Benkő J.:** Anyagmozgatógépek és eszközök. Szent István Egyetemi Kiadó, Gödöllő, 2009. ISBN 978-963-269-124-4, 325 p.

26. **Benkő J.:** Algoritmus a kapacitáskorlátos, egycentrumos járatszerkesztés megoldására. Logisztikai évkönyv 2014, MLE, Budapest, 2014. ISSN 1218-3849, 22-32 p.
27. **Benkő J.:** Petri-hálók alkalmazása termelési és logisztikai folyamatok modellezésére. Logisztikai évkönyv 2016, MLE, Budapest, 2016. ISSN 1218-3849, 17-32 p.
28. **Bowersox, D. J.-Closs, D. J.-Helferich, O. K.:** Logistical Management. A System Integration of Physical Distribution, Manufacturing Support, and Material Procurement. Macmillan Publishing Company, New York, 1986.
29. **Chatfield, C. S.-Johnson T. D.:** Project 2002 lépésről lépésre. Szak Kiadó Kft., Budapest, 2003.
30. **Cselényi J.:** Bevezetés az üzemi logisztikába. Logisztikai tanulmányok I. MLE kiadvány, Budapest 1993.
31. **Cselényi J. – Illés B.:** Logisztikai rendszerek I., Miskolci Egyetemi Kiadó, 2004.
32. **Chikán A.:** Készletezési modellek. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1983.
33. **Chretienne, P.:** Les Reseaux de Petri Temporises, These d'Etat, Universite Pierre et Marie Curie, Paris, France. 1983.
34. **Churchman, C. W.-Russell L. Ackoff-L. Arnoff:** Introduction to Operations Research. John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y., 1957.
35. **Cohen, G.-Dubois, D.-Quadrat, J. P.-Viot, M.:** A Linear-System Theoretic View of Discrete-Event Processes and Its View for Performance Evaluation in Manufacturing, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-30(3), pp. 210-220. 1985.
36. **Commoner, F.-Holt, A. -Even, S.-Pnueli, A.:** Marked Directed Graphs, Journal of Computer and System Sciences 5(5), pp. 511-523, 1971.
37. **Csáki Cs.:** Operációkutatási módszerek alkalmazása a mezőgazdaságban. Mezőgazdasági Könyvkiadó, Budapest, 1981.
38. **Egerváry J.:** Kombinatorikus módszer a szállítási probléma megoldására. MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, IV. 1. 1959. 15-25. p.
39. **Éltető Ö.-Meszéna Gy.-Ziermann M.:** Sztohasztikus módszerek és modellek. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1982.
40. **Felföldi L.:** Anyagmozgatási folyamatok tervezése. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.
41. **Felföldi L.:** Anyagmozgatási kézikönyv. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.
42. **Fügedi T.:** Alkalmazott hálótervezés (CPM/PERT). Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.
43. **Galántai A.:** Operációkutatás. Egyetemi jegyzet, GATE, Gödöllő, 1987.
44. **Gillett, B. E.:** Introduction to Operation Research. A Computer-Oriented Algorithmic Approach. McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1976.
45. **Geoffrion, A. M. –Graves, G. W.:** Multicommodity Distribution System Design by Benders Decomposition. Management Science, 1974, vol. 20, issue 5, pages 822-844
46. **Halászné Sipos E.:** Logisztika (Szolgáltatás, versenyképesség), Logisztikai Fejlesztési Központ, Magyar Világ Kiadó, Budapest, 1998.
47. **Hillier, F. S.-Lieberman, G. J.:** Introduction to Operation Research. McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1990.
48. **Hillion, H. P.:** Timed Petri Nets and Application to Multi-stage Production Systems, *Advances in Petri Nets*, Springer-Verlag, New York, 1989.
49. **Hillion, H. P.:** Modelisation et Analyse des Systemes de Production Discrets par les Reseaux de Petri Temporises, These de Doctorat, Universite Pierre et Marie Curie, Paris, France, 1989.
50. **Hillion, H. P.-Proth, J. M.:** A Heuristic Algorithm for the Periodic Sequencing and

Scheduling Job-Shop Problem, Proceedings of the 26th IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, CA, December 1987.

51. Hillion, H. P.-Proth, J. M.: Performance Evaluation of Job-Shop Systems Using Timed Event-Graphs, IEEE Transactions on Automatic Control 34(1), pp. 3-9, 1989.

52. Hosszú M.: Műszaki-gazdasági szélsőérték-feladatok. Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

53. Husti I.: Szervezéselmélet, Egyetemi jegyzet, Gödöllő, 1989.

54. Jándy G.: Optimális szállítások tervezése. Közlekedéstudományi Szemle, 1959. 10. sz.

55. Jándy G.: Rendszerelemzés és operációkutatás. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980.

56. Jensen, K.: High Level.Petri Nets, Daimi PB 151, Aarhus University, Aarhus, Denmark, 1982.

57. Karlin, S.-Tayler, H. M.: Sztohasztikus folyamatok. Gondolat, Budapest, 1985.

58. Kaufmann, A.: Az operációkutatás módszerei és modelljei. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.

59. Kelton, W. D.-Sadowski, R., P.-Sturrock, D. T.: Simulation with Arena. Mc Graw Hill Higher Education, 2004.

60. Kleinrock, L.: Sorbanállás, kiszolgálás. (Bevezetés a tömegkiszolgálási rendszerek elméletébe). Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

61. Kovács Z.: Logisztika. Logisztikai Fejlesztési Központ, Budapest, 1995.

62. Kuhn, H. W.-Tucker, A. W.: Contribution to the Theory of Games II. Ann. Math. Studies, Vol. 38.

63. Knoll I.: Anyagmozgatási folyamatok elemzése. Egyetemi jegyzet, GATE, Gödöllő, 1988.

64. Knoll I.: Logisztika a 21. Században (Profitnövekedés logisztikai eszközökkel). KIT Képzőművészeti Kiadó és Nyomda Kft., Budapest, 1999.

65. Körmenyi L.: Gyakorlati logisztikai tanácsadó. Verlag Dashöfer, Budapest, 1999.

66. König D.: Graphok és Matrixok. Matematikai és Fizikai Lapok, 38. 1931.

67. Krekó B.: Lineáris programozás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1962.

68. Krekó B.: Optimumszámítás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972.

69. Kulcsár B.: Ipari logisztika. LSI Oktatóközpont, Budapest, 1998.

70. Law, A. M.-Kelton, W. D.: Simulation Modeling & Analysis. McGraw Hill International Editions, 1991.

71. Lipovszki Gy.: Számítógépes szimuláció. (Internet bázisú egyetemi jegyzet) 1998. (<http://www.rit.bme.hu/letoltheto/szamszim/szamszim.html>)

72. Little, J.-K. Murty-D. Sweeney-C. Karel,: An Algorithm for the Travelling Salesman Problem. Operations Research, 11. 1963.

73. Marsan, M.-Chiola, G.: On Petri Nets with Deterministic and Exponential Firing Times, 7th European Workshop on Application and Theory of Petri Nets, Oxford, England, June 1986.

74. Martinez, J.-Muro, P.-Silva, M.: Modeling, Validation and Software Implementation of Production Systems Using High-Level Petri Nets, Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, NC, April 1987, pp. 307-314.

75. Memmi, G.-Roucairol, G.: Linear Algebra in Net Theory, Lecture Notes in Computer Science, No. 84, Springer-Verlag, Hamburg, pp. 213-223, 1979.

76. Molloy, M. K.: Performance Analysis of Stochastic Petri Nets, IEEE Transactions on Computers 31(9), pp. 913-917, 1982.

77. **Molnár L.:** Anyagmozgatási folyamatok tervezése II. (BME Közlekedésmérnöki Kar), Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
78. **Módos Gy.:** A hálós modellek alkalmazási területei és lehetőségei a mezőgazdasági vállalatokban. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.
79. **Natkin, S.:** Les Reseaux de Petri Stochastiques et leur Application a l'Evaluation des Systemes, These de Docteur-Ingenieur, CNAM, Paris, 1980.
80. **Papp O.:** Hálótervezés az ipari gyakorlatban. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
81. **Papp O.:** Projektmenedzsment a gyakorlatban. LSI Informatikai Oktatóközpont, Budapest, 2002.
82. **Peterson, J. L.:** Petri Net Theory and the Modeling of Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.
83. **Petri, C. A.:** Kommunikation mit Automaten, Schriften des IIM No. 2, Institut für Instrumentelle Mathematik, Bonn, 1964.
84. **Prezenszki J.:** Logisztika (Bevezető fejezetek). BME, Mérnöktovábbképző Intézet, Budapest, 1995.
85. **Prezenszki J.:** Logisztika II (Módszerek, eljárások). Logisztikai Fejlesztési Központ, Budapest, 1999.
86. **Pritsker, A. A. B.:** Introduction to Simulation and SLAM II. John Wiley & Sons, New York, 1986.
87. **Ramamoorthy, C. V.-Ho, G. S.:** Performance Evaluation of Asynchronous Concurrent Systems Using Petri Nets, IEEE Transactions on Software Engineering SE-6(5), pp. 440-449, 1980.
88. **Ramchandani, C.:** Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Timed Petri Nets, Technical Report No. 120, Laboratory for Computer Science, MIT, Cambridge, MA. 1974.
89. **Sifakis, J.:** Use of Petri Nets for Performance Evaluation, Measuring, Modelling and Evaluating Computer Systems, North-Holland, Amsterdam, pp. 75-93, 1977.
90. **Sifakis, J.:** Performance Evaluation of Systems Using Nets, Net Theory and Applications, Springer-Verlag, New York, pp. 307-319, 1980.
91. **Szántó E.:** A körutazási és járatszerkesztési modell. KÖZDOK, 1972.
92. **Starr, M. -D. Miller:** Inventory Control: Theory and Practice. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
93. **Tátrai A.-Torma I.:** Gyakorlati szállítmányozási és fuvarozási kézikönyv. Verlag Dashöfer, Budapest, 2004.
94. **Tátrai T.:** Ms Project 2000. Computer Books, Budapest, 2002.
95. Taylor II User Manual. F&H Simulation Inc. The Netherlands, 1998.
96. **Tersine R., J.:** Principles of Inventory and Materials Management. Elsevier Science Publishing Co. Inc. New York, 1988.
97. **Trefethen, F. N.:** A History of Operations Research, in Joseph F. McCloskey and F. Trefethen (eds.), Operations Research for Management. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Md., 1954.
98. **Varga J.:** Gyakorlati programozás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
99. **Varga J.:** Gyakorlati programozás II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
100. **Veinott, A. F.:** The Optimal Inventory Policy for Batch Orderings. Operation Research, 13 (3), 424-432 p. 1965.
101. **Werneck, Z.-Ullman, F.:** Hálótervezés. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.
102. **Zuberek, W. M.:** M-timed Petri Nets, Priorities, Preemptions and Performance Evaluation of Systems, in: Advances in Petri Nets, Lecture Notes in Computer Science

No. 222, Springer-Verlag, New York. 1985.