A kutatócsoport a pályázat alatt igen aktív munkát végzett. Tekintve, hogy a pályázatot alkotó 4 fázisból (3x12hó + 1x21 hó) az első 3-ról már részletes beszámoló készült, ezen időszak kutatásait a részjelentések alapján ismertetem, kiegészítve az utolsó, 21 hónapos időszak alatt elért eredményekkel. A pályázat 4 éves, ill. a hosszabbítással együtt 57 hónapos tartama alatt a kutatócsoport 74 angol nyelvű dolgozatot publikált, melyek közül 54 külföldön megjelenő nemzetközi folyóiratokban, 10 nemzetközi konferencia-kiadványban és végül 10 hazai szerkesztésű nemzetközi folyóiratban jelent meg, vagy került elfogadásra. Azon kéziratok száma, amelyek már az arXiv preprint szerveren vannak, vagy amelyeket a csoport tagjai már közlésre benyújtottak további 20, azaz a pályázat teljes időtartama alatt csaknem száz dolgozat készült. A folyóiratok döntő többsége impakt faktorral rendelékező rangos nemzetközi folyóirat. Köztük a szakma leghíresebb folyóiratai is megtalálhatók, így pl. az Annals of Mathematics vagy a svéd Acta Mathematica(Djursholm). De számos cikk látott még napvilágot olyan rangos külföldi folyóiratokban, mint az Amer. J. Math., C.R. Math. Acad. Sci. Paris, J. Fourier Anal. Appl. , J. Reine Angew. Math., Math. Ann., Proc. London Math. Soc., Random Structures and Algorithms - vagy neves nemzetközi konferencia-kiadványokban - pl. a Lovász László 60. születésnapjára rendezett Building Bridges konferenciakötet a Springer kiadásában, vagy a hasonlóan a Springer által kiadott, An Irregular Mind, az Ábel-díjas Szemerédi Endre 70. születésnapjára rendezett konferencia meghívott előadásainak írásos változatával.

Az első fázisban (2008. 04.01-2009.03.31) elért eredmények rövid ismertetése:

A kutatócsoport a pályázat első éve alatt összesen 21 dolgozatot készített el, vagy hozott végleges formába, melyek közül 13 megjelent vagy elfogadásra került (némelyek még csak elektronikus formában), míg 8 van elbírálás alatt. A címben említett témának megfelelően az analízis rendkívül sokrétű alkalmazást nyer a számelméletben; ezen sokrétű alkalmazást híven tükrözi a kutatócsoport által sikerrel vizsgált problémák sokszínűsége, amelyből az alábbi rövid összefoglalóban csak vázlatosan tudjuk az eredmények egy részét ismertetni.
A prímek közti kis hézagok elméletében Goldston, Pintz és Yildirim néhány éve áttörést ért el egy 80 éve nyitott, Hardy és Littlewood által felvetett és először vizsgált probléma megoldásával. Bebízonyították, hogy az egymást követő prímek közti átlagos logp hézag bármely kis fix törtrészénél (azaz bármely kicsiny pozitív c-re clogp-nél) kisebb hézagok is végtelen sokszor előfordulnak a prímek sorozatában. Ezen eredmény továbbviteleként a pályázat első évében nyerte el azon további dolgozatuk a végső formáját, melyben ezen túlmenően bizonyítják, hogy (egy loglogp hatványtól eltekintve) az átlagos logp köz négyzetgyökénél kisebb közök is végtelen sokszor fordulnak elő. Így már, legalábbis logaritmikus

skálán, félúton vagyunk a több mint kétezer éves ikerprím probléma megoldása felé vezető úton, legalábbis a prímek közti kimutatható különbségek nagyságát illetően (hogy a nehézségek tekintetében hol tartunk, azt senki nem tudja). A dolgozat a svéd Acta Math. folyóiratban került elfogadásra.
Az alkalmazott új módszerek a majdnem prímek elméletében is fontos új fejleményekre vezettek. Majdnem prímeknek általában valamely k-ra a legfeljebb k prímfaktorral rendelkező egészeket szokták nevezni. Amíg ezek tanulmányozása az utóbbi csaknem száz évben főleg Brun, Selberg, Rosser , Chen és Iwaniec által kifejlesztett szitamódszereknek, ill. a Linnik, Rényi, Roth, Bombieri és Vinogradov által kidolgozott nagy szitának betudhatóan igen sikeres volt, addig az adott, pontosan k prímfaktorral rendelkező számok finomabb eloszlására vonatkozó problémáknál a prímekhez hasonlóan nem sikerült komoly áttörést elérni. A problémáról, amelyet a szitamódszerek legnagyobb szakértője Selberg vizsgált először behatóan, az a vélemény alakult ki, hogy egy úgynevezett paritási probléma miatt pl. azon sejtés igazolása, hogy végtelen sok olyan szomszédos páratlan számokból álló pár van, amelynek mindkét tagja pontosan két prímszám szorzata, éppen olyan nehéz, mint az ikerprím-sejtés. Bár a sejtés továbbra is nyitott, egy némileg gyengébb változataként Goldston, Graham Pintz és Yildirim igazolta, hogy olyan számpár, amelynek mindkét tagja pontosan két prímszám szorzata és különbségük 2, 4 vagy 6, már végtelen sok van. Ezzel kimutattuk, hogy az alkalmazott módszerek alkalmasak az ún. paritási probléma bizonyos esetekben való megoldására, hisz az így nyert eredmények sokkal erősebb információt adnak az ilyen speciális majdnem prímek eloszlására, mint a prímek közti hézagokra ismert, legjobb, éppen fent említett eredmény. Ezen majdnem prímekre vonatkozó eredmény is a pályázat első évében került elfogadásra, míg az egymást követő egészek prímfaktoraira vonatkozó, és a szintén a paritási problémával kapcsolatos sok fontos eredményt tartalmazó további dolgozat kézirat formáját nyerte el.

Harcos Gergely (Valentin Blomerrel közösen) Burgess-típusú szubkonvex becslést igazolt Hilbert moduláris formák Hecke-karakterekkel csavart L-függvényeire a konduktor aspektusban. A tételnek számos közvetlen alkalmazása van a számelméletben. Pl. a korábbi becsléseknél erősebb kvantitatív formában mutatja, hogy egy teljesen valós számtest egészei fölötti pozitív definit ternér kvadratikus forma minden olyan kellően nagy egészt előállít, ami modulo egy tetszőleges egész előállítható. Ez Hilbert 11. problémájának a legnehezebb esete, amit csak a fenti típusú szubkonvex becsléssel sikerült megoldani a közelmúltban. A bizonyítás Hilbert moduláris formák Hecke-sajátértékeiből készíthető additív konvolúciós összegek spektrális felbontásán és egy általánosított Kuznyecov-formulán alapul.

A kutatócsoportban Ruzsa Imre részben társszerzőkkel a kombinatorikus számelmélet egyik alapvető tételét jelentő Plünnecke tétel igen erős általánosítását adta, kapcsolatot teremtett összezeghalmazokra és entrópiára vonatkozó egyenlőtlenségek között, vizsgálta, hogy mekkora szabályos szimplex fér bele egy egységkockába, továbbá olyan halmazokat vizsgált, melyeknek elemeit összeadva az összeghalmaz kicsi, míg az elemek kivonásával előálló különbséghalmaz nagy.

A számelmélet az utóbbi évtizedekben betört az alkalmazott matematika világába is. Különböző számelméleti tulajdonságokon alapuló kriptográfiai módszerek a modern kódelmélet egyik legfontosabb oszlopát képezik. Sok esetben hosszú "véletlent szimuláló" sorozatok képzése a cél. Ez irányban úttörő jelentőségű Sárközy András munkássága az ún. pszeudovéletlen sorozatok elméletében. Ilyen irányú kutatásokkal foglalkozik (társszerzőkkel) 3 dolgozata is. Az egyikben különböző konstrukciókat adnak erős pszeudovéletlen tulajdonságokkal rendelkező bináris rácsokra. Több esetben vizsgálja a legfontosabb egydimenziós konstrukciók kétdimenziós általánosításait. Ilyen esetben a pszeudovéletlenség bizonyításához kétváltozós karakterösszegeket kell becsülni, de itt Deligne tétele nem alkalmazható. Egy új technikát dolgoznak ki a szerzők, amely az egydimenziós esetre vonatkozó redukcióra és Weil tételének alkalmazására épül.

Az 2. fázisban (2009.04.01-2010.03.31.) elért eredmények rövid ismertetése:

Sárközy András társszerzőkkel vizsgálta pszeudorandom sorozatok mértékét, illetve ezek különböző általánosításait, így bináris rácsok pszeudovéletlenségének mértékét. Megmutatta, hogy három, bináris sorozatokra vonatkozó konstrukció kiterjeszthető két dimenzióra és az így definiált bináris rácsok bizonyos feltételek teljesülése esetén erős pszeudovéletlen tulajdonságokkal rendelkeznek. Hasonlóképp kimutatta, hogy egy, a Legendre szimbólumot és polinomokat használó, bináris rácsokra vonatkozó konstrukció erős pszeudovéletlen tulajdonságokkal rendelkezik. Bevezette bináris rácsok szimmetriájának mértékeit és analizálta azokat, az egy dimenziótól eltérően itt egyetlen mérték nem elég a szimmetria mérésére. Egy másik dolgozatban "majdnem egyenletes" fákon definiált bináris függvényekre bevezeti a pszeudovéletlenség mértékeit és a különböző ilyen mértékek közti kapcsolatot vizsgálja, egyes esetekben konkrétan becsülve ezen mértékeket. Egy további dolgozatban primitív gyök és index fogalmára épülő részhalmaz konstrukciókról igazolta, hogy erős pszeudovéletlen tulajdonságokkal rendelkezik.

Ruzsa Imre egy társszerzővel közösen egész számok pozitív sűrűségű halmazainak additív tulajdonságait vizsgálja Fourier-analitikus és ergodelméleti módszerekkel. Így pl. igazolja, hogy ha A a sík rácspontjainak pozitív sűrűségű halmaza, akkor A-A tartalmaz egy pozitív sűrűségű egész számokból álló halmaz Descartes négyzetét. Az analóg állítás 3 dimenzióban nem igaz. Továbbá igazolja, hogy ha A egész számokból álló pozitív sűrűségű halmaz és r+s+t=0, akkor rA+sA+tA a 0 egy környezete a Bohr topológiában.
Egy másik ugyancsak társszerzővel írott dolgozatában Ruzsa meghatározza azon multiplikatív számelméleti függvényeket, amelyeket normának tekintve az egész számokon mindig elvégezhető az euklideszi algoritmus.

Bíró András nemholomorf automorf formák (ún. Maass-formák) hármas szorzat-integráljaira bizonyít egy olyan azonosságot, amely bizonyos szempontból egyszerűbb kifejezést ad ezekre a sokat vizsgált integrálokra.
Az SP(4) csoporton értelmezett holomorf moduláris formák Fourier együtthatóinak becslésében fontos szerepet játszanak bizonyos magasabb dimenziós exponenciális összegek. Tóth Árpád egy cikkében optimális becslés szerepel ezekre. A bizonyítás az egy dimenziós esetnél mélyebb eszközöket igényel.

Harcos Gergely Valentin Blomerrel közösen Burgess-típusú szubkonvex becslést igazolt csavart Hilbert moduláris L-függvényekre, megjavítva ezzel Cogdell-Piatetski Shapiro-Sarnak és Venkatesh idevágó eredményeit. Közvetlen alkalmazásként az eddigieknél hatékonyabban tudjuk becsülni pozitív definit ternér kvadratikus formák előállításszámait egy teljesen valós számtest egészei felett. Egy másik más társszerzőkkel közösen írt dolgozatában Arsovski friss eredményei alapján belátják Feng-Sun-Xiang egy sejtését, illetve egyszerűsített bizonyítást adnak a Snevily-sejtésre.

Pintz János folytatta Goldstonnal és Yildirimmel közösen megkezdett kutatásait prímek közti kis hézagokra vonatkozóan, illetve a csoport S.W. Grahammel együtt ezen módszereknek a majdnem prímekre vonatkozó alkalmazásait vizsgálta. Ezen vizsgálatok eredményeként sikerült olyan egységes módszert alkotni, amellyel kimutatták, hogy amennyiben szeretnénk végtelen sok olyan egymást követő egészt találni, amelyek prímtényezős felbontásában szereplő kitevők megegyeznek, úgy ez lehetséges, amennyiben a kitevők között legalább 3 db 1-es és egy db 2-es szerepel. Ezzel rögtön adódik egy igen erős formában Erdős több sejtése, beleértve az Erdős-Mirsky sejtést, mely sejtések szerint van végtelen sok olyan egymást követő egész, amelyek prímosztó száma (az egyik sejtés szerint a multiplicitás nélkül vett, a másik sejtés szerint a multiplicitással együtt vett) , illetve osztószáma megegyezik. Amennyiben kimutatjuk, hogy végtelen sok olyan egymást követő számpár van, amelyre a prímfaktorizáció exponensei megegyeznek, akkor ez persze számelméleti függvények egy széles osztályára adja ezen problémák megoldását, még olyan erősebb formában is, hogy ugyanazon számpárokra szimultán egybeesnek különböző számelméleti függvények értékei. Bár Erdős sejtéseit Heath-Brown (1984), majd Schlage-Puchta (2003/2005) megoldották, az általunk adott módszer lényegesen tovább ment, amennyiben megmutatta, hogy az is elérhető, hogy a két egymást követő számra a kitevőhalmaz végtelen sokszor megegyezzen, továbbá ezt a megegyező kitevő halmazt szinte szabadon előírhatjuk. Ezen eredmények új megvilágításba helyezték az ún. paritási problémát, amely szerint szita módszerekkel nem tudunk adott prímfaktor számú egészeket konstruálni, sőt még azt se tudjuk elérni, hogy pl. két egymást követő egész prímfaktor száma végtelen sokszor úgy egyezzen meg, hogy mindkét szám prímfaktorszáma előírt paritású legyen.
Pintz János egy további friss eredményeként azt igazolja, hogy amennyiben a prímszámok eloszlási szintje ½-et meghaladja, úgy létezik egy olyan fix pozitív d szám, amelyre van akármilyen hosszúságú prímekből álló számtani sorozat, hogy ezen sorozatok bármelyik elemére p+d is prím. Amennyiben a prímek eloszlási szintje 1, azaz az Elliott-Halberstam sejtés teljesül, vagy akárcsak 0,97-nél nagyobb, akkor ez az állítás egy 16-ot meg nem haladó páros d számra is teljesül. Ismert, hogy a Bombieri-Vinogradov tétel szerint a prímeknek ½ egy megengedett eloszlási szintje, így a fent kimondott általánosabb állítás feltétele viszonylag közel van jelenlegi ismereteinkhez (bár az ½-en való túllépés természetesen óriási eredmény lenne). Ezen feltételből tehát nem csak az következik, hogy végtelen sok p, p+d típusú általánosított ikerprím párunk van valamilyen fix d-re, hanem az is, hogy ezek közt található bármilyen hosszúságú számtani sorozat.. Így a Goldstonnal és Yildirimmel közösen kidolgozott feltételes majdnem ikerprím-sejtést állító tételünk összekombinálható Green és Tao azon szenzációs tételével, mely szerint a prímek sorozatában van akármilyen hosszúságú számtani sorozat.

A 3. fázisban (2010.04.01-2011.03.31) elért eredmények rövid ismertetése:

A kutatócsoport a 2010-es évben, ill. a 2011-es év első 4 hónapjában összesen 27 dolgozat jelentett meg, további 8 került elfogadásra, ezen 35 dolgozat valamennyi angol nyelven, 80%-a külföldön kiadott folyóiratokban vagy neves konferencia-kiadványokban került publikálásra. A folyóiratok szinte kivétel nélkül az ISI által nyilvántartott SCI folyóiratok, köztük sok igen neves, az átlagos, impakt faktorral rendelkező matematikai folyóiratok impakt faktorának legalább duplájával rendelkezik.
Így csoportunk 2 cikket közölt a talán leghíresebb 2 matematikai folyóiratban, az Annals of Mathematics-ben (Tóth Árpád társszerzőkkel) ill. Acta Mathematica (Djursholm)-ban (Pintz János társszerzőkkel), de további cikkek kerültek közlésre (esetleg elfogadásra) olyan neves külföldi folyóiratokban, mint az Advances in Mathematics, Amer J. Math., Comment Math. Helv., Geom Funct. Anal. Israel J. Math., Random Structures and Algorithms. Ezt kiegészítik olyan neves konferenciakiadványok, mint a Szemerédi Endre 70. születésnapjára rendezett An Irregular Mind, Szemerédi is 70, Springer (Ruzsa Imre továbbá Pintz János cikkével) vagy a Clay Institute Math. konferenciakötete (Harcos Gergely cikkével). Ezen 35 cikk tartalmából nehéz részletesebb áttekintést adni, ezért csak néhány munkára hívjuk fel a figyelmet.

Harcos Gergely Valentin Blomerrel közösen aszimptotikus formulát adott Rankin-Selberg L-függvények bizonyos archimédeszi családjaira. Az eredmény érdekessége, hogy amikor a Rankin-Selberg konvolúcióban a rögzített formát Eisenstein-sornak választjuk, akkor az aszimptotikában a szokásos logaritmikus tagok mellett két konjugált forgó tag is megjelenik. Egy speciális esetben a holomorf csúcsformákhoz társított L-függvények negyedik momentumáról szól az eredmény. Harcos Gergely Nicolas Templier-val új becslést adott Hecke-Maass csúcsformák szuprémumára a szint aspektusban. Az eredmény érzésünk szerint hasonlóan erős és természetes, mint a Burgess-korlát a Dirichlet L-függvényekre vagy az analóg csavart moduláris L-függvényekre. A bizonyítás az Atkin-Lehner operátorokat használja hatékonyabban, mint a korábbi munkák.

Tóth Árpád W. Duke-kal és Ö. Imamogluval közösen írt, az Annals of Mathematicsben megjelent dolgozatában, Ramanujan mock moduláris függvényeinek pontos leírását adják, és megmutatják, hogy ezeknek a függvényeknek a Fourier együtthatói klasszikus moduláris függvények zárt geodetikusok menti integráljaként állnak elő. Ez Borcherds Fields medálos eredményeinek általánosítása pozitív diszkriminánsú kvadratikus alakokra. A racionális periódusok számelméleti jelentőségű kohomológia csoportok elemeinek explicit komplex függvénytani konstrukcióját adja olyan esetekben amikor ezeknek a periódusoknak csak a létezése volt ismert. A fenti eredményekből Siegel valós kvadratikus testbővítések zeta-függvényeinek speciális értékeiről szóló tételének új bizonyítását is kapjuk.

Gyarmati, Mauduit es Sárközy a kétdimenziós bináris rácsok pszeudo-velétlenségének mértékeit vizsgálják.
Tanulmányozzák a Q-mértékek es a normalitás kapcsolatát. Bevezetik a pszeudo-véletlenség új mértékeit, az ún. szimmetria mértékeket. Végül vizsgálják a különböző mértékek minimumát. Lev és Sárközy az Erdős-Fuchs tétel egy véges

Ábel csoport részhalmazainak additiv reprezentációfüggvényére vonatkozó véges analogonját vizsgálják. Rivat es Sárközy bizonyítják, hogy ha A, B természetes számok sűrű sorozatai, és f bizonyos feltételeket kielégítő additiv számelméleti függvény, akkor f kielégít egy Turan-Kubilius típusú egyenlőtlenséget az ab+1 (a,b eleme A-nak, illetve B-nek) alakú számok halmazán. Gyarmati, Mauduit es Sárközy binaris rácsok családjai pszeudo-véletlenségének a mértékeit definiálják és vizsgálják. Definiálják az ütközés és lavinahatás, valamint a családkomplexitás fogalmát, és vizsgálják e fogalmakat egy-egy kvadratikus maradékokra,illetve modulo p polinomok maradékának az eloszlására vonatkozó konstrukcióban. Gyarmati, Sárközy es Stewart vizsgálják egy, a Legendre szimbólumra épülő különösen fontos rács konstrukció pszeudo-véletlenségének a vizsgálatát. E cikkben először az ún. degenerált esetet tanulmányozzák, majd megkonstruálják nem-degenerált polinomok egy olyan nagy családját, hogy az azokra épülő rácsok erős pszeudovéletlen tulajdonságokkal rendelkeznek.

Ruzsa Imre (részben szerzőtársakkal) számos jelentős eredményt ért el az additív számelmélet (additív kombinatorika) témakörében. Ezen publikációk megjelenési adatai megtalálhatók a közleményjegyzékben. Csak szemelvényként említjük, hogy a Szemerédi Endre 70. születésnapja tiszteletére a Springer által kiadott magas presztízsű konferenciakötetben Plünnecke összeghalmazos egyenlőtlenségét, amely látszólag igen erősen épít a kommutativitásra, sikerül lényegesen gyengébb feltételek mellett bizonyítania. Megemlítjük még a társszerzőkkel együtt igazolt, Random Structures and Algorithms folyóiratban megjelent dolgozatát, melyben megjavítják Erdős és Rényi valószínűségi konstrukcióját olyan elég sűrű végtelen sorozatra, ahol a h tagú összegek minden számot legfeljebb g-szer állítanak elő, és mutatnak egy némileg gyengébb, de determinisztikus konstrukciót is.

Az egymáshoz közeli prímeket ill. majdnem prímeket illetően Pintz János több új eredményt nyert, amelyek még jelenleg kézirat formájában, bár az Arxiv portálon megtalálhatók. Az összesen 10 cikk közül kettőről nyújtanánk rövid ismertetést. Az első cikkükben Goldstonnal és Yildirimmel közösen kimutatják, hogy amennyiben p' jelenti a p után következő prímet, akkor bármilyen kis c esetén a p'-p <clogp feltételt kielégítő p prímek az összes prim (természetesen c-től függő) pozitív százalékát adják, pontosabban az ilyen prímek száma X-ig legalább c'X/logX, ahol c' egy, csak a c-től függő pozitív szám. Ezzel egy, az eredeti kis hézagokra vonatkozó eredményüknek lényeges élesítését adják. Pintz János vizsgált még egy másik, az ikerprímekkel rokonságban álló gyengébb, de eddig szintén megoldhatatlannak bizonyult sejtést. E sejtés szerint p+2 végtelen sok p prímre páratlan sok prímosztóval rendelkezik. Ha nem is sikerül ezt a sejtést megoldania, kimutatja, hogy a sejtés igaz p+2 helyett valamely p+d-re, ahol d egy 20-nál kisebb pozitív páros szám.

A 4. fázisban (2011.04.01-2012.12.31) elért eredmények rövid ismertetése:

Pintz János folytatta közeli prímekre vonatkozó kutatásait. Sikerült igazolnia, hogy két híres és igen nehéz sejtés valamelyike szükségszerűen igaz. Az egyik sejtés szerint bármilyen kis pozitív c-re van elegendően nagy X számra X és X+X^c között található Goldbach szám, azaz olyan szám amelyik felírható 2 prím hányadosaként. A másik sejtés szerint van olyan C szám, hogy az egymást követő prímek közt végtelen sokszor találunk C-nél kisebb különbségű párt. Egy másik dolgozatában sikerül olyan egyenletességi feltételeket meg adnia a prímek számtani sorozatokban való eloszlására (amelyek ezúttal tartalmazzák a Liouville-féle lambda függvényt is), amelyből következik az a hihetetlen mély állítás, mely szerint az ikerprímek sorozatában találunk akármilyen hosszúságú számtani sorozatot. Tekintve, hogy a matematika egyik legnehezebb problémája, hogy van-e végtelen sok ikerprím, ez az állítás ennek nehézségét is lényegesen meghaladja. (természetesen a bizonyítás egy igen mély, bizonyítatlan, de plauzibilis feltételt tételez fel.) A tétel fontosságát mutatja, hogy korábban nem volt ismeretes olyan plauzibilis egyenletességi feltétel, amelyből akár csak az ikerprímek végtelensége is következett volna.

Sárközy András igen sok eredményt ért el az elmóúlt időszakban mind halmazok összegére, mind pszeudorandom sorozatokra vonatkozólag. jelen ismertetésben csak a már megjelent eredményeire szorítkozom. A modulo p vett kvadratikus maradékok halmazáról bebizonyítja, hogy ha az felírható két (nem egy elemű) halmaz összegeként, akkor ezen halmazok elemszáma p négyzetgyökével azonos nagyságrendű. Egy másik, J. Rivat-val közös dolgozatukban azt mutatják meg, hogy ha az a és b az {1,2, …n} halmaz két nagy A és B részhalmazain futvégig, akkor a kapott ab+1 típusú „elcsúsztatott szorzatok” kielégítenek egy Turán-Kubilius típusú egyenlőtlenséget.

Bíró András egy, az automorf formák elméletében fontos Poisson típusú összegezési formulát bizonyított, amely az automorf formák elméletében igen fontos hármas szorzatintegrálokat tartalmazza súlyokként. A Poisson formulában szereplő klasszikus Fourier transzformált jhelyett az új formulában a Gronevelt által néhány éve bevezetett úgynevezett Wilson-függvény transzformált lép fel. Egy másik dolgozatában bebizonyítja, hogy egy meglehetősen általános valós függvény kifejthető egy bizonyos függvénysorozat szerint, amelynek elemei szoros kapcsolatban állnak a fent említett Wilson függvényekkel. Egy további dolgozatában A. Granville-lel közösen igazolnak egy olyan formulát, amelynek segítségével könnyen kiszámíthatóváválnak általános valós kvadratikus számtestekhez és Dirichlet-karakterekhez tartozó zetafüggvények speciális értékei. Az új formula korábban bizonyított speciális esetei fontos szerepet játszottak valós kvadratikus testek osztályszámaira vonatkozó híres sejtések (pl. Yokoi sejtés) Bíró András általi megoldásában.

Tóth Árpád A. Cocojaruval közös cikkében az elliptikus görbék által meghatározott véges Ábel-csoportok paramétereinek statisztikus eloszlását vizsgálja. a probléma jelentősége, hogy a véges testek feletti elliptikus görbék a kriptográfiában igen nagy szerepet játszanak. A cikkben szereplő eredmények egzakt igazolását adják olyan valószínűségeknek, amelyeket a szitaformulákból sejthetünk. A bizonyításban nagy szerepet játszik az a mély eredmény, hogy a véges testek felett a Riemann Hipotézis analogonja bizonyított.

Harcos Gergely V. Blomerreel közös dolgozatában kiterjesztette a csavart moduláris L-függvényekre vonatkozó tiszta Burgess tipusú becslésüket. belátták, hogy a becslés melléktipusokra vonatkozó megkötés nélkül is érvényes.

Révész Szilárd Anne de Rotonnal közös, az arXiv preprint szerveren megtalálható közlésre benyújtott kéziratukban a Wiener-Ikehara tétel egy olyan kiterjesztését ill.-.élesítését dolgozta ki, amelyben az aszimptotikusan kiértékelendő függvény esetében a monotonitási feltételt gyengítik és a gyengített feltétel mellett is sikerül az aszimptotikán túlmenő maradéktagos becslést nyerniük: az eredmény Tenenbaum egy hasonló irányú tételének általánosítása. Révész Szilárd egy másik Pintz Jánossal közös, készülő munkájukban tisztázza azt a kérdét, hogy a közeli prímek kimutatására szolgáló Goldston-Pintz-Yildirim módszernek mi a határa, ami igen fontos előrelépés ezen a néhány éve, kutatócsoportunk által (a fent említett külföldi társszerzőkkel együtt) vizsgálni kezdett új területen.

Balog Antal külföldi társzerzőkkel közös cikkeiben (C. David, A. Cocojaru) trigonometrikus összegekre vonatkozó becsléseket ér el, amelyek az analitikus számelmélet sok területén (Riemann-féle zeta-függvény elmélete, moduláris formák, elliptikus görbék) fontos eredményekre vezetnek.

Ruzsa Imre J.-M. Deshouillers-vel közös munkájában azt vizsgálja hogy az n! utolsó zérustól különböző számjegye hogy oszlik el a lehetséges értékek (4 és 8) között a 12-es számrendszerben. A 12-nél lép fel először az a nehézség, ami pl. 10-es számrendszer esetében nem, hogy két osztály „versenyez” egymással. Ismeretes, és igen fontos az a Fields-érmes K.F.Roth által 1953-ban elért eredmény, hogy a pozitív egészek pozitív sűrűségű részsorozata tartalmaz háromtagú számtani sorozatot. Ennek egy analogonját vizsgálja Ruzsa Imre Gyarmati Katalinnal közös dolgozatukban, hogy az első n négyzetszámból hányat lehet úgy kiválasztani, hogy ne legyen bennük háromtagú számtani sorozat. Dolgozatukban megmutatják , hogy az első n négyzetszámból kiválasztható cn/ (loglogn)^1/2 számosságú halmaz, amely nem tartalmaz háromtagú számtani sorozatot.