

## PD 75475 Zárójelentés

Az OTKA pályázatomban benyújtása (2008. február 11) óta 8 cikkem jelent nemzetközi folyóiratokban, de ezek közül csak kettő cikk született a kutatási programban megadott témában a beszámolási időszak alatt, ezért a többi 6 megjelent cikket nem tüntettem fel a jelentésben. Ezen cikkeken kívül a kutatási tervnek megfelelően további 3 kézirat van publikálásra benyújtva, illetve egy kézirat született, amely nincsen még benyújtva. A kutatási időszakban összesen hat nemzetközi konferencián adtam elő, ezek közül négyen meghívott előadóként.

Az [1] cikkben egy irányított fákból álló speciális gráfosztályra, az úgynevezett speciális triádokra bizonyítjuk a homomorfizmus problémára vonatkozó dichotómia sejtés. Az ilyen gráfok nagyon távol állnak azon gráfoktól, melyben nincs nyelő és forrás csúcspont, és amelyekre a dichotómia sejtés már bizonyított. Ezeket a gráfokat 1996-ban Pavol Hell, Jaroslav Nesetril és Xuding Zhu vizsgálta ilyen szempontból, de csak részeredményeket értek el. A cikkben nem csak megválaszoljuk az előző szerzők által feltett dichotómia problémát, hanem struktúra tételt adunk azokra a speciális triádokra, amelyhez tartozó homomorfizmus probléma polinom időben megoldható. Megjegyezzük, hogy ezen eredményt tovább általánosítva a kutatási programban szereplő speciális  $n$ -adokra való dichotómia sejtést Jakub Bulín egy éve bizonyította be (de struktúratételt nem tudott adni).

A [2] cikkben algoritmust adunk arra, hogy láncok direkt szorzatában az azonos elemszámú ideálok melyikében maximális az elemek magasságának összege. Ennek a cikknek a témája a Frankl sejtéshez kapcsolódik, és nincs feltüntetve a munkatervben.

Ismert, hogy a korlátos szélességű (bounded width) és kevés részhatvánnyal rendelkező (few subpowers) algebraikához tartozó homomorfizmus problémák polinom időben megoldhatók. A [3] publikálásra benyújtott kéziratban ezen két osztályhoz tartozó algoritmusokat ötvöztem, amely a két osztálynál bővebb algebraosztályra is megoldja a homomorfizmus problémát polinom időben. Specifikusabban, ha az  $A$  idempotens algebra van olyan kongruenciája, hogy a faktoralgebra kevés részhatvánnyal rendelkezik és minden kongruencia blokk korlátos szélességű, akkor az  $A$  algebrahoz tartozó (lokális) homomorfizmus probléma kezelhető. Ennek következményeként megmutatható, hogy tetszőleges idempotens varietásban a kevés részhatvánnyal rendelkező és korlátos szélességű algebra által generált részvarietás minden véges algebraja (lokálisan) kezelhető.

A [4] benyújtott kéziratban reflexív irányított gráfok polimorfizmusait vizsgáltuk. Megmutattuk, hogy ha a reflexív irányított gráfnak vannak Gumm polimorfizmusai, akkor van Jónsson, többségi és totálisan szimmetrikus polimorfizmusai is. Ez az eredmény a Valerioté sejtést (amely a Larose-Zadori sejtés általánosítása) igazolja reflexív irányított gráfok esetén. Az alkalmazott módszerek továbbfejlesztésével aktív kutatás folytatódik a sima (smooth) irányított gráfok polimorfizmusainak vizsgálatában, ahol részeredményeim vannak. Meg tudom mutatni, hogy a fenti bizonyításban használt

módszer első része (mely szerint ha  $G$  összefüggő, akkor  $\text{Pol}_1(G)$  is az) nem triviális módon adaptálható sima Maltsev polimorfizmussal rendelkező gráfokra.

E. Aichinger, R. McKenzie, P. Mayr 2010-ben bebizonyította, hogy minden él művelettel rendelkező algebra véges sok relációval definiálható, ezért örökletesen (azaz további műveletek hozzá vételével) is véges sok relációval definiálható. Az [5] benyújtott kéziratban ennek az állításnak a megfordítását bizonyítjuk, miszerint ha egy idempotens algebra örökletesen véges sok relációval definiálható, akkor az algebrának van él művelete. Leírjuk továbbá a maximális véges sok relációval nem definiálható idempotens klónokat egy rögzített véges alaphalmaz felett. Ezen eredmények felhasználásával a Valerioté sejtés több ekvivalens megfogalmazását adjuk meg, miszerint ha egy véges sok relációval definiált algebra kongruencia moduláris varietást generál, akkor van él (edge) kifejezőművelete.

A [6] kéziratban a CSP probléma egy teljesen új redukcióját vezettem be. Adott véges algebra  $B$  véges osztálya, amely zárt a részalgebra, homomorf kép és idempotens reaktív képzésre, és a  $\text{CSP}(B)$  input, amely  $B$ -beli algebraikkal izomorf algebraikból és közöttük levő megszorítási relációkból áll. Az input megoldása egy kiválasztási függvény, amely tiszteli a relációkat. Az új megközelítésben nem megoldást keresünk, hanem az input minden algebraján olyan unér polinomot (az input izomorf algebraira nem feltétlen azonosakat), amelyek együttesen megoldásokat megoldásba visznek át. Egy ilyen polinomrendszert konzisztensnek nevezünk. Könnyen látható, hogy két konzisztens polinomrendszer kompozíciója is konzisztens, így a konzisztens polinomrendszerek iterálhatók, ezért feltehető, hogy mindegyik idempotens polinom. Mind az identikus leképezésekből álló polinomrendszer, mind a megoldásokhoz tartozó konstans polinomrendszer konzisztens. A konzisztens polinomrendszer létezése kifejezhető egy másik  $\text{CSP}(B)$  inputtal, ahol az algebraik száma polinom méretben nő az eredetihez képest. Bizonyos algebraik esetén ez a nagyobb  $\text{CSP}(B)$  inputban a  $B$ -beli algebraik nem mindegyike szerepel, ami egy redukciós algoritmust ad a  $\text{CSP}(B)$ -nek egyszerűbb algebraikra való visszavezetésére.

Alkalmazásként megoldjuk  $\text{CSP}(A)$ -t arra az esetre, amikor  $A$  olyan idempotens algebra, amelynek egy  $\alpha$  kongruenciájára  $A/\alpha$  kifejezés ekvivalens egy félével, amely fa szerűen rendezett, és minden  $\alpha$  blokk véges szélességű. Ez P. Markovic és R. McKenzie egy nem publikált eredményét általánosítja, ahol ugyan ezt bizonyítják (teljesen más módszerrel) de csak abban az esetben, amikor  $A/\alpha$  lineárisan rendezett vagy 1-magasságú fa. Egy másik alkalmazásként a 3-elemű algebraikra vonatkozó dichotómia-tételét sikerült  $A$ . Bulatovnak egyszerűbben bizonyítani.

### **Megjelent publikációk:**

- [1] L. Barto, M. Kozik, M. Maróti and T. Niven, *CSP dichotomy for special triads*, Proceedings of the AMS **137** (2009), 2921–2934.
- [2] G. Czédli and M. Maróti, *On the height of order ideals*, Mathematica Bohemica **135** (2010), 69–80.

### **Benyújtott publikációk:**

- [3] M. Maróti, *Maltsev on top*, (submitted to Int. J. of Algebra and Computation).
- [4] M. Maróti and L. Zádori, *Reflexive digraphs with near-unanimity polymorphisms*, (submitted to Discrete Mathematics).
- [5] P. Marković, M. Maróti and R. McKenzie, *Finitely related clones and algebras with cube-terms*, (submitted to Order).

### **Kéziratok:**

- [6] M. Maróti, *Tree on top of Maltsev*, (manuscript).

### **Meghívott Előadások:**

1. “The constraint satisfaction problem for bounded width and Maltsev algebras” (meghívott előadás), BLAST (Boolean Algebras, Lattices, Algebraic Logic, Universal Algebra, Set Theory) Conferene, Las Cruces, USA, August 10–14, 2009.
2. “Minimal quasivarieties of semilattices with a group of automorphisms” (meghívott előadás), Int. Conference on Algebras and Lattices (Jardafest), Prague, Czech Republic, June 21–25, 2010.
3. “Polymorphisms of reflexive digraphs” (meghívott előadás), 2nd Int. Conf. on Order, Algebra and Logic, Krakow, Poland, June 6–10, 2011.
4. “Beyond bounded width and few subpowers” (meghívott előadás), Workshop on Algebra and CSPs, Toronto, Canada, August 2–6, 2011.

### **Egyéb Előadások:**

5. “CSP reductions”, Summer School on General Algebra and Ordered Sets, Malenovice, Czech Republic, September 4–10, 2010.
6. “Directed graphs and Maltsev conditions”, Summer School on General Algebra and Ordered Sets, Podlesí, Czech Republic, September 3–9, 2011.