

A pályázat keretében a kutatás a tervekkel összhangban folyt. A futamidő alatt a pályázatban részt vevő kutatók személyi összetétele a tervekhez képest annyiban változott, hogy a vezető kutató az időközben elnyert SAB 081142 sz. OTKA-pályázat futamidejére (2010. jún. 1-től 2011. máj. 31-ig) annak előírásai szerint felfüggesztette részvételét a jelen pályázatban. Összesen 35 cikk született, melyek közül 24 megjelent, további 3 publikálásra el lett fogadva¹, a többi² le van adva publikálásra, illetve még kézirat. A pályázat résztvevői a futamidő alatt számos előadást tartottak eredményeikről nemzetközi konferenciákon, illetve külföldi egyetemeken.

Az alábbiakban összefoglaljuk a pályázatban elért eredményeket³.

A véges alaphalmazon értelmezett klónok kutatásának egyik fő iránya a „nagy” klónok vizsgálata. Az [5], [18] cikkekben azokat a C klónokat vizsgáljuk, amelyek nagyok abban az értelemben, hogy a hozzájuk tartozó relatív R -osztályozásnak, amely a félcsoportok körében ismert Green-féle R reláció analogonja, csak véges sok osztálya van. Ezen osztályozás szerint két művelet akkor és csak akkor C -ekvivalens, ha C -beli műveleteket beléjük helyettesítve megkaphatók egymásból. [5]-ben megmutatjuk, hogy a nagy klónok alkotta F filter három, lényegében diszjunkt részre bontható. A három rész egyikére adunk teljes leírást [18]-ban, nevezetesen azt bizonyítjuk, hogy a Slupecki-klón egy részklónja akkor és csak akkor van F -ben, ha tartalmazza az összes nem-szürjektív műveletet. Ez az eredmény egy önmagában is érdekes tételen múlik, amelyet [35]-ben bizonyítunk, s amely Rosenberg [R] nevezetes teljességi tételének kiterjesztése. Ebben megadunk tetszőleges véges A halmazon egy véges S relációhalmazt a következő tulajdonsággal: egy C klón akkor és csak akkor nem tartalmazza az összes nem-szürjektív műveletet, ha invariáns valamely S -beli relációra. A [15]-ben tekintett C klónok (pl. véges affin algebrák klónja vagy a Burle-klón) nem tartoznak F -be, de a C -osztályok rendelkeznek bizonyos végességi tulajdonsággal.

A kongruenciomoduláris varietásokra két klasszikus jellemzés ismert: Day [D], illetve Gumm [G] Malcev-feltételei. Day eredményéből kiindulva [14]-ben megadunk egy sokkal egyszerűbben ellenőrizhető feltételt a kongruenciomodularitásra. A kapott tétel Day és Gumm eredményének közös általánosítása, és néhány sorra redukál számos igen bonyolult, kongruenciomodularitást bizonyító megfontolást, amely az irodalomban található. A cikkben analóg feltételt adunk annak ellenőrzésére is, hogy egy adott varietásban teljesül-e nemtriviális kongruenciaazonosság.

[9]-ben szükséges és elegendő feltételt adunk arra, hogy egy disztributív háló két polinomfüggvénye fölcserélhető legyen egymással. A kérdés motivációja részben algebrai (pl. centralizátorklón, entropikus algebrák), részben számítástudományi (aggregációelmélet).

Wiegold kezdeményezte véges G csoportokra a $d(G,n)$ növekedési függvény vizsgálatát, ahol $d=d(G,n)$ a legkisebb olyan szám, amelyre G n -edik direkt hatványa d elemmel generálható. Sokat idézett az a [W]-beli eredmény, amely szerint $d(G,n)$ mint n függvénye logaritmikus, ha G perfekt, egyébként pedig lineáris. [32] egyik fő eredménye ezen tétel kiterjesztése tetszőleges olyan véges algebrára, amelynek van paralelogramma-kifejezése. Az eredmény

1 A közleményjegyzékben ezek is 2013-as megjelenési évszámmal szerepelnek.

2 A közleményjegyzékben ezek 2014-es megjelenési évszámmal szerepelnek.

3 A félkövér számokkal történő hivatkozások a pályázatbeli publikációkra vonatkoznak, és a számozás megegyezik az OTKA-adatbázisbeli közleményjegyzékben szereplő sorszámmal. A betűket is tartalmazó hivatkozások az irodalomjegyzékre utalnak.

speciálisan Malcev-algebrákra is új. A cikkben jellemezzük az összes „basic” Malcev-feltételt, amely korlátozza a növekedési függvényt, és megmutatjuk, hogy ha egy véges algebrán teljesül ilyen Malcev-feltétel, akkor a növekedési függvénye n egy polinomja alatt marad.

A [2] dolgozatban olyan új, többségi függvények által generált minimális klónokat találtunk, amelyeknél --- a korábbi példákkal ellentétben --- a klón háromváltozós része, mint Menger-algebra, nem izomorf egy konzervatív minimális klón háromváltozós részével. Bebizonyítjuk továbbá, hogy amennyiben létezik olyan minimális klón, amelyben n többségi függvény van, és ezek közül legalább egy ciklikusan szimmetrikus, akkor létezik olyan minimális klón is, amelyben $3n$ többségi függvény van.

A parciális függvények klónjai alkotta háló már kételemű alaphalmaz esetén is kontinuum számosságú. A háló szerkezetének megértése céljából sokan vizsgálták azt a természetes kérdést, hogy totális Boole-függvények egy adott C klónjához hány olyan parciális klón létezik, amelynek totális része éppen C (lásd [Lau]). Ezt a régóta nyitott problémát oldjuk meg a [25] cikkben a hiányzó esetek kivizsgálásával.

Az aritáshézag fogalmát Couceiro és Lehtonen vezették be, és meghatározták az 1-nél nagyobb aritáshézaggal rendelkező Boole-függvényeket. A [12], [19] cikkekben ezt az eredményt általánosítjuk. Véges halmazok esetén pontosan megadjuk az adott aritáshézaggal és adott változószámmal rendelkező függvények számát, a háromelemű halmazon pedig leírjuk az 1-nél nagyobb aritáshézaggal rendelkező műveleteket. A [13], [28] cikkekben monoton függvények, hálópolinomok, valamint test feletti polinomok aritáshézagát vizsgáljuk. A [20] dolgozatban arra a kérdésre adunk választ, hogy hogyan változhat a lényeges változók száma, ha több változóazonosítást hajtunk végre egymás után. Ezen vizsgálataink „melléktermékeként” új binomiális azonosságot találtunk, amelyre [1]-ben kombinatorikai bizonyítást adunk.

A [4] cikkben a véges láncok feletti pszeudopolinomokat írjuk le, és megadjuk egy algoritmust, amely eldönti, hogy adott függvény pszeudopolinom-e, és ha igen, akkor meg is konstruálja egy felbontását. Ezeket az eredményeket általánosítjuk véges disztributív hálókra a [22] dolgozatban. A bizonyítás egy fontos lépését alkotja egy disztributív hálók feletti speciális interpolációs probléma megoldása [23], amely Goodstein tételének általánosítását adja nemkorlátos disztributív hálókra. A [10] cikkben általánosabb interpolációs kérdést vizsgálunk, itt a megoldáshoz már ki kell lépünk a háló által generált Boole-algebrába. Eredményeink döntéseméleti alkalmazásaként preferencia-relációkat modellezünk pszeudopolinomokkal a [11] dolgozatban.

[31]-ben permutációcsoportok adott elemszámú véges halmazon értelmezett többváltozós függvények invarianciacsoportjaiként való reprezentálásával foglalkozunk. Teljes karakterizációját adjuk a reprezentálható csoportoknak bizonyos esetben, valamint megmutatjuk, hogy minden primitív permutációcsoport reprezentálható háromelemű halmazon értelmezett függvény invarianciacsoportjaként.

A [3] és [6] cikkek Boole-függvények gyakorlati alkalmazásaihoz kapcsolódnak. A monoton Boole-függvények által kifeszített valós vektortér leírását adjuk [6]-ban, és ennek segítségével általánosítjuk egy többkomponensű rendszer élettartama és a komponensei élettartama (mint véletlen változók) közötti korábban ismert összefüggéseket. Couceiro, Földes és Lehtonen bevezetett Boole-függvényekre egy új, a többségi függvényre építő normálformát, és megmutatta, hogy ez hatékonyabb, mint a klasszikus diszjunktív normálforma vagy a Zsegalkin-polinom. A [3] cikkben algoritmust adunk egy ilyen normálforma megkonstruálására.

A [21] cikkben pszeudo-Boole-függvényeken értelmezett „differenciáloperátorokat” tanulmányozunk, és bizonyos felcserélhetőségi tulajdonságokkal jellemezzük a lokálisan monoton függvényeket.

Az analízisből ismert függvényegyenletek diszkrét megfelelőit vizsgáljuk a [30] dolgozatban.

A majdnem faktorizálható inverz félcsoportok alapvető, és az E -unitér inverz félcsoportokhoz viszonyítva duális szerepet játszanak az inverz félcsoportok struktúraelméletében (lásd [L]). E témakör fő eredményeit számos bővebb osztályra (pl. ortodox, gyengén tágas, ill. szigorúan lokálisan inverz félcsoportokra) kiterjesztették. A [7] cikkben bevezetjük a majdnem faktorizálhatóság fogalmát az összes lokálisan inverz félcsoportok osztályában. Ilyen általánosságban „nem működnek” az említett részosztályokban alkalmazott definíciók megfelelői, új megközelítés szükséges. A kapott fogalom azonban jól illeszkedik egyrészt a korábbi, szűkebb osztályokban bevezetett definíciókhoz, másrészt jól illeszkedik a lokálisan inverz félcsoportok struktúraelméletébe. A cikk fő eredménye szerint az így definiált majdnem faktorizálható lokálisan inverz félcsoportok és az 1980-as évek közepén bevezetett gyengén E -unitér lokálisan inverz félcsoportok egymás duálisai.

A matematika több területén egymástól függetlenül vizsgáltak bizonyos unér művelettel rendelkező, parciális leképezésekből álló félcsoportokat, melyek absztrakt megfelelőit a félcsoportelméletben jelenleg balmegszorításos félcsoportoknak, bal-jobb szimmetrikus változatukat pedig megszorításos félcsoportoknak hívják. Az utóbbi évtizedekben számos inverz félcsoportokra vonatkozó struktúrátételt általánosítottak ilyen félcsoportokra. Az E -unitér inverz félcsoportok megfelelői itt az ún. valódi balmegszorításos, ill. valódi megszorításos félcsoportok. A [24] cikkben szükséges és elegendő feltételt adunk arra, hogy egy valódi balmegszorításos félcsoport mikor ágyazható be félháló tetszőleges monoiddal vett ún. W -szorzatába, a [27] dolgozatban pedig a lényegesen bonyolultabb, de ezzel analóg problémát oldjuk meg valódi megszorításos félcsoportok esetében.

Azt mondjuk, hogy egy algebrának van véges relációbázisa, ha a klónja véges sok kompatibilis relációval definiálható. Aichinger, McKenzie és Mayr bebizonyította [AMM], hogy minden élkifejezéssel rendelkező algebrának van véges relációbázisa, tehát ezen algebrák örökletesen véges relációbázissal rendelkeznek. A [16] cikkben ennek a fordítottját bizonyítjuk: megmutatjuk, hogy ha egy idempotens véges algebra örökletesen véges relációbázissal rendelkezik, akkor van élkifejezése. Következésképpen igazoljuk, hogy Valerioté-nak a kongruenciamoduláris varietást generáló véges relációstruktúrákra megfogalmazott sejtése ekvivalens azzal az állítással, hogy a kongruenciamoduláris varietást generáló, véges relációbázissal rendelkező véges idempotens algebrák osztálya zárt az idempotens műveletekkel való kiterjesztésre.

A homomorfizmus-problémára vonatkozó dichotómia-sejtés bizonyítása a véges szélességű algebrák osztályára, illetve a kevés részhatvánnyal rendelkező algebrák osztályára már ismert. Mind a két esetben egy polinom idejű algoritmus helyességét kell igazolni. A [33] cikkben ezen két teljesen különböző algoritmust sikerül ötvözni, és ezzel az eddigieknél bővebb algebraosztályra, a véges szélességű és kevés részhatvánnyal rendelkező algebrák által generált pszeudovarietásra igazoljuk a dichotómia-sejtést. A [34] kéziratban a dichotómia-sejtést olyan speciális algebraosztályra bizonyítjuk, amely a félháló- és Malcev-művelettel rendelkező idempotens varietások szorzatában van, de az ismert módszerekkel (beleértve a [33] eredményt is) eddig nem volt kezelhető. A bizonyítás egy technikai feltétel miatt sajnos csak olyan algebrákra működik, ahol a félhálóművelet által meghatározott rendezés faszerű. Ezt a technikai megkötést szeretnénk a továbbiakban kiküszöbölni, és úgy publikálni az eredményt.

A [8] cikkben véges algebrák feletti polinom-egyenletrendszerek megoldhatóságának

bonyolultságát vizsgáljuk, és nagyon általános algebraosztályok esetén bizonyítunk dichotómiatételeket. Például belátjuk, hogy a polinom-egyenletrendszerek megoldhatósági problémája vagy polinomidőben megoldható, vagy NP-teljes a Hobby-McKenzie-féle 1-es típusú nem rendelkező véges algebraik felett. A polinomidejű eseteket algebrai feltételekkel jellemezzük.

[17]-ben a kompatibilis többségi műveletekkel rendelkező reflexív irányított gráfokat vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy ha egy véges reflexív irányított gráfnak vannak Gumm-műveletei, akkor többségi művelete is van. Ezzel igazoljuk Valerioté egy sejtését a reflexív irányított gráfok speciális esetére. Belátjuk, hogy a többségi műveletekkel rendelkező véges reflexív irányított gráfoknak minden akadálya faszerű, így rendelkeznek tetszőleges változószámú totálisan szimmetrikus idempotens művelettel is. Az említett eredményeinket felhasználva polinom idejű algoritmust adunk annak eldöntésére, hogy egy véges reflexív irányított gráf rendelkezik-e többségi művelettel. Megemlítjük, hogy nemrégiben Bartonak [B] sikerült Valerioté sejtését teljes általánosságban bizonyítania, részben a [17] cikkünkben szereplő ötletet felhasználva.

Az (n,k) -paraméterű Kneser-gráf az a gráf, amelynek csúcshalmaza a $(2n+k)$ -elemű halmaz n -elemű részhalmazainak halmaza, élhalmaza pedig a diszjunkt csúcspárokból álló halmaz. Stahl sejtése azt állítja, hogy pontosan akkor van homomorfizmus az (n,k) -paraméterű Kneser-gráfból az (n',k') -paraméterű Kneser-gráfba, ha k'/k legalább akkora, mint n'/n felső egész része. A sejtést rögzített n , k és tetszőleges n' , k' értékek esetén tanulmányozzuk. Vizsgálatainkat megelőzően $n=4$ és $k=2$ voltak a legkisebb paraméterértékek, amelyekre a sejtés nyitott volt. A [26] cikkben n és k ezen értékei mellett igazoljuk a sejtést. Bár a bizonyítást hagyományos eszközökkel végezzük, vizsgálatainkban számítógépes programokat is felhasználunk.

Irodalomjegyzék

[AMM] Aichinger E, Mayr P, McKenzie R, On the number of finite algebraic structures, Journal of the European Mathematical Society (JEMS), in press.

[B] Barto L, A proof of the Valerioté conjecture, kézirat.

[D] Day A, A characterization of modularity for congruence lattices of algebras, Canad. Math. Bull. 12:167-173, 1969.

[G] Gumm HP, Congruence modularity is permutability composed with distributivity, Arch. Math. (Basel) 36:569-576, 1981.

[Lau] Lau D, Function algebras on finite sets, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[L] Lawson MV, Inverse semigroups: the theory of partial symmetries, World Scientific, Singapore, 1998.

[R] Rosenberg IG, Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken, Rozprawy Ceskoslovenske Akad. Ved, Rada Mat. Prirod. Ved 80:3-93, 1970.

[W] Wiegold J, Growth sequences of finite groups III, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 25:142-144, 1978.