

## Szakmai zárójelentés (OTKA F-046061)

Az F-046061 számú OTKA pályázat kutatási szerződésében foglaltaktól egyetlen lényeges pontban történt eltérés. 2007 decemberében kérvényeztük a támogatás időtartamának a pénzmaradványok terhére történő meghosszabbítását, így a támogatott időszak a 2004. január 1. és 2008. december 31. közötti öt évet foglalta magába.

A fent említett időszakban kutatásaink a pályázathoz benyújtott munkatervhez híven három területre koncentráltak. Az első a regressziós modellek paraméterbecsléseivel foglalkozott. Itt először egy, a lineáris modellekre An, Hickernell, Zhu (1997) által kifejlesztett Fourier transzformáltakon alapuló paraméterbecslési módszert terjesztettünk ki klasszikus nemlineáris modellekre (Baran, 2005a). Erősen keverő hibákat feltételezve igazoltuk a paraméterbecslések konzisztenciáját és aszimptotikus normalitását. Elméleti eredményeinket széleskörű számítógépes szimulációval is alátámasztottuk. Sajnálatos módon a kapott becslést eddig nem sikerült kiterjeszteni hiba a változóban típusú modellekre és nem sikerült közölhető eredményt elérnünk a növekvő paramétertartományt sűrűsödő megfigyelésekkel párosító modellek esetén sem.

Vizsgáltuk még az

$$X_{k,\ell} = \alpha X_{k-1,\ell} + \beta X_{k,\ell-1} + \varepsilon_{k,\ell} \quad (1)$$

alakú térbeli autoregressziós folyamat paramétereinek legkisebb négyzetes becslését. Először igazoltuk, hogy a becslés – eltérően az időbeli AR(1) folyamattól – mind a stabil ( $|\alpha| + |\beta| < 1$ ), mind pedig az instabil ( $|\alpha| + |\beta| = 1$ ) esetben aszimptotikusan normális. A bizonyítás során jelentős nehézséget okozott az a tény, hogy az  $|\alpha| + |\beta| = 1$ ,  $0 < |\alpha| < 1$  esetben a kapott határeloszlás elfajuló. Az eredményeinket ismertető dolgozatra (Baran, Pap, van Zuijlen, 2007), pontosabban az annak előzményeként szolgáló kutatási jelentésre, eddig két független hivatkozást kaptunk. Megvizsgáltuk továbbá az (1) modell közel instabil változatát is (stabil modellek sorozata, instabil helyzethez tartó paraméterekkel), és itt is beláttuk a legkisebb négyzetes becslés aszimptotikus normalitását (Baran, Pap, 2009a).

Az (1) modell egy lehetséges általánosítása, hogy bevezetjük a „múlt”  $X_{k-1,\ell-1}$  alakú komponensétől való függést. E téren vannak kezdeti eredményeink, melyeket ebben az évben először egy konferencia előadás formájában szeretnénk ismertetni. A másik lehetséges általánosítás a szimultán autoregresszió (SAR), amikor a folyamat egy adott pontban felvett értéke a körülötte lévő pontokban felvett értékek lineáris kombinációjának és a zajfolyamatnak az összege. Ez egy régóta vizsgált és roppant nehéz probléma, eddig csupán egy speciális időbeli SAR modell esetén sikerült eredményeket elérnünk (Baran, Pap, 2009b).

Lazábban bár, de ugyanehhez a témakörhöz tartozik két olyan vizsgálat is, melyek eredetileg nem szerepeltek a munkatervben. Az egyikben egy Wiener mező eltolás-paraméterének maximum likelihood becslését határoztuk meg egy meglehetősen általános megfigyelési tartomány esetén (Baran, Pap, van Zuijlen, 2009). A másik egy alkalmazott statisztikai kutatás, mely során az Ogi Longitudinális Növekedési Vizsgálatban részt vett fiúk hat anthropometriai jellemzőjére (magasság, ülőmagasság, csípőtővis magasság, felső végtag hossza, vállszélesség, csípőszélesség) illesztett nemlineáris regressziós modell segítségével vizsgáltuk e jellemzők maximális illetve minimális növekedésének serdülőkori mutatóit (Csukás, Takai, Baran, 2006). Ez utóbbi munkánkra eddig két tőlünk független dolgozatban hivatkoztak.

Második kutatási témaként lokálisan kompakt topológikus csoportokon, Lie-csoportokon értelmezett valószínűségi mértékek analitikus és algebrai tulajdonságait vizsgáltuk. Sikertült explicit képletet nyernünk Heisenberg-csoporton értelmezett Gauss-mértékek Fourier-transzformáltjára. Mindezen túl szükséges és elegendő feltételeket találtunk arra vonatkozóan, hogy mikor lesz két, a Heisenberg-csoporton értelmezett Gauss-mérték konvolúciója újra Gauss-mérték (Barczy, Pap, 2006a).

Eredményesen alkalmaztuk Gaiser (1994) lokálisan kompakt Abel-csoportokra vonatkozó központi határeloszlás tételét speciális lokálisan kompakt Abel topológikus csoportokra, nevezetesen a tórusz, a  $p$ -adikus egészek és a szolenoid esetén (Barczy, Bendikov, Pap, 2008). A fenti Abel-csoportok esetén sikerült tetszőleges gyengén korlátlanul osztható valószínűségi mérték konstrukcióját megadni valós értékű valószínűségi változók segítségével (Barczy, Pap, 2008a). Eredményeink speciális eseteként a szolenoidon adott Haar-mérték egy új előállítását nyertük (Barczy, Pap, 2008a). Mindezek mellett sikerült a portmanteau tételt általánosítanunk nem korlátos mértékekre (Barczy, Pap, 2006b). Eredményeinkre eddig összesen három tőlünk független hivatkozás érkezett.

Az eredeti munkatervben az absztrakt csoportokon értelmezett valószínűségi mértékek vizsgálatával kapcsolatban célként megjelöltük még a központi határeloszlás-tételek vizsgálatát és a konvergencia sebesség becslését az euklideszi mozgások, ill. általában egy kompakt csoport és egy nilpotens Lie-csoport szemidirekt szorzatán. Ezen témák kidolgozása még várat magára.

A munkatervben célként szintén megjelölt diffúziós folyamatokkal, feltételes diffúziós folyamatokkal kapcsolatban az alábbi eredményeket értük el. Foglalkoztunk feltételes diffúziós folyamatok definíciójának precíz megadásával, valamint ilyen folyamatok egyértelműségének vizsgálatával. Teljes szeparábilis metrikus térbeli értékű, időhomogén Markov-folyamatokból származtatott hidak olyan konstrukcióját adtuk meg, mely csak az átmeneti sűrűségfüggvényeket használja (Barczy, Pap, 2005). Megmutattuk, hogy bizonyos többdimenziós Ornstein-Uhlenbeck folyamatok esetén az ún. radiális rész képzése és a 0-végpontú hídképzés felcserélhető (Barczy, Pap, 2005).

Barczy Máttyás Peter Becker-Kernnel közösen többdimenziós Ornstein-Uhlenbeck-típusú hidak integrál- és ún. anticipatív reprezentációját bizonyította, összevetve az eredményeit a már létező egyéb előállításokkal. Általánosította továbbá a Mansuy (2004) által bevezetett ún. alpha-Wiener hidak fogalmát, megvizsgálva azt a kérdést, hogy származtathatóak-e a bevezetett általánosított alpha-Wiener hidak Ornstein-Uhlenbeck-típusú folyamatokból hídképzés segítségével. Ezen kéziratok befejezése még várat magára.

A diffúziós folyamatok elméletéhez kötődő, Pap Gyulával közösen végezett kutató munka három részre bontható: paraméterbecslés, Laplace-transzformáltak explicit meghatározása és regularitási tulajdonságok vizsgálata. Időhomogén diffúziós folyamatok drift együtthatójában szereplő paraméterek maximum likelihood becslésének aszimptotikáját vizsgáltuk az ún. szinguláris esetben (Barczy, Pap, 2008b). Sikerült elegendő feltételeket adni arra vonatkozóan, hogy a határeloszlás az ún. Dickey-Fuller statisztika eloszlása (Barczy, Pap, 2008b). Sikerült bizonyos típusú időhomogén diffúziós folyamatok bizonyos funkcionáljainak a Laplace-transzformáltját explicit módon meghatározni (Barczy, Pap, 2008c). Ezen explicit formula jól használhatónak bizonyult a fent említett maximum likelihood becslés aszimptotikájának vizsgálatában is. Megmutattuk továbbá, hogy különböző paraméterű alpha-Wiener hidak által generált valószínűségi mértékek szingulárisak, illetve vizsgáltuk az alpha-Wiener hidak trajektóriáinak regularitási tulajdonságait is (Barczy, Pap, 2008d). Eredményeinkre eddig összesen egy tőlünk független hivatkozás érkezett.

Pénzügyi matematika terén kutatásunk fő témáját diszkrét idejű forward kamatlábmodellek vizsgálata jelentette. Ezen vizsgálatokat Pap Gyula és Martien van Zuijlen professzorokkal közösen végeztük. Ezen modellek sajátága, hogy a különböző lejáratig hátralevő időkhöz tartozó forward kamatlábakat egy véletlen mező hajtja meg. Ilyen modellek arbitrázsmentességi problémáival már a pályázatot megelőző években is foglalkoztunk. Ezek alapján jelent meg kisebb változtatásokkal az alapmodelleket és az arbitrázsmentességet garantáló drift feltételeket tartalmazó munkánk (Gáll, J., Pap, G., van Zuijlen, M., 2006a).

Kutatásaink fókuszában ezen modellekkal kapcsolatos statisztikai vizsgálatok voltak. Korábbi munkánkban kizárólag a volatilitás paraméterének maximum likelihood becslését vizsgáltuk, és igazoltuk annak aszimptotikus normalitását különböző esetekben (Gáll, J., Pap, G., van Zuijlen, M., 2004). A pályázat ideje alatt rátértünk a gyakorlati szempontból sokkal lényegesebb együttes paraméterbecslési kérdésekre. Ehhez a forward kamatlábmodellek meghajtó mezőjének egy térbeli autoregressziós mezőt választottunk, a motivációt a folytonos idejű analógiákból vettük, és megvizsgáltunk néhány alternatív market price of risk struktúrát. Az arbitrázsmentességi feltételek alapján bevezetett sztochasztikus diszkonttényezőt úgy választottuk, hogy abban egy vektor adta a piacra jellemző market price of risk paramétereket. Ezen modellben vizsgáltuk a volatilitás és az fent leírt paraméterek együttes maximum likelihood becslését. A korábbi volatilitásra

vonatkozó ML becslésekkel ellentétben az ML becsléseknek itt nincs elérhető explicit alakja. Így azokat numerikusan kell közelíteni. A nem független és nem azonos eloszlású mintán felírt ML probléma esetén a fenti nehézségek ellenére igazoltuk az együttes ML paraméterbecslés erős konzisztenciáját, továbbá azok aszimptotikus normalitását (melyben egyes normáló tényezők eltérőek). A fő eredményeket foglalja össze Gáll, J., Pap, G., van Zuijlen, M. (2006b). A fenti becslések (és a szükséges numerikus eljárások) empirikus tesztelése is elkezdődött. Itt egyrészt szimulációk segítségével vizsgáltuk a becslések kismintás viselkedését (hiszen elméleti eredményeink rendre aszimptotikusak), továbbá modellszelekciós empirikus kérdéseket vizsgáltunk különböző paraméterszámú modellek összevetésére. Végül néhány példán teszteltük a modellválasztás következményeit, hatását a Value at Risk értékére a fenti forward kamatlábakkal leírt kötvények esetén. Ezen vizsgálatokról néhány korai eredményt tartalmaz Gáll, J., Pap, G., Peeters, W. (2007), beszámoltunk róluk nemzetközi konferenciákon, és van egy jelenleg is készülő dolgozat. A kutatási tervben megjelölt kamatlábderivatívák árazásával kapcsolatban viszont nem értünk el eredményeket.

A fenti kamatlábmodellekben elkezdődött a modellszelekciós kérdések elméleti vizsgálata is. Itt elsősorban likelihood hányados próbák kialakítása történt meg, illetve igazoltuk a próbatesztstatistikák aszimptotikus viselkedését, amelyek alapján megtörténhet a különböző paraméterszámú modellek összehasonlítása. Ezen eredményeink leírása jelenleg is folyamatban van, így azokról 2009 során tervezünk közleményt benyújtani.

A fentiek mellett egy dolgozatban működési kockázat veszteségeloszlásalapú megközelítésével foglalkoztunk és összefoglaltuk a megközelítés lényegi elemeit, továbbá a gyakorlati alkalmazás néhány kulcskérdését és problémáját (Gáll, J., Nagy, G., 2007).

Mindezeken túl statisztikai modelleket illesztettünk az elmúlt évtizedek magyar mortalitási adataira. A biztosítástanban jól ismert Lee-Carter módszerből kiindulva magyarországi halandósági adatok alapján megalkottuk a klasszikus modell egy, a magyar esetre az eredetnél jobban illeszkedő általánosított variánsát és ennek alapján előrejelzéseket adtunk a magyar halandósági ráták alakulására (Baran *et al.*, 2007). A téma aktualitását jelzi, hogy e munkánkra még a megjelenés évében hivatkozott egy svéd kolléga.

Egy másik alkalmazott kutatási témánk a pénzügyi matematikához és ökonometriához kapcsolódóan makrogazdasági adatok statisztikai vizsgálata volt, amely mögött szintén aktuárius alkalmazások jelentették a motivációt. Ennek során a klasszikus ún. Wilkie modellt vettük alapul, továbbá vizsgáltunk természetesen adódó alternatívákat, módosításokat. A vizsgált idősormodelleket illesztettük néhány magyar makrogazdasági adatsorra (infláció, bérek ill. bérindex, hozamindex) és segítségével elkészítettük ezen mutatók előrejelzését (Baran *et al.*, 2009).

Az elméleti és alkalmazott kutatásokon túl foglalkoztunk oktatási tananyagok fejlesztésével is. Erről ad számot a pályázat időtartama alatt elkészített három példatár:

Barczy, Pap (2006c), Barczy (2009) és Baran (2005b). Az első két példatár diszkrét idejű Markov-láncok, illetve diszkrét idejű opcióárazás témaköréből tartalmaz feladatokat, valamennyi kitűzött példához részletes mintamegoldást adva. Hasonló szerkezetű a harmadik is, de ott csak a feladatok egy része van részletesen kidolgozva. Bővítésre került további két jegyzet. A *Hasznosság alapú portfólió-menedzsment* című tananyag (Gáll, J., Pap, G., 2005) egy kockázati mértékeket tárgyaló fejezettel bővült, bemutatva a koherens mértékek, a Value at Risk és az expected shortfall alapjait. A jegyzet mind angol mind magyar vátozatban bővítésre került. Továbbá elkészült az elsősorban abszolút folytonos esetekkel bővített változata az *Információelmélet* című jegyzetnek (Gáll, J., Pap, G., 2005). Elkészült még egy rövid ismertetése a Matlab néhány alapvető pénzügyi matematikai eszközének, mely megjelenésre került egy S. Gisbert által szerkesztett, a Matlab alapjait, toolboxait ismertető könyvben (Gáll, J., 2005).

A támogatott kutatási időszak eredményeit folyóiratcikkekben történő publikálásukat megelőzően rangos nemzetközi valószínűségszámítással, statisztikával illetve pénzügyi matematikával foglalkozó konferenciákon (pl. *25th and 26th European Meeting of Statisticians, 9th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Numerical Methods in Finance*) ismertették.

Végezetül itt jegyeznénk meg, hogy a támogatási időszak alatt a pályázatban résztvevő mindhárom kutató karrierjében jelentős szakmai előrelépés történt. Baran Sándor 2005 decemberében védte meg habilitációs értekezését, Barczy Mátyás és Gáll József pedig 2006-ban illetve 2008-ban szerzett PhD fokozatot.

## Hivatkozások

- An, H-Z., Hickernell, F. J. and Zhu, L-X. (1997) A new class of consistent estimators for stochastic linear regressive models. *J. Multivariate Anal.* **63**, 242–258.
- Baran, S. (2005a) A consistent estimator for nonlinear regression models. *Metrika* **62**, 1–15.
- Baran, S. (2005b) *Feladatok a hipotézisvizsgálat témaköréből*. mobiDIÁK Könyvtár, Debreceni Egyetem. <http://mobidiak.inf.unideb.hu>.
- Baran, S., Gáll, J., Ispány, M., Pap, G. (2007) Forecasting Hungarian mortality rates using the Lee-Carter method. *Acta Oeconomica* **57**, 25–38.
- Baran, S., Gáll, J., Ispány, M., Pap, G. (2009) Stochastic models of Hungarian economic variables for actuarial use. *Acta Oeconomica*, közlésre benyújtva.

- Baran, S., Pap, G. (2009a) Asymptotic behaviour of the least squares estimator in a nearly unstable sequence of stationary spatial AR models. *J. Multivariate Anal.* **100**, 686–698.
- Baran, S., Pap, G. (2009b) Asymptotic inference for a one-dimensional simultaneous autoregressive model. *Metrika*, közlésre benyújtva.
- Baran, S., Pap, G., Zuijlen, M. v. (2007) Asymptotic inference for unit roots in spatial triangular autoregression. *Acta Appl. Math.* **96**, 17–42.
- Baran, S., Pap, G., Zuijlen, M. v. (2009) Parameter estimation of a shifted Wiener sheet. *Statistics*, közlésre benyújtva.
- Barczy, M., Pap, G. (2005) Connection between deriving bridges and radial parts from multidimensional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Period. Math. Hungar.* **50**, 47–60.
- Barczy, M., Pap, G. (2006a) Fourier transform of a Gaussian measure on the Heisenberg group. *Ann. Inst. H. Poincaré Prob. Statist.* **42**, 607–633.
- Barczy, M., Pap, G. (2006b) Portmanteau theorem for unbounded measures. *Statist. Probab. Lett.* **76**, 1831–1835.
- Barczy M., Pap Gy. (2006c) Sztochasztikus folyamatok, Példatár és elméleti kiegészítések, II. rész (Diszkrét idejű Markov-láncok)  
 URL: [http://www.inf.unideb.hu/valseg/dolgozok/barczy/sztoc\\_foly\\_gyak2.pdf](http://www.inf.unideb.hu/valseg/dolgozok/barczy/sztoc_foly_gyak2.pdf)
- Barczy, M., Bendikov, A., Pap, G. (2008) Limit theorems on locally compact Abelian groups. *Math. Nachr.* **281**, 1–20.
- Barczy, M., Pap, G. (2008a) Weakly infinitely divisible measures on some locally compact Abelian groups. *Lith. Math. J.* **48**, 17–29.
- Barczy, M., Pap, G. (2008b) Asymptotic behavior of maximum likelihood estimator for time inhomogeneous diffusion processes. ARXIV: 0810.2688. *J. Statist. Plann. Inference*, közlésre benyújtva.
- Barczy, M., Pap, G. (2008c) Explicit formulas for Laplace transforms of certain functionals of some time inhomogeneous diffusions. ARXIV: 0810.2930. *J. Math. Anal. Appl.* közlésre benyújtva.
- Barczy, M., Pap, G. (2008d) Alpha-Wiener bridges: singularity of induced measures and sample path properties. ARXIV: 0810.3070. *Stoch. Anal. Appl.*, közlésre elfogadva.



- Barczy M. (2009) Pénzügyi matematika, Példatár és elméleti kiegészítések, II. rész, (Opcióárazás diszkrét időben)  
 URL: [http://www.inf.unideb.hu/valseg/dolgozok/barczy/pmat2\\_gyak.pdf](http://www.inf.unideb.hu/valseg/dolgozok/barczy/pmat2_gyak.pdf)
- Csukás, A., Takai, S., Baran, S. (2006) Adolescent growth in main somatometric traits of Japanese boys: Ogi Longitudinal Growth Study. *HOMO* **57**, 73–86.
- Gáll, J (2005) A Financial Toolbox, In Gisbert, S. (szerk.), *Matlab, frissített kiadás, Numerikus módszerek, grafika, statisztika, eszköztárak*, Typotex, Budapest.
- Gáll, J., Pap, G., van Zuijlen, M. (2004) Maximum likelihood estimator of the volatility of forward rates driven by geometric spatial AR sheet, *J. Appl. Math.* **4**, 293–309.
- Gáll, J., Pap, G. (2005) Hasznosság alapú portfólió-menedzsment, <http://iam035.inf.unideb.hu/mobidiak/listdocument.mobi?id=50>,  
 angol verzió: Gáll, J., Pap, G., van Zuijlen, M. (2005) An introduction to portfolio management, <http://iam035.inf.unideb.hu/mobidiak/listdocument.mobi?id=51>.
- Gáll, J., Pap, G. (2005) Információelmélet,  
<http://iam035.inf.unideb.hu/mobidiak/listdocument.mobi?id=49>.
- Gáll, J., Pap, G., van Zuijlen, M. (2006a) Forward interest rate curves in discrete time settings driven by random fields, *Comp. Math. Appl.* **51**, 387–396.
- Gáll, J., Pap, G., van Zuijlen, M. (2006b) Joint ML estimation of all parameters in a discrete time random field HJM type interest rate model, *Report No. 0606 (July)*, Radboud University of Nijmegen, The Netherlands.
- Gáll, J., Pap, G., Peeters, W. (2007) Random field forward interest rate models, market price of risk and their statistics, *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.* **53**, 233–242.
- Gáll, J., Nagy, G. (2007) A működési kockázat veszteségeloszlás-alapú modellezése (Loss Distribution Approach, LDA). *Hitelintézeti Szemle, (VI.)* **4**, 386–412.
- Gaiser, J. (1994) Konvergenz stochastischer prozesse mit werten in einer lokalkompakten Abelschen gruppe, *Ph.D. Thesis*. Universität Tübingen.
- Mansuy, R. (2004) On a one-parameter generalization of the Brownian bridge and associated quadratic functionals. *J. Theoret. Probab.* **17**, 1021–1029.