Renormálási csoport Wilson és Gell-Mann–Low módra

Fejős Gergely*
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Fizikai Intézet, Atomfizikai tanszék

A renormálási csoport (RG), mint matematikai eszköz a fizika gyakorlatilag minden olyan ágában előfordul, ahol sokrészecskés kvantumrendszerek vizsgálata van a középpontban. A fizika a 20. század második felében végbement fejlődésére visszatekintve a renormálási csoport annak egyik legkorszakalkotóbb felfedezésének tekintendő, mely alapjaiban változtatta meg a kvantummezők és a rájuk épülő kölcsönhatások megértését. Segítségével vagyunk képesek leírni, hogy egy fizikai rendszer jellemzői hogyan változnak attól függően, hogy milyen méretskálán tekintünk rá. Jelenségek széles tárháza vált megmagyarázhatóvá a módszer alkalmazásával az elemi kölcsönhatások viselkedésétől a másodrendű fázisátalakulások univerzalitásán át az einsteini általános relativitáselmélet lehetséges kvantumos kiterjesztéséig (aszimptotikus biztonság).

Az RG-nek rengeteg változata létezik, de történetileg két variáns különösen fontos szerepet töltött be a skálaváltozáshoz kapcsolódó jelenségek megértését illetően. Az első a Gell-Mann–Low, vagy ismertebb nevén a térelméleti renormálási csoport, mely túlnyomó részben az elemi részek fizikájában használatos. Utóbbi mutatott rá elsőként arra, hogy egy adott, karakterisztikus E energiaskálán végbemenő folyamat valószínűségi amplitudójának perturbatív kifejtésében megjelenő, az energia logaritmusával skálázó járulékok, melyek nagy E esetén tönkreteszik a perturbatív kifejtést, az ún. futó csatolás bevezetésével, illetve a renormálási skála megfelelő választásával felösszegezhetők, így a perturbációszámítás nem szükségszerűen divergens. A másik változat, mely Wilson nevéhez kötődik, pedig azt mutatta meg, hogy móduseliminációval hogyan lehet infravörös divergenciáktól mentesen leírni egy önhasonló statisztikus fizikai rendszer viselkedését a kritikus pontban. A két alkalmazás és a szóban forgó matematikai megfogalmazások annyira távolinak tűnnek, hogy első hallásra kevéssé érthető, hogy mind Gell-Mann és Low, mind Wilson ugyanazt a fizikai ötletet valósítják meg. Jelen ismeretterjesztő írás célja az, hogy ezt egyszerű, könnyen emészthető formában demonstrálja, miközben mélyebb megértést tegyen lehetővé azok számára is, akik inkább az egyik, vagy a másik változatot ismerik jobban.

A renormálási csoport kialakulásának felidézésekor érdemes tudni, hogy annak alapötlete valójában a méltatlanul kevés elismerést kapott Stückelberg és Petermann (1953) nevéhez fűződik [1], akik már Gell-Mann és Low (1954) [2] előtt letették a módszer alapköveit. Ma ismert formáját Callan és Symanzik (1970) [3, 4] hozzájárulásai nyomán érte el, és Collins által ezidőtájt (1975) nyert megértést a renormálási csoport egyenlet és az anomális skálainvariancia Ward-azonossága közötti kapcsolat is [5]. Wilson (1971) [6–8] Kadanoff munkájára (1966) [9] építkezve dolgozta ki a saját változatát, melyről kiderült, hogy az eredeti megfogalmazásnál általánosabb, és annál jóval intuitívabb is.

Az alábbiakban áttekintjük elsőként a wilsoni, majd a térelméleti renormálási csoport legfontosabb jellegzetességeit, végül pedig a két módszer kapcsolatával, és a közöttük lévő átjárhatóság lehetőségével foglalkozunk.

A wilsoni renormálási csoport

A wilsoni renormálási csoport alapgondolatát – mely a fluktuációk szukcesszív kiintegrálását jelenti – annak modern, ún. funkcionális köntösében mutatjuk be. Az így létrejött módszer, mely fizikailag semmi lényegi különbséget nem hordoz az eredeti, Wilson által megfogalmazott változathoz képest, a funkcionális renormálási csoport (FRG) nevet viseli, és legelterjedtebb alakját Wetterich (1993) vezette le [10].

Cikkünkben az egyszerűség kedvéért végig egy végtelen nagy kiterjedésű, d dimenziós, négyzetes rácson ülő, valós ϕ változó által leírható fizikai rendszerrel foglalkozunk. Az egyensúlyi statisztikus fizikában használatos állapotösszeg pályaintegrál reprezentációja ekkor

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp\big(- \int \mathcal{L}[\phi]\big), \tag{1}$$

ahol $\mathcal{L}$ a szóban forgó fizikai rendszer euklideszi Lagrange-függvénye. Az exponenciális függvény argumentumában szereplő integrál képzetes időre és a d dimenziós térfogatra vonatkozik, $\int \equiv \int_0^\beta d\tau \int d^d x$, ahol $\beta = 1/T$ az inverz hőmérséklet. A továbbiakban úgy gondolkozunk, hogy a képzetes időben fluktuáló járulékok kiszámítását formálisan el lehet végezni (pl. Matsubara-formalizmusban), mely után az (1) egyenlettel alakilag azonos összefüggést kapunk, de benne már egy effektív Lagrange-függvény, illetve a hozzá tartozó effektív mező szerepel, mely már csak a valós, d dimenziós tér függvénye. Természetesen az effektív Lagrange-függvény paraméterei ezáltal hőmérsékletfüggővé válnak, de ezek pontos alakjára nem lesz szükségünk.

A wilsoni renormálási csoport alapgondolata az, hogy (1)-ben a funkcionális integrálást Fourier-módusok szerint szukcesszíve végezzük el, magas hullámszámoktól az alacsonyabbak felé haladva. Ennek fő motivációja az, hogy ha a fluktuációk kiszámítása végett perturbációszámítást építenénk fel $\mathcal{L}$ valamely kicsiny paramétere(i) szerint, a kritikus pontban infravörös divergenciákat kapnánk. A fenti ötlet szerint azonban, a hullámszámok között fokozatosan lépdelve az utóbbi probléma biztosan el-

* gergely.fejos@ttk.elte.hu

kerülhető, hiszen a leghosszabb hullámhosszú módusokat sosem érintjük. Két közbenső skála közötti kiintegrálás műveletét nevezzük renormálási csoport transzformációnak. Az eredeti gondolatmenet szerint Z minden lépés után előáll egy redukált funkcionálintegrál alakjában,

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_<^{(k)} \exp\big(- \int \mathcal{L}_k[\phi]\big), \tag{2}$$

ahol a funkcionális integrációs mértékben, és a Lagrange-függvényben is felbukkanó k skálaparaméter (cutoff) azt a közbenső hullámszámot jelzi, amelyen túli módusokat már figyelembe vettük (tehát csak az ennél kisebbekre van integrálás). Wilson az $\mathcal{L}_k$ függvényre, pontosabban az abban szereplő csatolások k-függésére állított fel differenciálegyenleteket, melyek $k \to 0$ megoldásával vizsgálta Z tulajdonságait. Ezzel komplementer, de teljesen ekvivalens megfogalmazás, hogy $\mathcal{L}$ helyett Z-nek adunk k-függést, ahol definíció szerint

$$Z_k = \int \mathcal{D}\phi_>^{(k)} \exp\big(- \int \mathcal{L}[\phi]\big). \tag{3}$$

Utóbbi abban az értelemben komplementer (2) -höz képest, hogy itt a k-nál nagyobb módusokra integrálunk, és ezesetben Z_k -ra állíthatunk fel differenciálegyenletet. Mind a (2), mind a (3) megfogalmzazás esetében úgy gondolkozunk, hogy valamilyen, a rendszerre jellemző mikroszkopikus Λ skálától $k = 0$ -ig összeadjuk az összes módus járulékát, ezzel végeredményben a teljes Z állapotösszeget állítjuk elő. Egy statisztikus fizikai rendszerben tipikusan $\Lambda \sim 1/a$, ahol a rendszert jellemző mikroszkopikus összetevők távolsága (rácsállandó), míg egy kontinuum sok változót tartalmazó térelméletben értelemszerűen $\Lambda = \infty$.

A (3) egyenlet megfogalmazása azért érdekesebb, mert az eredeti gondolatmenet általánosítására ad lehetőséget. A (3) összefüggés szerint Z_k -ban szigorúan csak olyan módusokra integrálunk, melyek hullámszáma nagyobb, mint k. Lehetőségünk van azonban Z_k-t általánosabban is definiálni, melyben az infravörös fluktuációk nem egzaktul vannak kilőve, hanem folytonosan csökkentjük le a hatásukat nullára (a rövidebb hullámhosszak felől közelítve). Ekkor az a karakterisztikus hullámszám, ami szétválasztja a fluktuációkat abból a szempontból, hogy bekerülnek-e effektíve a funkcionálintegrálba, válik a k változóvá. Ezt a konstrukciót egy R_k, ún. regulátor függvényen keresztül érjük el, melynek segítségével a skálafüggő állapotösszeg általánosított definíciója

$$Z_k = \int \mathcal{D}\phi \exp\Big(- \int \mathcal{L}[\phi] - \frac{1}{2}\int\int \phi R_k \phi\Big). \tag{4}$$

A Lagrange-függvény mellé bevezetett reguláló tagot érthetjük direkt, vagy Fourier-térben is:

$$\frac{1}{2}\int\int \phi R_k \phi \equiv \frac{1}{2}\int_x\int_y \phi(\vec{x}) R_k(\vec{x},\vec{y})\phi(\vec{y}) \equiv \frac{1}{2}\int_p\int_q \phi(\vec{p}) R_k(-\vec{p},\vec{q})\phi(-\vec{q}), \tag{5}$$

ahol R_k Fourier-térbeli előállítását érdemes diagonálisnak választani,

$$R_k(\vec{p},\vec{q}) = R_k(\vec{q})(2\pi)^d\delta(\vec{p}+\vec{q}), \tag{6}$$

és a fentieknek megfelelve $R_k(\vec{q})$-tól azt követeljük meg, hogy az infravörös módusok „tömegét” tegye naggyá, befagyasztva ezáltal a fluktuációikat. Eszerint az $R_k(\vec{q})$ függvény $|\vec{q}|^2 \gg k^2$ esetén kicsi, míg $|\vec{q}|^2 \ll k^2$ esetén nagy kell, hogy legyen, a közbenső értékekre pedig valamilyen módon interpolál. Vegyük észre, hogy (4)-ben minden módusra integrálunk, és valójában az R_k függvény hatása következtében lesznek az infravörös fluktuációk fokozatosan kisebb súlyúak a funkcionálintegrálban. Az eredeti wilsoni változatnak, ld. (3), értelemszerűen az

$$R_k^W(\vec{q}) = \lim_{M^2\to\infty} M^2\Theta(k^2 - \vec{q}^{\,2}) \tag{7}$$

élesen levágó regulátor felel meg, ahol az $M^2 \to \infty$ feltétel a k-nál alacsonyabb hullámszámú fluktuációkat egzaktul eliminálja[1]. Ez azonban csak egy speciális választás, és érdemes lehet a regulátorfüggvény specifikációja nélkül felállítani skálafutást leíró differenciálegyenleteket.

Kényelmi okokból valójában nem Z_k-val, hanem a negatív logaritmusának Legendre-transzformáltjával, az ún. effektív hatással érdemes dolgozni. Ehhez első lépésben Z_k-t egy külső J forrás mellett is értelmezzük:

$$Z_k[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\big(- \int \mathcal{L}[\phi] - \frac{1}{2}\int\int \phi R_k\phi - \int J\phi\big), \tag{8}$$

a szóban forgó effektív hatás pedig definíció szerint

$$\Gamma_k[\bar\phi] = -\log Z_k[J] - \int J\bar\phi - \frac{1}{2}\int\int \bar\phi R_k\bar\phi, \tag{9}$$

ahol $\bar\phi = -\delta \log Z_k[J]/\delta J$, a J külső forrás konjugált változója, az átlagtér. Lederiválva (9)-et k szerint, a Γ_k skálafüggő effektív hatás kielégíti a következő renormálási csoport egyenletet:

$$\partial_k\Gamma_k[\bar\phi] = \frac{1}{2}\int\int (\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}\partial_k R_k, \tag{10}$$

melyet Wetterich-egyenletnek is hívunk [10]. Itt $\Gamma_k^{(2)}$ a Γ_k függvény második funkcionális deriváltja $\bar\phi$ háttéren[2], és (10) jobb oldalán szereplő integrál ismét értékelmezhető direkt- vagy Fourier-térben is. Az R_k függvény tulajdonságaiból következően $\Gamma_\Lambda = S$, ahol $S = \int\mathcal{L}$ a klasszikus (mikroszkopikus) hatás, melyben definíció szerint semmilyen fluktuáció nincsen figyelembe véve. Praktikusan,

[1] Az irodalomban sok más regulátorfüggvényt is alkalmaznak. Litim- vagy optimalizált regulátorként vált ismertté pl. a $R_k^L(\vec{q}) = (k^2 - \vec{q}^{\,2})\Theta(k^2 - \vec{q})$ függvény [11].

[2] Többkomponensű térváltozó esetén $\Gamma_k^{(2)}$ mint mátrix áll elő, ekkor a Wetterich-egyenlet jobb oldalán trace is szerepel.

(10) megoldása során a Λ ultraibolya skáláról, S-ből kiindulva leintegrálunk $k \to 0$-ra, hogy megkapjuk a teljes effektív hatást, $\Gamma_{k=0} \equiv \Gamma$-t.

Amennyiben Γ funkcionális deriváltjaiként előálló, ún. valódi vertexeket nulla impulzus mellett szeretnénk kiértékelni, hasznosnak bizonyul az ún. lokális potenciál közelítés (LPA), melyben a

$$\Gamma_k[\phi] = \int_x \Big[\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + V_k(\phi)\Big] \tag{11}$$

közelítéssel élünk. A V_k effektív poteciált Taylor-sor alakban elképzelve,

$$V_k(\phi) = m_k^2\phi^2/2 + \lambda_k\phi^4/4! + u_k\phi^6 + w_k\phi^8..., \tag{12}$$

(10) segítségével a k-függést leíró renormálási csoport egyenleteket vezethetünk le a m_k^2, λ_k, u_k, w_k,... együtthatókra. Ehhez (10) mindkét oldalát ϕ szerint haladó sor alakban írjuk fel, majd azonosítjuk a bal és jobb oldalakon az egyes Taylor-együtthatókat. Vegyük észre, hogy ehhez nyugodtan használhatunk olyan háttérmezőt, mely helyfüggetlen. Egy ilyen esetre megszorítkozva leolvasható, hogy

$$\begin{aligned}\Gamma_k^{(2)}(\vec{p},\vec{q}) &\equiv \Gamma_k^{(2)}(\vec{p})\delta(\vec{p}+\vec{q}) \\ &= (\vec{p}^2 + m_k^2 + \lambda_k\phi^2/2 + ...)\delta(\vec{p}+\vec{q}).\end{aligned} \tag{13}$$

Ezt behelyettesítve (10)-be, a regulátorfüggvény megválasztása után megkaphatjuk a csatolások (nulla impulzusú n-pont vertexek) skálafutását. A wilsoni regulátort használva, ld. (7), (10)-ből a Taylor együtthatók futására, vagyis a rájuk vonatkozó renormálási csoport transzformációkra kapjuk, hogy ($\Omega_d = 2/[(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)]$ a szögintegrálból következik)

$$k\partial_k m_k^2 = -\Omega_d\frac{\lambda_k}{2}\frac{k^d}{k^2+m_k^2}, \tag{14a}$$

$$k\partial_k\lambda_k = \Omega_d\frac{3\lambda_k^2}{2}\frac{k^d}{(k^2+m_k^2)^2}, \tag{14b}$$

ahol a magasabb rendű tagok járulékait elhagytuk, illetve a $\sim\phi^6$ és azon túli Taylor-együtthatók futását nem írtuk le[3]. Mivel másodrendű fázisátalakulások során a szóban forgó fizikai rendszerek skálainvariáns viselkedést mutatnak, Wilson a (14) egyenletek skálázó, ún. fixpont megoldásait (azaz ha $m_k^2 = m_*^2k^2$, $\lambda_k = \lambda_* k^{4-d}$) kereste. Rájött, hogy létez(het)nek olyan nemtriviális fixpontok, melyek a csatolási állandók terében vonzzák a trajektóriákat, ahogy az egyre nagyobb hullámhosszú fluktuációk kiintegrálásra kerülnek. Ezzel rámutatott arra, hogy másodrendű fázisátalakulások során univerzalitás lép fel, az, hogy ultraibolya skálán a csatolások pontosan milyen értéket vesznek fel, nem számít, a fluktuációk „kimossák" a mikroszkopikus részleteket, a rendszerek makroszkopikus skálán ($k \to 0$) ugyanazt a viselkedést mutatják. Eredményeivel sikerrel magyarázta meg a különböző kritikus exponensek megfigyelt értékeit is.

A következő kérdés az, hogy az idáig ismertetett konstrukciónak mi köze van a részecskefizikából ismert térelméleti renormálási csoporthoz. Az alábbiakban erre vonatkozóan keressük a választ.

A térelméleti renormálási csoport

A részletek ismertetése előtt érdemes felidézni, hogy a Gell-Mann és Low neve által is fémjelzett, térelméleti renormálási csoport nevet az a tény szolgáltatja, hogy ebben a keretben a Λ ultraibolya skála végtelennek tekintendő, a mezőinkre szigorúan, mint a tér minden pontjában élő, kontinuum sok dinamikai változóként gondolunk. Fontos azt is tudni, hogy ezek nem kellő körültekintéssel ultraibolya divergenciák megjelenését vonják maguk után, melyek helyes kezelését a renormálási program hajtja végre. A renormálási csoport transzformáció művelete ebből egyenesen következik.

Az RG térelméleti megfogalmazásában nincs regulátorfüggvény, a teljes effektív hatás (9) alapján

$$\Gamma[\bar{\phi}] = -\log Z[J] - \int J\bar{\phi}. \tag{15}$$

Az előző fejezetben is tárgyalt egykomponensű valós skalármező modelljével szeretnénk foglalkozni, és ezúttal vizsgálódásainkat $d = 4$ -re szorítjuk meg. A klasszikus (vagyis fluktuációkat nem tartalmazó) euklideszi hatás[4] (11) és (12) alapján

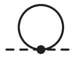
$$S[\phi] = \int_x \mathcal{L}[\phi] = \int_x \Big[\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\Big], \tag{16}$$

ahol Z-t és $\mathcal{L}$-t továbbra is (2) kapcsolja össze. Láthatóan magasabb rendű csatolások nem találhatóak meg S-ben, aminek az oka az, hogy mivel az előző fejezet szerint $S \equiv \Gamma_{k=\Lambda}$, és jelen esetben $\Lambda = \infty$, ezért S-ben csak olyan csatolásokat helyezhetünk el, melyek nemnulla értékre futn(á)nak be $k \to \infty$ esetén. A hagyományos terminológia szerint a klasszikus hatásban csak (perturbatíve) renormálható csatolások jelenhetnek meg. Meggondolható, hogy ellenkező esetben a rövidesen ismertetésre kerülő renormálási program nem valósítható meg.

Vizsgálatainkat azzal folytatjuk, hogy megmutatjuk, a korábban bevezetett, skálafüggő 2- és 4-pont függvények nulla impulzusú futási egyenleteit anélkül is meg lehet határozni, hogy a cutoff skálát Wilson módjára változtatnunk kellene. A Feynman-szabályok alkalmazásával, eltűnő háttérmezőnél ($m^2 > 0$ feltételezéssel) kapjuk, hogy

[3] Érdemes tudni, hogy a csatolások futásai általában regulátorfüggőek, azonban ha $m_k = 0$, akkor LPA közelítést alkalmazva $d = 2$ -ben a tömeg, $d = 4$-ben a negyedfokú csatolás, általában pedig $d = n$ esetén az n-edfokú csatolás futása univerzális.

[4] Feltesszük, hogy a Wick-forgatás minden esetben elvégezhető, így minkowski helyett euklideszi térelmélettel dolgozunk.

$$\Gamma^{(2)}(0) = m^2 - $$  $$+ \ldots$$

$$= m^2 + \frac{\lambda}{2}\int_q \frac{1}{\vec{q}^2 + m^2} + \ldots, \tag{17a}$$

$$\Gamma^{(4)}(0) = \lambda - $$  $$+ \ldots$$

$$= \lambda - \frac{3\lambda^2}{2}\int_q \frac{1}{(\vec{q}^2 + m^2)^2} + \ldots, \tag{17b}$$

ahol egyhurok szintig írtuk fel a járulékokat. Látható, hogy a dimenziótól függően a fluktuációs járulékok ultraibolya divergenciát tartalmazhatnak, ami azt jelzi, hogy a perturbációszámítás, amivel próbálkozunk, nem jól definiált. Az egyenleteket renormálni kell, mely során átrendezzük a perturbatív sort, azt nem a λ „csupasz” paraméter szerint, hanem egy alkalmasan választott, ún. renormált λ_μ változat szerint építjük fel. A különbséget $\delta\lambda$ ellentagnak nevezzük, $\lambda = \lambda_\mu + \delta\lambda$. Rögtön kiderül, hogy utóbbi λ_μ-ben perturbatív és vezető rendben $\mathcal{O}(\lambda_\mu^2)$. Hasonlóan, ha m^2-et is két tag összegére bontjuk fel, $m^2 = m_\mu^2 + \delta m^2$, akkor δm^2 pedig $\mathcal{O}(\lambda_\mu)$. A fentiekkel konzisztens perturbatív sorok így

$$\Gamma^{(2)}(0) = m_\mu^2 + \delta m^2 + \frac{\lambda_\mu}{2}\int_q \frac{1}{\vec{q}^2 + m_\mu^2} + \ldots, \tag{18a}$$

$$\Gamma^{(4)}(0) = \lambda_\mu + \delta\lambda - \frac{3\lambda_\mu^2}{2}\int_q \frac{1}{(\vec{q}^2 + m_\mu^2)^2} + \ldots \tag{18b}$$

Az ellentagokat abból a feltételből választjuk, hogy azokat a fluktuációs járulékokkal összekombinálva véges járulékokat kell, hogy kiadjanak. Továbbra is $d = 4$ dimenzióban dolgozva az integrandusok nagy impulzusokra vett aszimptotikus viselkedését analizálva a következő választással lehet élni:

$$\delta m^2(\mu) = -\frac{\lambda_\mu}{2}\int_q \left(\frac{1}{\vec{q}^2 + \mu^2} + \frac{\mu^2 - m_\mu^2}{(\vec{q}^2 + \mu^2)^2}\right), \tag{19a}$$

$$\delta\lambda(\mu) = \frac{3\lambda_\mu^2}{2}\int_q \frac{1}{(\vec{q}^2 + \mu^2)^2}, \tag{19b}$$

ahol μ egy tetszőleges új tömegparaméter, az ún. renormálási skála. Az ellentagok önmagukban ugyanúgy divergensek lennének, mint maguk a fluktuációs járulékok, viszont lényegében értelmetlen róluk külön-külön beszélni, hiszen egy adott rendben összekombinálásuk után véges, jól definiált, λ_μ-ben perturbatív eredményeket kapunk a nulla impulzusú 2- és 4-pont függvényekre:

$$\Gamma^{(2)} = m_\mu^2 + \frac{\lambda_\mu}{2}\int_q \left(\frac{1}{\vec{q}^2 + m_\mu^2} - \frac{1}{\vec{q}^2 + \mu^2} - \frac{\mu^2 - m_\mu^2}{(\vec{q}^2 + \mu^2)^2}\right), \tag{20a}$$

$$\Gamma^{(4)} = \lambda_\mu - \frac{3\lambda_\mu^2}{2}\int_q \left(\frac{1}{(\vec{q}^2 + m_\mu^2)^2} - \frac{1}{(\vec{q}^2 + \mu^2)^2}\right). \tag{20b}$$

Érdemes megjegyezni, hogy az ellentagok megfelelő kiválasztását szokás még regularizált diagramok explicit kiszámításával, és a divergenciák levonásával véghez vinni (pl. cutoff, dimenziós, Pauli-Villars, stb. regularizációban), mely azt a látszatot keltheti, hogy a renormálás során végteleneket söprünk be a szőnyeg alá. Ahogy feljebb is jeleztük, ezt a képet elkerülvén talán érdemesebb a fluktuációs járulékok és a hozzájuk tartozó ellentagokra egy entitásként gondolni, mely az ellentagok választásától fogva mindig véges. Mindenesetre, bárhogy is határozzuk meg az ellentagokat, bennük mindig meg fog jelenni egy μ renormálási skála, és meggondolható, hogy a renormálást (vagyis az ellentagok meghatározását) rendről rendre folytatva, bármilyen korrelációs függvény perturbatív kifejtése szükségszerűen végesnek adódik.

Ezen a ponton megjegyzendő, hogy érdemes úgy gondolkozni, hogy az elmélet fundamentális paraméterei valójában nem a csupasz m^2 és λ paraméterek, hanem egy előre rögzített μ skálán az m_μ^2 és λ_μ renormált változatok. Fordítva is lehet okoskodni, és pl. a tömegtelen esetre úgy gondolni, hogy az elméletet az definiálja, hogy egy előre rögzített csatolás értéket, pl. $\lambda_\mu = 1$-et milyen renormálási skálán veszi fel a rendszer. Ekkor a fundamentális paraméter a μ, nem pedig a csatolás (dimenziós transzmutáció).

Minden rendben renormált, ezáltal véges tagokat adó perturbatív sor persze nem biztos, hogy jól is konvergál. Tipikusan valamilyen $\vec{p}$ impulzus mellett kiértékelendő korrelációs függvény perturbatív sora nem csak a renormált csatolás, λ_μ szerint halad, hanem $\log(\vec{p}^2/\mu^2)$ hatványai szerint is. Ezek a logaritmusok nagyra tudnak nőni, ha $|\vec{p}|$ és μ nagyságrendje eltér, ami akár már vezető rendben tönkreteheti a perturbációszámítást. A feljebb vázolt eljárás legnagyobb sikere az, hogy ennek ellenére képes lehet egy adott n-pont függvény impulzusfüggésének hatékony meghatározására. Nyilvánvalóan, ha μ-t $|\vec{p}|$ nagyságrendjére állítjuk, az a logaritmusokat kicsivé teszi, és a probléma többé nem áll fenn. Ami belátható, hogy az ár, amit ezért fizetni kell, az az, hogy meg kell tudni mondani, hogy a renormált, futó m_μ^2 és λ_μ paraméterek az új skálán milyen értéket vesznek fel, továbbá az (itt nem részletezett) anomális dimenziót is figyelembe véve át kell skálázni a szóban forgó n-pont függvényt. Ha szerencsénk van, és a csatolás az új skálán elegendően kicsi, akkor az így átrendezett perturbatív sor konvergálni tud, és megbízható eredményt ad a szóban forgó korrelációs függvény impulzusfüggésére. Ehhez tehát szükségünk van az m_μ^2 tömegre és a λ_μ csatolásra az új skálán, melyek abból kaphatóak meg, hogy a csupasz m^2 és λ változatok értelemszerűen μ-függetlenek. Ebből az következik, hogy $\mu\partial_\mu m_\mu^2 = -\mu\partial_\mu \delta m^2(\mu)$, illetve $\mu\partial_\mu\lambda_\mu = -\mu\partial_\mu\delta\lambda(\mu)$, amiből (19) felhasználásával kapjuk, hogy ($d = 4$ esetén)

$$\mu\partial_\mu m_\mu^2 = -\Omega_4\frac{\lambda_\mu}{2}(\mu^2 - m_\mu^2), \quad \mu\partial_\mu\lambda_\mu = \Omega_4\frac{3\lambda_\mu^2}{2}. \tag{21}$$

A (21) összefüggések által definiált renormálási csoport transzformációról alább megmutatjuk, hogy filozófiájában teljesen azonos a (14)-ben mutatott wilsoni változattal.

A renormálási csoportok kapcsolata

A két, első látásra nagyon különböző renormálási csoport közötti kapcsolatra az alábbi egyszerű gondolatmenet vezet el. Vegyük észre, hogy a térelméleti esetben az ellentagokkal összekombinált fluktuációs járulékok (20)-ban olyannak adódtak, hogy az integrandusok $|\vec{q}| \approx \mu$ körül levágnak, vagyis „effektíve" csak olyan fluktuációkat tartalmaznak, melyek hullámszáma kisebb, mint μ. Mivel a (20) egyenletek bal oldalán a valódi 2- és 4-pont függvény van, ez azt jelenti, hogy az m_μ^2 és λ_μ renormált paraméterek pontosan ugyanazt a szerepet játsszák, mint m_k^2 és λ_k a wilsoni esetben, hiszen utóbbiak egy olyan effektív hatáshoz tartoztak, amibe k-nál nagyobb hullámszámú fluktuációk voltak csak beleszámítva. A fennmaradó, k-nál kisebb hullámszámú járulékokat hozzávéve adódik ki a teljes effektív hatás, és így a valódi vertexek. Ez azt mutatja, hogy ami a wilsoni megfogalmazásban a cutoff (k), az a térelméleti változatban a renormálási skála (μ). Könnyen félreértésre adhat okot, hogy utóbbiban, az ellentagok számításakor is szokás explicit levágást bevezetni, de ez filozófiailag teljesen mást jelent, mint a wilsoni változatban bevezetett cutoff. Valódi mezőelméletben, kontinuum sok dinamikai változó esetén a levágást a számolások végén a konzisztencia miatt mindig a végtelenbe kell vinni, míg Wilsonnál a levágás egy közbenső skála, mely azt jellemzi, hogy éppen milyen „nagyításban" kívánjuk vizsgálni a rendszert.

Ha összehasonlítjuk a kapott eredményeket, az látszik, hogy a $\mu \leftrightarrow k$ megfeleltetést használva (21) reprodukálja (14) eredményeit, amennyiben az utóbbi esetén a tömegparaméter szerint sorfejtést végzünk el. A térelméleti renormálási csoportból számolt futások úgy tűnik, hogy korlátozottak a wilsonihoz képest. Ez valóban így van, és ennek oka az, hogy előbbi a csatolások futását mindig a fluktuációs járulékok ultraibolya viselkedésből származtatja. Az ellentagok konstrukciója során a Feynman-diagramok végesítése a célunk, és ebből következtetünk arra, hogy skálaváltáskor milyen módon változnak a csatolások. Ebből az következik, hogy ha adott csatolásra a fluktuációk ultraibolya viselkedése olyan, hogy az nem okozna divergenciát (és emiatt levonás sem szükséges), akkor a futások nem is kaphatók meg. Ez az oka annak, hogy a magasabb rendű csatolások futása elérhetetlen ebben a keretben. Teljesen hasonlóan, mivel renormálás előtt a megjelenő divergenciáknak a tömegparamétertől való függése vagy nagyon enyhe (ld. pl. a 2-pont függvényt $d = 4$-ben), vagy attól teljesen független (ld. pl. a 4-pont függvényt $d = 4$-ben), sosem fogunk tudni a szóban forgó csatolások futására adódó kifejezésekben a wilsoni esethez hasonlóan [ld. a (14) egyenleteket] a tömegparaméterben nemperturbatív eredményeket kapni. A térelméleti renormálási csoport jóslatai tehát limitáltak, csak olyan futásokat ad meg, melyek perturbatívak a gaussi ($m_\mu^2 = 0, \lambda_\mu = 0$) fixpont körül.

Záró megjegyzések

A fentiek szerint a wilsoni renormálási csoport egy lényegesen általánosabb keret, mely elvben a Γ_k skálafüggő effektív hatásra vonatkozó futási egyenletnek teljesen nemperturbatív kezelését is lehetővé teszi. Ez azért lényeges, mert bár pl. a kvantumszíndinamikában ultraibolya skálákon a csatolás kicsivé válik, vagyis a gaussi fixpont körüli futásokat adó térelméleti renormálási csoport jól működik (hasonló mondható el a kvantumelektrodinamikában az infravörös skálákra vonatkozóan), nemperturbatív fixpontok létezésének lehetősége igen jelentős. Segítségükkel egy perturbatíve nem renormálható (vagy akár kvantumos trivialitástól szenvedő) elméletről válhat elképzelhetővé, hogy „ultraibolya teljes", vagyis nagy skálákon belefuthat egy új (nemperturbatív) fixpontba, ami definiálni tudná a mikroszkopikus hatást. Példának okáért, ha az általános relativitáselméletet kvantumos mezőelméletként szeretnénk értelmezni, perturbatíve nemrenormálható elméletet kapunk, de a wilsoni renormálási csoport funkcionális változata szerint vannak jelek arra vonatkozóan, hogy létezik egy nemperturbatív ultraibolya fixpont, ami a kvantumgravitáció egy lehetséges definícióját adná [12]. Ezt a tulajdonságot aszimptotikus biztonságnak hívják.

Fontos látni, hogy a térelméleti renormálási csoport futások számítása során, a wilsoni változattal ellentétben, nem választhatunk különféle regulátorfüggvények közül, a renormálási sémát a levonási feltételek definiálják [ld. (19)], a μ paraméterrel együtt. Azonban, ahogy azt feljebb demonstráltuk, utóbbi is egy teljesen legitim választás a futások (perturbatív) meghatározása szempontjából. Lényeges különbség viszont, hogy a wilsoni változat, bár elvben nemperturbatív kezelést is lehetővé tesz, a térelméletivel ellentétben explicit levágást tartalmaz, mely sérti pl. a mértékszimmetriát. A térelméleti renormálási csoport legnagyobb előnye éppen az, hogy benne nem kötelező levágás bevezetésével, hagyományos improprius integrálként kezelni a fluktuációkat, így a mértékszimmetriát a számítások során őrizni lehet (ilyen pl. a dimenziós regularizáció által megvalósított eljárás). A wilsoni változat sajnos természeténél fogva olyan, hogy már első lépésben, a skálaszeparáció bevezetésénél használ levágást, így a mértékszimmetria őrzése ebben a keretben nem megvalósítható. Olyan renormálási csoport egyenlet konstrukciója, mely nemperturbatív, és a mértékszimmetriát sem sérti, a mai napig aktív kutatási terület. Gyakran alkalmazott az ún. háttérmező módszer, melyben egy nemdinamikai mértékmező hátteret kell bevezetni, saját mértékszimmetriával, majd egy olyan mértékválasztással élni, melyben az effektív hatásról be lehet látni, hogy azon speciális pontokban, ahol a dinamikai mező átlagértéke a háttérmezővel egyenlő, visszakapható az eredeti mértékszimmetria. Az eljárás igen technikai, nehezen implementálható, így a probléma a standard pályaintegrál formalizmushoz jobban illeszkedő megoldása a mai napig várat magára.

[1] E. C. G. Stueckelberg & A. Petermann, Helv. Phys. Acta. **26**, 499–520 (1953).
[2] M. Gell-Mann & F. Low, Phys. Rev. **95** (5), 1300-1312 (1954).
[3] C.G. Callan, Phys. Rev. D**2** (8), 1541–1547 (1970).
[4] K. Symanzik, Comm. Math. Phys. 18 (3), 227–246 (1970).
[5] J. C. Collins, Il Nuovo Cimento A**25**, 47–52 (1975).
[6] K. Wilson, Phys. Rev. B**4** (9), 3174–3183 (1971).
[7] K. Wilson, Phys. Rev. B**4** (9), 3184–3205 (1971).
[8] K. Wilson & M. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28** (4), 240 (1972).
[9] L.-P. Kadanoff, Physics Physique Fizika **2**, 263 (1966).
[10] C. Wetterich, Phys. Lett. B**301** (1), 90 (1993).
[11] D. Litim, Phys. Lett. B**486**, 92-99 (2000).
[12] M. Reuter, Phys. Rev. D**57**(2), 971 (1998).