1. FOURIER ANALIZIS (MR 42)

(a) *Fourier integrálok statisztikus konvergenciája*

Legyen $s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ mérhető függvény. Akkor mondjuk, hogy s-nek a statisztikus limesze ∞-ben ℓ, jelben: $\text{st-}\lim_{\nu\to\infty} s(\nu) = \ell$, ha minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}|\{\nu \in (0,a) : |s(\nu) - \ell| > \varepsilon\}| = 0,$$

ahol az $|\cdot|$ szimbolummal a Lebesgue mértéket jelöljük. Ez a Cauchy értelemben vett határérték általánosítása (gyengítése), amely azonban az előbbiek szinte minden tulajdonságával rendelkezik; lásd [Analysis, 24(2004), 1-18].

Az $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvény Fourier transzformáltját az

$$\widehat{f}(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

képlettel definiálják, míg a Fourier integrál definíciója:

$$f(x) \sim \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)e^{itx}dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alapvető probléma, hogy milyen feltételek mellett helyettesíthető a "$\sim$" jel az "$=$" jellel a legutóbbi képletben, legalább is majdnem minden x-re. Mivel általában $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$, ezért az

$$s_\nu(f;x) := \int_{-\nu}^{\nu} \widehat{f}(t)e^{itx}dt = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{\sin \nu t}{t}dt$$

ún. Dirichlet integrál konvergenciáját vizsgáljuk. A Fourier sorokra vonatkozó Kolmogorov példához hasonlóan megadható olyan $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvény, amelyre

$$\limsup_{\nu\to\infty} |s_\nu(f;x)| = \infty \quad \text{m.m.}$$

Bizonyítottuk [Analysis, 24 (2004), 1-18], hogy ha $f \in L^1(\mathbb{R})$, akkor

$$\text{st} - \lim_{\nu\to\infty} s_\nu(f,x) = f(x) \quad \text{m.m.}$$

Továbbá, ha $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ folytonos az I nyitott intervallumon, akkor a

$$\text{st} - \lim_{\nu\to\infty} s_\nu(f,x) = f(x)$$

határérték lokálisan egyenletesen áll fenn az I intervallumon.

(b) *A maximál Fejér operátor a valós $H^1(\mathbb{R})$ Hardy téren*

A Dirichlet integrál Fejér közepét a

$$\sigma_N(f;x) := \frac{1}{N}\int_0^N s_\nu(f;x)d\nu = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{1-\cos Nt}{t^2}dt$$

képlettel, míg a maximál Fejér operátort a

$$\sigma_*(f;x) := \sup_{0<N<\infty} |\sigma_N(f;x)|, \quad x \in \mathbb{R},$$

képlettel definiálják.

Bizonyítottuk [J. Fourier Anal. Appl., 10(2004), 27-50], hogy ha $f \in L^1(\mathbb{R})$, akkor $f \in H^1(\mathbb{R})$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $\sigma_*(f) \in L^1(\mathbb{R})$, amelynek teljesülése esetén

$$\|f\|_{H^1} \sim \|\sigma_* f\|_{L_1}.$$

(c) *A maximál konjugált és Hilbert operátorok nem korlátosak a valós H^1 Hardy térből az L^1 térbe.* Az $f \in L^1(\mathbb{T})$ függvény $\tilde{f}$ konjugált függvényét az

$$\widetilde{f}(x) := (\text{P.V.})\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}dt$$

képlettel, míg a maximál konjugált operátort az

$$\widetilde{f}_*(x) := \sup_{0<h<\pi}\left|\frac{1}{\pi}\int_{|h|<|t|<\pi} f(x-t)\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}dt\right|, \quad x \in \mathbb{T},$$

képlettel definiálják.

Bizonyítottuk [Acta Math. Hungar., 109 (2005), 53-63], hogy megadható olyan $f \in H^1(\mathbb{T})$ függvény, amelyre

$$\|\widetilde{f}_*\|_{L(\mathbb{T})} = \infty.$$

Hasonló tételt bizonyítottunk az

$$\widetilde{f}_*(x) := \sup_{0<h<\infty}\left|\frac{1}{\pi}\int_{|t|>h}\frac{f(x-t)}{t}dt\right|, \quad x \in \mathbb{R},$$

maximál Hilbert operátorra is, ahol $f \in H^1(\mathbb{R})$.

(d) *Abszolút konvergens Fourier sorok és klasszikus függvényosztályok*

Legyen $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ komplex számoknak olyan mindkét irányban végtelen sorozata, amelyre

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty.$$

Ekkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} =: f(x)$$

trigonometrikus sor egyenletesen konvergens és ezért összegfüggvényének Fourier sora.

Többek között a következő két tételt bizonyítottuk [J. Math. Anal. App., 324(2006), 1168-1177].

1. Tétel. (i) Ha valamely $0 < \alpha \le 1$-re

$$\sum_{|k|\le n} |kc_k| = O(n^{1-\alpha}), \tag{1}$$

akkor $\sum |c_k| < \infty$ és

$$f(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \in \mathrm{Lip}(\alpha).$$

(ii) Megfordítva, ha $kc_k \ge 0$ minden k-ra, $\sum |c_k| < \infty$ és valamely $0 < \alpha \le 1$-re $f \in \mathrm{Lip}(\alpha)$, akkor (1) fennáll.

Ezt a tételt R.P. Boas bizonyította színusz és koszínusz sorokra nemnegatív együtthatók esetén.

2. Tétel. (i) Ha valamely $0 < \alpha \le 2$-re

$$\sum_{|k|\le n} k^2|c_k| = O(n^{2-\alpha}), \tag{2}$$

akkor $\sum |c_k| < \infty$ és $f \in \mathrm{Zyg}(\alpha)$.

(ii) Megfordítva, ha $c_k \ge 0$ minden k-ra, $\sum |c_k| < \infty$ és valamely $0 < \alpha \le 2$-re $f \in \mathrm{Zyg}(\alpha)$, akkor (2) fennáll.

Ezt a tételt R.P. Boas bizonyította $\alpha = 1$-re színusz és koszínusz sorokra nemnehatív együtthatók esetén.

2. FUNKCIONÁLANALÍZIS (MR 46)

Legyen $(X, \mathcal{F}, \mu)$ tetszőleges mértéktér pozitív μ mértékkel. Beppo Levi klasszikus monoton konvergentiatétele az $L^2 = L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ Lebesgue térre a következőképpen fogalmazható: Ha m.m. $x \in X$-re

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \dots \quad \text{és} \quad \sup_{n\ge 1} \int_X f_n^2 d\mu < \infty,$$

akkor létezik olyan $f \in L^2$ függvény, amelyhez az $\{f_n\}$ sorozat pontonként m.m. és L^2-normában is konvergál.

Legyen H szeparábilis komplex Hilbert tér, ϕ egy hű, normál állapot [faithful, normal state] a H-n értelmezett korlátos lineáris operátorok $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ algebráján. Ekkor $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ az

$$\langle A|B\rangle := \phi(B^*A), \quad A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

belső szorzattal ellátva komplex prehilbert tér.

Ennek teljessé tételét $L^2 = L^2(\phi)$-vel, belső szorzatát $(\cdot|\cdot)$-vel és normáját $\|\cdot\|$-vel jelöljük. A híres Gelfand-Naimark-Segal reprezentációs tétel szerint megadható olyan π egy-egyértelmű $*$-homomorfizmus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-ból az L^2-en értelmezett korlátos lineáris operátorok $\mathcal{L}(L^2)$ algebrájába és egy ciklikus, szeparáló [cyclic, separating] $\omega \in L^2$ vektor, amelyekre

$$\phi(A) = (\pi(A)\omega|\omega), \quad A \in \mathcal{L}(H).$$

Bizonyítottuk [Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 2559-2567], hogy Beppo Levi klasszikus monoton konvergencia tétele nem érvényes a nemkommutatív L^2-térben.

Tétel. Tetszőleges szeparábilis komplex H Hilbert téren megadható operátoroknak olyan monoton növő $(A_n : n = 1, 2, \ldots)$ sorozata, amelyre

$$\sup_{n\geq 1} \phi(A_n^2) < \infty,$$

de nem létezik olyan $\xi \in L^2$ vektor, amelyre az alábbi két határérték bármelyike is fennállna:

$$\pi(A_n)\omega \xrightarrow{\text{b}} \xi \quad \text{és} \quad \|\pi(A_n)\omega - \xi\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Itt $\xrightarrow{\text{b}}$ az ún. nyaláb [bundle] konvergenciát jelöli, amely a m.m. konvergenciát helyettesíti nemkommutatív terekben, és amelyet E. Hensz, R. Jajte és A. Paszkiewicz vezettek be, lásd [Studia Math., 120 (1996), 23-46].

3. APPROXIMÁCIÓLEMÉLET (MR 41)

Az alábbi függvényosztályokat Leindler László vezette be, lásd [Acta Sci. Math. Szeged, 43 (1981), 301-309]:

$$(H^\omega)^* := \{f \in C(\mathbb{T}) : \omega_2(f; t) = O(\omega(t))\},$$

ahol $\omega = \omega(t)$ adott folytonossági modulus, $\omega_2(f; t)$ pedig az f függvény símasági modulusa;

$$H(\omega; \beta, p) := \{f \in C(\mathbb{T}) : h_n(f; \beta, p) = O(\omega((\frac{1}{n}))\},$$

ahol β és p pozitív számok és

$$h_n(f; \beta, p) := \|\Big\{\frac{1}{(n+1)^\beta} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\beta-1} |s_k(f; x) - f(x)|^p\}^{1/p}\Big\},$$

$n = 0, 1, 2, \ldots; s_k(f; x)$ az f függvény Fourier sorának k-adik részletösszege, és $\|\cdot\|$ a folytonos függvények $C(\mathbb{T})$ terében értelmezett maximum norma.

Leindler László szintén bevezette a folytonos függvények Ω_α-val jelölt részosztályait $0 \leq \alpha \leq 1$ esetén, amelyeket általánoított Lipschitz osztályoknak nevezett. A definíció természetes módon kiterjeszthető tetszőleges $\alpha > 1$-re is.

Bizonyítottuk a következő tételt [Acta Sci. Math. Szeged, 73 (2007), 637-647]. Ha $\omega \in \Omega_\alpha$ valamely $0 < \alpha < 2$-re, β és p tetszőleges pozitív számok, akkor $\beta > \alpha p$ esetén fennáll

$$H(\omega; \beta, p) \equiv (H^\omega)^*;$$

míg $\beta \leq \alpha p$ esetén fennáll

$$H(\omega; \beta, p) \subseteq (H^\omega)^*.$$

Ez a tétel Leindler László tételét terjeszti ki az $\alpha = 1$ esetről a $0 < \alpha < 2$ esetekre.

4. SZUMMÁLHATÓSÁG (MR 40)

(a) *J. Karamata elegendő Tauber feltételének élesítése szükséges és elegendő Tauber feltétellé*

Legyen P az $\mathbb{R}_+$ félegyenesen értelmezett monoton nemcsökkenő függvény,

$$P(0) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = \infty.$$

Adott komplex-értékű $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ függvényre vezessük be a következő jelöléseket:

$$s(x) := \int_0^x f(y)dy \quad \text{és} \quad \sigma(t) := \frac{1}{P(t)} \int_0^t s(x)dP(x), \quad t > 0,$$

feltéve, hogy $P(t) > 0$. Az

$$\int_0^\infty f(x)dx \tag{3}$$

formális integrált (W,P)-szummálhatónak [summable by weighted mean method determined by P] nevezzük, ha a

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \ell$$

véges határérték létezik. Nyilvánvaló, hogy ha az

$$\int_0^{\to\infty} f(x)dx := \lim_{x\to\infty} s(x) = \ell \tag{4}$$

improprius integrál létezik, akkor az (W, P)-szummálható is ugyanezen ℓ értékhez.

Legyen $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ szigorúan monoton növő, folytonos függvény, amelyre

$$\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \infty.$$

A ρ függvényt P-re nézve megengedett függvénynek nevezzük, ha

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{P(\rho(t))}{P(t)} > 1.$$

Jelöljük Λ-val a P-re nézve a megengedett függvények összességét.

Bizonyítottuk [Publ. Math. Debrecen 67(2005), 65-78], hogy a (4) improprius integrál létezése akkor és csak akkor következik a (3) formális integrál (W, P)-szummálhatóságából, ha

$$\inf_{\rho\in\Lambda} \limsup_{t\to\infty} \left| \frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)} \int_t^{\rho(t)} \{s(x) - s(t)\} dP(x) \right| = 0.$$

J. Karamata alábbi tétele [Bull. Acad. Serbe 2 (1935), 169-205] nyilván korolláriuma fentebbi tételünknek: Ha a (3) formális integrál (W, P)-szummálható és s lassan oszcillál [slowly oscillating] P-re nézve, amelyen azt értjük, hogy

$$\lim_{\lambda\to 1+} \limsup_{t\to\infty} \max_{t\le x\le T} |s(x) - s(t)| = 0,$$

ahol

$$T := P^{-1}(\lambda P(t)), \quad t > 0;$$

akkor a (4) impproprius integrál létezik.

(b) *I. J. Schoenberg Tauber tételének kiterjesztése számsorozatokról mérhető függvények sorozataira*

H. Fast [Colloq. Math., 2 (1951), 241-244] vezette be a statisztikus konvergencia fogalmát az $\{s_k : k = 1, 2, \ldots\} \subset \mathbb{C}$ számsorozatokra. Akkor írjuk, hogy

$$\text{st} - \lim_{k\to\infty} s_k = \ell,$$

ha minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{1 \le k \le n : |s_k - \xi| > \varepsilon\}| = 0.$$

I.J. Schoenberg bizonyította [Amer. Math. Monthly, 66(1959), 361-375], hogy valós számoknak egy (s_k) sorozata akkor és csak akkor konvergál statisztikusan ℓ-hez, ha minden $t \in \mathbb{R}$-re fennáll

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{its_k} = e^{it\ell}.$$

Bizonyítottuk [Acta Math. Hungar., 114 (2007), 235-246], hogy egy $s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mérhető függvényre akkor és csak akkor létezik a

$$\text{st} - \lim_{\nu\to\infty} s(\nu) = \ell$$

véges statisztikus határérték, ha minden $t \in \mathbb{R}$-re fennáll

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} \int_0^a e^{its(\nu)} d\nu = \ell.$$

Ezt a tételt tetszőleges vektor-értékű $s : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}^m$ mérhető függvényekre is kiterjesztettük, ahol m és n adott természetes számok.