Zárójelentés
Játékelmélet OTKA-46194

A kutatás a játékelmélet különböző területein és témáiban az alább részletezett eredményeket hozta. A kutatási eredményeket a futamidő alatt 8 folyóiratcikkben és 14 konferencia-előadásban ismertettük. Elkészítettünk egy, a klasszikus játékelmélet legfontosabb témáit és eredményeit bemutató tankönyvet is.

Játékelmélet (elektronikus tankönyv)

A tankönyv a közgazdász egyetemi hallgatók számára készült. Átfogja a klasszikus játékelmélet legfontosabb témáit és eredményeit, amelyek egy féléves, kétsávos kurzus törzsanyagát képezik (nem kooperatív játékok modellezése normál és extenzív formában, racionalizálhatóság, Nash-egyensúly létezése, szimmetriája és unicitása, részjáték tökéletes egyensúly és visszafelé indukció, mátrix- és bimátrix-játékok, tökéletes és korrelált egyensúly, nem tökéletes információs játékok Harsányi-modellje, ismételt játékok, kooperatív játékok karakterisztikus függvény formája, a mag, a nukleolusz és a Shapley-érték, a Nash-féle alkumegoldás). A könyv példaanyaga elsősorban a közgazdasági alkalmazásokra koncentrál (Cournot- és Bertrand-dupólium, Cournot-oligopólium, árverési modellek, költségszétosztás, stb.). A könyvben egyes fejezetek illetve alfejezetek magasabb szintű (pl. PhD) és/vagy nagyobb óraszámú kurzusokban szerepelhetnek tananyagként. Ezek: a Nash-egyensúly axiomatizálása, evolúciósan stabil egyensúly, szekvenciális egyensúly, néptételek, stabil halmazok. A könyv szerkezete és megjelenési módja lehetővé teszi a folyamatos javítást és kiegészítést. Ingyenesen hozzáférhető és más egyetemeken is használják tananyagként (pl. a PTE Közgazdasági Karán).

Az L-Nash megoldás implementációja kétszemélyes alkuproblémák esetén

A „Nash-program” több mint ötven éve a játékelméleti kutatások egyik integratív alapelvét foglalja magába, kapcsolatot létesítve a kooperatív és nem kooperatív játékok között (lásd pl. Serrano, 2007). A lényege, hogy lehetőleg minden kooperatív megoldás koncepciót egy nem kooperatív alkumodellel, ennek részjáték tökéletes Nash-egyensúlyaként is állítsunk elő. Az úgy nevezett L-Nash megoldást eddig még nem implementálták alkujátékként. Az L-Nash megoldás a Nash-megoldás határértéke, ha az egyet nem értés büntetése tart a végtelenhez egy adott irány mentén. Egyértelmű meghatározottságát és axiomatizálását a vele ekvivalens többkritériumú döntési modellben Forgó és Szidarovszky (2003) végezte el. Ugyanott bizonyították, hogy az L-Nash megoldás poliedrikus lehetséges kimenetel tartomány esetében megkapható, mint egy (hagyományos) Nash-alkuprobléma megoldása elég nagy, de véges büntetés-mérték mellett.

Az eredeti egzisztencia bizonyítás helyett sikerült most a szükséges büntetés mértékére kizárólag az alapadatokra (a lehetséges tartomány csúcspontjai és az egyetértési irány) támaszkodva egy alsó becslést adni. Ez lehetségessé teszi, hogy az L-Nash megoldást implementálni lehessen minden olyan nem kooperatív alkujátékkal, amely magát a Nash-megoldást implementálja. Folytonos Pareto-határú lehetséges tartomány esetében könnyen ellenőrizhető feltételeket adtunk arra, hogy ebben az esetben is elég legyen véges büntetés és ennek mértékét a Pareto-határ egyenletéből ki lehessen számítani. Egy ellenpéldával megmutattuk, hogy bizonyos esetekben nincs véges büntetés. Ebben az esetben bebizonyítottuk, hogy a Rubinstein-féle váltakozó ajánlattételes modell kis módosításával az L-Nash megoldást aszimptotikusan elő lehet állítani ennek a játéknak a részjáték tökéletes Nash-egyensúlypontjaként, ha a büntetés mértékének a végtelenhez és a tárgyalások megszakadása valószínűségének nullához tartása össze van hangolva. Ezek az eredmények kétszemélyes alkuproblémákra vonatkoznak, kiterjesztésük (amennyiben lehetséges) több személyes játékokra további kutatás feladata.

A mag stabilitása lánc-összefüggő additív játékokban

Klasszikus könyvükben Neumann és Morgenstern (1944) az elosztások egy olyan halmazát tekintették egy kooperatív játék megoldásának (mai terminológiával stabil halmaznak), amelyben semelyik két elosztás sem dominálja egymást, ugyanakkor együttesen dominálják az összes halmazon kívüli elosztást. A koncepció hátránya, hogy ha egy játéknak egyáltalán van nem üres stabil halmaza, akkor tipikusan nagyon sok stabil halmaza van, ezek ráadásul igen nehezen meghatározhatók. Ez még akkor is igaz, ha a játék magja (a semmilyen elosztás által sem dominált elosztások halmaza) nem üres, jóllehet a mag mindegyik stabil halmaznak részhalmaza. Ismert ugyanakkor néhány speciális játéktípus (pl. a konvex játékok), amelyekre a mag az egyetlen stabil halmaz.

Holland kollégákkal közösen azt vizsgáltuk, hogy a kommunikációs hálózatokhoz kapcsolódó alkalmazási lehetőségei miatt különösen érdekes és mindig nem üres maggal rendelkező fa-összefüggő additív játékok (Potters és Reijnierse, 1995) milyen részosztályára igaz ugyanez. A lánc mentén összefüggő additív játékokra sikerült azonosítani, azaz szükséges és elegendő feltétellel jellemezni azt a részosztályt, amelyen a mag stabil. A karakterizáció megadja azt a játékosok számában polinomiális sok lineáris egyenlőtlenségből álló rendszert, amelyet a lánc mentén összefüggő koalíciók értékének teljesítenie kell. Hasonló jellegű karakterizációt adtunk három, a mag stabilitásánál erősebb tulajdonságra is, de ekkor már exponenciális sok lineáris egyenlőtlenségből álló rendszerre van szükség. Ebből a jellemzésből adódik, hogy egy lánc-összefüggő additív játék pontosan akkor egzakt, amikor a magja „nagy”, illetve amikor a magja kiterjeszthető, a lánc-összefüggő additív játékok osztályán tehát ez a három tulajdonság ekvivalens.

Alkuhalmazok és a mag egybeesése partíciós játékokban

A mag a semmilyen elosztás által sem dominált elosztások halmaza. Mivel sok játékban nem létezik ennyire stabil elosztás, szükség van olyan megoldásokra is, amelyek akkor sem üresek, amikor a mag üres. Az alkuhalmazok közös jellemzője, hogy olyan dominált elosztásokat is megengednek, amelyeknél egy koalíció kiválását az ellenérdekelt játékosok meg tudják hiúsítani néhány kiválni szándékozó játékos kifizetésének megemelésével. A mögöttes alkufolyamat részletei, s így az azt túlélő elosztás-halmazok is nagyon sokfélék lehetnek. A kutatás keretében elsősorban a Mas-Colell alkuhalmazzal (Mas-Colell, 1989) és a klasszikus alkuhalmazzal (Davis és Maschler, 1967) foglalkoztunk. A Mas-Colell alkuhalmaz általában nem, a szuperadditív játékok esetén viszont tartalmazza a klasszikus alkuhalmazt (Holzman, 2000). Mindkét alkuhalmaz tartalmazza a magot. Természetes a kérdés, hogy milyen feltételek mellett esnek egybe ezek a megoldások, másképpen, mikor ekvivalensek a mögöttes stabilitási elvek.

Szuperadditív játékok esetén a klasszikus alkuhalmaz és a mag egybeesésére adott szükséges és elégséges feltételt Solymosi (1999). Ehhez nagyon hasonló Holzman (2000) karakterizációja a Mas-Colell alkuhalmaz és a mag egybeesésére. Ezen egységes jellemzések alkalmazhatóságát vizsgáltuk a korlátozott kooperációs lehetőségekkel rendelkező döntési helyzetek általános modelljének számító ún. partíciós játékok (Kaneko és Wooders, 1982) esetén. Megmutattuk, hogy akárhogyan is rögzítünk egy bázis-kollekciót, bármelyik generált partíciós játék bármelyik szétosztásához tartozó maximális-többlet játék is ugyanezen bázis-kollekció által generált partíciós játék lesz. Ebből már könnyen következik, hogy az erősen kiegyensúlyozott partíciós játékokra (ilyenek például a hozzárendelési játékok vagy a fa-összefüggő additív játékok, lásd Le Breton et al., 1992) az említett alkuhalmazok azonosak a maggal. Nagyon hasonló módon ugyanez bizonyítható az egyszerű hálózati játékokra is, amelyek partíciós játékok ugyan, de nem tartoznak az erősen kiegyensúlyozott típusba.

Redundancia kooperatív játékok megoldásaiban

A kooperatív játékok megoldásai elvben figyelembe veszik az összes lehetséges koalíció értékét. Több dominancián illetve többleten alapuló megoldást azonban a koalícióknak már egy szűkebb halmaza is egyértelműen meghatároz. Elemzési, de különösen a megoldások kiszámításának szempontjából fontos, hogy ismerjük az adott megoldást egyértelműen megadó lehető legszűkebb koalíciócsaládot. Közös bizonyítást sikerült adni több ismert redundancia-eredményre. Az egységes megközelítésnek köszönhetően könnyen adódhatnak új eredmények is. Így bizonyítható például, hogy – ellentétben az általános esettel – fa-összefüggő additív játékokban a nukleoluszt egyértelműen meghatározza a mag. Közlésre elfogadott formában eddig csak a magra és a szűkmagra vonatkozó eredményeket írtuk le. Jellemeztük a minden körülmények között fölösleges, illetve elhagyhatatlan koalíciókat, és meghatároztuk az elfajuló mag esetén feltételesen szükséges koalíciók körét is.

Típus-monoton allokációk piacjátékok egy osztályában

A jelen pályázat futamideje alatt került sor a jórészt már az OTKA T30945 keretében elért eredményeket tartalmazó cikk utómunkálataira. A korábbi kéziratot ugyanis a bírálati eljárás során kiegészítettük kisebb észrevételekkel, illetve átdolgoztuk a *TOP* folyóirat bírálóinak és szerkesztőjének kívánalmai alapján.

Román és holland kollégákkal vizsgáltuk a több, egymást kiegészítő típusú, oszthatatlan termékekkel rendelkező piacokat modellező ún. multi-glove játékokat, bevezettük az itt természetes ún. típus-monotonitást, és megmutattuk, hogy egy multi-glove játékban bármelyik mag-elosztás kiterjeszthető egy típus-monoton allokációs sémává, ami mindegyik részjátékra meghatároz egy-egy mag-elosztást. Bizonyítottuk továbbá, hogy mindegyik részjáték tau-értékét (Tijs, 1981) vagy nukleoluszát (Schmeidler, 1969) véve egy jó tulajdonságokkal rendelkező típus-monoton allokációs sémát kapunk. Ennek bizonyításából az is kiderült, hogy a nukleoluszra itt explicit képlet adható, ami megegyezik a tau-érték képletével, e két pont-értékű megoldás tehát a multi-glove játékokban egybeesik.

A nukleolusz adat-monotonitása hozzárendelési játékokban

A nukleolusz hiányossága, hogy – ellentétben például a Shapley-értékkel – a játékosok egyéni kifizetései nem feltétlenül tükrözik egy őket tartalmazó koalíció értékének növekedését. Az ilyen típusú monotonitás nem teljesülésére több ellenpélda is ismert, még olyan viszonylag speciális játékok osztályán is, mint a konvex játékok. Megmutattuk, hogy a hozzárendelési játékok köréből a szokásos definícióban megkívánt változtatás csak akkor nem vezet ki, ha egyetlen eladó-vevő pár értékét növeljük. Az ilyen jellegű javulást viszont respektálja a nukleolusz, sem az érintett vevő, sem az eladó kifizetése nem csökken. Korábban ugyanezt bizonyította a tau-értékre Nunez és Rafels (2002). Az eredményeket konferenciákon már bemutattuk.

Típusterek létezése

A nem teljes információs játékok elemzése során a modellező beleütközik az ún. véleményrangsorok kezelésének problémájába. A véleményrangsorok közvetlen megjelenése a modellben gyakorlatilag kezelhetetlenné teszi azt. Ez a jelenség késztette Harsányit (1967-68) a típus fogalmának bevezetésére. Dióhéjban, a típus a véleményrangsor kiváltására alkalmas objektum. A típusokból épül fel az ún. típustér. A típustér, ellentétben a véleményrangsorokat közvetlenül tartalmazó modellekkel, egy jól kezelhető keretrendszert biztosít a nem teljes információs szituációk elemzéséhez. Harsányi egyik legfontosabb intuíciója az volt, hogy a lehetséges típusokat össze lehet gyűjteni egyetlen típustérbe (az ún. egyetemes típustérbe) ami aztán tetszőleges modell alapjául, hátteréül szolgálhat. A korábbi eredmények (pl. Mertens és Zamir (1985), Brandenburger és Dekel (1993). Heifetz (1993), Mertens, Sorin, Zamir (1994)) az egyetemes típustér létezésének bizonyítása során a természet lehetséges állapotait tartalmazó ún. paramétertérre vonatkozó topologikus feltételekkel éltek. A kutatás során sikerült megmutatni, hogy a topologikus feltételek elhagyhatóak, tisztán mérhető paramétertéren is elérhetőek a fent említett szerzők pozitív eredményei.

A véleményrangsorok matematikai formája az ún. mértékterek inverz rendszere. Az egyes vélemények, az egyes véleményeken értelmezett vélemények, az egyes véleményeken értelmezett véleményeken értelmezett vélemények, és így tovább, egyértelműen megfeleltethetőek egy olyan inverz rendszernek, amelynek elemei (valószínűségi-) mértékterek. Harsányinak az a „megérzése", hogy az egyes véleményrangsorok helyére típusok helyezhetőek, a matematika nyelvére úgy fordítható le, hogy a vizsgált inverz rendszereknek (véleményrangsoroknak) van inverz limeszük. Az inverz limesz létezésének kérdésköre a Kolmogorov-féle Kiterjesztési Tétel tárgya. Kutatásaink során általánosítottuk a Kolmogorov-féle Kiterjesztési Tételt, így a játékelméleti mellett, matematikailag is új eredményt értünk el.

Regressziós játékok

Egy kooperatív játék megoldása az egyes játékosok által együttesen elérhető eredmény bizonyos elvek szerinti elosztása a játékosok között. Egy regressziós modellben a rendelkezésre álló magyarázó változók által együttesen elérhető illeszkedés az az eredmény, amit szét szeretnénk osztani. Az egyes magyarázó változók játékelméleti módszerekkel való értékelése egyrészt hozzásegít az adott, modellezni kívánt probléma jobb megértéséhez, másrészt segít kiválasztani azoknak a változóknak a körét, amelyek az adott probléma modellezéséhez szükségesek. A kutatás célja volt, hogy a kooperatív játékelméletben jól ismert Shapley-érték (Shapley, 1953) fogalmat használva értékeljük a regressziós modellek magyarázó változóit, mely kérdés a mai alkalmazott statisztika egyik sokat vizsgált problémája (lásd pl. Grömping, 2007). Áttekintettük a Shapley-érték Hart és Mas-Colell–féle (1989) karakterizációját, és példákon mutattuk be a javasolt eljárást. Konklúzió: a Shapley-érték használata regressziós modellek magyarázó változóinak értékelésére egy axiomatikusan megalapozható, jól interpretálható módszer, ami ráadásul a többváltozós regressziós módszerekben alkalmazott különféle (bővítő illetve szűkítő) lépésenkénti eljárások (*step-wise*) természetes kiterjesztésének tekinthető.

Nem teljes információs kooperatív játékok

A kooperatív, vagy koalíciós formában adott játékok területén a nem teljes információs szituációk modellezése a nem kooperatív, vagy stratégiai formában adott játékok osztályához viszonyítva még gyermekcipőben jár. A kérdéskörben két munkát emelünk ki Myerson (1982) és Slikker et al. (2003). A területen még nincs elfogadott, széles körben használt modell, az még kialakulóban van. Megítélésünk szerint a modellezés legfőbb problémája az, hogy míg az információ személyhez kötött, személyes jellemző, addig a koalíciós formában adott játékok esetén nem a személyek, hanem a lehetséges koalíciók az alapfogalmak. Ebből kifolyólag úgy ítéljük meg, hogy a nem teljes információs koalíciós formában adott játékok elemzése szorosan kötődik az ún. Nash-programhoz (a Nash-programról lásd pl. Serrano, 2007). Kutatásaink során egy olyan modellt vizsgáltunk, ahol ugyan a játékosok koalícióra léphetnek egymással, tehát a játék kooperatív, de az információs különbségek megmaradnak a koalícióban, tehát bizonyos mértékig a játék nem kooperatív. A konferencián már bemutatott eredmény még publikáció előtt áll.

Hivatkozások:

- Brandenburger A, Dekel E (1993) Hierarchies of beliefs and common knowledge. *Journal of Economic Theory,* 59:189–198.
- Davis M, Maschler M (1967) Existence of stable payoff configurations for cooperative games, in: Shubik M (szerk.) *Essays in Mathematical Economics in Honour of Oskar Morgenstern*, Princeton University Press, pp. 39-52.
- Forgó F, Szidarovszky F (2003) On the relation between the Nash bargaining solution and the weighting method, *European Journal of Operational Research*, 147:108-116.
- Grömping U (2007) Estimators of relative importance in linear regression based on variance decomposition. *The American Statistician,* 61:139--146.
- Harsányi J (1967-1968) Games with incomplete information played by ”Bayesian” players, Part I., II., III., *Management Science* 14:159–182, 320–334, 486–502.
- Hart S, Mas-Colell A (1989) Potential, value, and consistency. *Econometrica,* 57:589-614.
- Heifetz A (1993) The Bayesian formulation of incomplete information – The non-compact case. *International Journal of Game Theory*, 21:329–338.
- Holzman R (2000) The comparability of the classical and the Mas-Colell bargaining sets, *International Journal of Game Theory*, 29:543-553.

- Kaneko M, Wooders M (1982) Cores of partitioning games, *Mathematical Social Sciences*, 3:313-327.
- Le Breton M, Owen G, Weber S (1992) Strongly balanced cooperative games, *International Journal of Game Theory*, 20:419-427.
- Mas-Colell A (1989) An equivalence theorem for a bargaining set, *Journal of Mathematical Economics*, 18:129-139.
- Mertens JF, Sorin S, Zamir S (1994) Repeated games, Part A. *CORE Discussion Paper No. 9420.*
- Mertens JF, Zamir S (1985) Formulations of Bayesian analysis for games with incomplete informations. *International Journal of Game Theory,* 14:1–29.
- Myerson RB (1982) Cooperative games with incomplete information, w*orking paper* (http://www.kellogg.northwestern.edu/research/math/papers/528.pdf)
- Nunez M, Rafels C (2002) The assignment game: the tau-value. *International Journal of Game Theory*, 31(3): 411-422.
- Potters J, Reijnierse J (1995) Gamma-component additive games, *International Journal of Game Theory*, 24:49-56.
- Schmeidler D (1969) The nucleolus of a characteristic function game, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17:1163-1170.
- Serrano R (2007) Nash program, *working paper* (http://www.econ.brown.edu/faculty/serrano/pdfs/2005PalNash.pdf)
- Slikker M, Norde H, Tijs S (2003) Information sharing games, *International Game Theory Review*, 5:1–12.
- Shapley LS (1953) A value for n-person games, in: Kuhn H és Tucker AW (szerk.) *Contributions to the Theory of Games II,* Princeton University Press, pp. 307-317.
- Solymosi T (1999) On the bargaining set, kernel and core of superadditive games, *International Journal of Game Theory*, 28:229-240.
- Tijs S (1981) Bounds for the core and the tau-value, In: *Game Theory and Mathematical Economics,* Moeschlin O, Pallaschke D (szek.), North-Holland, Amsterdam, pp. 123-132.
- von Neumann J, Morgenstern O (1944) *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press.