

Beszámoló a T46023 pályázat zárójelentéséhez

A projekt során megőrzési transzformációk szerkezetének a leírásával foglalkoztunk elsősorban kvantumstruktúrákon.

Megőrzési transzformációkkal kapcsolatos kérdések a matematika legtöbb területén előfordulnak. Ennek oka az, hogy az ilyen leképezések mindig bizonyos struktúrák izomorfizmusainak (illetve általánosabban csak morfizmusainak) tekinthetők, s az ezekre vonatkozó vizsgálatok minden területen a fontos problémák közé tartoznak.

Jelen kutatásaink sikerességének bizonyítékeként külön is említjük, hogy a projekt vezetője ezen idő alatt védte meg MTA doktori értekezését [4], melyet a bírálók ösztönzésére benyújtott a Springer Kiadóhoz, amit az közlésre elfogadott és 2006 végén megjelentetett a Lecture Notes in Mathematics c. sorozatában [10].

A kutatás során tekintett struktúrák a következők voltak: a kvantumállapotok halmaza, az obszervábilisek tere, és az effektek halmaza. A kvantummechanika Neumann Jánostól származó Hilbert-teres leírásában az ezen objektumoknak megfelelő operátoregyüttesek rendre a következők: a pozitív egységnyi nyomú operátorok halmaza, a H Hilbert-tér korlátos lineáris operátorai $B(H)$ algebrája (illetve általánosabban egy C^* -algebra) önadjungált elemei alkotta tér, valamint a $B(H)$ (illetve általánosabban egy C^* -algebra) azon pozitív elemeinek halmaza melyek az egységoperátornál kisebb-egyenlőek.

A projekt alatt kapott eredmények a jelentés részét képező közleményjegyzékben (lásd nyomtatási nézet) szereplőkön túl az alábbi megjelenés illetve bírálólat alatt álló dolgozatokban kerülnek közlésre:

- [17] L. Molnár, *Linear maps on matrices preserving commutativity up to a factor*, Linear Multilinear Algebra, megjelenés alatt.
- [18] L. Molnár, *Maps on the n -dimensional subspaces of a Hilbert space preserving principal angles*, Proc. Amer. Math. Soc., megjelenés alatt.
- [19] L. Molnár, *Maps on states preserving the relative entropy*, J. Math. Phys., megjelenés alatt.

- [20] L. Molnár, *Maps preserving the geometric mean of positive operators*, Proc. Amer. Math. Soc., bíráló alatt.

További két, az MTA-n tartott előadás írásos anyaga, melyek az Akadémia "Közgyűlési Előadások" c. sorozatában várnak megjelenésre:

- [21] L. Molnár, *A kvantumállapotok halmazának transzformációiról*.
[22] L. Molnár, *Az önadjungált operátorok terének transzformációiról*.

Az alábbiakban röviden ismertetjük a kutatás során végzett vizsgálatokat és a nyert eredményeket. Az egyes dolgozatokra a közleményjegyzékben illetve annak fenti kiegészítésében szereplő sorszámokon keresztül történik hivatkozás.

Állapotok halmaza:

A tiszta állapotok tere átmeneti valószínűséget megőrző transzformációinak szerkezetére vonatkozó, Wigner-től származó klasszikus eredmény kiterjesztéseivel kapcsolatos vizsgálataink immár 10 éves múltat tekintenek vissza. Ezen a területen a projekt során a következő eredmények születtek:

- Győry Máté a [2] dolgozatban egy újabb elemi bizonyítást adott Wigner eredeti tételére.

- Wigner tétele egydimenziós objektumok (projekciók illetve alterek) közötti bizonyos numerikus mennyiséget (a szorzat nyoma illetve a szög) megőrző transzformációk leírására vonatkozik. Egy 2001-ben a Comm. Math. Phys.-ben megjelent cikkünkben megadtuk Wigner tételének egy magasabb (fix) dimenziós alterek közötti transzformációkra vonatkozó kiterjesztését. Ezen cikkünkben azonban a felhasznált eszközökkel nem tudtuk tárgyalni azt az esetet, amikor a tér $2n$ -dimenziós, a tekintett alterek pedig n -dimenziósak ($n > 1$). Megfogalmaztunk viszont egy sejtést, melyet végül a [18] dolgozatunkban sikerült igazolnunk. Nevezetesen, bizonyítást nyert, hogy a fenti körülmények között tetszőleges olyan transzformáció az n -dimenziós alterek halmazáról önmagába, ami megőrzi az ún. főszögeket (principal angles) vagy $M \mapsto U(M)$, vagy pedig $M \mapsto U(M^\perp)$ alakban áll elő valamely U unitér vagy antiunitér operátorral.

- Ehhez a problémakörhöz kapcsolódik Győry Máté [1] cikke, ami-ben leírta egy adott Hilbert-tér rögzített (véges) dimenziós altereinek halmazán értelmezett bijektív, az ortogonalitást mindkét irányban megőrző

transzformációinak szerkezetét (egy dimenzióra vonatkozó feltétel teljesülése esetén). Ezzel Wigner tételének Uhlhorn-típusú kiterjesztését kapta magasabb dimenziós alterekre vonatkozóan.

- A relatív entrópia fogalma a kvantum-információelmélet központi fogalma. Jól ismert tény ezen mennyiség unitér-invarianciája: tetszőleges U unitér vagy antiunitér operátor esetén a $\rho \mapsto U\rho U^*$ leképezés megőrzi a relatív entrópia mennyiségét. A [19] dolgozatunkban megmutattuk, hogy ezen állítás fordítottja is igaz, azaz az állapotok terének minden olyan bijektív transzformációja, ami megőrzi a relatív entrópiát, a fenti alakban áll elő. Tágabb értelemben ez az eredmény is Wigner-típusú tételnek tekinthető, ugyanis az állapotok terének a relatív entrópia mennyiségére vonatkozó szimetriái szerkezetét írja le.

- A [11] dolgozatunkban meghatároztuk az állapotok halmazának a konkurenciát, illetve Θ -fidelitást megőrző transzformációit, illetve a számos alkalmazásban előforduló, többek között az Uhlmann-Jozsa-féle fidelitás-fogalomban is szereplő $(\rho, \sigma) \mapsto \sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}}$ műveletet megőrző leképezéseket.

Obszervábilisek tere:

Bár az obszervábilisek tere lineáris tér, ennek olyan transzformációit vizsgáltuk, melyekről nem tételeztük fel a linearitást. A mátrixelméleti illetve operátorelméleti megőrzési problémákkal kapcsolatos kutatások ilyen jellegű, nemlineáris problémákra való kiterjedésében saját és P. Šemrl-lel közös vizsgálataink jelentős szerepet játszottak.

- Az obszervábilisek között az egyik alapvető reláció a kommutálás vagy felcserélhetőség (amit a fizikában kompatibilitásnak neveznek). A [6] dolgozatunkban jellemeztük az obszervábilisek terének azon nemlineáris bijekcióit, amik mindkét irányban megőrzik ezt a relációt. Kiderült, hogy szeparábilis Hilbert-tér ($\dim H \geq 3$) esetén minden ilyen transzformáció $A \mapsto Uf_A(A)U^*$ alakú, ahol U egy fix unitér vagy antiunitér operátor, f_A pedig az A -tól függő korlátos valós Borel-függvény A spektrumán.

- A [8] dolgozatunkban a kvantummechanikai rejtett változók (hidden variables) problémájával kapcsolatos, alapvető jelentőségű Kochen-Specker tétel egy általánosításával foglalkoztunk. Nevezetesen, olyan funkcionálokat vizsgáltunk, melyek az önjungált mátrixok halmazán értelmezettek és multiplikatívak a felcserélhető mátrixokon. Tárgyalásukhoz szükségünk volt ezen funkcionáloknak a pozitív definit valamint a pozitív szemidefinit mátrixok halmazán való vizsgálatára is. A folytonos esetben sikerült a kérdéses funk-

cionálokat teljesen leírni. A megoldáshoz vezető úton a determináns új jellemzéseit kaptuk a fent említett halmazokon.

- Az $(A, B) \mapsto ABA$ ún. Jordan triple-szorzat fontos szerepet játszik a gyűrűelméletben és az operátoralgebrák elméletében is. Nem utolsósorban a [8] cikkünkben kapott eredmények által motiválva a [7] dolgozatunkban meghatároztuk az ezen műveletre vonatkozó automorfizmusait egy Hilbert-tér pozitív invertálható operátorai, pozitív operátorai, önadjungált invertálható operátorai, illetve önadjungált operátorai alkotta struktúráknak a véges illetve a végtelen dimenziós esetben egyaránt. Beláttuk például, hogy az önadjungált invertálható operátorokon $3 \leq \dim H < \infty$ esetén minden folytonos, Jordan triple-szorzatot megőrző bijekció

$$A \mapsto \tau(A) |\det A|^c UAU^* \quad \text{vagy} \quad A \mapsto \tau(A) |\det A|^c UA^{-1}U^*$$

alakba írható, ahol τ egy ± 1 értékeket felvevő folytonos skalárfüggvény, c alkalmas valós szám, U pedig egy unitér vagy antiunitér operátor. A [9] dolgozatunkban ezen eredmények egy részét sikerült kiterjeszteni a $B(H)$ operátoralgebráról a Neumann-algebrák jóval általánosabb kategóriájára.

- A J. Math. Phys. folyóiratban egy 2001-ben megjelent cikkünkben leírtuk az obszervábilisek halmazának az önadjungált operátorok között szokásos rendezésre vonatkozó rendezés-automorfizmusait. Ilyen irányú vizsgálatainkat folytatva, a [12] dolgozatban leírtuk az obszervábilisekkel kapcsolatban nemrégiben definiált ún. Gudder-rendezésre vonatkozó automorfizmusokat, illetve (amit ennél sokkal jelentősebb eredménynek tartunk) a [15] cikkünkben meghatároztuk az effektek illetve az obszervábilisek halmazának a spektrális rendezést megőrző bijekcióit (lásd még alább).

- Végezetül megemlítjük [14] dolgozatunkat, melyben teljes leírását adtuk az ún. 1-hosszúságú (nemlineáris) Jordan elemi operátoroknak az önadjungált operátorok halmazán. A kérdéses elemi operátor fogalmát a M. Brešar-tól és P. Šemrl-től származó absztrakt értelemben értjük, azaz ilyen operátoron egy olyan (M, M^*) transzformáció-párt (ami 'a priori' nem lineáris) értünk az önadjungált operátorok halmazán, melyre $M(AM^*(B)A) = M(A)BM(A)$ és $M^*(BM(A)B) = M^*(B)AM^*(B)$ teljesül minden A, B önadjungált operátor esetén.

Effektek halmaza:

- Az effektekkel kapcsolatos legfontosabb eredményünk az ezek halmaza spektrális rendezést megőrző bijekcióinak leírása.

Ha A, B önadjungált operátorok E_A, E_B spektrálmértékekkel az \mathbb{R} Borel halmazain, akkor azt mondjuk, hogy A kisebb-egyenlő mint B a spektrális rendezésre nézve, ha $E_A(-\infty, t] \geq E_B(-\infty, t]$ teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ esetén (itt \leq a szokásos rendezés a projekciók között). A spektrális rendezés fogalmát Olson vezette be 1971-ben. Kadison egy nevezetes 1951-es tétele szerint az önadjungált operátorokon a szokásos rendezés hálóelméleti szempontból igen furcsán viselkedik: azzal egy ún. anti-hálót alkot. Olson megmutatta, hogy a spektrális rendezés viszont egy feltételesen teljes hálóvá teszi ugyanezt a halmazt. Ezen tulajdonsága és fizikai tartalma miatt a spektrális rendezést az utóbbi években kvantummechanikai szempontból is vizsgálják mind az obszervábilisek mind pedig az effektek halmazán. A Hilbert-tér effektek ezen rendezést megőrző transzformációit sikerült a [15] dolgozatban leírunk az alábbiak szerint. A végtelen dimenziós esetben az effektek halmazának minden olyan bijekciója, ami mindkét irányban megőrzi a spektrális rendezést

$$A \longmapsto \lim_n U(Tf(A)^nT)^{1/n}U^*$$

alakú, ahol U unitér vagy antiunitér operátor, T invertálható pozitív kontrakció, $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ pedig egy szigorúan monoton bijekció.

- A [16] dolgozatunkban egy korábbi, a faktor Neumann-algebrák effektjeinek halmazán a keveréket megőrző leképezésekre vonatkozó eredményünket terjesztettünk ki tetszőleges Neumann-algebrák esetére. Ez azon ϕ transzformációk leírását jelenti az effektek halmazán, melyekre az teljesül, hogy tetszőleges E, F, G effektek esetén E pontosan akkor konvex kombinációja az F, G -nek ha $\phi(E)$ konvex kombinációja az $\phi(F), \phi(G)$ -nek (természetesen esetleg más kombináló tényezőkkel). Eredményünk szerint minden ilyen transzformáció az alapul vett algebrák közötti algebra $*$ -izomorfizmusból és $*$ -antiizomorfizmusból származtatható bizonyos módon.

- Végezetül, a [3] dolgozatunkban a Hilbert-tér effektek halmaza olyan transzformációinak szerkezetét írtuk le, melyek bizonyos numerikus mennyiségeket (ezek az erő-függvénnyel, az operátor normában vett távolsággal, illetve a szekvenciális szorzat normájával kapcsolatosak) őriznek meg. Kiderült, hogy minden esetben a tekintett transzformációk unitér vagy antiunitér operátor által implementáltak.

További eredmények:

- A kvantummechanika matematikai leírásában alapvető fontosságú Gleason-tétel tárgyalásában lényeges szerepet játszanak az ún. frame

függvények. Ezek terén elég természetes módon definiálható egy távolság-fogalom. A [13] dolgozatunkban leírtuk az így keletkező metrikus tér izometriáinak szerkezetét.

- Egy, a *J. Funct. Anal.*-ban 1998-ban megjelent cikkünkben megmutattuk, hogy a $B(H)$ szuszpenziója automorfizmus- és izometria-csoportja algebrailag reflexív. A szóbanforgó cikk bírálójának felvetésével motiválva az [5] dolgozatban Győry Máté karakterizálta ezen izometria-csoport topologikus reflexív lezártjának elemeit.

- A mátrixok kommutálásának fontos relációja mellett nevezetes kapcsolat a kvázi-kommutálás vagy más elnevezéssel 'egy faktor erejéig való kommutálás' (AB és BA egy nemzérus skalár szorzóban térnek el egymástól). Ennek a relációnak lényeges fizikai alkalmazásai is vannak. A [17] dolgozatunkban meghatároztuk a teljes mátrixalgebra illetve az önadjungált mátrixok terének azon lineáris bijekcióit, melyek megőrzik a mátrixok közötti ezen relációt.

- Az operátorelméletben igen fontos szerepet tölt be a pozitív operátorok közötti Ando-tól származó geometriai közép fogalom, aminek jelentős alkalmazásai vannak a kvantum-információelméletben is. A [20] cikkünkben meghatároztuk a pozitív operátorok halmazának azon bijekcióit, amik automorfizmusok ezen műveletre nézve. Bizonyítást nyert, hogy ($\dim H > 1$ esetén) minden, a geometriai közepet megőrző bijektív transzformáció előáll $A \mapsto SAS^*$ alakban, ahol S invertálható lineáris vagy konjugált-lineáris bijekció az alaptéren.

- Megjegyezzük még, hogy a Kérchy László illetve Székelyhidi László Akadémiai Díjának kapcsán rendezett két tudományos ülésen előadást tartottunk a kvantumállapotok illetve obszervábilisek terének transzformációira vonatkozó vizsgálatainkról és a kapott eredményekről. Az előadások írott változata az MTA Közgyűlési Előadások c. sorozatában vár megjelenésre [21,22].

A kutatás során elért eredményeinkről több mint 20 előadást tartottunk nemzetközi konferenciákon illetve kül- és belföldi egyetemek szemináriumain.

Molnár Lajos
egyetemi tanár, MTA doktora

Debrecen, 2008. 02. 26