Matematikai Közlemények
IX. kötet, 2021

doi:10.20312/dim.2021.02

Az általánosított hiperbolikus oktonióalgebrákról

Péntek Kálmán
ELTE SEK TTMK
Savaria Matematikai Tanszék
pentek.kalman@sek.elte.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A dolgozatban általánosítjuk Macfarlane M klasszikus hiperbolikus kvaternióit és megkonstruáljuk az általánosított hiperbolikus kvaternióinak $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ struktúráját. Az általánosított Cayley-Dickson eljárás felhasználásával e struktúrából megalkotjuk az általánosított hiperbolikus oktoniók $\mathbb{O}^{H}_{\alpha\beta\gamma}$ nem kommutatív és nem asszociatív algebráját. Az utolsó fejezetben megkonstruáljuk az általánosított hiperbolikus oktoniók vektor-mátrix reprezentációját.

ABSTRACT. In the paper we generalize Macfarlane's classical hyperbolic quaterninons M, and we construct the structure of generalized hyperbolic quaternions $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$. Based of the generalized Cayley-Dickson process of this structure we yield the non-commutative and non-associative algebras of generalized hyperbolic octonions $\mathbb{O}^{H}_{\alpha\beta\gamma}$. In the last section we construct the vector-matrix representation of generalized hyperbolic octonions.

1. Bevezetés

Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) ír matematikus, fizikus és csillagász a komplex számok struktúrájának általánosításaként alkotta meg a kvaterniókat. A kvaterniók képzetes egységei közötti, áttörést jelentő

$$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$$

összefüggést 1843. október 16-án ismerte fel. Dublinban az Ír Tudományos Akadémia ülésére tartott gyalogosan, ahol aznap éppen ő elnökölt. A Királyi Csatorna hidjához érve naplója bejegyzése szerint villámcsapásként érte a felismerés. A pillanat hevületében zsebkésével a híd korlátjába véste a felfedezett összefüggést, amely egyértelműen a probléma megoldását jelentette. Hamilton ezután teljes hátralevő életét a kvaterniók elmélete minél teljesebb kidolgozásának szentelte. (*HAMILTON*, 1844,1847)

Nem sokkal Hamilton felfedezése után John Thomas Graves (1806 – 1870) ír, majd Arthur Cayley (1821 – 1895) angol jogász és matematikus egymástól függetlenül megalkották az oktoniók struktúráját. A XIX. század második felében jónéhány más, a számfogalom általánosításaként felépített rendszer is napvilágot látott. Ezek egyike volt az Alexander Macfarlane (1851 – 1913) skót származású amerikai matematikus és fizikus által 1891-ben megalkotott hiperbolikus kvaterniók algebrája. Ezeket a matematikai struktúrákat egészen a XX. század harmincas éveinek végéig hiperkomplex rendszereknek nevezték utalva arra, hogy a komplex számok általánosításaiként alakultak ki. Manapság ezekre a struktúrákra inkább a (test feletti) algebrák elnevezést használják. (*CAYLEY*, 1889), (*MACFARLANE*, 1900), (*KANTOR – SZOLODOVNYIKOV*, 1985), (*ROSENFELD*, 1997).

Ebben a dolgozatban először általánosítjuk az általánosított kvaternióalgebrák mintájára Macfarlane hiperbolikus kvaternióit és áttekintjük e struktúrák legfontosabb tulajdonságait. A témát magyar nyelven részletesen tárgyalja pl. *PÉNTEK* (2020) dolgozata. Ezután az általánosított hiperbolikus kvaterniók struktúrájának Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárásával építjük fel az általánosított hiperbolikus oktoniók algebráját. Ez az algebra nem kommutatív és nem is asszociatív, de reprezentálható alkalmas Zorn-féle vektor-mátrixok segítségével. Ezen reprezentációs tétel bizonyítása jelenti dolgozatunk fő eredményét.

2. Az általánosított komplex számok és az általánosított hiperbolikus kvaterniók

Ebben a fejezetben összefoglaljuk azokat a legfontosabb előzetes ismereteket, amelyek feltétlenül szükségesek a dolgozat fő részét képező általánosított hiperbolikus oktoniók tárgyalásához.

Jelölje $\{\mathbb{R},+,\cdot\}$ a valós számok testét a 0 összeadási és 1 szorzási neutrális elemmel. Ekkor a

(1) $$\mathbb{C}_\gamma := \{a + b\cdot i : a,b \in \mathbb{R},\ i \notin \mathbb{R}\}$$

alakú kifejezéseket az *általánosított komplex számok* halmazának nevezzük akkor és csakis akkor, ha az $\{1, i\}$ *komplex egységek* eleget tesznek az alábbi szorzási szabályoknak:

(2) $$1\cdot 1 = 1,\ \ 1\cdot i = i\cdot 1 = i,\ \ i^2 = -\gamma,$$

ahol $\gamma \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges rögzített valós paraméter.

A $\mathbb{C}_\gamma$ halmazban egy *skalárral való szorzás*, *összeadás*, valamint a (2) alapján az algebrák szokásos konstruálási szabályai szerint még egy *szorzás* művelet is értelmezhető az alábbi módon. Tetszőleges $r \in \mathbb{R}, a + b\cdot i, a' + b'\cdot i \in \mathbb{C}_\gamma$ esetén legyen

(3) $r\cdot(a + b\cdot i) := (r\cdot a) + (r\cdot b)\cdot i$ a skalárral való szorzás,

(4) $(a + b\cdot i) + (a' + b'\cdot i) := (a + a') + (b + b')\cdot i$ az összeadás,

(5) $(a + b\cdot i)\cdot(a' + b'\cdot i) := (a\cdot a' - \gamma\cdot b\cdot b') + (a\cdot b' + a'\cdot b)\cdot i$ a szorzás.

1. Tétel. Az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\gamma$ halmaza a (3), (4) és (5) műveletekkel egy 2-dimenziós, neutrális elemes, kommutatív és asszociatív algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

Megjegyezzük, hogy a $\mathbb{C}_\gamma$ a $\gamma = 1$ esetben a klasszikus Gauss-féle komplex számok $\mathbb{C}$ algebráját állítja elő.

A $z = a + b\cdot i \in \mathbb{C}_\gamma$ elem *konjugált*ján a $\bar{z} := a - b\cdot i \in \mathbb{C}_\gamma$ általánosított komplex számot értjük.

A $z = a + b\cdot i \in \mathbb{C}_\gamma$ általánosított komplex szám *normá*jának a

$$N(z) := z\cdot\bar{z} = \bar{z}\cdot z = a^2 + \gamma\cdot b^2 \in \mathbb{R}$$

valós számot nevezzük.

A $z = a + b\cdot i, z' = a' + b'\cdot i \in \mathbb{C}_\gamma$ elempár *skaláris szorzat*án a

$$\langle z, z'\rangle := a\cdot a' + \gamma\cdot b\cdot b' \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük.

Jelölje ezután $M_2(\mathbb{R})$ a valós test feletti másodrendű négyzetes mátrixok 4-dimenziós teljes mátrixalgebráját. Az

(6) $$M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -\gamma \cdot b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\} \subset M_2(\mathbb{R})$$

alakú mátrixok halmaza a szokásos mátrixműveletekkel az $M_2(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrában egy részalgebrát alkot.

2. Tétel. Az $f : \mathbb{C}_\gamma \to M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), a + b \cdot i \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\gamma \cdot b & a \end{pmatrix}$ leképezés egy algebra-izomorfizmus, így $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{C}_\gamma$ struktúra mátrixreprezentációja.

Az általánosított komplex számok részletes tárgyalása megtalálható magyarul pl. *PÉNTEK* (2018) dolgozatában.

Az

(7) $$\mathbb{M}_{\alpha\beta} := \{a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i, j, k \notin \mathbb{R}\}$$

alakú kifejezéseket az *általánosított hiperbolikus kvaterniók* halmazának nevezzük akkor és csakis akkor, ha az $\{1, i, j, k\}$ *általánosított kvaternió-egységek* között teljesülnek a következő szorzási összefüggések:

(8) $$1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad 1 \cdot j = j \cdot 1 = j, \quad 1 \cdot k = k \cdot 1 = k$$

$$i^2 = \alpha, \quad j^2 = \beta, \quad k^2 = \alpha \cdot \beta$$
$$i \cdot j = -j \cdot i = k, \quad j \cdot k = -k \cdot j = \beta \cdot i, \quad k \cdot i = -i \cdot k = \alpha \cdot j,$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített valós számok.

Az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ halmazban a *skalárral való szorzás*, az *összeadás*, valamint a (8) alapján az algebrák szokásos konstruálási szabályai szerint még a *szorzás* művelet értelmezhető az alábbi módon. Tetszőleges $r \in \mathbb{R}$, $a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$, $a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ esetén legyen

(9) $$r \cdot (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) := (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i + (r \cdot c) \cdot j + (r \cdot d) \cdot k$$

a skalárral való szorzás,

(10) $$(a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) + (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) := \\ := (a + a') + (b + b') \cdot i + (c + c') \cdot j + (d + d') \cdot k$$

az összeadás,

(11) $$(a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) \cdot (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) :=$$

$$:= (a \cdot a' + \alpha \cdot b \cdot b' + \beta \cdot c \cdot c' + \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d') + \\ +(a \cdot b' + b \cdot a' + \beta \cdot c \cdot d' - \beta \cdot d \cdot c') \cdot i + \\ +(a \cdot c' - \alpha \cdot b \cdot d' + c \cdot a' + \alpha \cdot d \cdot b') \cdot j + \\ +(a \cdot d' + b \cdot c' - c \cdot b' + d \cdot a') \cdot k$$

a szorzás.

3. Tétel. Az általánosított hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ halmaza a rajta értelmezett (9), (10) és (11) műveletekkel egy 4-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív és nem is asszociatív algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

Ebben a struktúrában $0_{\mathbb{M}} := 0 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ az összeadás neutrális eleme és egyben a szorzás zéruseleme is, $1_{\mathbb{M}} := 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ pedig a szorzás neutrális eleme.

Megmutatható, hogy az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ egy olyan kvadratikus algebra, amelyik nem alternáló. Megjegyezzük továbbá, hogy az $\alpha = \beta = 1$ esetben az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ struktúra speciálisan a Macfarlane-féle klasszikus hiperbolikus kvaterniók algebrája lesz.

A $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ *konjugált*ján a

(12) $$\bar{q} := a - b \cdot i - c \cdot j - d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$$

elemet értjük.

A $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ *normá*jának a

(13) $$N(q) := q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = a^2 - \alpha \cdot b^2 - \beta \cdot c^2 - \alpha \cdot \beta \cdot d^2 \in \mathbb{R}$$

valós számot nevezzük.

Ha $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, q' = a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$, akkor e két elem *skaláris szorzat*án a

(14) $$\langle q, q' \rangle := a \cdot a' - \alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d' \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük.

A $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ *valós rész*ének (skalár rész) a

(15) $$S(q) := a \in \mathbb{R}$$

valós számot, *képzetes rész*ének (vektor rész) a

(16) $$V(q) := b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{R}^3$$

vektort nevezzük. Az

(17) $$Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) := \{0 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}\} \subset \mathbb{M}_{\alpha\beta}$$

alakú általánosított hiperbolikus kvaterniókat pedig *tiszta képzetes kvaterniók*nak hívjuk. Ha $q = b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, q' = b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$, akkor

(18) $$q \cdot q' = -[-\alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d'] + [(c \cdot d' - d \cdot c') \cdot \beta \cdot i + \\ +(d \cdot b' - b \cdot d') \cdot \alpha \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k]$$

Az első szögletes zárójelben szereplő mennyiséget $q \circ q'$ jelöli és e két elem *skaláris szorzat*ának, a második szögletes zárójelben szereplő mennyiséget $q \times q'$ jelöli és e két elem *vektoriális szorzat*ának nevezzük. Ekkor tehát a $q \cdot q' = -q \circ q' + q \times q'$ összefüggés teljesül.

A

(19) $$Z(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : A_{11}, A_{22} \in \mathbb{R}, A_{12}, A_{21} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

alakú hipermátrixok halmazát *valós Zorn-féle vektor-mátrixok*nak nevezzük.

4. Tétel. A $Z(\mathbb{R})$ halmaz egy 8-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív és nem is asszociatív algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

Jelölje $Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R})$ azon speciális valós Zorn-féle vektor-mátrixok halmazát, amelyre teljesülnek az

(20) $$A_{11} = A_{22} := a \in \mathbb{R}, A_{12} = -A_{21} := (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$$

feltételek.

5. Tétel. A $Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R})$ halmaz egy 4-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív és nem is asszociatív részalgebrát alkot a $Z(\mathbb{R})$ algebrában. Az

$$(21) \qquad F: \mathbb{M}_{\alpha\beta} \to Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R}),\, a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \mapsto \begin{pmatrix} a & (b,c,d) \\ -(b,c,d) & a \end{pmatrix}$$

leképezés egy algebra-izomorfizmus, így $Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R})$ az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ struktúra vektor-mátrix reprezentációja.

Az általánosított hiperbolikus kvaterniók részletes tárgyalása magyarul megtalálható pl. *PÉNTEK* (2020) dolgozatában.

3. Az általánosított hiperbolikus oktoniók

Az általánosított hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ algebrájából kiindulva az általánosított Cayley-Dickson-féle eljárással származtatjuk az általánosított hiperbolikus oktoniókat.

Az $\mathbb{M}_{\alpha\beta} \times \mathbb{M}_{\alpha\beta} := \{(q_0, q_1): q_0, q_1 \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}\}$ direktszorzatban értelmezzünk műveleteket a következő módon

(22) skalárral való szorzás: $r \cdot (q_0, q_1) := (r \cdot q_0, r \cdot q_1)$,
(23) összeadás: $(p_0, p_1) + (q_0, q_1) := (p_0 + q_0, p_1 + q_1)$,
(24) szorzás: $(p_0, p_1) \cdot (q_0, q_1) := (p_0 \cdot q_0 - \gamma \cdot \overline{q_1} \cdot p_1, p_1 \cdot \overline{q_0} + q_1 \cdot p_0)$,

ahol $\gamma \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter, $r \in \mathbb{R}, (p_0, p_1), (q_0, q_1) \in \mathbb{M}_{\alpha\beta} \times \mathbb{M}_{\alpha\beta}$.

6. Tétel. Az $\mathbb{M}_{\alpha\beta} \times \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ direktszorzat a (22), (23) és (24) műveletekkel egy 8-dimenziós, nem kommutatív és nem is asszociatív, de neutrális elemes algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett.

E struktúrában $0_{\mathbb{O}} := (0_{\mathbb{M}}, 0_{\mathbb{M}})$ az összeadás, $1_{\mathbb{O}} := (1_{\mathbb{M}}, 0_{\mathbb{M}})$ a szorzás neutrális eleme, továbbá mint 8-dimenziós vektortérben természetes bázist alkot az alábbi elemrendszer: $1_{\mathbb{O}}, (i, 0_{\mathbb{M}}), (j, 0_{\mathbb{M}}), (k, 0_{\mathbb{M}}), E := (0_{\mathbb{M}}, 1_{\mathbb{M}}), (0_{\mathbb{M}}, i), (0_{\mathbb{M}}, j), (0_{\mathbb{M}}, k)$.

7. Tétel. Az $U := \{(q_0, 0_{\mathbb{M}}): q_0 \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}\} \subset \mathbb{M}_{\alpha\beta} \times \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ részalgebrát alkot az előző tételben szereplő

$$f_{\mathbb{O}}: \mathbb{M}_{\alpha\beta} \to U, q_0 \mapsto (q_0, 0_{\mathbb{M}})$$

leképezés egy algebra-izomorfizmus, s ezért az

$$f_{\mathbb{O}}^{*}: \mathbb{M}_{\alpha\beta} \to \mathbb{M}_{\alpha\beta} \times \mathbb{M}_{\alpha\beta}, q_0 \mapsto (q_0, 0_{\mathbb{M}})$$

egy beágyazási algebra-monomorfizmus.

Definíció. A beágyazás eredményeként kapott struktúrát $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}^{H}$ szimbólummal jelöljük és az *általánosított hiperbolikus oktoniók* algebrájának nevezzük.

8. Tétel. Az $E = (0_{\mathbb{M}}, 1_{\mathbb{M}}) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}^{H}$ elemre teljesülnek a következők:

(a) $E^2 = -\gamma$,
(b) bármely $q_1 \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ elemre $(0_{\mathbb{M}}, q_1) = q_1 \cdot E$,
(c) minden $(q_0, q_1) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}^{H}$ elem előállítható $q_0 + q_1 \cdot E$ alakban.

A (c) pontban szereplő előállítást az általánosított hiperbolikus oktonió *kvaternió-algebrai* alakjának nevezzük. Az ezen alakkal történő számolás szabályait mutatja a következő

9. Tétel. Ha $r \in \mathbb{R}, p_0 + p_1 \cdot E, q_0 + q_1 \cdot E \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$, akkor
(a) skalárral való szorzás: $r \cdot (q_0 + q_1 \cdot E) = (r \cdot q_0) + (r \cdot q_1) \cdot E$,
(b) összeadás: $(p_0 + p_1 \cdot E) + (q_0 + q_1 \cdot E) = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) \cdot E$,
(c) szorzás: $(p_0 + p_1 \cdot E) \cdot (q_0 + q_1 \cdot E) =$
$$= (p_0 \cdot q_0 - \gamma \cdot \overline{q_1} \cdot p_1) + (p_1 \cdot \overline{q_0} + q_1 \cdot p_0) \cdot E.$$
Speciálisan a $p_0 := 0_{\mathbb{M}}$, $p_1 := 1_{\mathbb{M}}$, $q_0 := q$, $q_1 := 0_{\mathbb{M}}$ értékadással az előző tétel (c) része alapján érvényes a

10. Következmény. Bármely $q \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ elemre érvényes: $E \cdot q = \bar{q} \cdot E$.

Megjegyzés. Ha q értéke i, j vagy k, akkor a fenti következmény alapján
$$E \cdot i = -i \cdot E, E \cdot j = -j \cdot E, E \cdot k = -k \cdot E.$$
Egyszerű direkt számolással igazolható a következő

11. Lemma.
(a) Ha $f \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}, E \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$, akkor $(f \cdot i) \cdot E = f \cdot (i \cdot E)$,
(b) ha $g \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}, E \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$, akkor $(g \cdot j) \cdot E = g \cdot (j \cdot E)$,
(c) ha $h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}, E \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$, akkor $(h \cdot k) \cdot E = h \cdot (k \cdot E)$.

A 8. Tétel és a 11. Lemma alapján közvetlenül adódik a

12. Tétel. Ha $q_0 = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k, q_1 = a_4 + a_5 \cdot i + a_6 \cdot j + a_7 \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ akkor a
$$o := q_0 + q_1 \cdot E \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$$
általánosított hiperbolikus oktonió felírható
$$o = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k + a_4 \cdot E + a_5 \cdot (i \cdot E) + a_6 \cdot (j \cdot E) + a_7 \cdot (k \cdot E)$$
alakban.

Legyen a továbbiakban
$$e_0 := 1, e_1 := i, e_2 := j, e_3 := k, e_4 := E, e_5 := i \cdot E, e_6 := j \cdot E, e_7 := k \cdot E,$$
amellyel az általánosított hiperbolikus oktoniók fenti előállítása lényegesen tömörebb és könnyebben kezelhető

(25) $$o = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i$$

alakban állíthatók elő. A (25) alakot az $o \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$ oktonió valós-algebrai alakjának nevezzük, az $\{e_i\}_{i=0}^{7}$ elemeket általánosított hiperbolikus oktonióegységeknek nevezzük.

A 11. Lemma folytatásaként egyszerű direkt számítással igazolható, hogy az általánosított hiperbolikus oktoniók körében is érvényesek (*EBBINGHAUS ET AL,* 1991) mintájára az alábbi összefüggések:

13. Tétel. Tetszőleges $u, v \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ és az $e_4 = E \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$ esetén:
(a) $(u + 0_{\mathbb{M}} \cdot e_4) \cdot (v + 0_{\mathbb{M}} \cdot e_4) = u \cdot v + 0_{\mathbb{M}} \cdot e_4 = u \cdot v$,

(b) $(u + 0_{\mathbb{M}} \cdot e_4) \cdot (0_{\mathbb{M}} + v \cdot e_4) = u \cdot (v \cdot e_4) = (v \cdot u) \cdot e_4$,
(c) $(0_{\mathbb{M}} + u \cdot e_4) \cdot (v + 0_{\mathbb{M}} \cdot e_4) = (u \cdot e_4) \cdot v = (u \cdot \bar{v}) \cdot e_4$,
(d) $(0_{\mathbb{M}} + u \cdot e_4) \cdot (0_{\mathbb{M}} + v \cdot e_4) = (u \cdot e_4) \cdot (v \cdot e_4) = e_4^2 \cdot (\bar{v} \cdot u)$.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az (a) rész szerint az olyan általánosított hiperbolikus oktoniókkal, amelyek „képzetes része” 0, úgy számolhatunk, mint az általánosított hiperbolikus kvaterniókkal.

14. Tétel. Az általánosított hiperbolikus oktonióegységek Cayley-féle szorzótáblájának belső tartománya:

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	αe_0	e_3	$-\alpha e_2$	e_5	αe_4	$-e_7$	αe_6
e_2	$-e_3$	βe_0	βe_1	e_6	e_7	βe_4	$-\beta e_5$
e_3	αe_2	$-\beta e_1$	$\alpha\beta e_0$	e_7	$-\alpha e_6$	βe_5	$\alpha\beta e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-\gamma e_0$	γe_1	γe_2	γe_3
e_5	$-\alpha e_4$	$-e_7$	αe_6	$-\gamma e_1$	$\gamma\alpha e_0$	$-\gamma e_3$	$\gamma\alpha e_2$
e_6	e_7	$-\beta e_4$	$-\beta e_5$	$-\gamma e_2$	γe_3	$\gamma\beta e_0$	$-\gamma\beta e_1$
e_7	$-\alpha e_6$	βe_5	$-\alpha\beta e_4$	$-\gamma e_3$	$-\gamma\alpha e_2$	$\gamma\beta e_1$	$\gamma\alpha\beta e_0$

Bizonyítás. A 13. tétel (a) része szerint a műveleti táblázat bal felső 4×4–es parcellája azonos az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ általánosított hiperbolikus kvaterniók egységeinek szorzótáblájával. A 13. tétel (b) részének felhasználásával egyszerű közvetlen számítással igazolhatjuk a műveleti táblázat jobb felső 4×4–es parcellájának helyességét. Ezután a 13. tétel (c) részét alkalmazva igazolhatjuk a műveleti táblázat bal alsó 4×4–es parcella kitöltésének helyességét. Végül pedig a műveleti táblázat jobb alsó 4×4–es parcellájának helyessége a 13. tétel (d) része alapján látható be. □

Hosszadalmas, bár nem nehéz számításokkal a 14. tétel, valamint a szorzás összeadásra való disztributív tulajdonságát felhasználva adódik a következő

15. Tétel. Legyen $r \in \mathbb{R}, a = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i , b = \sum_{i=0}^{7} b_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}^{H}$, akkor érvényesek a következő számolási szabályok:

(a) skalárral való szorzás:

$$r \cdot \left(\sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=0}^{7} (r \cdot a_i) \cdot e_i ,$$

(b) összeadás:

$$a + b = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i + \sum_{i=0}^{7} b_i \cdot e_i = \sum_{i=0}^{7} (a_i + b_i) \cdot e_i ,$$

(c) szorzás:

$$a \cdot b = \left(\sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{7} b_j \cdot e_j\right) = \sum_{i,j=0}^{7} (a_i \cdot b_j) \cdot (e_i \cdot e_j) =$$

$$\begin{aligned}
&= (a_0b_0 + \alpha a_1b_1 + \beta a_2b_2 + \alpha\beta a_3b_3 - \gamma a_4b_4 + \gamma\alpha a_5b_5 + \gamma\beta a_6b_6 + \gamma\alpha\beta a_7b_7) \cdot e_0 + \\
&+(a_0b_1 + a_1b_0 + \beta a_2b_3 - \beta a_3b_2 + \gamma a_4b_5 - \gamma a_5b_4 - \gamma\beta a_6b_7 + \gamma\beta a_7b_6) \cdot e_1 + \\
&+(a_0b_2 - \alpha a_1b_3 + a_2b_0 + \alpha a_3b_1 + \gamma a_4b_6 + \gamma\alpha a_5b_7 - \gamma a_6b_4 - \gamma\alpha a_7b_5) \cdot e_2 + \\
&+(a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0 + \gamma a_4b_7 - \gamma a_5b_6 + \gamma a_6b_5 - \gamma a_7b_4) \cdot e_3 + \\
&+(a_0b_4 + \alpha a_1b_5 + \beta a_2b_6 + \alpha\beta a_3b_7 + a_4b_0 - \alpha a_5b_1 - \beta a_6b_2 - \alpha\beta a_7b_3) \cdot e_4 + \\
&+(a_0b_5 + a_1b_4 - \beta a_2b_7 + \beta a_3b_6 - a_4b_1 + a_5b_0 - \beta a_6b_3 + \beta a_7b_2) \cdot e_5 + \\
&+(a_0b_6 + \alpha a_1b_7 + a_2b_4 - \alpha a_3b_5 - a_4b_2 + \alpha a_5b_3 + a_6b_0 - \alpha a_7b_0) \cdot e_6 + \\
&+(a_0b_7 - a_1b_6 + a_2b_5 + a_3b_4 - a_4b_3 - a_5b_2 + a_6b_1 + a_7b_0) \cdot e_7
\end{aligned}$$

Definíció. Az $o = q_0 + q_1 \cdot e_4 \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$ konjugáltján az $\bar{o} := \overline{q_0} - q_1 \cdot e_4 \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított hiperbolikus oktoniót értjük. Ha $q_0 = \sum_{i=0}^{3} a_i \cdot e_i$ és $q_1 = \sum_{i=0}^{3} a_{i+4} \cdot e_i \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$, akkor egyszerűen látható, hogy $\bar{o} = a_0 \cdot e_0 - \sum_{i=1}^{7} a_i \cdot e_i$.

A konjugált képzésére érvényesek az alábbi összefüggések:

16. Tétel. Ha $r \in \mathbb{R}$ és $o, o' \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$ tetszőleges elemek, akkor

(a) $\bar{\bar{o}} = o$ involutív,

(b) $\overline{r \cdot o} = r \cdot \bar{o}$ homogén,

(c) $\overline{o + o'} = \bar{o} + \overline{o'}$ additív,

(d) $\overline{o \cdot o'} = \overline{o'} \cdot \bar{o}$ anti-multiplikatív.

17. Tétel. Ha $o = q_0 + q_1 \cdot e_4 \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$, $q_0 = \sum_{i=0}^{3} a_i \cdot e_i$, $q_1 = \sum_{i=0}^{3} a_{i+4} \cdot e_i \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$, akkor teljesül az $o \cdot \bar{o} = \bar{o} \cdot o = a_0^2 - \alpha \cdot a_1^2 - \beta \cdot a_2^2 - \alpha \cdot \beta \cdot a_3^2 + \gamma \cdot a_4^2 - \alpha\gamma \cdot a_5^2 - \beta\gamma \cdot a_6^2 - \alpha\beta\gamma \cdot a_7^2 \in \mathbb{R}$.

Definíció:

Definíció. Az $o \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított hiperbolikus oktonió *normá*ján a 17. tételben szereplő

$$N(o) := o \cdot \bar{o} = \bar{o} \cdot o \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük.

18. Tétel. Az általánosított hiperbolikus oktoniók normája rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

(a) Tetszőleges $o \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$ esetén teljesül $N(o) = N(\bar{o})$,

(b) Ha $o, o' \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$, akkor általában $N(o \cdot o') \neq N(o) \cdot N(o')$.

Megjegyzés. A 18. tétel (b) pontját egyszerűen beláthatjuk, hiszen $N(e_1 \cdot e_2) = N(e_3) = -\alpha\beta$, másrészt $N(e_1) = -\alpha$ és $N(e_2) = -\beta$, így $N(e_1) \cdot N(e_2) = (-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha\beta$, tehát valóban $N(e_1 \cdot e_2) \neq N(e_1) \cdot N(e_2)$.

Definíció. Ha $o = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i$ és $o' = \sum_{i=0}^{7} b_i \cdot e_i \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$, akkor e két általánosított hiperbolikus oktonió skaláris szorzatán az

$\langle o, o' \rangle := a_o b_0 - \alpha a_1 b_1 - \beta a_2 b_2 - \alpha\beta a_3 b_3 + \gamma a_4 b_4 - \alpha\gamma a_5 b_5 - \beta\gamma a_6 b_6 - \alpha\beta\gamma a_7 b_7 \in \mathbb{R}$

valós számot értjük.

Egyszerű direkt számolással láthatjuk be a következő állítást:

19. Tétel. A $\mathcal{B}: \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma} \to \mathbb{R}, (o, o') \mapsto \langle o, o' \rangle$ egy szimmetrikus, bilineáris leképezés: tetszőleges $r \in \mathbb{R}, o, o', o'' \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$ esetén

(a) $\langle o, o' \rangle = \langle o', o \rangle$ kommutatív,

(b) $\langle r \cdot o, o' \rangle = \langle o, r \cdot o' \rangle = r \cdot \langle o, o' \rangle$ homogén,

(c) $\langle o + o', o'' \rangle = \langle o, o'' \rangle + \langle o', o'' \rangle$ jobbról disztributív az összeadásra nézve,

(d) $\langle o, o' + o'' \rangle = \langle o, o' \rangle + \langle o, o'' \rangle$ balról disztributív az összeadásra nézve.

Vegyük észre, hogy ha $o \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$, akkor $N(o) = \langle o, o \rangle$, tehát az általánosított hiperbolikus oktoniók normája a skaláris szorzatból származtatható.

4. Az általánosított hiperbolikus oktoniók vektor-mátrix reprezentációja

A $\gamma \in \mathbb{R}$ valós paraméter segítségével konstruáljuk meg a 2. fejezetben látott módon az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\gamma$ algebráját, s vegyük a $\mathbb{C}_\gamma$ elemeiből felépülő

$$Z(\mathbb{C}_\gamma) := \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : A_{11}, A_{22} \in \mathbb{C}_\gamma, A_{12}, A_{21} \in \mathbb{C}_\gamma^3 \right\}$$

alakú hipermátrixok halmazát! Értelmezzünk ezután ezen hipermátrixok halmazában egy skalárral való szorzást és egy összeadást a következő módon! Ha $r \in \mathbb{R}, A, B \in Z(\mathbb{C}_\gamma)$, akkor

$r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot A_{11} & r \cdot A_{12} \\ r \cdot A_{21} & r \cdot A_{22} \end{pmatrix}$ a skalárral történő szorzást,

$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}$ az összeadást értelmezi.

20. Tétel. A $Z(\mathbb{C}_\gamma)$ halmaz a rajta értelmezett skalárral való szorzás és összeadás műveletekkel egy 16-dimenziós vektorteret alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

Tekintsük most a $Z(\mathbb{C}_\gamma)$ elemei közül azon különleges alakú hipermátrixokat, amelyekre teljesül, hogy $A_{22} \in \mathbb{C}_\gamma$ az $A_{11} \in \mathbb{C}_\gamma$ konjugáltja, $A_{12} \in \mathbb{C}_\gamma^3$ komponensei az $A_{21} \in \mathbb{C}_\gamma^3$ komponenseinek negatív konjugáltjai. Ezek halmazát jelölje a továbbiakban $Z_*(\mathbb{C}_\gamma)$!

21. Tétel. A $Z_*(\mathbb{C}_\gamma)$ halmaz a skalárral való szorzás és összeadás műveletével egy 8-dimenziós alteret alkot $Z(\mathbb{C}_\gamma)$ vektortérben.

Ezt a struktúrát algebrává fejleszthetjük, ha elemei között értelmezünk egy $*$ szorzás műveletet a következő módon:

$$A * B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} :=$$
$$:= \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \circ B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + B_{22} \cdot A_{12} - A_{21} \times B_{21} \\ B_{11} \cdot A_{21} + A_{22} \cdot B_{21} + A_{12} \times B_{12} & A_{22} \cdot B_{22} + A_{21} \circ B_{12} \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy a $*$ szorzás emlékeztet a mátrixok klasszikus szorzására, de itt a $\circ$ és $\times$ műveleteket a következőképpen értelmezzük:

Ha $U = (u_1, u_2, u_3), V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}_\gamma^3$, akkor legyen

$$U \circ V := -\alpha \cdot u_1 \cdot v_1 - \beta \cdot u_2 \cdot v_2 - \alpha \cdot \beta \cdot u_3 \cdot v_3 \in \mathbb{C}_\gamma,$$

$$U \times V := \big((u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2) \cdot \beta, (u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3) \cdot \alpha, u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1\big) \in \mathbb{C}_\gamma^3.$$

E skaláris és vektoriális szorzásnak nevezhető művelet teljesen analóg az $Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ struktúra 2. fejezet (18) formulájával értelmezett skaláris és vektoriális szorzatával.

22. Tétel. A $Z_*(\mathbb{C}_\gamma)$ vektortér a $*$ szorzási művelettel egy 8-dimenziós nem kommutatív és nem asszociatív algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

Ezt a struktúrát *általánosított komplex hiperbolikus Zorn-féle vektor-mátrixok* algebrájának nevezzük, kiterjesztve *ZORN* (1933) eredményeit.

Tekintsük *KARATAS – HALICI* (2018) dolgozatában bemutatott mintájára az

$$F\colon \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma} \to Z_*(\mathbb{C}_\gamma)\,,$$

$$\sum_{j=0}^{7} a_i\, e_i \longmapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_4 i & (-a_1 + a_5 i, -a_2 + a_6 i, -a_3 + a_7 i) \\ (a_1 + a_5 i, a_2 + a_6 i, a_3 + a_7 i) & a_0 - a_4 i \end{pmatrix}$$

leképezést! Az F egy bijektív leképezés, hiszen F^{-1} is leképezés. Hosszadalmas direkt számítással igazolható, hogy F egy művelettartó leképezés is, mivel érvényesek az alábbi összefüggések: tetszőleges $r \in \mathbb{R}, o, o_1, o_2 \in \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma}$ esetén

(a) homogén: $F(r \cdot o) = r \cdot F(o)$,
(b) additív: $F(o_1 + o_2) = F(o_1) + F(o_2)$,
(c) multiplikatív: $F(o_1 \cdot o_2) = F(o_1) * F(o_2)$.

Ezért érvényes a dolgozat fő eredményét összegző

23. Tétel. Az $F\colon \mathbb{O}^H_{\alpha\beta\gamma} \to Z_*(\mathbb{C}_\gamma)$ leképezés egy algebra-izomorfizmus, így az általánosított komplex hiperbolikus Zorn-féle vektor-mátrixok algebrája az általánosított hiperbolikus oktoniók algebrájának egy reprezentációja.

Irodalomjegyzék

[1] **Cayley, A**. (1889): On Jacobi's elliptic function, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions. The collected Mathematical Papers of Arthur Cayley 1: 127.

[2] **Ebbinghause, H.D. Hermes, H. Hirzebruch, F. Koecher, M. Mainzer, M. Mainzer, K. Neukirch, J. Prestel, A. Remmert, R.** (1991): Numbers. Springer.

[3] **Hamilton, W. R,** (1844): On a new Species of Imaginary quantities connected with a Theory of quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy 2, 424-434.

[4] **Hamilton, W. R.** (1847): On Quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy 3, 1-16.

[5] **Kántor, I. L., Szolodovnyikov, A. Sz.** (1985): Hiperkomplex számok. Gondolat, Budapest, 1985.

[6] **Karatas, A. Halici, S.** (2018): Vector matrix representation of octonions and their geometry. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 67(1): 161-167. doi:10.1501/Commua1_0000000839

[7] **Macfarlane, A.** (2018): Hyperbolic Quaternions. Proceedings of the Royal Society at Edinburgh. vol. 23. 169 – 180 +figures plate. doi:10.1017/S0370164600010385

[8] **Péntek, K.,** (2018): Az általánosított kvaternióalgebrák egy új felépítéséről. Dimenziók. Matematikai Közlemények. VI. 25-30. doi:10.20312/dim.2018.03

[9] **Péntek, K.,** (2020): Az általánosított hiperbolikus kvaternióalgebrákról. Dimenziók. Matematikai Közlemények. VIII. 25-33. doi:10.20312/dim.2020.03

[10] **Rosenfeld, B.** (1997): Geometry of Lie groups. Kluwer Academic Publisher, Netherlands. doi:10.1007/978-1-4757-5325-7

[11] **Zorn, M. A.,** (1933): Alternativkörper und quadratische systeme. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg. Springer Berlin/Heidelberg. 395-402.