A TERMELÉS DINAMIKÁJA SZERVEZETI TANULÁS ESETÉN[1]

VÖRÖS JÓZSEF
Pécsi Tudományegyetem

Bizonyítékaink vannak arra, hogy a szervezeti tanulás akár 50%-kal is hozzájárulhat a termelékenység növekedéséhez átlagosan, ehhez persze az is kell, hogy rendelkezzünk termelési folyamatokkal, ahol tanulni lehet. A fejlett társadalmakban megfigyelhető termelői kapacitások kihelyezése csökkenti a tanulás lehetőségét, és növeli a fejlődés lehetőségét azon országokban, ahova a telepítés történt. E tanulmány olyan modelleket hoz létre, melyben a termelékenység alakulása közvetlenül függ a múltban megtermelt termékek volumenétől. Attól függően, hogy az időt folytonosnak, vagy diszkrétnek tekintjük, két modellcsaládot vizsgálunk, és arra az érdekes ellentmondásra jutunk, hogy folytonos időkezelés esetén a termelés dinamikája változatlan, diszkrét esetben viszont csökkenő. Folytonos esetre így mód nyílik arra, hogy egy explicit képlettel határozzuk meg az optimális termelési volument, diszkrét esetre pedig egy dinamikus programozási eljárással optimális megoldást tudunk adni, amikor az időhorizont két periódusból áll.

Kulcsszavak: Terméléstervezés, tanulás, optimális irányításelmélet, dinamikus programozás

1 Bevezetés

A szervezeti tanulás egy olyan folyamat, mely tudást fejleszt, fenntart, átad, és hatással van a szervezet versenyképességére (Argote és Hora, 2016). A szervezeti tanulás részben az autonóm tanulással is kapcsolatban van, amikor is az emberi tanulást oly módon határozzuk meg, hogy az az adott feladatok ismételt végrehajtása vagy folyamatos munkavégzés során bekövetkezett fejlődési trend (Jaber, 2006). Az ismétlődés termelési folyamatba ágyazott, így fejlődés, termelékenység növekedés, versenyképesség közvetlenül korrelál a termelési volumennel, következésképpen a termelési volumen alakulása már rövid távon is hat a versenyképesség alakulására. Az arra vonatkozó bizonyítékok, hogy számos iparágban a termelési kapacitások távoli kihelyezése, így a fejlesztés leválása a termelési folyamatról az innovációt csökkenti és a versenyképességet hátráltatja hosszú távon, csak egyre növekednek (Pisano és Shih, 2012b). A termelési folyamat birtoklásának ezen duplázott hatása – tehát mint a szervezeti tanulás és innováció forrása – indokolttá teszi, hogy foglalkozzunk a termelési volumen versenyképességre gyakorolt hatásával.

[1] Beérkezett 2020. december 15. E-mail: `voros.jozsef@ktk.pte.hu`.

A Boston Consulting Group által 1966-ban megalkotott, úgynevezett tapasztalati görbét a közgazdaságtanban az öt legbefolyásosabb ábrájának tartják, mely a stratégia alakítására hatással bír (Ovans, 2011). E görbe azt az összefüggést ragadja meg, hogy az idő haladtával (tehát a termelési volumen növekedésével) a vállalatok megtanulják a termelési költségek csökkentését, növelni tudják a hatékonyságot, tökéletesíthetik a terméket, vagyis végeredményként a termelési volumen növekedésével a fajlagos termelési költségek csökkenni fognak. Kenneth Arrow még ennél is korábban, vagyis minden valószínűség szerint elsőként, már 1962-ben beazonosított összefüggést a fajlagos termelési költség és a kumulatív output között, és bizonyosan elsőként használta a „tanulás a termelés által" fogalmat (Thomson, 2012). Arrow (1962) állítása, hogy a fajlagos termelési költségek csökkenése a felgyülemlett tapasztalatok következménye, ugyanis a termelés a felmerülő termelési problémák folyamatos megoldását jelenti, melyekre adott kedvező válaszok kiválasztódnak és fennmaradnak. A fajlagos termelési költség és a kumulatív output között eme létező negatív kapcsolat az egyik legjobban dokumentált tapasztalati szabályosság a közgazdaságtanban (Thomson, 2012). Ezen összefüggések alapján megadatik, hogy a következő függvényeket definiáljuk: a fajlagos termelési költségfüggvényt jelöljük $c(q(t))$-vel, ahol $q(t)$ a t időpontra felhalmozódott termelési tudás, melyet az alábbival helyettesíthetünk: $q(t) = a\int_0^t v(u)\,du$, és $v(t)$ a termelés volumenét jelöli a t időpontban, továbbá a egy pozitív paraméter. Feltehetjük az előbbiek alapján, hogy $c_q < 0$, ahol $c_q = dc/dq$.

A statikus megközelítéssel szemben eme dinamikus megközelítés esetleg lehetővé teszi olyan optimális folyamatok felfedését, amikor egy időhorizont elején akár a termelési költségek alá menő árat határoznak meg a piacon, hogy keresletet generáljanak. A jelentkező veszteségek ellenére van értelme a termelésnek, mert a tudás növekedni fog. A növekvő termelési tudás a fajlagos termelési költségeket csökkenti, és a kezdeti veszteségek ellenére az egész időhorizont alatt mégis pozitív nagyságú profit keletkezik majd. Clarke és kollegái (1982) az elsők között fogalmaznak meg optimális irányításelméleti modellt, amikor a szervezeti tanulás lehetősége hasznosul. A fajlagos termelési költségfüggvényükbe oly módon épül be a tanulás termelés által koncepció, hogy a fajlagos költségek egyre és egyre lejjebb skálázódnak az idő haladtával, vagy egyre kisebbé és kisebbé válnak. Formába öntve, azt javasolják, hogy a fajlagos termelési költségeket az alábbi függvényekkel írjuk le: skálázáshoz $c(q, v) = c_0 + m(q)h(v)$, az átalakuláshoz $c(q, v) = c_0 + m(q) + h(v)$, továbbá $m_q < 0$, $h_v > 0$, és c_0 a kezdeti fajlagos termelési költség. Az itt definiált költségfüggvényekre az ár dinamikája csökkenő az első esetben, és növekvő a másodikban. Mivel e modellekben a kereslet és termelési volumen megegyezik, a keresleti görbék szigorúan monotonok, a termelési volumen vonatkozásában ez növekedést jelent az első, és csökkenést a második esetben. Spence (1981) még e tanulmány megjelenése előtt egy meglehetősen hasonló modellt definiált, melyben $c(q) = c_0 m(q)$, továbbá megadta a T időhorizontra vonatkozó teljes termelési volumen képletét. E modellben a diszkontráta zérus, továbbá az inverz keresleti függvény is specifikus.

Nevezetesen, $p(v) = a(t)v^{-\alpha}$, és a fajlagos termelési költségfüggvény formája: $c_0 e^{-\beta q}$ (α és β adott pozitív paraméterek és $a(t)$ az időnek adott függvénye).

Az úgynevezett gerjesztett tanulás koncepciójának bevezetésével a téma tovább gazdagodott. Dutton és Thomas (1984) modelljében a fajlagos költségeket már a gerjesztett és automatikus tanulás alakította. Gerjesztett tudásról akkor beszélünk, amikor beruházások, fejlesztések arra összpontosulnak, hogy nagyobb tudás álljon rendelkezésre, az autonóm tudás pedig kevésbé kognitív folyamat, automatikusan következik be. Fine és Porteus (1989) olyan dinamikus modellt elemeznek, melyben lehetőség nyílik a termelési folyamat minőségfejlesztésére, valamint a termelés indítását megelőző beállítási időhossz csökkentésére (amennyiben ezek rövidek, rugalmasabb a termelési folyamat, jellemzően kevesebb a minőségi probléma). Chand (1989), aki ugyancsak jeles modellezője a területnek, elemzi a beruházás hatását a beállítási idők csökkentésére és a folyamatminőség alakulására. Chand és kollegáinak (1996) egy későbbi tanulmánya a terület alapműve, mivel olyan dinamikus modellt építettek fel, melyben az állandó folyamatfejlesztés hatását vizsgálták a tőkeallokációra, és érdekes módon, ők profitot maximálnak. Arra a következtetésre jutnak, hogy termelés dinamikája növekvő, de a folyamatfejlesztő tevékenységek dinamikája viszont csökken az idő haladtával. Kétségtelen, az egyik leggazdagabb modell a területen a Li és Rajagopalan (1998) féle modell, mert mind a gerjesztett, mind az autonóm tanulás kihat az árra, a termelés, és a fejlesztési tevékenységek dinamikájára. Arra a következtetésre jutnak, hogy a termelékenységi és minőségi tudás növelésére irányuló beruházások intenzitása csökken az idő haladtával.

Fontos megjegyezni, hogy e modellekben a kereslet egyetlen tényezőtől, az ártól függ csak. Teng és Thomson (1996) modelljében viszont már a keresleti függvényben az ár mellett ott szerepel a minőség is. Újonnan piacra kerülő termékekre vonatkoztatva szerepel az ár-minőség kapcsolat, és gerjesztett tanulás szerepel a modellben. Érdekes módon, a minőség döntési változó, és nem állapot változó. E tanulmány szerzője (Vörös, 2006) olyan modellt publikált, melyben a keresleti függvényben két változó van, az ár és a minőség, de a minőség fejlesztési tevékenység eredménye. A fejlődés lehet mind autonóm, mind gerjesztett, de nem csak a termékminőség esetében, hanem a folyamatminőségre is vonatkozhat. E modellkonstrukcióban a termelés dinamikája növekedő az idő haladtával, miként a már említett Li–Rajagopalan (1998) modellben is. A Pan és Li (2016) féle tanulmányban a kereslet lineárisan függ mind a termékteljesítmény minőségi jellemzőjétől, mind az ártól. A hangsúly a folyamat- és termékinnováción van. A minőség megjelenése a keresleti függvényben teret engedett olyan publikációknak, mint a Chenavaz (2012, 2017), Chenavaz és Jasimuddin (2017), Ni és Li (2018) munkák sora, ahol előkerülnek a piacismereti indikátorok. A minőség és ár kapcsolatát elemezve Vörös (2019) arra a következtetésre jutott, hogy a termékteljesítmény minőségének növekedése nem szükségszerű, hogy maga után vonja az ár növekedését is. Sőt, példák sora mutatja, hogy a minőség növekedése révén, amennyiben az a termelési hatékonyság növekedésével jár, az árak akár csökkenhetnek is.

Újabban több tanulmány is megjelent, melyek a tanulási görbe formájával foglalkoznak. Lapré és kollegái (2000) például a minőségnövekedés tanulási görbéjét formázták meg dinamikus termelési viszonyok között. Kimutatták, hogy olyan projekteknél, melyek mind a miért-tudásba, mind a hogyan-tudásba fektetnek, a hulladékcsökkenés felgyorsult, míg másoknál ez nem következett be. Fioretti (2007) modelljét kiválóan támasztják alá empirikus adatok, míg Tucker és társai (2007) egyedi tanulási folyamatokat elemeznek, és egy átfogó modellt kidolgozva, meg tudják magyarázni a tanulási folyamatok alkalmazásának sikerességét. Kimutatták, hogy a szervezeti tanulás különösen fontos olyan iparágakban, ahol a tudás tartalma rendkívül gyorsan változik.

A ,,tanulási görbe újszerű alkalmazása a termeléstervezésben és logisztikában” zászló alatt például a *Computers and Industrial Engineering* a tavalyi évben egy különszámot szentelt a szervezeti tanulás jelentőségének hangsúlyozására (Glock és társai, 2019). Ebben a számban például Gosling (2019) a stratégiailag irányított beszállító-felhasználó kapcsolatot vizsgálta, és empirikus vizsgálatának eredménye azt mutatta, hogy egy hosszú távra szóló beszállító-felhasználó kapcsolatrendszer a teljesítményeket növeli, és segíti a tanulási folyamatot.

Egyértelmű tehát, hogy a felhalmozódó termelési volumen kétségtelenül növeli a termelékenységi tudást, továbbá a rövid távú költségcsökkentés érdekében végrehajtott nyakló nélküli kapacitáskihelyezés pedig hátráltatja a hosszú távú versenyképességét számos iparágban. Pisano és Shih (2012a) azt állítják, hogy legtöbb esetben az innováció forrása a termelési gyakorlat. Ha termelési folyamatot nem birtoklunk, akkor az innováció lehetséges forráspontja sincs meg, alapvető érdek tehát termelési folyamatok birtoklása. Ha azokkal egy ország kevésbé rendelkezik, kedvező körülményeket kell garantálni ahhoz, hogy termelési folyamatok otthonra leljenek. Alapműnek tekinthető munkáikban Pisano és Shih (2009, 2012b) az iparágakat annak alapján sorolják osztályokba, hogy a termelési kapacitások kihelyezése mennyire könnyen sodorja veszélybe a vállalatok versenyképességét. Ahol az innováció közvetlenül a termelési folyamat újításából ered, azok a legveszélyeztetettebb iparágak. Itt a gyártás és fejlesztési lehetőség szétválasztása különösen kockázatos, mivel az innováció közvetlenül a termelési folyamatba ágyazódik, onnan ered. A gyártás és a fejlesztés nem választható szét ekkor.

E tanulmányban a szervezeti tanulás lehetőségére úgy tekintünk, mint a versenyképesség forrására, és azt vizsgáljuk, hogy milyen lesz a termelés dinamikája időn át, amikor a múltbéli termelési tapasztalatok közvetlenül hatnak a termelékenység alakulására. Heizer, Rendl és Munson (2020) könyvükben arról tesznek említést, hogy a termelékenység növekedésének 52%-a abból ered, hogy a munkát jobban és hatékonyabban szervezzük, mint korábban. Annak érdekében, hogy minél tisztábban lássuk a szervezeti tanulás hatását, egy nagyon egyszerű, átlátható modellt hozunk létre, melyben termelékenységi tudás kizárólag abból ered, hogy a munkát még jobban és hatékonyabban szervezzük. Ily módon modellünk nagyon hasonló a Spence (1981) illetve a Clarke (1982) modellekhez, mivelhogy ők is hasonlítanak egymásra, de azért mindegyik különböző.

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy zéró diszkontráta esetén a termelés dinamikája konstans, azaz lapos a folytonos modellben az idő függvényében. Amikor viszont diszkrét modellt írunk fel, azt a meglepő eredményt kapjuk, hogy a termelés dinamikája csökkenő. Pozitív diszkontráta esetén a folytonos modellben a termelési dinamika növekvő, diszkrét esetben pedig akár növekvő, akár csökkenő is lehet. Azt is megmutatjuk, hogy ez kizárólag annak következménye, hogy az időt folytonosnak, vagy diszkrétnek tekintjük-e. Megemlítjük még, hogy jóval bonyolultabb modellszerkezetre a diszkrét eset már tárgyalva volt Vörös (2013)-as tanulmányában, azonban e tanulmányban a hangsúly a minőség alakulására helyeződik. A következő fejezet az alapkoncepciót tárgyalja, és a folytonos modellt elemzi. A 3. fejezet a diszkrét modell tulajdonságait adja közre, és példák segítségével illusztrálja a felvetett modellek tulajdonságait. A 4. fejezet néhány következtetést von le.

2 Az optimális irányításelméleti modell

E fejezetben egy profitmaximalizáló optimális irányításelméleti modellt fejlesztünk ki, amikor is az egy időpontban kitermelt profitot diszkontáljuk a jelen értékre. Az időhorizont végén azonban a felhalmozódott termelékenységi tudásra értékként tekintünk, miként általános esetben is, a vizsgált időhorizont végén tekintettel kell lenni a cég piaci értékére is. Jelölje $v(t)$ a termelés volumenét a t időpontban, $t \in [0, T]$, ahol T a probléma időhorizontját határozza meg, és azt tesszük fel, hogy $T \in (0, \infty)$. Ugyancsak feltesszük, hogy a megtermelt teljes $v(t)$ termékmennyiséget késleltetés nélkül a fogyasztóhoz juttatjuk, aki azonnal fizet is érte. Jelölje $p(v(t))$ az inverz keresleti függvényt, és erről az inverz keresleti függvényről azt tételezzük fel, hogy kétszer folytonosan differenciálható, továbbá feltesszük, hogy mind p_v, mind $(p(v)v)_{vv}$ negatívak. Szavakban megfogalmazva, azt tételezzük fel, hogy $p(v)$ egységnyi termék árát jelöli, amikor a termelés volumene v a t időpontban, és ez az ár csökken, amikor több termék kerül a piacra. Tehát $p_v < 0$. Feltesszük még, hogy $(p(v)v)_{vv} < 0$, ahol $p_v = \frac{dp}{dv}$, továbbá $p_{vv} = \frac{d^2p}{dvdv}$ sorrendben az első és másodrendű deriváltak.

Megjegyezzük, ezen feltételek széles körben használtak az irodalomban, gyakorlatilag feltételrendszerünk nem szűkíti le az irodalomban ismert keresleti függvények körét, a monopolisztikus vállalatokat leíró modellek szinte mindegyike e feltételeket használja, lásd például Chand és társai (1996). Mint említettük, a $p_v < 0$ feltétel azt mondja, hogy aki többet akar eladni, az csökkentse az árat, míg a $(p(v)v)_{vv} < 0$ feltétel azt mondja, hogy a marginális hozadék csökkenő. A fajlagos termelési változó költséget a $c(q(t))$ kifejezés jelöli, és $q(t)$ fejezi ki a termelékenységi tudást. Amikor tehát a termelékenységi tudás a $q(t)$ szinten áll, akkor a fajlagos termelési változó költség $c(q(t))$.

Megszorítás nélkül feltehetjük, hogy nagyobb termelékenységi tudás esetén a fajlagos termelési költségek alacsonyabbak, azt írhatjuk tehát, hogy $c_q < 0$. A felgyülemlett tudásnak piaci értéke van, az időhorizont végén erre úgy tekintünk, mint kincsre, a kereslet-kínálat dönti el, ennek mi a piaci értéke. A nagyjából folyamatosan veszteséget termelő Skype-ért például 2011-ben a Microsoft közel tíz milliárd dollárt fizetett (Knight, 2016), és szinte senki sem értette ennek okát. Lehet, hogy a Microsoft előre látta, hogy világjárvány jön, és az e-megbeszéléseknek ekkora piaca lesz? Ebből az a tanulság vonható le, hogy nem elegendő csak a megtermelt profit volumenét nézni, figyelembe kell venni azt, hogy a felhalmozódó tudásnak mekkora lehet a piaci értéke akkor, amikor a probléma vizsgálatát befejezzük. Jelölje P az egységnyi tudás piaci értékét az időhorizont végén. Ekkor a várható bevétel nagysága az időhorizont végén, azaz a T időpontban: $Pq(T)$. Megjegyezzük, hogy a modellezők ezt a részt a legtöbb esetben kihagyják konstrukciójukból, pedig ennek alakulása alapvetően befolyásolhatja az egész probléma viselkedését, de egyébként is, ha P értékét zérusra állítjuk, ugyanott vagyunk, mintha figyelembe sem vettük volna az úgynevezett megmentett értéket az időhorizont végén.

A fentiek alapján tehát az alábbi modellt fogalmazhatjuk meg:

$$\max_v \int_0^T e^{-rt}\big(p(v(t)) - c(q(t))\big)v(t)\,dt + e^{-rT}Pq(t) \tag{1a}$$

$$\dot{q}(t) = av(t) \tag{1b}$$

$$v(t) \geq 0\,, \tag{1c}$$

ahol $\dot{q}(t) = dq/dt$, r a diszkontráta, és a a tanulási ráta paramétere, melyet pozitívnak tekintünk (megjegyezzük, hogy az irodalomban nyomai vannak annak is, amikor ez a paraméter negatív, vagyis annak vagyunk tanúi, hogy elfelejtünk valamit.)

$v(t)$	A termelés volumene a t időpontban, döntési változó
$q(t)$	A termelékenységi tudás szintje a t időpontban, állapotváltozó
$c(q)$	Fajlagos termelési változó költség a t időpontban, amikor a felhalmozódott termelékenységi tudás szintje q
c_q	Marginális termelési költség, $c_q = dc/dq$, $c(q(0)) = c_0 = c$ pedig az induló termelési költség a tervezési időszak elején
$p(v)$	Az inverz keresleti függvény, vagy másként a fajlagos ár a t időpontban. Feltételeink: $p_v < 0$, $(p(v)v)_{vv} < 0$, $p_{vv} = d^2p/dv^2$
T	A tervezési időszak hossza
r	A diszkontráta
P	A termelékenységi tudás piaci értéke a tervidőszak végén
a	A tanulási ráta, input paraméter
H	A Hamilton-függvény
$\lambda(t)$	A dinamikus Lagrange-szorzó értéke a t időpontban
b	Maximális termelési kapacitás
z	$z = 1/(1+r)$, tehát z a defláló faktor

1. táblázat. A jelölések összefoglalása

A modell célfüggvénye két részből áll, az első, integrál rész az egyes időpontokban megtermelt diszkontált profitot összegzi, az utolsó kifejezés a tervezési időszak alatt kitermelt diszkontált profithoz adja hozzá a felhalmozódott termelékenységi tudás jelenre diszkontált értékét. Az integráljel utáni kifejezés egyik lényeges része a fajlagos profit, mely az eladási ár és a fajlagos termelési költség különbsége, mely $(p(v) - c(q))$. A fajlagos profitot szorozza a megtermelt és eladott termékek volumene, ami v, következésképpen a t időpontban rendelkezésre álló profit $(p(v) - c(q))v$, és ezt diszkontáljuk a jelen időszakra. A diszkontfaktor e^{-rt}. Az integrál az egyes időpontokban kitermelt és diszkontált profitot összegzi a tervidőszak alatt. Az (1b) feltétel újra definiálja a termelékenységi tudás növekedésének formáját. Az (1c) feltétel a szokásos nemnegativitási feltétel, amely persze sokszor okozhat kellemetlenséget.

1. Tulajdonság: *Amikor a tanulási ráta zérus, azaz $a = 0$, és $p(v) < c(q(0))$, vagyis, amikor a vevők nem hajlandóak $c(q(0))$ árat megfizetni a termékért, az optimális termelési politika, hogy ne termeljünk veszteséget, mert az soha nem térül meg. Az optimális megoldás tehát az alábbi: $v(t) = 0$ minden t-re, azaz $t \in [0, T]$. Azonban, ha a tanulási ráta és az eladási ár megfelelően magas, akkor előfordulhat, hogy $v(t) > 0$ minden t-re, $t \in [0, T]$, vagyis a tervidőszak elején a termék ára a termelési költségek alá nézhet.*

Annak érdekében, hogy bizonyítsuk állításunkat, vegyük először az (1) alatti feladat Hamilton-függvényét, amit H-val jelölünk:

$$H(v) = \big(p(v) - c(q)\big)v + \lambda a v\,. \tag{2}$$

Itt $\lambda(t)$ a dinamikus Lagrange-szorzó. A Kamien – Schwartz (1991) könyvre alapozva, az optimalitás szükséges feltételei az alábbiak:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -c_q v = -\dot{\lambda} + r\lambda \tag{3a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = p_v v + \big(p(v) - c(q)\big) + \lambda a \le 0 \tag{3b}$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} v = 0, \quad c(q(0)) = c, \quad q(0) = q_0, \quad \lambda(T) = P, \tag{3c}$$

ismételve, hogy c a fajlagos termelési költség az időszak elején.

A feladathoz rendelhető másodrendű feltétel:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v \partial v} = p_{vv} v + 2p_v < 0, \tag{3d}$$

mely egyébként teljesül abból következően, hogy feltevésünk szerint $(p(v)v)_{vv}$ negatív.

A (3a) mindkét oldalát megszorozva e^{-rt}-vel, azt kapjuk, hogy

$$-e^{-rt} c_q v = -e^{-rt}\dot{\lambda} + e^{-rt} r\lambda\,,$$

melyet úgy írhatunk fel, hogy

$$\frac{d(-\lambda e^{-rt} + A)}{dt} = -e^{-rt} c_q v \,, \tag{4a}$$

ahol A egy tetszőleges konstans. A (4a) kifejezést átírhatjuk a következő formában:

$$\lambda e^{-rt} + A = \int_0^t e^{-ru} c_q v(u)\, du \,. \tag{4b}$$

Tekintettel arra, hogy $\lambda(T) = P$, $t = T$-re a (4b) az alábbi formát veszi fel:

$$P e^{-rT} + A = \int_0^T e^{-ru} c_q v(u)\, du \,. \tag{4c}$$

A (4c) kifejezést kivonva a (4b)-ből, továbbá osztva az e^{-rt} kifejezéssel, azt kapjuk, hogy

$$\lambda(t) = P e^{-r(T-t)} - \int_t^T e^{-r(u-t)} c_q v(u)\, du \,. \tag{5}$$

Az (5) formából azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a dinamikus Lagrange-szorzó nem lehet negatív, abból következően, hogy a c_q kifejezés értéke negatív.

Amennyiben az a értéke zérus lenne, a (3b) alatti feltétel az alábbira redukálódik:

$$p_v v + (p(v) - c(q)) \leq 0 \,, \tag{6}$$

és ha az induló fajlagos termelési költség $c(q(0)) = c$ olyan magas, hogy a $p = c$ áron a terméket nem lehet eladni, vagyis $p(v) < c$ minden v-re, akkor a (6) bal oldala mindig negatív lesz, tekintettel arra, hogy $p_v < 0$.

Következésképpen, a célfüggvény akkor veszi fel maximumát, ha a termelési volument zérus szinten rögzítjük az időhorizont mindegyik pontjára, vagyis $v = 0$ lesz minden t-re.

Amennyiben viszont, amikor a és $\lambda(0)$ értékek megfelelően magasak lesznek, a

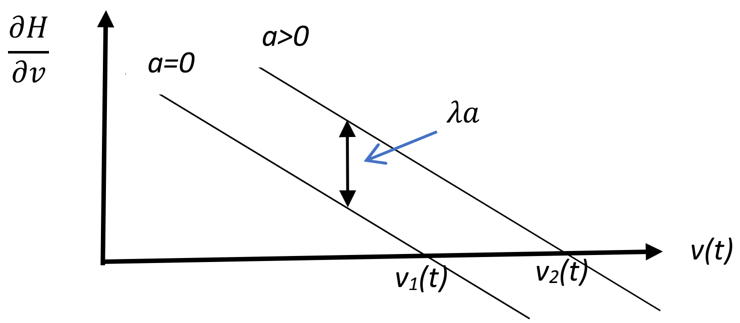
$$p_v v + (p(v) - c) + \lambda a = 0 \tag{7}$$

egyenletnek lehet pozitív v-re megoldása a kezdeti időpontra, annak ellenére, hogy $p(v) - c < 0$.

A λ (5) alatti formája azt mutatja, hogy négy tényező határozza meg ennek bekövetkezését: a diszkontráta, a termelékenységi tudás egységének ára az időhorizont végén, termelékenységi tudás növekedésének hatása a fajlagos termelési költségekre, valamint a termelés volumene. Tekintettel arra, hogy a dinamikus Lagrange-szorzó lineáris P-ben, ezen értéket megfelelően nagyra választva a (7)-nek lesz megoldása pozitív termelési volumennel.

2. Tulajdonság: *A termelés volumene növekszik, amikor a termelékenységi tudás rátája növekszik.*

Most tételezzük fel, hogy a (3b)-nek van megoldása pozitív v-vel még azon esetekre is, amikor a tanulási ráta zérus ($a = 0$). A $\frac{\partial H}{\partial v}$ függvény formáját az *1. ábra* alsó vonala mutatja, ugyanis $\frac{\partial H}{\partial v}$ csökkenő függvény. A $\frac{\partial H}{\partial v}$ függvény csökkenő tulajdonsága a másodrendű feltételből következik, melyet a (3d) ad meg.



1. ábra. Az elsőrendű optimalitási feltétel formája

Az (5) feltételből azt következtethetjük, hogy λ pozitív, még a $t = T$ időpontban is, ha P értéke megfelelően nagy, ugyanis pozitív termelési szintünk van. Így a $\frac{\partial H}{\partial v}$ függvény felfelé kúszik, amikor a λa felfelé mozog. Következésképpen a termelési volumen növekedni fog, miként az 1. ábrán is látható, hiszen $v_1(t) < v_2(t)$ az 1. ábrán.

3. Tulajdonság: *Amikor a diszkontráta vagy a tanulási ráta zérus, az optimális termelési szint konstans az egész időhorizont alatt, pozitív értékekre viszont a termelés volumene növekedni fog az időhorizont végéig.*

Tételezzük fel, hogy (3b)-nek létezik megoldása, oly módon, hogy a termelési szint, a v pozitív. A $p_v v + p(v) = c(q) - \lambda a$ egyenletben a bal oldalon levő függvény minden t-re azonos, továbbá a jobb oldalon szereplő $c(q)$ és λ értékek az időnek folytonos függvényei. Következésképpen, az optimális megoldás, vagyis a v termelési szintek az időnek folytonos függvényei lesznek. Ekkor viszont vehetjük mind a jobb, mind a bal oldali kifejezések idő szerinti deriváltjait, melyek meg kell egyezzenek. Vagyis a (3b) feltétel idő szerinti deriváltját véve, igaz kell legyen, hogy

$$(p_{vv} v + p_v)\dot{v} + p_v \dot{v} - c_q \dot{q} + a\dot{\lambda} = 0\,. \tag{8}$$

(5)-ből, mindkét oldal idő szerinti deriváltját véve, azt kapjuk, hogy

$$\dot{\lambda}(t) = rPe^{-r(T-t)} - r\int_t^T e^{-r(u-t)} c_q v(u)\,du + c_q v(t)\,. \tag{9}$$

Ezen összefüggést (8)-ban alkalmazva, kisebb átalakítás után, azt kapjuk, hogy

$$(p_{vv}v + 2p_v)\dot{v} - c_q\dot{q} + a\Big(rPe^{-r(T-t)} - r\int_t^T e^{-r(u-t)}c_q v(u)\,du\Big) + \\ + ac_q v(t) = 0\,. \tag{10}$$

Mivel $\dot{q}(t) = av(t)$ az (1b)-ben meghatározott dinamika alapján, ezért (10) a következő formára egyszerűsödik:

$$-(p_{vv}v + 2p_v)\dot{v} = ar\Big(Pe^{-r(T-t)} - \int_t^T e^{-r(u-t)}c_q v(u)\,du\Big) = ar\lambda(t)\,. \tag{11}$$

A bal oldalon szereplő $\dot{v}$ együtthatója (11)-ben pozitív kell legyen a (3d)-ben meghatározott másodrendű feltétel miatt. Ugyanakkor a jobb oldalon szereplő valamennyi komponens pozitív, amennyiben mind a, mind r pozitív. Következésképpen, a termelési volumen növekedni fog az idő függvényében a teljes időhorizonton át, amikor mind r, mind a pozitív. Amikor ezek közül bármelyik zérus, akkor a jobb oldal zérus, és következésképpen a termelési volumen idő szerinti deriváltja is zérus, azaz $\dot{v} = 0$, vagyis a termelési ráta konstans az idő függvényeként.

A következő sorokban explicit megoldást hozunk létre zéró diszkontráta esetére, de az egyszerűség kedvéért eltekintünk az időhorizont végén értékelhető termelékenységi tudás piaci értékéről, azaz azt tételezzük fel, hogy $r = P = 0$. Feltesszük továbbá, hogy az inverz keresleti függvény lineáris. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az inverz keresleti függvény lineáris formája a $(b - v(t))$ alakot ölti, a fajlagos változó költség alakulását pedig az alábbi dinamika fogja meghatározni:

$$c(q(t)) = \frac{c}{1 + q(t)}\,. \tag{12}$$

Megjegyezhető, hogy e formulát, természetesen mások mellett is, Chand és szerzőtársai már 1996-ban használta. (12)-ben $q(t) = a\int_0^t v(u)\,du$. Ezen összefüggéseket végül is (5)-ben alkalmazva, $(P = 0)$,

$$\lambda(t) = -cv\int_t^T \frac{-1}{(1 + av\int_0^u dk)^2}\,du = cv\int_t^T \frac{1}{(1 + avu)^2}\,du = \\ = -\frac{c}{a}\Big[\frac{1}{1 + avu}\Big]_t^T = \frac{c}{a}\Big(\frac{1}{1 + avt} - \frac{1}{1 + avT}\Big)\,, \tag{13}$$

tekintettel arra, hogy v végül is egy változó, mely konstans marad az idő haladtával.

4. Tulajdonság: *Zérus diszkontráta és pozitív tanulási ráta esetében*

(a) *$b \geq c$ paraméterhalmazra, vagy a*

(b) *$c > b$ paraméterhalmazra, de $\frac{(abT-2)^2}{8aT} + b > c$ és $abT - 2 > 0$ feltételek fennállása esetében az optimális termelési szint az alábbi:*

$$v(t) = \frac{abT - 2 + \sqrt{(abT-2)^2 + 8aT(b-c)}}{4aT}, \tag{14}$$

és más esetben zéró.

Ezen esetre tudjuk, hogy $c(q(T)) = \frac{c}{1+avT}$ és v konstans marad az egész időhorizonton. (13)-ból következik, hogy $\lambda(T) = 0$ a $t = T$ esetre. Most, feltételezve, hogy a termelési szint pozitív, tehát érdemes termelni, a $t = T$ időpontra a (3b) a következő formát ölti:

$$-2v + b - \frac{c}{1+avT} = 0\,.$$

Átrendezve ezt az egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$-2aTv^2 + v(abT-2) + (b-c) = 0\,. \tag{15}$$

Ezen feltétel bal oldala egy konkáv parabola v-ben, mely a $(b-c)$ értéket veszi fel, amikor a termelési szint zérus ($v = 0$). Amikor $b - c > 0$, akkor a konkáv parabola diszkriminánsa pozitív lesz, és e diszkrimináns négyzetgyöke nagyobb, mint az $(abT - 2)$ kifejezés abszolút értéke. Következésképpen a (14) által meghatározott konstans termelési szint maximum profitot fog biztosítani.

Másrészt, abban az esetben, amikor az ár a kezdő termelési költségszinttel egyezik meg, és kereslet ezen árra zérus, azaz $c > b$, a termelési szint még mindig lehet pozitív, annak ellenére, hogy a vállalat veszteséget termel az első szakaszban, mert árával a termelési költség alá kell mennie, hogy termékét eladhassa. Viszont tanul. Matematikailag, mindenekelőtt pozitív diszkrimináns kell. Ezt $\frac{(abT-2)^2}{8aT} + b > c$ feltétel biztosítja, továbbá, ha $(abT - 2) > 0$, akkor a nagyobbik gyök olyan termelési szintet határoz meg, mely maximális profitot ad.

A 4. Tulajdonság első fele azt állítja, hogy ha a fajlagos termelési költséget meghaladó árra létezik pozitív kereslet, akkor lesz pozitív termelési szint. Ezért az analízisünket indíthatjuk abból a tényből kiindulva, hogy (3b) egyenlőség formájában teljesül, vagyis, hogy a termelési szint pozitív lesz. A 4. Tulajdonság második fele talán még érdekesebb, hiszen azt mondja, hogy elhagyva a szokásos feltételt, miszerint a kezdeti állapotban a termelési költségek olyan alacsonyak, hogy pozitív kereslet ehhez mindig létezik, előfordulhat, hogy termelni fogunk annak ellenére, hogy az ár nem fedezi a termelési költségeket. Azonban ez a negatív szakadék az ár és a termelési költségek között nem lehet tetszőleges: a termelési költségek és az árak közötti különbség nem lehet $\frac{(abT-2)^2}{8aT}$-nél nagyobb, továbbá érvényes kell legyen, hogy $(abT-2) > 0$. Minél nagyobb a tanulási ráta, a potenciális piac nagysága, továbbá minél hosszabb a tervezési időszak, annál nagyobb az esélye a feltételek teljesülésének.

1. Példa: Legyen $T = 10$, $a = 0.1$, $b = 10$ és $c = 11$, vagyis teljes bizonysággal vállalatunk veszteséget fog termelni tevékenysége elején, ha termeléshez fog. A diszkrimináns értéke $(0.1\times10\times10-2)^2 - 8\times0.1\times10\times1 = 56$.

A következő, amit ellenőriznünk kell, vajon $(abT-2)>0$? $(abT-2)=0.1\times 10\times 10-2=8$, tehát az optimális termelési szint az időhorizont bármely pillanatában: $v(t)=(8+\sqrt{56})/4=15.48/4=3.87$. A tervidőszak alatt tehát a megtermelt teljes mennyiség 38.7 db termék lesz. Az eladási ár az alábbi: $p=10-3.87=6.13$, mely súlyos veszteségeket vetít előre a tervidőszak elejére: $6.13-11=-4.87$ veszteség termékenként az elején, ami fokozatosan csökken. Az időhorizont végén a fajlagos termelési költség: $c(q(10))=11/(1+0.1\times 3.87\times 10)=2.26$, következésképpen az egységnyi profit az időhorizont végére a $6.13-2.26=3.9$ szintre emelkedik. Az időpont, melyre a veszteség eltűnik, az alábbi összefüggésből következik:

$$10-3.87=11/(1+0.1\times 3.87\times t)\,,$$

vagyis amikor az eladási ár fedezi a termelési költségeket, ami a $t=1.3$ időpontban következik be. A tervhorizont 13%-ában veszteséges a termelés, utána történik a termelési tapasztalat learatása.

Általánosabb dinamikát használva az alapvető ismereteink nem fognak megváltozni, de kétségtelenül gazdagodnak. Tekintsük most a jóval általánosabb dinamikát, ami legyen $\dot{q}(t)=ag(v(t),q(t))$, és csak azt tételezzük fel, hogy $g_v>0$, vagyis azt tételezzük fel, hogy a termelési ráta növekedési üteme annál nagyobb, minél magasabb a termelési volumen nagysága, de ennek konkrét formája nincs megkötve. Ekkor a Hamilton-függvény az alábbi:

$$H(v)=(p(v)-c(q))v+\lambda ag(v,q)\,, \tag{16}$$

és az elsőrendű feltételek a (3a-b) helyett az alábbiak lesznek:

$$\frac{\partial H}{\partial q}=-c_q v+a\lambda g_q=-\dot{\lambda}+r\lambda \tag{17a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial v}=p_v v+(p(v)-c(q))+\lambda a g_v\le 0\,. \tag{17b}$$

Marginálisan csökkenő hatást feltételezve a termelés volumenét illetően, azaz azt feltételezve, hogy $g_{vv}<0$, a másodrendű feltételek ki lesznek elégítve:

$$\frac{\partial H}{\partial v\partial v}=p_{vv}v+2p_v+\lambda a g_{vv}<0\,. \tag{17d}$$

A (17a) feltétel mindkét oldalát az $e^{-rt+\int_0^t g_q(u)\,du}$ kifejezéssel megszorozva azt kapjuk, hogy

$$e^{-rt+\int_0^t g_q(u)\,du}(-\dot{\lambda}+\lambda(r-ag_p))=e^{-rt+\int_0^t g_q(u)\,du}g_q v\,,$$

melyet átalakítás után úgy írhatunk, mint

$$\frac{d(\lambda e^{-rt+\int_0^t g_q(u)\,du}+A)}{dt}=e^{-rt+\int_0^t g_q(u)\,du}g_q v\,,$$

ahol A egy tetszőleges konstans. Felhasználva újra, hogy $\lambda(T) = P$, azt kapjuk, hogy

$$\lambda(t) = Pe^{-rt+\int_0^t g_q(u)\,du} - \int_t^T e^{-r(u-t)+\int_t^u g_q(l)\,dl} c_q v(u)\,du\,. \tag{18}$$

Ezt az eredményt (5)-tel összehasonlítva azt láthatjuk, hogy a fő komponensek meg vannak szorozva az $e^{-rt+\int_t^T g_q(u)\,du}$, illetve az $e^{-r(u-t)+\int_t^u g_q(l)\,dl}$ komponensekkel, sorrendben. Ezért azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az alapvető struktúrák nem változtak, de a felhalmozott termelékenységi tudás piaci értéke (a P), valamint a marginális termelékenység növekmény (a $c_q v$) szerepe exponenciálisan nagyítódik vagy redukálódik, a g_q kifejezés előjelének függvényében.

3 A diszkrét verzió

Kétségtelen, a folytonos idő modellváltozat, melyet (1) alatt definiáltunk, egy nagyon elegáns és divatos változat. Azonban egy döntéshozó számára nem lenne egyszerű feladat annak meghatározása, hogy mi a keresleti függvény konkrét formája egy adott időpillanatra vonatkoztatva. Hasonlóképpen, mi a termelési kapacitás egy JIT módban termelő üzemben, amikor az éppen áll, vagy termel. Ez alapján, a diszkrét modelleknek megvan az előnye, hogy a napi gyakorlathoz és emberi gondolkodáshoz közelebb eső környezetet fogalmaznak meg, amikor minden elem stabil egy időszakon keresztül. Ehhez kapcsolódóan az előttünk álló tervidőszakot osszuk fel T számú periódusra, t a t-edik periódust fogja jelölni e sorban: $t = 1, 2, \ldots, T$.

Az (1) modell diszkrét verziója az alábbi módon írható fel:

$$\max_{v_t} \sum_{t=1}^{T} z^t (p(v_t) - \frac{c}{q_t}) v_t + z^T q_T \tag{19a}$$

$$q_t = q_{t-1} + a v_t \qquad q_0 = 1, \quad t = 1, 2, \ldots, T \tag{19b}$$

$$v_t \geq 0, \qquad t = 1, 2, \ldots, T\,, \tag{19c}$$

ahol $z = 1/(1+r)$. q_t definíciójából következően (19b) az alábbi módon is írható:

$$q_t = 1 + a \sum_{i=1}^{t} v_i\,. \tag{19d}$$

Ebben a modellben is, a korábbiakhoz hasonló módon feltételezzük, hogy $p_v < 0$ és $(p(v)v)_{vv} < 0$. Újra megjegyezzük, hogy a felhalmozódott termelékenységi tudás értékének bevonása lényegesen módosíthatja az analízis kimenetét, de most az egyszerű áttekinthetőség biztosítása érdekében e tényezőtől eltekintünk, vagyis a $P = 0$ helyzetet állítjuk be. Ezért az alapprobléma, melyet elemezni fogunk, az alábbi módon fogalmazható meg:

$$\max_{v_1,\dots,v_T} H(v_1,\dots,v_T) = \sum_{t=1}^{T} z^t \Big(p(v_t) - \frac{c}{1 + a\sum_{i=1}^{t} v_i}\Big) v_t \tag{20a}$$

$$v_t \geq 0\,, \qquad t = 1, 2, \dots, T\,. \tag{20b}$$

Az optimum létezésének elsőrendű feltételeit az alábbi módon fogalmazhatjuk meg:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial v_t} = z^t \Big[p(v_t)) - \frac{c}{1 + a\sum_{i=1}^{t} v_i} + \Big(p_{v_t} + \frac{ca}{(1 + a\sum_{i=1}^{t} v_i)^2}\Big) v_t\Big] + \\ + \sum_{i=t+1}^{T} z^i \frac{ca}{(1 + a\sum_{l=1}^{i} v_l)^2} v_i \leq 0\,.\end{aligned} \tag{21a}$$

Továbbá,

$$\frac{\partial H}{\partial v_t} v_t = 0 \qquad \text{minden } t = 1, 2, \dots, T\text{-re.} \tag{21b}$$

5. Tulajdonság: *Diszkrét esetben, amikor a tanulási ráta zérus, a termelési volumen időben változatlan, azonban pozitív tanulási és zérus diszkontráta esetén a termelési dinamikája csökkenő. Pozitív diszkont- és tanulási ráta esetén, amikor a diszkontráta megfelelően magas, a termelési dinamika akár növekvő is lehet.*

Tételezzük fel, hogy létezik pozitív termelési szint mind a t, mind a $t-1$-ik periódusban, és ez a termelési szint kielégíti a (21) alatti feltételeket. (21a) feltételt mind a t, mind a $t-1$ periódusokra felírva (először mindkét oldalt osztva z^t, illetve z^{t-1} értékekkel, sorrendben) azt írhatjuk, hogy

$$p_{v_t} v_t + p(v_t) - \frac{c}{1 + a\sum_{i=1}^{t} v_i} + \sum_{i=t}^{T} z^{i-t} \frac{ca}{(1 + a\sum_{l=1}^{i} v_l)^2} v_i = 0 \tag{22a}$$

$$p_{v_{t-1}} v_{t-1} + p(v_{t-1}) - \frac{c}{1 + a\sum_{i=1}^{t-1} v_i} + \sum_{i=t-1}^{T} z^{i-t+1} \frac{ca}{(1 + a\sum_{l=1}^{i} v_l)^2} v_i = 0\,. \tag{22b}$$

Amennyiben a tanulási ráta zérus, tehát $a = 0$, (22a) és (22b) egyenletek formája azonos, ezért azt a következtetést vonhatjuk le, hogy $v_t = v_{t-1}$, tehát a termelési dinamika konstans.

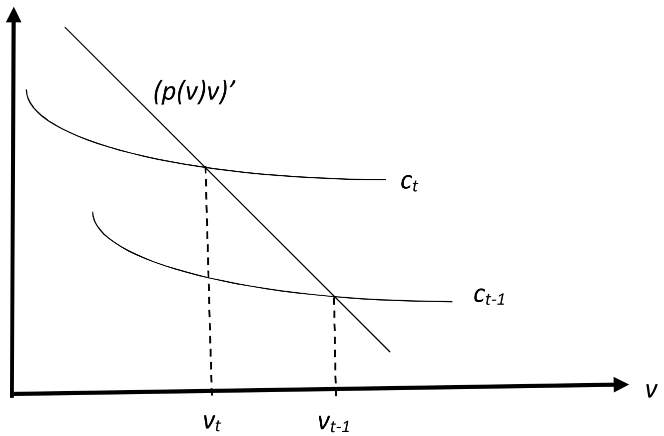
Most felhasználva, hogy $p_{v_t} v_t + p(v_t) = (p(v_t)v_t)'$, továbbá, amikor a diszkontráta zérus pozitív tanulási ráta esetén, akkor (22a-b) a következő formát ölti:

$$(p(v_t)v_t)' - \Big(\frac{c}{1 + a\sum_{i=1}^{t} v_i} - \sum_{i=t}^{T} \frac{ca}{(1 + a\sum_{l=1}^{i} v_l)^2} v_i\Big) = 0 \tag{23a}$$

$$(p(v_{t-1})v_{t-1})' - \Big(\frac{c}{1 + a\sum_{i=1}^{t-1} v_i} - \sum_{i=t-1}^{T} \frac{ca}{(1 + a\sum_{l=1}^{i} v_l)^2} v_i\Big) = 0\,. \qquad (23b)$$

A *2. ábra* mutatja ezen összefüggéseket mindkét periódusra vonatkozóan, ahol

$$c_t = \frac{c}{1 + a\sum_{i=1}^{t} v_i} - \sum_{i=t}^{T} \frac{ca}{(1 + a\sum_{l=1}^{i} v_l)^2}\, v_i\,. \qquad (23c)$$



2. ábra. Az optimalitási feltételek

A 2. ábrán reprezentált függvények mögött az az összefüggés áll, hogy a $(p(v)v)'$ függvényről azt tételeztük fel, hogy csökkenő a termelési volumen függvényében, azaz $(p(v)v)_{vv} < 0$, a költségekkel kapcsolatos függvények viszont változnak periódusról periódusra, továbbá a termelési volumen függvényeként hiperbolikusak. Összehasonlítva a (23a-b) feltételek tartalmát, azt jelenthetjük ki, hogy (felhasználva a (19d) alatti definíciót) ha

$$\frac{c}{q_t} > \frac{c}{q_{t-1}} - \frac{ca}{q_{t-1}^2} v_{t-1}\,, \qquad (24)$$

az pontosan az, amit a 2. ábra mutat. Történetesen, hogy $v_{t-1} > v_t$. Feltételezve, hogy (24) érvényes, akkor ebből egyenesen következik, hogy $v_{t-1} > v_t$. Ugyancsak igaz kell legyen, hogy $q_t = q_{t-1} + av_t < q_{t-1} + av_{t-1}$. Ezért, ha

$$\frac{1}{q_{t-1} + av_{t-1}} > \frac{1}{q_{t-1}} - \frac{a}{q_{t-1}^2} v_{t-1} \qquad (25)$$

igaz, akkor (24)-nek szintén igaznak kell lennie. Ezen egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozva a $(q_{t-1} + av_{t-1})q_{t-1}^2$ kifejezéssel, azt kapjuk, hogy

$$q_{t-1}^2 > (q_{t-1} + av_{t-1})q_{t-1} - a(q_{t-1} + av_{t-1})v_{t-1}\,,$$

mely az alábbival azonos:

$$0 > -a^2 v_{t-1}^2\,, \tag{26}$$

mely természetesen igaz. Következésképpen, azt jelenthetjük ki diszkrét esetben, hogy amikor a diszkontráta zérus és a tanulási ráta pozitív, a termelési ráta dinamikája csökkenő az idő haladtával.

Intuitíve az összefüggés racionálisnak tűnik, ugyanis ha egy időszak elején a megszerzett tudás nagyobb, a tudás tömege hosszabb időn keresztül hasznosítható azon esettel szemben, amikor a tudás megszerzése későn történik. Mivel folytonos esetre azt kaptuk, hogy a termelés dinamikája lapos, azaz időben változatlan, az eredmény meglepőnek is tekinthető. Ráadásul a folytonosság miatt az is következik, hogy pozitív diszkontrátára is lesz csökkenő dinamikánk. A következőkben kifejtett 6-os és 7-es példánk eléggé érdekes betekintést enged a probléma tulajdonságaiba, rávilágítva, hogy szélsőséges és szigorú makrógazdasági környezetben a termelési dinamika akár növekvő is lehet, amikor a diszkontráta megfelelően magas.

Talán felmerülhet a kérdés, az ellentmondást nem okozta-e analitikus hiba. A következőkben azt mutatjuk meg, hogy az ellentmondás nem lehet analitikus hiba következménye, az eltérő következtetés természetes eredmény. A rejtély megoldásához tekintsük a diszkrét (23c) feltétel folytonos változatát a t időpontra vonatkoztatva, melyet $c(t)$-vel jelölünk c_t helyett:

$$c(t) = c\Big(\frac{1}{1 + a\int_0^t v(u)\,du} - \int_t^T \frac{a}{(1 + \int_0^k v(u)\,du)^2} v(k)\,dk\Big)\,.$$

Vegyük e kifejezés mindkét oldalának idő szerinti deriváltját, az alábbit kapjuk:

$$\frac{dc}{dt} = c\Big(\frac{-1}{(1 + a\int_0^t v(u)\,du)^2} av(t) - \frac{-a}{(1 + \int_0^t v(u)\,du)^2} v(t)\Big) = 0\,.$$

Tekintsünk újra ekkor a 2. ábrára, és azt látjuk, hogy a $c(t)$ tulajdonképpen nem mozdul el, amikor az időben előre lépünk, hiszen a $c(t)$ idő szerinti deriváltja zérus. Nem így diszkrét esetben, hiszen a két költséggörbe szétválik. Következésképpen, folytonos esetben a termelési ráta időben nem változik, diszkrét esetben pedig csökkenő kell legyen.

Hogy felnagyítsuk a diszkontráta szerepét a termelési dinamika alakulásában, térjünk vissza a (22a-b) feltételekhez, és alkalmazzuk ezeket a $T = 2$ esetre, vagyis amikor az időhorizontot két periódusra osztjuk fel. Ekkor a két feltétel formája az alábbi lesz (felidézzük, hogy $z = 1/(1 + r)$):

$$p_{v_2} v_2 + p(v_2) - \frac{c}{1 + a(v_1 + v_2)} + \frac{ca}{(1 + a(v_1 + v_2))^2}\, v_2 = 0$$

$$p_{v_1} v_1 + p(v_1) - \frac{c}{1 + av_1} + \frac{ca}{(1 + a(v_1)^2} v_1 + \frac{1}{(1 + r)} \frac{ca}{(1 + a(v_1 + v_2))^2}\, v_2 = 0\,.$$

A 2. ábra e függvényeket ábrázolja az $r = 0$ esetre. Amikor az r diszkontráta nullából kiindulva elkezd növekedni, a c_1 görbe felfele mozdul el. c_1 formája ebben az esetben:

$$c_1 = \frac{c}{1+av_1} - \frac{ca}{(1+av_1)^2}v_1 - \frac{1}{(1+r)}\frac{ca}{(1+a(v_1+v_2))^2}\,v_2\,.$$

E formából azt a következtetést vonhatjuk le, hogy amennyiben az első periódusban magasabb termelési ráta alakulna ki, akkor annak jövőbeni haszna, amit az

$$\frac{1}{(1+r)}\frac{ca}{(1+a(v_1+v_2))^2}\,v_2$$

ad meg, csökkenni fog a diszkontára növekedésével. Feltehetően egy pozitív diszkontráta megváltoztathatja a termelési ráta dinamikáját, és növekedésbe fordíthatja át. A 6. és 7. példák jó betekintést nyújtanak ezen esetekre: a *6. példában* nincs diszkontálás, a termelési dinamika pedig csökkenő, amikor is $v_1 = 2.05$, $v_2 = 1.9$. A *7. példa* azt jelzi, hogy mindkét marginális költséggörbe felfele mozdul (mindkét termelési változó csökkenni fog), de c_1 gyorsabban emelkedik, és végül is a megoldás $v_1 = 1.38$, $v_2 = 1.65$ lesz, mely egy növekvő dinamikát tükröz vissza.

A modell további tulajdonságainak megismerése céljából egy visszafele lépegető dinamikus programozási algoritmust fejlesztünk ki olyan modelltípusokra, melyekben az inverz keresleti függvény lineáris, az általánosság megszorítása nélkül $b - v_t$ formájú lesz, és a diszkontráta zérus.

6. Tulajdonság: *Zérus diszkontráta és pozitív tanulási ráta esetén egy két periódusból álló feladatban ($T = 2$) ha az alábbi egyenletnek*

$$b - 2v_1 - \frac{c}{q_1} + \frac{ca}{q_1^2}v_1 + \frac{ca}{q_2^2}v_2 = 0 \tag{27}$$

létezik lehetséges megoldása v_2-re, ahol

$$q_2 = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4(b-2v_2)cav_2}}{2(b-2v_2)}\,, \tag{28}$$

$$q_1 = q_2 - av_2 \tag{29a}$$

és

$$v_1 = \frac{q_2 - av_2 - 1}{a}\,, \tag{29b}$$

ez a v_2 termelési terv optimális a második periódusban, és ekkor az első periódusra a termelési terv a (29b) által adott. Másként $v_1 = v_2 = 0$.

A $T = 2$-re vonatkozó elsőrendű feltétel:

$$b - 2v_2 - \frac{c}{q_2} + \frac{ca}{q_2^2}v_2 \le 0\,. \tag{30}$$

Ebben az egyenletben $b - 2v_T$ kifejezésnek pozitívnak kell lennie, azaz érvényes kell legyen, hogy $b/2 > v_T$ a másodrendű feltétel miatt – továbbá a 2. ábra által prezentáltak miatt. Tételezzük fel most, hogy v_T pozitív, és ekkor (30) egyenlőség formájában teljesül. Szorozzuk meg ennek mindkét oldalát a q_2^2 kifejezéssel, és ekkor az alábbit kapjuk:

$$(b - 2v_2)q_2^2 - cq_2 + cav_2 = 0\,. \tag{29}$$

Tekintettel arra, hogy $(b{-}2v_T) > 0$, a bal oldal egy konvex parabola q_2-ben, és a másodrendű feltétel miatt a q_2-re vonatkozó egyetlen megoldás a (28) által adott lehet csak. (28)-ban a négyzetgyök alatt szereplő $c^2 - 4(b - 2v_T)cav_T$ kifejezésnek pozitívnak kell lennie, azaz

$$c^2 - 4(b - 2v_T)cav_T > 0\,,$$

mely a $c - 4(b - 2v_T)av_T > 0$ feltétellel azonos, mely a $c > 4(b - 2v_T)av_T$ formában is írható, ugyanis másként nincs maximum érték, mely ellentmondás lenne.

Ezen eredményeket a (27) összefüggésben felhasználva, miként az definiálva van (28), (29a-b)-ben, az első periódusra van optimalitási kritériumunk, és azon v_2 értéket keressük, mely kielégíti a (27) feltételt. Ezen érték ismeretében meghatározhatjuk v_1 értékét, miként az elő van írva a (29b) által.

A következőkben néhány megoldandó feladatot definiálunk abból a célból, hogy megvilágítsuk a probléma természetét. A *2. táblázat* az inputokat összegzi, megadja a hozzá tartozó optimális megoldásokat, és magyarázatot ad a probléma természetére. Mindegyik probléma kétperiódusos, és a diszkontráta zérus, kivéve az utolsó esetet, amikor is azt tételezzük fel, hogy a diszkontráta 100%-os.

A 3. példában az 1. példa tartalmát igyekeztünk megközelíteni, ami egy folytonos eset. Az 1. példában $T = 10$, amikor is a rendelkezésre álló kapacitás 10 bármikor. Megközelítőleg, két periódus esetében ez annyit jelenthet, hogy kapacitásunk 50-50 periódusonként. A 3. példában ezért az inputok: $b = 50$, $c = 11$ és $a = 0.1$. Hogy megoldjuk ezt a problémát, fejezzük ki q_2 értéket mint v_2 függvénye a (28) által előírtaknak megfelelően, majd helyettesítsük ezt (27)-be, mivelhogy $q_1 = 1 + av_1 = q_2 - av_2$ és $v_1 = (q_2 - av_2 - 1)/a$. Ily módon (27)-nek egyetlen változója van, a v_2, és kifejezve ennek értékét melyre a (27) alatti kifejezésnek zérus értéke van (továbbá, hogy a függvény előjelet is váltson), az eljárás az optimális megoldását adja v_2-nek. Felhasználva ezt az optimális értéket, meghatározhatjuk q_2 értékét, és így végül v_1 értékét. Ezért a 3. feladat megoldása $v_1 = 24.5$, $v_2 = 24.4$, mely összességében 48.9. Visszaidézzük, hogy az 1. feladatban, a 10 hosszúságú folytonos feladatban az összes megtermelt volumen 38.7 volt. A különbség annak tudható be, hogy a folytonos esetben a szervezet lassabban tanul, ugyanis a tanulási ráta „csak” minden pillanatban érvényesül, a diszkrét esetben pedig már a periódus elején érvényesül az egész periódusra érvényes termelékenységi tudás, melyet tulajdonképpen a periódus utolsó pillanatában kapunk meg.

Példa #	Inputok b	c	a	Termelési szintek v_1	v_2	Magyarázatok
2	10	11	0.1	0	0	Mint v_2 függvénye, (27) bal oldala nem metszi a vízszintes tengelyt, vagyis az elsőrendű feltétel nem teljesül. A kezdeti termelési költség túl magas, a tanulási ráta túl alacsony ahhoz, hogy a termelés beinduljon.
3	50	11	0.1	24.5	24.4	A kapacitást megnöveltük 10-ről 50-re, ez teret enged arra, hogy az árral a termelési költségek fölé menjünk, és lesz pozitív kereslet. Pozitív profitszintünk ezért biztosan lesz mindkét periódusban. A tábla utáni magyarázatok elmondják, miként kapjuk meg az optimális megoldást.
4	463	1000	0.01	0	0	E példát azért definiáltuk, hogy rávilágítsunk a következő természetére. A termelésnek nincs értelme, mivel az induló termelési költség nagyon magas az alacsony tanulási ráta mellett, és lehetetlen ezzel a tanulási rátával nyereséget elérni a tervidőszak alatt.
5	465	1000	0.01	218	164	A tanulás következményeként a második periódusban nyereségessé válik a termelés annyira, hogy mindkét periódusban pozitív termelési szint generálódik, annak ellenére, hogy az első periódusban a termelés veszteséges. De közben tanulunk.
6	10	10	0.1	2.05	1.9	A példa a következő természetének kivetítését szolgálja. Az utolsó példa, amikor a diszkontráta zérus.
7	10	10	0.1	1.38	1.65	A diszkontráta 100%-os, és a termelési dinamika visszafordult.

2. táblázat. Feladatok adatainak összegzése

Az 5. példa inputjai: $b = 465$, $c = 1000$ és $a = 0.01$, ahol a teljes kapacitás csak alig kisebb, mint a 4. példában. Ekkor az optimális termelési terv: $v1 = 218$, $v2 = 164$. Következésképpen áraink a következőképpen alakulnak: $465 - 218 = 247$ és $465 - 164 = 301$, sorrendben. A fajlagos termelési költség az első periódusban $1000/(1 + 0.01 \times 218) = 314.5$, vagyis veszteséget termelünk. Azonban a második periódusban a fajlagos termelési költségünk: $1000/(1 + 0.01 \times 218 + 0.01 \times 164) = 207.5$, mely elégséges nyereséget ad ahhoz, hogy az egész tervhorizont alatt profitunk pozitív legyen.

Újra hangsúlyozzuk, hogy a 7. példában a dinamika nem csökkenő, hanem növekvő.

4 Következtetések

A tanulmány mindvégig hangsúlyozza a termelési folyamatok birtoklásának duplázott előnyét. Egyrészt egy termelési folyamat mindig laboratórium is egyúttal, annak lehetőségét kínálja, hogy megtanuljunk még hatékonyabban termelni. De számos iparágban, amikor a termelési folyamat elszakad mind a folyamat, mind a termék fejlesztési folyamatától, könnyen a versenyképesség csökkenéséhez vezethet, mert a termelési folyamat maga az újítási folyamat bölcsője. Amit csinálunk, azt általában hamarabb megértjük.

Senki sem úgy születik, hogy mindent tud, a tanulási folyamat eleje botladozásokkal terhelt, és az igazi kérdés, hogy a folyamat később nyereségessé válik-e, vagy sem. Az optimális irányítási folyamatokban szinte kivétel nélkül felteszik már az analízis elején, hogy a termelés mindig profitábilis, így azonnal érdemes termelni. Vagyis a termelési volument kifejező változóink pozitív értéket vesznek fel, következésképpen az elsőrendű optimalitási feltételeink egyenlőség formájában teljesülnek. Másként megfogalmazva, azt tételezik fel, hogy létezik v, melyre $p(v) > c(q(0))$, lásd például Chand és szerzőtársai, 1996. Ez a feltétel azt is jelenti, hogy veszteség nem léphet fel a tervidőszak elején, mely nem tükrözi a gyakorlatot. Ezzel a feltétellel sok érdekes gazdasági probléma vizsgálatát zárjuk ki, hiszen lehetünk veszteségesek az elején, de ha a tanulási képességünk hatékony, a termelés hamarosan nyereségessé válik. Modelljeink érdekes betekintést nyújtanak ezen lehetőségek vizsgálatába, és segítséget nyújtanak ahhoz, hogy egy vállalkozást mikor szabad indítani még abban az esetben is, ha az elején veszteségesek vagyunk. Megmutattuk, hogy a növekvő termelékenységi tudás növeli a termelési szintet. Adott fajlagos termelési költség dinamikát és lineáris inverz keresleti függvényeket használva megmutattuk, hogy amennyiben a tanulási ráta (a), a piac potenciális mérete (b) és az időhorizont (T) megfelelően magas ($abT-2 > 0$), annak ellenére, hogy kezdetben veszteségesek vagyunk, a termelés mégis elindulhat, és nyereségessé válik.

A termelés dinamikája érdekes vitatéma az irodalomban. Persze a modellek széles választékával állunk szemben, és nem egyszerű az eredmények összehasonlítása, de a megfelelő paraméterek zérusra állításával sok modell eredménye azért végül is összehasonlítható. Megállapítottuk, hogy folytonos esetre, amikor a diszkont ráta zérus és a tanulási ráta pozitív, akkor a termelés dinamikája konstans, azaz a javasolt termelési szint változatlan lesz az időhorizonton keresztül. Ezen esetre explicit megoldást is közreadtunk, hasonlóan a diszkrét esethez, amikor is kétperiódusos modellekre egy dinamikus programozási eljárást dolgoztunk ki, hogy megismerjük az optimális megoldást. Diszkrét esetre a termelési dinamika másként viselkedik, azt kaptuk, hogy az csökkenő. Az eredmény azért is meglepő, mert a periódusok hosszának csökkentésével a folytonos modell megközelíthető lenne szinte tetszőlegesen, a konklúziók azonban divergálnak. Az analízisből az is következik, hogy amikor a termelési ráta konstans, az árak is azok lesznek. Nem úgy a termelési költség: az csökkenni fog egészen a tervidőszak végéig a növekvő termelékenységi tudás miatt. Ez egyúttal a fajlagos profit növekedését jelenti. Generáltunk olyan példákat, melyek veszteséges termeléssel indulnak, de a termelékenységi tudás növekedése miatt a termelés nyereségessé válik.

Pozitív diszkontráta esetén a termelési dinamika növekvő lesz a folytonos modellben, ezek után arra a meglepő eredményre jutottunk, hogy diszkrét esetben zérus diszkontráta mellett a termelési dinamika csökkenő lesz. A folytonosság miatt ez azt is jelenti, hogy létezik olyan diszkrét modell, mely pozitív diszkont ráta esetére is csökkenő dinamikát fog javasolni, sőt példát generáltunk arra, hogy megfelelően magas diszkontrátára a termelés dinamikája növekvő lesz a diszkrét modellben. A kétperiódusos diszkrét modellre dinamikus programozás eljárást dolgoztunk ki, melynek segítségével feladatok sokaságának megoldása válik lehetővé. Viszonylag gazdag input szerkezetekre adtunk megoldásokat, mely feladatok jól tükrözik a probléma érdekességét. További érdekesség, hogy a csökkenő termelési dinamika növekvő árat jelent, miközben a fajlagos termelési költségek csökkennek. Látszólag ezen összefüggések a fogyasztót sújtják, azonban a diszkrét és folytonos modellek összevetése mutatja, hogy a diszkrét modellekben a megtermelt összes volumen nagyobb, mint a folytonos modellben. A magasabb volumen alacsonyabb árat jelent ugyanakkor, vagyis nincs arról szó, hogy a termelékenységi tudás növekedésének haszna kizárólag a termelő zsebében csapódna le.

Szinte valamennyi felvetett és megoldott probléma ugyanannyi nyitott kérdést vet fel, melyek megválaszolására remélhetőleg sokan vállalkoznak.

Köszönetnyilvánítás

E kutatást a 2020-as Tematikus Kiválósági Program finanszírozta az Intézményi Kiválósági Alprogram keretében az Innovációs és Technológiai Minisztérium által, mely a Pécsi Tudományegyetem 4. Tematikus Programja „A hazai vállalatok szerepének növelése Magyarország újraiparosításában" címmel.

Irodalom

1. Argote, L. és M. Hora, 2017, Organizational learning and management of technology, *Production and Operations Management,* 26(4), 579–590
2. Arrow, K. J., 1962, The economic implications of learning by doing, *The Review of Economic Studies,* 29(32), June, 155–173
3. Chand, S., 1989, Lot sizes and setup frequency with learning in setups and process quality, *European Journal of Operational Research,* 42, 190–202
4. Chand, S., H. Moskowitz, A. Novak, I. Rekhi és G. Sorger, 1996, Capacity allocation for dynamic process improvement with quality and demand considerations, *Operations Research,* 44, 6, 964–975
5. Chenavaz, R., 2012, Dynamic pricing, product and process innovation, *European Journal of Operational Research,* 222, 553–557
6. Chenavaz, R., 2016, Better product quality may lead to lower product price. *The B. E. Journal of Theoretical Economics,* 17(1).
7. Chenavaz, R. és S. Jasimuddin, 2017, An Analytical model of the relationship between product quality and advertising, *European Journal of Operational Research,* 263, 295–307
8. Clarke, F. H., M. N. Darrough és J. M. Heineke, 1982, Optimal Pricing Policy in the Presence of Experience Effects, *The Journal of Business,* 55(4), 517–530
9. Dutton, J. M. és A. Thomas, 1984, Treating progress functions as a managerial opportunity, *Acad. Management Review,* 9, 235–247
10. Fine, H. C. és E. L. Porteus, 1989, Dynamic Process Improvement, *Operations Research,* 37, 4, 580–591
11. Fioretti, 2007, The organizational learning curve, *European Journal of Operational Research,* 177, 1375–1384

12. Glock, C. H., Grosse, E. H., M. Y. Jaber és T. L. Smunt, 2019, Novel applications of learning curves in production planning and logistics, *Computers and Industrial Engineering,* 131 (editors)
13. Gosling, J, W. Abouarghoub, M. Naim és B. Moone, 2019, Constructing supplier learning curves to evaluate relational gain in engineering projects, *Computers and Industrial Engineering,* 131, 502–514
14. Heizer, J., B. Render, és C. Munson, 2020, *Operations Management,* 13th ed., Pearson
15. Jaber, M. Y, 2006, *Learning and forgetting models and their application, Handbook of Industrial and Systems Engineering,* CRC Press
16. Kamien, M. I. és N. L. Schwartz, 1991, *Dynamic Optimization: The Calculation of Variations and Optimal Control in Economics and Management,* North-Holland
17. Knight, J., (2016), Valuation: The EBITDA multiple method. Subscriber Exclusive, *Harvard Business Review*
18. Lapré, M. A., A. S. Mukherjee és L. N. Van Wassenhove, 2000, Behind the learning curve: linking learning activities to waste reduction, *Management Science,* 46(5), 597–611
19. Li, G. és S. Rajagopalan, 1998, Process improvement, quality, and learning effects, *Management Science,* 44(11), 1517–1532
20. Ni, J. és S. Li, 2019, When better quality or higher goodwill can result in lower product price: A dynamic analysis. *Journal of the Operational Research Society,* 70(5), 726–736.
21. Ovans, A., 2011, The charts that changed the world, *Harvard Business Review,* December
22. Pan, X. és S. Li, 2016, Dynamic optimal control of process-product innovation with learning by doing, *European Journal of Operational Research,* 248, 136–145
23. Pisano, G. P. és W. C. Shih, 2009, Restoring American Competitiveness, *Harvard Business Review,* July-Aug, 114–125
24. Pisano, G. P. és W. C. Shih, 2012a, *Producing Prosperity,* HBR Press, Boston
25. Pisano, G. P. és W. C. Shih, 2012b, Does America Really Need Manufacturing? *Harvard Business Review,* March, 94–102
26. Spence, M. A., 1981, The Learning Curve and Competition, *The Bell Journal of Economics,* 12(1), Spring, 49–70
27. Teng, J. és G. L. Thompson, 1996, Optimal strategies for general price-quality decision models of new products with learning production costs, *European Journal of Operational Research,* 93, 476–489
28. Thomson, P., 2012, The relationship between unit cost and cumulative quantity and the evidence for organizational learning-by-doing, *Journal of Economic Perspectives,* 26(3), Summer, 203–224
29. Tucker, A. L., I. M. Nembhard és A. C. Edmondson, 2007, Implementing new practices: an empirical study of organizational learning in hospital intensive care units, *Management Science,* 53(6), 894–907
30. Vörös, J., 2006, The dynamics of price, quality, and productivity improvement decisions, *European Journal of Operational Research,* 170, 809–823
31. Vörös, J., 2013, Multi-period models for analysing the dynamics of process improvement activities, *European Journal of Operational Research,* 230(3), 615–623

32. Vörös, J., 2019, An analysis of the dynamic price-quality relationship, *European Journal of Operational Research,* 277, 1037–1045.

PRODUCTION DYNAMICS AND ORGANIZATIONAL LEARNING

Evidences indicate that around 50% of productivity increase originates from organizational learning and learning by doing. In lack of production practices, offshoring/outsourcing production capacities may decrease long-run competitiveness. This paper develops models in which productivity increase directly depends on the production volume of the past and we construct continuous and discrete time models to analyze the dynamics of production volumes over time. We found that under zero discount or learning rate the production volume is constant over time, otherwise, it is increasing when we use continuous time approach. However, in discrete-time versions, production levels may decrease over time. For the continuous-time, the optimal control model can be solved explicitly and to illustrate the behavior of the discrete-time models we present a backward dynamic procedure for the two-period models.