AZ ARANYMETSZÉS KÖZÉPISKOLAI ALKALMAZÁSA

Szerző:	**Lektorok:**
Stonawski Tamás (Ph.D.) Nyíregyházi Egyetem	Ujfaludi László (Ph.D.,professor emeritus) Eszterházy Károly Egyetem
Balla Csaba Korányi Frigyes Görögkatolikus Általános Iskola, Gimnázium, és Kollégium	Beszeda Imre (Ph.D.) Nyíregyházi Egyetem
Első szerző e-mail címe: stonawski@gmail.com	…és további két anonim lektor

Absztrakt

Hogyan vezessük be az aranymetszésbeli arányt az iskolába, hogyan találkozzanak először diákjaink ezzel a temérdek irodalommal rendelkező kérdéskörrel? Mint felfoghatatlan, de követendő isteni arányként, vagy inkább egy megközelíthető, kiszámítható, de ugyanakkor környezetünkben, sőt testünkön is tettenérhető szükségszerűségként? A cikk egy lehetséges példája az aranymetszés középiskolai adaptálására.

Kulcsszavak: aranymetszés, középiskola, kísérletek, aranytéglalap, testarányok

Diszciplínák: fizika, matematika, esztétika

Abstract

APPLICATION OF GOLDEN SECTION IN SECONDARY SCHOOL

How should we introduce the ratio of golden section into school, how should our students first encounter a concept with a rich literature on this issue? Is it an incomprehensible but traceable divine relationship, or is it more of an approachable, predictable, but at the same time perceptible necessity? This article is a possible example of a high school adaptation of the golden section.

Keywords: golden ratio, secondary school, experiments, golden rectangle, body proportions

Disciplines: mathematics, physics, aesthetics

Stonawski Tamás és Balla Csaba (2022): Az aranymetszés középiskolai alkalmazása. *OxIPO – interdiszciplináris tudományos folyóirat, 2022/1*, 37-47.
doi: 10.35405/OXIPO.2022.1.37

Az aranymetszés, arany- vagy isteni a-ránynak emlegetett arány igen nagy utat járt be az egyszerű arányokkal ellentétben a civilizációnkban az ókortól kezdődően. Helye van már nemcsak a matematikában, hanem a természettel kapcsolatos tudományokban, művészetekben. A természet tanulmányozása során gyakran bukkanunk erre az arányra, mint az egész és a részek harmóniája, a művészetekben pedig a profán szimmetria harmonikus megbontásával kapcsolatban.

De nem szabad elfelejtenünk az aranymetszés hithez és vallásokhoz kötődő misztikus kapcsolatát sem (Hámori 1994). Ez a misztikum ma is él főleg ezoterikus írásokban, melyekben a tudomány módszerei már mondhatni nem kívánatosak.

Felmerül a kérdés, hogyan vezessük be a fenti arányt az iskolába, hogyan találkozzanak először diákjaink ezzel a temérdek irodalommal rendelkező kérdéskörrel? Mint felfoghatatlan, de követendő isteni arányt, vagy inkább egy megközelíthető, kiszámítható, de ugyanakkor környezetünkben sőt testünkön is tettenérhető szükségszerűséget lássanak benne?

E cikk egy lehetséges példát kínál az aranymetszés középiskolai adaptálására. A tanulók egy fakultáció keretein belül ismerkedtek meg konkrét cikken keresztül (Stonawski 2021) az aranyaránnyal Balla Csaba irányításával, majd a cikkben leírt kísérletek megismétlésével élték át az arány esztétikával való kapcsolatát. A cikkben lévő feladatok végrehajtása során több észrevételt tettek a diákok és alkotó módon újabb méréseket is megfogalmaztak.

Az aranymetszés értelmezése a hasonlóság fogalmával, példák a természetben

Ha nem két szakasz között, hanem legalább három szakaszra értelmezzük a hasonlóságot, akkor „csoporthasonlóságról” beszélhetünk, és ha emellett további feltételt szabunk az összeadás műveletével ($b + c = a$, azaz a két kisebb szakasz hosszának összege megegyezik a nagyobbik szakasz hosszával), akkor a hasonlósági arány: $\Phi \approx 1{,}618$ (Hámori 1994). Különösebb jelentőséget Euklidesz után csak a XV. század végén tulaj-donítanak ennek az aránynak, innentől „Isteni”.

A fizika, a tudományok alappillére, a legbővebb természet, a világegyetem viselkedésének szabályait kutatja, felfedezései a tudományokra, a filozófiára mai napig is nagy hatást gyakorolnak. A szabályosságok, a rendező elvek felfedezése a természetben az esetlegességgel szemben egy teremtett világ szemléletét váltotta ki több elismert fizikusban is. Ennek az elvnek felelnek meg a kristályok fejlődésének egyes szakaszai is, amikoris az elemi kristálycellák arányai megegyeznek a makroszkopikus kristálytest arányaival. A növényvilágban is találunk önhasonló fajokat, de nyilvánvalóan a növényeknél jelentősebb a környezet hatása, így az ideálistól való eltérés is. Az állatvilágban leggyakrabban emlegetett példa az aranymetszés kapcsán a Nautilus-polip és az ötkarú csillag (Falus, 1982).

Számos különálló képlet és elmélet egyesítése sugallta az utat a „Mindenség működésének egysoros képletének” megtalálásához. Az „egy törvényének” keresése Einstein „álmában” (Hawking 1999) is testet ölt, miszerint létezik az összes fundamentális fizikai kölcsönhatásokat (erőket) magába foglaló elméleti rendszer, az ún. „minden dolgok elmélete" (lásd: Hawking 2003), de említhetnénk a Planck által (1920) varázsformulának nevezett finomszerkezeti állandót (1/137, Net1, Falus, 1982) is. Dirac szerint a fizikai törvénynek matematikailag is szépnek kell lennie (Marx, 1997), Leibniz szerint pedig a világunk minden világok legjobbika (Marx, 1997).

Emberek és téglalapok szépségversenye

Az emberi faj sokféleségét a genetika és a történeti tényezők sorozatai határozták meg napjainkig. Mégis, ha a többség által szépnek ítélt emberek arányait megvizsgálnánk, és ezek az arányok elég nagy számú mintavétel alapján közel megegyeznének, akkor bizonyos törvényszerűséget fedeznénk fel. Az a gondolat, hogy az aranyarány esztétikai jelentéssel bír, Zeisingtől (1854) származik (Falus, 1982), Fechner pedig az 1876-ban elvégzett kísérletében a „aranymetszés” pszichológiai jelentőségét célozza meg (Falus, 1982). Fechner kísérletében nem emberi testrészeket tanulmányozott, hanem egyszerű síkidomokat: téglalapokat, melyek látványukban is hordozzák az oldalaik arányát. Fechner azt vizsgálta és összegezte, hogy a kísérleti személyek bizonyos téglalapok közül melyiket találják a legtetszetősebbnek (empirikus igazolás).

Fechner kísérletében számos hibát észleltünk: az általa választott téglalapok arányai nem egyenletesen osztották fel az intervallumokat és tartalmaztak „elfajzott” téglalapokat is. Az alanyok a kártyákat sorba rendezhették, ilyen esetekben pedig feltehetőleg a középsőket választották szívesebben, illetve Fechner nem vette figyelembe azt a minimális küszöböt, ami alapján érzékileg még egyértelműen eldönthető két arányról, hogy különböző (azaz nagyon közeli arányok szerepeltek a kísérletében).

Fechner kísérletének módosított formáját 2020. április 1.-én végeztük el egy internetes felületen közreadott kérdőív segítségével, 7 téglalap bemutatásával (v.ö.: Hámori, 1994).

Tapasztalatok: a módosított kísérlet eredményei szerint a vizsgálati személyek az aranymetszés arányait találták szebbnek. Ez alapján mégis túlzás lenne azt állítani, hogy a természet egy normáját találtuk volna meg, de az aranymetszés esztétikai jelentése nem elhanyagolható.

Az aranymetszés tanórai, szakköri alkalmazása izgalmas és sokszínű feladat, de egzaktságának megfelelően csak középiskolában van helye. Összeállítottunk néhány mérési feladatot, melyeket a tanulók az iskolai foglalkozásokon, vagy otthon is elvégezhetnek.

Az aranymetszés a fizikában főleg a káoszelméletben és a kvantumfizikában bukkan fel, ezen témák középiskolai tárgyalása magasabb matematikai előképzettséget kíván, de étvágygerjesztően hathatnak bizonyos feladatok, példák, melyek ϕ-vel való egybeeséseket mutatnak. Az ilyen jellegű feladatok izgalmasabbnak tűnnek a tanulóknak, de vigyázni kell, nehogy elvesszenek a misztikum útvesztőjében. Az sem utolsó szempont, hogy a fizika társadalomban és az alapvető gondolkodásunkban elfoglalt helyét is hangsúlyozhatjuk, ha a tudományos szépségről, tudományos egészről beszélünk tanítványainknak.

Középiskolai alkalmazás

A nagykállói Korányi Frigyes Görögkatolikus Általános Iskola, Gimnázium, és Kollégium fakultációján került sor az adaptációra, így „Az aranymetszés és más arányok" című cikkben (Stonawski 2021) ajánlott feladatok kipróbálásra kerülhettek. A témával a tanulók már találkoztak korábban a „Kutatók éjszakája" rendezvénysorozaton. Az előadáson nemcsak a fizikával és matematikával közeli kapcsolatot ápoló tanulók vettek részt, hanem érdeklődő humán beállítottságú tanulók is aktívan kapcsolódtak a programhoz, és az előadás után nekik volt a legtöbb kér-désük a témával kapcsolatban.

A szépség és annak arányokkal való leírása a képzőművészetekben magával ragadta a humán beállítottságú tanulókat. Mivel a cikkben javasolt feladatok matematikai készségeket is igényelnek, úgy döntöttünk, hogy mégis fakultációs foglalkozás keretében vetjük fel a tanulóknak a témát. A megjelent cikket az egyik foglalkozásunkon a tanulókkal közösen áttanulmányoztuk, és közösen értelmeztük, miközben a reakcióik lejegyzésre kerültek. Mivel a foglalkozásokon sokat mérünk, viszonylag hamar adódott a kérdés, hogy a szépség csakúgy mérhető, mint számos egyéb fizikai tulajdonság? Mivel a cikk tálcán kínált választ a feladatokon keresztül, fel sem kellett ajánlani, hogy a következő foglalkozáson ismételjük meg azokat. A feladatok közül hármat, egy tanulócsoportban (8 fő) végeztük el. Az eredményeket közösen értékeltük és elemeztük, valamint minden feladatnál tettünk önreflexiót a méréssel kapcsolatban.

Téglalap-szépségverseny

A feladat leírása: „Vágj ki papírból olyan téglalapokat, amelyek egyik oldala rendre 5 cm, a másik pedig 6, 6.5, 7, 7.5, 8.09≈8.1, 8.5, 9! Jelöld meg ezeket A, B, C, D, E, F, G betűkkel! Tedd bele egy borítékba, majd a borítékot add át a társadnak, és kérd meg, hogy vegyen részt a játékban, azaz alaposan figyelje meg a téglalapokat, és rangsorolja szépségük szerint 1., 2. és 3.

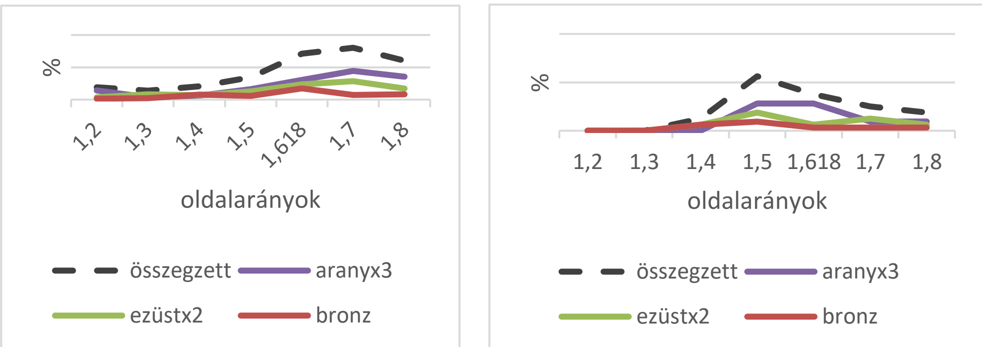
helyezéssel! Próbáld meg minél több társaddal lezsűriztetni a téglalapokat! Az adatok alapján számolj átlagot és szórást, illetve ábrázold grafikonon a kapott értékeket!"

A tanulók kézhez kapták a feladatleírásnak megfelelően előre elkészített téglalapokat (a téglalap szépségverseny „versenyzőit") egy borítékban, majd minden-ki kiválasztotta a számára három legszebb „dobogós helyezettet". A borítékokban egyszínű, fehér téglalapok voltak, melyet sötétbarna asztalon terítettek szét és kedvükre rendezték a tanulók.

A zsűrizés végeztével mindenki ismertette a „helyezettjeit", az adatokat Excel táblázatban kiértékeltük és ábrázoltuk, majd összehasonlítottuk a cikkben kapott eredménnyel, ami a kis mintavételünkhöz képest is jó egyezést mutatott, kissé 1,5 felé csúcsosodott ki (lásd: 1. ábra).

Az eltérések magyarázata: nem voltunk elég sokan (a cikkben több százan szerepeltek), de az is felmerült még, hogy nem pontosan voltak kivágva az alakzatok, nem egyformák voltak a téglalapok az egyes borítékokban (ezt az állítást újra-mérve megcáfoltuk). Fél perc csendet követően az egyik lány felvetette, hogy ugyanezt az eredményt kaptuk volna-e, ha a téglalapok nem fehérek, vagy ha nem barna asztalon rendeztük volna őket (például, ha kevésbé lett volna kontrasztos a figura és a háttér)? A fiúk részéről az a kérdés is megfogalmazódott, hogy vajon a lányok ugyanazokat a téglalapokat találják szépnek általában, mint a fiúk? A konkrét kísérletünkben erre vonatkozóan nem találtunk szignifikáns eltéréseket. Meglepő volt, hogy a feladat több kérdést hozott, mint amit megválaszolt, de ez rendszerint pozitív irányba mozdítja a hangulatot az órákon. Végül felötlött a tanulókban egy olyan nagyobb mintájú mérésnek az elvégzése, ami a nemek közötti különbségeket is vizsgálná.

1. ábra. Balra a 375 mintás, jobbra a 8 mintás szavazás súlyozott eredményei. Forrás: a Szerzők.



Téglalapplasztika

A feladat leírása: „Két papírnégyzetet csúsztass el egymáson úgy, hogy a neked legtetszetősebb téglalapot kapd, majd rögzítsd gemkapoccsal vagy ragasztó-szalaggal! Mérd meg a téglalapod oldalainak a hosszát és számítsd ki az oldalak arányát! Számítsátok az osztályban az egyénileg kapott értékekből az átlagot és szórást!”

Ahhoz, hogy a feladat könnyen kivitelezhető legyen, annyival kellett módosítani a feladat utasításán, hogy gemkapocs és ragasztószalag helyett sárga színű post-it tömböt használtunk, ami 7,5 cm-es négyzetekből állt, és minden négyzet teteje a hátoldalán ragasztós volt. Az egyik darabot az asztalra leragasztották a tanulók, a másikat pedig az elsőre, így képezték a számukra legideálisabb téglalapokat (lásd: 2. ábra).

Ezt követően megmérték a kapott téglalap oldalait és kiszámolták az arányukat. Az így kapott értékeket összehasonlítottuk az előző mérés eredményével. „Ez nem jó”, mondták, és újra megismételték az illesztést, de mivelhogy mindenki tudta, hogy mi volt a kedvenc aránya az előző kísérletben, azt szerették volna viszont látni itt is (az egyik mérés hatást gyakorol a másikra). Érdekes volt látni ahogy az aranymetszés aránya megérintette őket, és szerették volna megalkotni a tökéletes téglalapot. Ezzel azt is belátták, hogy a mérés csak akkor eredményes, ha nem tudjuk, minek kell kijönnie.

2. ábra: A tanulók két téglalap összetolásával rögzítik az általuk ideálisnak vélt téglalapot. Forrás: Balla Csaba.

Lehet, hogy jobb lett volna ezzel a feladattal kezdeni, és az értékeléseket csak az összes feladat után kellett volna elvégezni? Folytatásként, egy másik osztályban, akiknek még új a feladat, ennek figyelembe vételével meg kellene ismételni a kísérletet. A feladat végén mindenki elkészítette a „tökéletes téglalapot” (és haza is vitték a „kincsüket”). A feladat konklúzióinak megbeszélése során az volt a kifogás a lányok részéről, hogy a sárga szín bizonyára befolyásolt mindenkit, amin többen csak mosolyogtak. Felmerült még az is, hogy a post-it papír meg-lehetősen vékony, és a téglalap kialakítása során a fedésben lévő rész más színű, mint a két széle a síkidomnak, ezért nem is egy téglalapot készítettünk, hanem hár-mat, ami indokolt felvetés. Szintén fel-merült egy kísérletsorozat indításának az ötlete, amelyben tisztázódhatna a külön-böző színek használatának befolyásoló hatása az arányválasztásra.

Köldökarány

A feladat leírása: „Egy gumiszalag egyik végére olyan hurkot kötünk, hogy a láb-fejünk kényelmesen beleférjen, a másik végére pedig egy egyenes vonalzót illesz-tünk. A gumiszalag hossza 140 centimé-teres legyen. Tegyük a lábunkat a hurok-ba, egyenesítsük ki a szalagot (nem szük-séges megnyújtani) és jelöljük meg filctol-lal a talajtól számítva 140 cm * 0,618 ≈ 86,5 cm-nél!

Ellenőrző kísérlet: nyújtsuk meg külön-böző mértékben a szalagot és mérjük meg, hogy a jelöléssel megszabott szaka-szok aránya milyen értéket adnak (10 mérés átlagolva, szórással).

Lépj bele a hurokba, az egyik társad húzza ki a szalagot úgy a fejed tetejéig, hogy a vonalzó azt vízszintesen érintse! Egy tollat helyezz a köldöködhöz a hasadra merőlegesen, majd egy másik társad mérje meg vonalzóval a toll és a szalag jelölésének (korábban filctollal) előjeles különbségét! Ha a vonal a toll fölött pl. 2 cm-re helyezkedik el, akkor d=-2cm (átlagolva, szórással)."

3. ábra: A gumiszalagra az aranymetszésben rajzolt pont és a köldök egybeesését vizsgálják a tanulók. Forrás: Balla Csaba.

Az utolsónak maradt feladat váltotta ki a legtöbb vitát. A mérést a leírtak szerint végeztük, és a gumiszalagot a méteráru boltokban kapható gumiszalaggal végez-tük el, a leírtak szerint (lásd 3. ábra). Az eredmények nagyon szórtak, de tulajdon-képpen itt a testünk arányait vizsgáltuk, és arra kerestük a választ, hogy vajon az aranymetszés szerint tökéletesek vagyunk-e?

A konkrét mérések végéhez közeledve az egyik tanuló megjegyezte, hogy a gumi-szalag alsó részén a hurok egy párhuza-mosan kapcsolt rugónak fogható fel (egy korábbi számítási feladatról jutott eszébe), és ez torzíthatja a mérést. A felvetése teljesen helytálló volt, és a hibát még növeltük is sajnos azzal, hogy a hurkot a kényelem érdekében meglehetősen nagyra kötöttük: a szalag alsó részén körülbelül 15 cm hosszan (így itt megfeszítéskor a gumiszalag duplán futott, ahogy a lábunkat beakasztottuk).

Az eredményeket kiértékeltük, és megállapítottuk nevetve, hogy „nem vagyunk tökéletesek". A hibakeresés során javaslatot dolgoztunk ki a tanulókkal, hogy hogyan lehetne a mérés fentebb feltárt hibáját kizárni. Arra jutottunk, hogy a 140 cm-t egy hosszabb szalagon érdemes lenne két csomóval jelölni, melyek közül az alsóra rá lehetne lépni, a felsőt pedig a fejtetőig húzni, így elkerülhető lenne a fenti hiba. Sajnos ezen az órán arra már nem maradt időnk, hogy a hibát kikü-szöböljük, és a mérést megismételjük, erre egy következő alkalommal kerítettünk sort.

Mivel a következő órán változott a csoportösszetétel (a korábbi nyolc fő helyett csak heten voltak jelen), a teljes köldökarány-mérést megismételtük mindkét eljárással (hurokkal és anélkül). Az adatokat táblázatba foglaltuk, és ez alapján közösen megállapítottuk, hogy a hurok alkalmazása nem tartja megfelelően az arányt nyújtáskor. A két metódus között 0,5-3,5 cm közötti eltérések adódtak, és minden eltérés felfelé mozdította a szalagon a jelölést. Az is megfigyelhető volt, hogy a nagyobb eltérést a magasabb tanulóknál figyeltük meg, és a hiba annál kisebb volt, minél kisebb volt a gumiszalag megnyúlása, vagyis tulajdonképpen a tanulók testmagassága. Megállapítottuk, hogy a hurok két szára valóban párhuzamosan kapcsolt rugóként viselkedett a kísérletben, és a szalagban fellépő erő, a gumiszalag alsó részén valóban kisebb megnyúlást hozott létre, ezzel torzította a szalag két részének arányát.

Gyakorlati tapasztalatok összegzése

Összességében elmondható, hogy a cikk, és a feladatok gyorsan felkeltették a kíváncsiságot a tanulókban, és a munka során konstruktív hozzáállás volt tapasztalható. A téma feldolgozása szerencsésnek mondható abból a szempontból, hogy a fakultációk során olyan közegben történt, ahol eleve nyitottak a fizika tantárgy iránt. Azért a témával kapcso-latos tapasztalataink, és az elvégzett foglalkozások alapján vélelmezhető, hogy egy átlagos osztályban is kipróbálható a téma adaptációja előre elkészített Excel-sablonokkal, mivel a szépség mérhetősége könnyen megmozgatja a tanulókat, és a válaszok keresése újabb kérdéseket hoz magával. Ilyen módon a feladatok alkalmasak arra, hogy felkeltsék az érdeklődést a természettudományok iránt a tanulókban, sőt a feldolgozása a matematika tantárgy keretein belül is érdekes lehetőségeket rejt magában.

A téma magával hozott néhány gyakorlati kérdést is, hogy vajon az épületek esetében az aranymetszés arányát alkalmazva tetszetősebb formát kapnánk-e, ha alkalmaznánk? A fiúk azon felvetése is érdekes, hogy az általánosan szépnek tartott autók esetében például a sziluettek méretarányai mennyire követnék az arányt? Előfeltevésük a kérdésekkel kapcsolatban az volt, hogy az esztétikai szépséget az ember által alkalmazott funkcionalitás felülírhatja, torzíthatja azt.

Projektzárás, konklúziók

Nagyon izgalmas volt az aranymetszés témájának feldolgozása a középiskolai fakultáción. A gyakorlati alkalmazás sokszor felülírja az elméletet, itt sem történt másképpen. Így derülhetett ki az is, hogy a gumiköteles mérésnél a kényelmet szolgáló hurkot el kell hagyni, mert a mérések szerint nem követi a kívánt arányt. Megvizsgáltuk ezt elméleti szempontból újra, azaz, hogy miként követi, illetve a hurok közbeiktatásával miért nem követi a gumiszalag a φ és egyéb arányt, amit később a diákokkal is ismeretettünk. A bizonyítás középiskola emelt szintű érettséginek megfelelő:

Először igazoljuk, hogy egy gumira az aranymetszés arányában berajzolt pont, a gumi megfeszítése után is aranymetszésben osztja a gumiszalagot, azaz a 4. ábra szerinti jelölésekkel.

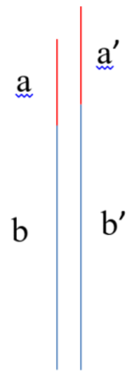
Ha egy *l* hosszúságú rugó bizonyos F erő hatására *Δl*-lel megnyúlik, akkor ugyanezen F erő hatására az l/x hosszúságú rugó megnyúlása $\Delta l/x$; rugóállandója pedig $D \cdot x$ lesz:

$$D_a = D \cdot (1 + \Phi)$$

$$D_b = D \cdot \Phi$$

$$F = D \cdot \Delta l = (D \cdot x) \cdot \frac{\Delta l}{x}$$

4. ábra. Balra az alapállapotban levő, jobbra a megfeszített gumi szakaszainak változásai látható. Forrás: Stonawski Tamás



$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\phi} \rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{1}{\phi}?$$

A mi esetünkben $x_a = \frac{a+b}{a} = \frac{a+a\Phi}{a} = 1 + \Phi$, $\quad x_b = \frac{a+b}{b} = \frac{a+a\Phi}{a\Phi} = 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi$ ($\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$ miatt)

A ponttal kettéosztott gumiszalag felfogható 2 sorosan kapcsolt rugóként:

$$F = F'$$

$$D_a \cdot \Delta l_a = D_b \cdot \Delta l_b$$

$$D \cdot (1 + \Phi) \cdot \Delta l_a = D \cdot \Phi \cdot \Delta l_b$$

$$\Delta l_b = \Delta l_a \cdot \frac{1+\Phi}{\Phi} = \Delta l_a \cdot \Phi$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a + \Delta l_a}{b + \Delta l_b} = \frac{a + \Delta l_a}{a \cdot \Phi + \Delta l_a \cdot \Phi} = \frac{1}{\phi}$$

Most igazoljuk, hogy egy gumira az m/n arányában berajzolt pont, a gumi megfeszítése után is m/n osztja a gumiszalagot, azaz a 4. ábra szerinti jelölésekkel:

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}\ \rightarrow \frac{a'}{b'}=\frac{m}{n}?$$
$$D_a=D\left(1+\frac{n}{m}\right)$$
$$D_b=D\left(1+\frac{m}{n}\right)$$

Az általános esetben

$$x_a=\frac{a+b}{a}=\frac{a+a\frac{n}{m}}{a}=1+\frac{n}{m},$$
$$x_b=\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+1=\frac{a}{a\frac{n}{m}}+1=1+\frac{m}{n}$$

A ponttal kettéosztott gumiszalag felfogható 2 sorosan kapcsolt rugóként:

$$F=F'$$
$$D_a\cdot\Delta l_a=D_b\cdot\Delta l_b$$
$$D\cdot\left(1+\frac{n}{m}\right)\cdot\Delta l_a=D\cdot\left(1+\frac{m}{n}\right)\cdot\Delta l_b$$
$$\Delta l_b=\Delta l_a\ \cdot\frac{1+\frac{n}{m}}{1+\frac{m}{n}}=\Delta l_a\ \cdot\frac{n}{m}$$
$$\frac{a'}{b'}=\frac{a+\Delta l_a}{b+\Delta l_b}=\frac{a+\Delta l_a}{a\cdot\frac{n}{m}+\Delta l_a\cdot\frac{n}{m}}=\frac{m}{n}$$

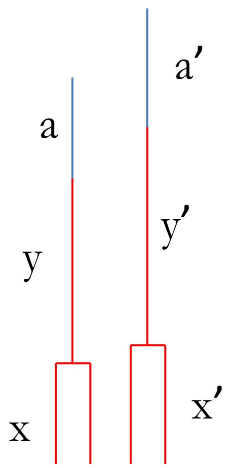
Lényegesen egyszerűbb a bizonyítás a Hooke-törvénnyel (bár a gumit a Hooke-törvényt nem követő anyagokhoz sorolják, mivel $\mathrm{E}(\sigma,\mathrm{T})$, de az egyes szakaszokra $\sigma=\mathrm{T}=\mathrm{const.}$):

$$\sigma_a=\sigma_b$$
$$E\cdot\varepsilon_a=E\cdot\varepsilon_b$$
$$\frac{\Delta l_a}{a}=\frac{\Delta l_b}{b}\ \rightarrow\ \frac{\Delta l_a}{\Delta l_b}=\frac{a}{b}$$

Az 5. ábra egy párhuzamos kapcsolást és 3 soros kapcsolást tartalmaz.

$\frac{a'}{y'}=\frac{a}{\mathrm{y}}\ (ld.előbb), de\ \frac{a'}{x'}=\frac{a}{\mathrm{x}}?$

5. ábra: A gumiszalag most 2 párhuzamosan és velük sorosan kapcsolt szakaszokból állnak. Balra az alapállapotban levő, jobbra a megfeszített gumi szakaszainak változásai látható. Forrás: Stonawski Tamás.



Az általános esetben $x_a=\frac{a+y}{a}$, $x_x=2\cdot\frac{a+y}{x}=, x_y=\frac{a+y}{y}$

$$\frac{a'}{y'}=\frac{a+\frac{F}{\frac{D(a+y)}{a}}}{y+\frac{F}{\frac{D(a+y)}{y}}}=\frac{a}{\mathrm{y}}$$

$$\frac{a'}{x'}=\frac{a+\frac{F}{\frac{D(a+y)}{a}}}{x+\frac{F}{\frac{2D(a+y)}{x}}}=\frac{a}{\mathrm{x}}\cdot\frac{1+\frac{F}{D(a+y)}}{1+\frac{F}{2D(a+y)}}>\frac{a}{\mathrm{x}}$$

$$\frac{a'}{a}>\frac{x'}{x}$$

Azaz a párhuzamosan kötött rész megnyúlása nem aránytartó. Gumihurok helyett tehát egy talpat kell készíteni (fémből vagy fából), amin egy kis furatba kötözhető a gumi vége, majd a diák egyszerűen rááll a lapra. Így csak egy szimpla gumiszál szerepel a kísérletben. A másik végére is érdemes egy ilyen talpat rögzíteni, így a fejtetőre vízszintesen helyezve azt, még pontosabb lesz a mérés.

Köszönetnyilvánítás

Köszönet Dr. Beszeda Imrének a téma iránti lelkesedéséért és segítségéért!

Irodalom

Falus, R. (1982): *Az aranymetszés legendája.* Magvető Könyvkiadó, Budapest.

Hámori, M. (1994): *Arányok és talányok.* Typotex Kft., Budapest

Hawking, S. (1999): *Einstein álma és egyéb írások.* Vince Kiadó, Budapest

Hawking, S. (2003): *Az idő rövid története.* Talentum Tudományos Könyvtár.

Marx, Gy. (1997): Szépség és fizika. *Természet Világa* 128/4, pp. 146-148.

Net1: *Introduction to the constants for nonexperts* (Letöltés: 2022.01.10.) - https://physics.nist.gov/cuu/Constants/alpha.html

Stonawski, T. (2021): Az aranymetszés és más arányok: a tudomány és a művészet kölcsönhatása *Fizikai Szemle* 71 : 7-8 pp. 262-266.