SZAKMAI ZÁRÓJELENTÉS
a T046378 sz. OTKA kutatásról

Témavezető: Szamuely Tamás

Annak ellenére, hogy az ismert költségvetési nehézségek miatt a pályázat időtartamát lerövidíteni kényszerültünk, a kutatás igen sikeres volt, és a kutatási tervben vázolt problémákkal kapcsolatban számos komoly előrehaladást sikerült elérni. Mint az alábbi részletes összefoglaló is mutatja, a kutatás hű maradt a pályázatban vázolt interdiszciplináris jelleghez, és a szigorúan vett algebrai geometriai problematikát és módszereket ötvözte más területek technikáival. Így a szingularitások vizsgálatakor összekapcsoltuk a geometriát a topológiával, a racionális pontoknál az aritmetikával, az invariánselméletben a reprezentációelmélettel, a Calabi-Yau-varietások terén a fizikai inspirációval, de tettünk egy geometriai jellegű kirándulást a végtelen dimenziós komplex függvénytan területére is. Az alábbiakban összefoglaljuk az egyes témakörökben elért legfontosabb eredményeket.

Szingularitáselméleti kutatások

Kutatásunk egyik centrális témája a komplex normális algebrai felület-szingularitások analitikus invariánsainak visszanyerése a topologikus típusból. A topologikus típust a szingularitás csomója jellemzi, amely irányítható 3-sokaság. Egy korábbi sejtésünk szerint a csomó Seiberg-Witten invariánsa meghatározza az analitikus típushoz hozzárendelhető geometriai nemet, ha a csomó racionális gömb, és ha az analitikus típus kielégíti az ún. $\mathbf{Q}$-Gorenstein feltételt. 2004-ben spanyol matematikusokkal közösen kimutattuk (ellenpéldákat szolgáltatva), hogy a $\mathbf{Q}$-Gorenstein feltetelt jobban le kell szűkíteni. Az ellenpéldák a (Luengo által bevezetett) szuper-izolált szingularitások tulajdonságaira támaszkodnak, amelyek több matematikai témával is összekapcsolták eredményeinket.

Az egyik ezek közül az alacsony dimenziós topológia. A szuper-izolált hiperfelület-szingularitás csomója a 3-dimenziós sokaságok szakembereinek kedvence, ugyanakkor kulcsszerepet játszik különböző topológiai elméletek tesztelésében is. Mint 3-sokaság előállítható a 3-dimenziós gömbből egy csomó mentén végzett műtéttel. Ha a csomó algebrai, akkor bizonyos negativitási, merevségi tulajdonságai vannak az előállított 3-sokaságnak. Sikerült kiszámolnunk e sokaságok Heegaard-Floer homológiáját. (Utóbbi homológiaelmélet az alacsony dimenziós topológia legfontosabb új technikája, a közelmúltban vezették be Ozsvath Péter és Szabó Zoltán.)

A Heegaard–Floer homológia kiszámítása vezetett el a *súlyozott gyökerek* fogalmának bevezetéséhez. Minden algebrai felület-szingularitás csomójához (pontosabban a rezolúciós gráfjához) és a csomó minden ún. $Spin^c$ struktúrájához hozzárendeltünk egy (gráfelméleti) fát, amelynek csúcsait súlyokkal láttuk el. Ez a gráf meglepően sok információt tartalmaz: vezérli a topologikus típus szerinti osztályozást, jellemzi a 'nagyon gyenge' deformációkat, megadja a csomó Seiberg-Witten invariánsát, felső becslést ad a szingularitás analitikus típusához rendelt egyenesnyalábok kéve-kohomológiáira.

A szuperizolált szingularitások csomóinak vizsgálata a klasszikus algebrai geometria egyes kérdéseihez is elvezetett. Régóta nyitott, és igen nehéz kérdés az adott fokszámú vagy nemű komplex projektív síkgörbék osztályozása, lehetséges szingularitásainak topológiai jellemzése. Kérdés például, melyek azok a lokális síkgörbe-szingularitás típusok, amelyek realizálhatók egy racionális projektív sikgörbe szingularitásaikent. A fent emlitett Seiberg-Witten számolás meglepő módon kombinatorikus megszorításokat ad a kérdésre, amelyek oly erősnek bizonyulnak, hogy híres tételek. ill. sejtések is speciális esetnek tűnnek (pl. a Bogomolov-Miyaoka-Yau-egyenlőtlenség).

Foglalkoztunk a szingularitáselmélet algoritmikus aspektusaival is. Kimutattuk, hogy bizonyos *nemizolált* komplex felület-szingularitások csomóját is meg lehet adni műtéti diagramok által. A diagramok előállítására kombinatorikus algoritmust dolgoztunk ki. Ilyen eredmények korábban csak izolált szingularitásokra voltak ismertek; a nemizolált eset sokkal bonyolultabb. Az alkalmazott módszer segítségével a Milnor-fibrum ún. vertikális és horizontális monodrómiáira is képletet kaptunk.

Aritmetikai geometriai kutatások

Aritmetikai geometriai kutatásaink homlokterében az aritmetikai dualitástételek, és ezek alkalmazásai álltak. Az 1960-as években John Tate fedezte fel, hogy lokális, illetve globális testek felett egy algebrai tórusz, illetve a tórusz karaktercsoportjának Galois-kohomológiacsoportjai között dualitási összefüggések állnak fenn. Abban a speciális esetben, amikor a tórusz a multiplikatív csoport, e dualitási tételek az osztálytestelmélet nagy alaptételeivel ekvivalensek. Ugyancsak Tate vette észre, hogy hasonló dualitások állnak fenn egy Abel-varietás, illetve a duális Abel-varietás Galois-kohomológiája között. Ezek az eredmények az aritmetikai geometria alapvető építőkövei közé tartoznak.

Munkánkban e tételek közös általánosítását adtuk Deligne-féle 1-motívumok Galois-hiperkohomológiájára. Ezek az objektumok $[Y \to G]$ alakú komplexusok, ahol Y étale lokálisan a $\mathbf{Z}^r$ konstans csoporttal izomorf (tehát olyan, mint egy tórusz karaktercsoportja), G pedig szemi-Abel-varietás (azaz Abel-varietásnak tórusszal való bővítése). Legfontosabb eredményünk egy számtest felett definiált 1-motívum, illetve a duális 1-motívum Tate-Safarevics csoportja között fennálló dualitás igazolása, illetve egy 12 tagú Poitou-Tate típusú egzakt sorozat felállítása 1-motívumokra (utóbbi feltételezi az Abel-varietások Tate-Safarevics-csoportjának végességéről szóló híres sejtést). Hangsúlyozandó, hogy tételeink nem a klasszikus eredmények következményei, hanem általános módszerünk új, szimmetrikus bizonyítást ad az ismert tényekre is. Eljárásunk fő jellemzője, hogy az étale kohomológia keretei között dolgozunk és a kohomológiacsoportokat az 1-motívumok étale realizációinak Galois-kohomológiájával vetjük össze.

Dualitástételeinknek konkrét alkalmazását is nyújtjuk számtestek felett definiált szemi-Abel-varietások főhomogén tereinek racionális pontjaira. Ismeretes, hogy abból, hogy az alaptest p-adikus, illetve valós telítései felett létezik egy ilyen homogén térnek pontja, még nem következik, hogy az alaptest felett is van; a szakzsargon ilyenkor azt mondja, hogy az ún. Hasse-elv sérül. 1970-ben Manyin bevezetett egy, a varietás Brauer-csoportja segítségével definiált invariánst, az ún. Manyin-obstrukciót, amely a Hasse-elv fennállása esetén 0, ám sérülése esetén általában nem. Munkánkban kimutattuk, hogy (feltételezve az Abel-varietások Tate-Safarevics-csoportjának végességét) a fenti típusú homogén terek esetén a Hasse-elv pontosan akkor sérül, ha a Manyin-obstrukció nem 0, ráadásul az obstrukció definiálásakor elegendő a Brauer-csoport egy olyan ‘részfaktorára’ szorítkozni, amely véges, és sok esetben explicite kiszámítható. Itt is a tételek ismertek voltak tóruszok, illetve Abel-varietások esetén, ám az általános eset jóval nehezebb. Eredményeinket máris felhasználták más kutatók olyan tételek bizonyításához, amelyek nem feltétlenül kommutatív csoportsémák homogén tereire vonatkoznak. Végül hasonló jellegű állítást sikerült bizonyítanunk a racionális pontok gyenge approximációjával kapcsolatban is.

Invariánselméleti kutatások

Invariánselméleti kutatásaink során elsősorban klasszikus invariánselméleti problémák kvantum analógjaival foglalkoztunk.

Az első kvantumcsoportokat Drinfeld és Jimbo konstruálták meg mint az egyszerű komplex Lie-algebrák univerzális burkolóalgebráinak deformáltjait. Ezek se nem kommutatív, se nem kokommutatív Hopf-algebrák. Reprezentációelméletük sok szempontból ugyanolyan, mint a megfelelő Lie-algebráé (egy itt nem részletezendő lényeges különbséggel). Faddeev, Reshetikhin és Taktajan vezetett be ugyanezen kvantumcsoportokra egy duális tárgyalásmódot: ők a megfelelő Lie-csoporton értelmezett függvények algebráját deformálták. Ennek a megközelítésnek előnye, hogy a kvantum koordinátagyűrűket egységes, egyszerű módon definiálja mint kvadratikus algebrákat. Az általunk tekintett kvantum invariánselméletben a kvantum koordinátagyűrűk, illetve a konstrukciójukban közbülső lépésként előkerülő úgynevezett FRT-bialgebrák játsszák a kommutatív polinomgyűrű szerepét.

Eredményeink ezen a területen a következők. Meghatároztuk az általános lineáris, az ortogonális, és a szimplektikus csoportok kvantum koordinátagyűrűihez tartozó FRT-bialgebrákban a kokommutatív elemek által alkotta részalgebra explicit generátorait és az azok közötti relációkat. Ehhez pontosan megértettük az FRT-bialgebra, és a faktoraként definiált Hopf-algebra, azaz a kvantum koordinátagyűrű közötti kapcsolatot, majd használtuk az utóbbira vonatkozó Peter-Weyl-féle tételt. A kokommutatív elemek részalgebrájátt mint az adjungált kohatás invariánsainak az algebráját interpretáltuk. Végeredményként érdekes, nagy kommutatív részalgebrákat találtunk az FRT-bialgebrákban. Munkánk egy kifejező gyűrűelméleti jellegű megragadása annak a közismert ténynek, hogy az említett kvantumcsoportok reprezentációelmélete párhuzamos a megfelelő klasszikus csoportéval.

S. Majid csomózott tenzorszorzat konstrukcióját felhasználva bevezettük a *kvantum nyomgyűrűket*, amelyek a mátrixinvariánsok algebrájának, illetve az ún. nyomgyűrűknek alkalmas analogonjai a kvantumcsoportok területén. Megjegyezzük, hogy a munkánkban deformált nyomgyűrűk eredetileg a polinomazonosságos algebrák elméletében jelentek meg a 70-es években, és a kommutatív és a nemkommutatív algebra gyümölcsöző összjátékához adtak alapot.

A mátrixok kvantum koordinátagyűrűjében az adjungált kohatásra invariáns elemek explicit tanulmányozásának alkalmazásaként sikerült megadnunk egy módszert bizonyos koadjungált pályák kvantum deformációinak konstrukciójára. Megfogalmaztuk *kvantum kvázihomogén terek* egy lehetséges ésszerű definícióját, és módszerünkkel olyan új kvantum kvázihomogén tereket kaptunk, amelyeknek konstrukcióra több kísérlet történt az irodalomban. Például a nilpotens mátrixok varietásának koordinátagyűrűjét sikerült alkalmas módon deformálnunk.

A közönséges (kommutatív) invariánselmélet terén megkonstruáltuk az ortogonális és a speciális ortogonális csoport tetszőlegesen sok vektor változótól függő multilineáris polinominvariánsait, melyek az egészek felett felbonthatatlanok. Ezáltal olyan új információt kaptunk az egészek feletti ortogonális csoportséma invariánselméletéről, amely lényegesen eltér a klasszikus csoportok vektorinvariánsairól szóló témakör korábbi eredményeitől.

Calabi-Yau-sokaságok elmélete

A Calabi-Yau-sokaságok elmélete az algebrai geometria és a matematikai fizika fontos határterülete, amely az utóbbi évtizedben ugrásszerű fejlődésen ment át. E tárgykörben továbbfejlesztettük Reid és tanítványainak munkáját, és felállítottunk egy Riemann-Roch típusú formulát kanonikus ciklikus szingularitásokkal rendelkező komplex algebrai 3-sokaságokra. E formula segítségével sikerült új Calabi–Yau 3-sokaságokat konstruálnunk, a gradált koordinátagyűrű tanulmányozásán keresztül.

Tanulmányoztunk továbbá olyan lokális Calabi-Yau 3-sokaságokat, amelyek fibrálhatók kizárólag ADE szingularitásokkal rendelkező felületekkel valamely görbe felett. E varietás-osztályt korábban fizikusok már vizsgálták; mi geometriai interpretációját és általánosítását adtuk a munkájuknak, megmutatván, hogy az általuk talált tegez-konfigurációkhoz természetes módon hozzárendelhető egy kéveosztály a 3-sokaság felett.

Racionálisan összefüggő varietások

A magasabb dimenziós algebrai varietások klasszifikációjában központi szerepet játszanak a Kollár, Miyaoka és Mori által bevezetett racionálisan összefüggő varietások. Ezek olyan varietások, amelyeknek bármely két általános pontján keresztül halad racionális görbe. E tulajdonságnak egy érdekes végtelen dimenziós általánosítását vizsgáltuk a komplex test felett.

Nevezzük az M komplex sokaság (r-edik általánosított) hurokterének az r-szer folytonosan differenciálható $S^1 \to M$ leképezések terét. E tér ellátható egy végtelen dimenziós komplex struktúrával. Kimutattuk, hogy ha M racionálisan összefüggő komplex projektív sokaság, akkor a hurokterei is racionálisan összefüggők a megfelelő általánosított értelemben. Következményként adódik, hogy racionálisan összefüggő varietások hurokterein minden holomorf függvény konstans, illetve hogy ilyen varietásokon értelmezett (esetleg végtelen dimenziós) holomorf vektornyalábokon nincs nemtriviális holomorf konnexió. Ilyen jellegű eredményeket korábban tisztán komplex függvénytani eszközökkel értek el, ám az algebrai geometriai inspirációjú megközelítés jelentős javítást eredményez. Jelenleg e tételek kiterjesztésén dolgozunk még általánosabb hurokterekre.