

PARTÍCIÓK PÁRATLAN SZÁMOKKAL

Orosz Gyuláné (Eger, Hungary)

Kiss Péter professzor emlékére

Abstract. In this article, we characterize the odd-summing natural numbers. We also find that many natural numbers can be represented by more than one such sum. We investigate the features that allow a natural number to have this property and characterize those that have a unique representation. In the process, we find an algorithm that generates a set of consecutive odd natural numbers that add to a specific n .

Középiskolában és felsőfokú intézményben matematikát tanuló diákok számára sok nehézséget okoz az elmülethez kapcsolódó tételek bizonyításának megértése. Tanárnak és diáknak egyaránt hasznos lehet, ha olyan elemi tételeket bizonyítunk, amelyek megértését konkrét példák bemutatásával segíteni tudjuk.

Cikkünk célja olyan egyszerű tételek, bizonyítások és algoritmusok ismertetése, amelyek fejleszthetik a bizonyítások megértésének képességét, és ezzel egy időben a diákok megismerhetik a természetes számok néhány érdekes tulajdonságát is.

A $p(n)$ partíciófüggvényt a következőképpen definiálja Niven–Zuckerman [1]-ben: $p(n)$ az n pozitív egész szám pozitív egészek összegeként való előállításainak száma. Két partíciót egyenlőnek tekintünk, ha csak az összeadandók sorrendjében különböznek. Célszerűen a $p(0)$ -t 1-nek definiálja.

Olyan partíciófüggvények is definiálhatók, amelyekben az összeadandók bizonyos feltételeket elégítenek ki: az olyan partíciók, amelyekben az összeadandók mind páratlanok, vagy mind különbözők, vagy amelyekben páros számú összeadandó szerepel, amelyekben az összeadandók nem nagyobbak, mint m , amelyekben páratlan számú különböző összeadandó szerepel; stb.

Olson [2]-ben bizonyította, hogy egy n természetes szám akkor és csak akkor írható fel két vagy több egymást követő természetes szám összegeként, ha nem 2-nek hatványa.

Ray C. és Harris S. [3]-ban olyan partíciókat ismertetnek, amelyben a tagok egymást követő páratlan természetes számok. Definiálják a páratlan összegű szám fogalmát, négy tételt ismertetnek. A tételek bizonyítását több esetben az olvasóra bízzák.

Cikkünkben a [3]-ban megfogalmazott értelmezést és tételeket ismertetjük (1., 2., 3., 4.). A tételeket azok bizonyításával, további példákkal és egy bővebb táblázattal egészítjük ki. További tételeket is megfogalmazunk (5., 6.).

Definíció. Egy n természetes számot páratlan-összegű számnak nevezzük, ha előáll két vagy több egymást követő páratlan természetes szám összegeként.

Például: $15 = 3 + 5 + 7$. A 36-nak két különböző reprezentációja is létezik: $36 = 17 + 19$, $36 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$. A 10-nek és a 22-nek nincs a feltételnek megfelelő előállítás, ezért nem páratlan-összegű számok. Néhány páratlan-összegű szám: 4, 8, 9, 12, 15, 16, 20, 21, 24, 25 és 27.

Könnyen bizonyítható, hogy minden négyzetszám előáll egymást követő páratlan számok összegeként, mivel $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2$ minden k pozitív egész számra teljesül.

1. tétel. Egy n természetes szám akkor és csak akkor áll elő a

$$2k + 1, 2k + 3, 2k + 5, \dots, 2m - 1,$$

egymást követő páratlan számok összegeként, ha $n = m^2 - k^2$, ahol k és m természetes számok, és $m > k + 1$.

Bizonyítás. A tétel következménye annak, hogy minden 0-nál nagyobb természetes szám négyzete előáll egymást követő páratlan számok összegeként.

Ha $n = 2k + 1 + 2k + 3 + 2k + 5 + \dots + 2m - 1$, akkor az 1. definíció szerint páratlan-összegű szám, ahol $m > k + 1$. A jobb oldali tagok összegzésével kapjuk:

$$\begin{aligned} n &= (2k + 1 + 2m - 1) \cdot (m - k) \cdot \frac{1}{2} = \\ &= 2(m + k) \cdot (m - k) \cdot \frac{1}{2} = (m + k)(m - k) = m^2 - k^2, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $n^2 = m^2 - k^2$ teljesül.

Tegyük fel, hogy $n^2 = m^2 - k^2$, ahol $m > k + 1$. Minden k, m pozitív egész számra teljesül, hogy

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2 \text{ és } 1 + 3 + 5 + \dots + (2m - 1) = m^2.$$

$$m^2 - k^2 = 2k + 1 + 2k + 3 + 2k + 5 + \dots + 2m - 1 = n$$

adódik a megfelelő oldalak különbségéből, ami azt jelenti, hogy az így kapott szám páros összegű.

2. tétel. Egy n természetes szám akkor és csak akkor páratlan-összegű, ha előáll két természetes szám szorzataként $n = a \cdot b$ alakban, ahol $b \geq a > 1$, azonos paritású természetes számok (a és b egyszerre párosak vagy páratlanok).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy n a $2k + 1, 2k + 3, \dots, 2m - 1$ egymást követő páratlan számok összege, ahol $m > k + 1$. Ekkor az előző tétel értelmében:

$$n = m^2 - k^2 \text{ és } m^2 - k^2 = (m - k)(m + k)$$

két természetes szám szorzataként előáll. Ha m és k egyszerre páros vagy páratlan, akkor az $m - k$ és $m + k$ is páros számok. Ha az m és k különböző paritásúak, akkor az $m - k$ és $m + k$ is páratlan számok. Az $m > k + 1$, ezért $m - k$ és $m + k$ is nagyobb, mint 1.

Ha $n = a \cdot b$, ahol a és b egyszerre párosak vagy páratlanok, akkor az $m + k = b$ és $m - k = a$ egyenletekből az $n = \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$, és ezért az n páratlan összegű szám az 1. tétel következtében.

Következmény. Az $n > 1$ természetes szám akkor és csak akkor nem páratlan összegű, ha prímszám vagy egy páratlan szám kétszerese.

A 2. tétel bizonyítása egy olyan eljárásan alapul, amelynek segítségével meg tudjuk határozni az összegben szereplő egymást követő páratlan természetes számokat.

Algoritmus. Ha $n = a \cdot b$, akkor $n = \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$, ezért

$$n = (b - a + 1) + (b - a + 3) + \cdots + (b + a - 1).$$

Például. Mivel $105 = 7 \cdot 15$, $b = 15$, $a = 7$,

$$105 = (15 - 7 + 1) + (15 - 7 + 3) + \cdots + (15 + 7 - 1),$$

így $105 = 9 + 11 + \cdots + 21$.

A következő tételek segítségével eldönthetjük, hogy egy adott természetes számnak hány különböző reprezentációja létezik. Két előállítást különbözőnek tekintünk, ha az összeadandókban különböznek egymástól, nem tekintjük különbözőnek, ha csak az összeadandók sorrendjében különböznek.

A $105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$, ezért a 105-nek 3 különböző páratlan összegű előállítása létezik.

Az n természetes szám osztóinak számától függ a reprezentációk száma.

3. tétel. Tegyük fel, hogy $n = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}$, ahol $p_1, p_2, \dots, p_k$ különböző prímszámok, és $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ és $t_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, k$.

3.1. Ha n páratlan és nem négyzetszám, akkor

$$P(n) = \frac{1}{2} [(t_1 + 1)(t_2 + 1) \cdots (t_k + 1) - 2]$$

reprezentációja létezik.

3.2. Ha n egy páratlan szám négyzete, akkor

$$P(n) = \frac{1}{2} [(t_1 + 1)(t_2 + 1) \cdots (t_k + 1) - 1]$$

reprezentációja létezik.

3.3. Ha $p_1 = 2$, és n nem négyzetszám, akkor

$$P(n) = \frac{1}{2} [(t_1 - 1)(t_2 + 1) \cdots (t_k + 1)]$$

reprezentációja létezik.

3.4. Ha $p_1 = 2$, és n négyzetszám, akkor

$$P(n) = \frac{1}{2} [(t_1 - 1)(t_2 + 1) \cdots (t_k + 1) + 1]$$

különböző reprezentációja létezik.

Bizonyítás. (3.1.) Az n természetes szám összes pozitív osztóinak száma

$$D(n) = (t_1 + 1) \cdot (t_2 + 1) \cdots (t_k + 1).$$

Ha az n páratlan, és nem négyzetszám, akkor minden p_i páratlan. Legalább egy t_i páratlan, mert a szorzat páros szám. Az összes osztók számának fele egyenlő az osztópárok számával:

$$\frac{1}{2} [(t_1 + 1)(t_2 + 1) \cdots (t_k + 1)].$$

Az osztópárok között van az $1 \cdot n$ is, ami nem felel meg a tételben megfogalmazott feltételnek. Ezért az n szám olyan kéttényezős szorzatainak száma, amelyek mindkét tényezője páratlan és 1-nél nagyobb:

$$\frac{1}{2} [(t_1 + 1)(t_2 + 1) \cdots (t_k + 1) - 2].$$

Az osztópárok számának meghatározásával és a paritások elemzésével a 3.1.-hez hasonló módon bizonyíthatóak a 3.2., 3.3. és 3.4. állítások, amelytől eltekintünk.

A bizonyítást megelőzően célszerű konkrét számok esetén meghatározni a reprezentációk számát.

Példák. 3.1. Legyen n páratlan és nem négyzetszám $n = 385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$, $D(385) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Az összes pozitív osztó: 1, 5, 7, 11, 35, 55, 77, 385.

Az osztópárok száma: $\frac{8}{2} = 4$, ezek $1 \cdot 385$, $5 \cdot 77$, $7 \cdot 55$, $35 \cdot 11$.

Az $1 \cdot 385$ nem felel meg a feltételnek, ezért a következő reprezentációt kapjuk: $385 = 5 \cdot 77$, ahol $a = 5, b = 77$, $b - a + 1 = 73$, $b + a - 1 = 81$ adódik, hogy

$385 = 73 + 75 + 77 + 79 + 81$, $385 = 7 \cdot 55$, ahol $a = 7$, $b = 55$,

$b - a + 1 = 49$, $b + a - 1 = 61$, $385 = 49 + 51 + \cdots + 61$, $385 = 11 \cdot 35$, ahol $a = 11, b = 35$, $b - a + 1 = 25$, $b + a - 1 = 45$, $385 = 25 + 27 + \cdots + 45$.

3.2. Legyen n páratlan szám négyzete $n = 441 = 3^2 \cdot 7^2$, $D(441) = 3 \cdot 3 = 9$. Az összes pozitív osztó: 1, 3, 7, 9, 21, 49, 63, 147, 441. A kéttényezős szorzatok száma öt: $1 \cdot 441, 3 \cdot 147, 7 \cdot 63, 9 \cdot 49, 21 \cdot 21$. Az $1 \cdot 441$ nem felel meg a feltételeknek, ezért $441 = 3 \cdot 147$, ahol $a = 3, b = 147, b - 0 + 1 = 145$ és $b + a - 1 = 149$, $441 = 145 + 147 + 149$. $441 = 7 \cdot 63$, ahol $a = 7, b = 63, b - a + 1 = 57$, $b + a - 1 = 69$, $441 = 57 + 59 + \dots + 69$. $441 = 9 \cdot 49$, ahol $a = 9, b = 49, b - a + 1 = 41$, $b + a - 1 = 57$, $441 = 41 + 43 + \dots + 57$. $441 = 21 \cdot 21$, ahol $a = 21, b = 21$, $441 = 1 + 3 + \dots + 41$, $P(441) = 4$.

3.3. Legyen n páros és nem négyzetszám. Ha $n = 22 = 2 \cdot 11$, akkor nem létezik reprezentációja a 2. tétel következtében, $P(22) = 0$. Ha $n = 48 = 2^4 \cdot 3$, $D(48) = 10$, ami 6 osztópárt jelent, amelyek: $1 \cdot 48, 2 \cdot 24, 3 \cdot 16, 4 \cdot 12, 6 \cdot 8$. Az $1 \cdot 48$ és $3 \cdot 16$ nem felelt meg a 2. tétel feltételeinek, ezért a $2 \cdot 24, 4 \cdot 12, 6 \cdot 8$ alapján a következő reprezentációk lehetnek: $48 = 2 \cdot 24$, ahol $a = 2, b = 24$ alapján $b - a + 1 = 23$ és $b + a - 1 = 25$, ezért $48 = 23 + 25$, $48 = 4 \cdot 12$, ahol $a = 4, b = 12$, így $b - a + 1 = 9$ és $b + a - 1 = 15$ ezért a $48 = 9 + 11 + 13 + 15$. A $48 = 6 \cdot 8$, ahol $a = 6, b = 8$, így $b - a + 1 = 3$ és $b + a - 1 = 13$, ezért a $48 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$ is teljesül. $P(48) = 3$ a 48 összes reprezentációinak száma.

3.4. Legyen n egy páros szám négyzete: $n = 784 = 2^4 \cdot 7^2$, az összes pozitív osztó $D(784) = 15$. A kéttényezős páros számok szorzatai az alábbiak: $2 \cdot 392, 4 \cdot 196, 8 \cdot 98, 14 \cdot 56, 28 \cdot 28$, ami azt jelenti, hogy a $P(784) = 5$.

4. tétel. Az n természetes szám akkor és csak akkor írható fel egyértelműen egymást követő páratlan számok összegeként, ha n egy prímszám négyzete, vagy egy prímszám köbe, vagy egy prímszám 4-szerese, vagy két különböző páratlan prímszám szorzata.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $P(n) = 1$, vagyis az n előállítása egyértelmű.

Ha n páratlan és nem négyzetszám, akkor a 3. tétel jelöléseivel

$$\frac{1}{2} [(t_1 + 1)(t_2 + 1) \cdots (t_k + 1) - 2] = 1,$$

amiből az adódik, hogy a szorzat egyenlő 4. Mivel minden $t_i > 0$ vagy $t_i = 1$ és $k = 1$, ezért $n = p_1^3$ vagy $t_1 = t_2 = 1$ és $k = 2$, ezért $n = p_1 \cdot p_2$ két különböző páratlan prímszám szorzata.

A 3. tétel alapján hasonlóan bizonyíthatóak a tétel további állításai.

5. tétel. Van olyan n természetes szám, amelyre $n, n + 1, n + 2$ számok mindegyike páratlan összegű, és létezik olyan n természetes szám is, hogy ezek egyike sem páratlan összegű.

Bizonyítás. Pl. $P(75) = 1, P(76) = 1, P(77) = 1, P(41) = 0, P(42) = 0, P(43) = 0$.

6. tétel. *Nem létezik olyan n természetes szám, amelyre az $n, n+1, n+2, n+3$ számok egyike sem páratlan összegű.*

Bizonyítás. Az $n, n+1, n+2$ és $n+3$ között van olyan szám, amelyik a 4-nek többszöröse. Ha 4-nek többszöröse, akkor felírható két páros szám szorzataként. Ez azt jelenti, hogy a 2. tétel alapján páros összegű számnak kell lennie. Négy egymást követő természetes szám között tehát mindig van páros összegű.

A természetes számok egymást követő páratlan számok összegeként való partícióit mutatja az 1. táblázat, ahol n 1 és 50 közötti szám. $P(n)$ jelenti a partíciók számát.

1. táblázat

n	Prímfaktorizáció	Partíciók száma
1	—	0
2	2	0
3	3	0
4	2^2	1
5	5	0
6	$2 \cdot 3$	0
7	7	0
8	2^3	1
9	3^2	1
10	$2 \cdot 5$	0
11	11	0
12	$3 \cdot 2^2$	2
13	13	0
14	$2 \cdot 7$	0
15	$3 \cdot 5$	1
16	$2 \cdot 4$	1
17	17	0
18	$2 \cdot 3^2$	0

n	Prímfaktorizáció	Partíciók száma
19	19	0
20	$2^2 \cdot 5$	1
21	$3 \cdot 7$	1
22	$2 \cdot 11$	0
23	23	0
24	$3 \cdot 2^3$	2
25	5^2	1
26	$2 \cdot 13$	0
27	3^3	1
28	$2^2 \cdot 7$	1
29	29	0
30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	0
31	31	0
32	2^5	3
33	$11 \cdot 3$	1
34	$17 \cdot 2$	1
35	$5 \cdot 7$	$\frac{1}{2}(2 \cdot 2 - 2) = 1$
36	$2^2 \cdot 3^2$	$\frac{1}{2}(1 \cdot 3 + 1) = 2$
37	37	0
38	$2 \cdot 19$	0
39	$3 \cdot 13$	$\frac{1}{2}(2 \cdot 2 - 2) = 1$
40	$2^3 \cdot 5$	$\frac{1}{2}(2 \cdot 2) = 2$
41	41	0
42	$2 \cdot 3 \cdot 7$	0
43	43	0
44	$2^2 \cdot 11$	$\frac{1}{2}(1 \cdot 2) = 2$
45	$3^2 \cdot 5$	$\frac{1}{2}(3 \cdot 2 - 2) = 2$
46	$2 \cdot 23$	0
47	47	0
48	$2^4 \cdot 3$	$\frac{1}{2}(3 \cdot 2) = 3$
49	7^2	$\frac{1}{2}(3 - 1) = 1$
50	$2 \cdot 5^2$	0

A hallgatók számára kijelölhetünk további feladatokat újabb tételek megfogalmazására és bizonyítására.

Irodalom

- [1] NIVEN—ZUCKERMAN: *Bevezetés a számelméletbe*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [2] OLSON, MELFRIEND: Sequentially so. *Mathematics Magazin*, (1991), 297—298.
- [3] RAY, C. and HARRIS, S.: An odd sum. *Mathematics Teacher*, Volume 95, Number **3** (2002).

Orosz Gyuláné

Károly Eszterházy College
Department of Mathematics
Leányka Str. 4.
H-3300 Eger, Hungary
E-mail: ogyne@ektf.hu