Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 115–120*

A MATEMATIKAI ANALÍZIS OKTATÁSA SORÁN TAPASZTALT PROBLÉMÁKRÓL ÉS HIBÁKRÓL I.

Mihály Rados (EKTF, Hungary)

Abstract: Problems and mistakes of the teaching of mathematical analysis I. We deal with the axiomatic structure, the system of symbols and the connection of descriptiveness and analysis.

Bevezetés

A diák nem akar tanulni, de ismerni, érteni és tudni szeretne mindent. Ez az a helyzet, amely alapvető nehézséget és értelmét adja az itt dolgozó szakemberek munkájának, szakképzettségükből és hivatástudatukból eredő tevékenységüknek. Napjainkban a matematikaoktatás minden szintjén sok olyan változás következett be, amelyek szükségessé teszik szaktárgyi és metodikai kérdések átgondolását újra:

— a matematika oktatásának tartalma megközelíti a matematikai tudományt;
— a NAT (Nemzeti Alaptanterv) feltűnése, csiszolgatása, eltűnése, újrafogalmazása;
— a felsőfokú oktatási intézmények fúziója;
— az új eszközrendszer nemzetközi méretű bevezetése és elterjedése (számítógépek!), ezek kapcsolata a hagyományos oktatási eljárásokkal;
— a középiskolai és felsőoktatási intézmények autonómiájának növekedése;
— az úgynevezett átjárhatóság (sőt áthallgatás) biztosítása;
— a kreditpontrendszer alkalmazása;
— az önköltséges, az önálló tanulásra alapuló intézmények rohamos terjedése;
— a tankönyvek, jegyzetek, ajánlott irodalom változatossága;
— és lehetne folytatni a problémák sorát tovább.

Ezek a módosulások — sokszor nevezik korszerűsítésnek, fejlődésnek — részben szükségszerűek, hiszen az iskola élete mindig a társadalmi lét kicsinyített, késleltetett, de mindig direkt leképezése volt. A változás jellemzésére példaként megemlítjük a logarlécet: ez az eszköz nem is olyan régen a mérnök, a matematikus szimbóluma volt, a főiskolákon külön tantárgyként tanítottuk használatát különböző feladatok megoldására; a mai diákok már látásból sem ismerik a logarlécet; ott van a zsebszámológépe!?

Ugyanakkor jelentkeztek a főiskolára felvételt nyert matematika szakos hallgatóknál olyan problémák, amelyekre már részben céloztunk:

— egyes fogalmak, sőt fejezetek ismerete felszínes;

— a követelményekben nagy az ugrás számukra a középiskolához képest;
— nem biztosak a matematika szaknyelvének használatában, mondandójuk verbális kifejezésében (a tesztek utóhatása?);
— tájékozatlanok a következtetések, bizonyítások terén, nem értik ezek logikai struktúráját;
— ismereteik alkalmazása formális, mechanikus;
— hiányzik belőlük a nehézségek leküzdésére irányuló törekvés, a kitartó igyekezet; ha nem érnek el azonnal sikert a feladatok megoldásában, könnyen feladják a reményt.

Az alábbiakban önkényesen kiragadunk néhány problémát és feladatmegoldási nehézséget a matematikai analízis témaköréből, amelyek igazolják az említett, vázolt kérdések realitását!

1. Az axiomatikus (axiomatikushoz közelálló) tárgyalásmódról

Ez a legelső, „alapozó”, a hallgatótól számára eddig még meg nem szokott nagy figyelmet, koncentrációt és distinctiót követelő témakör. Kezdetben nem igazodik el az axiómák, a definíciók, tételek, bizonyítások világában. Nem érti, hogy „miért” kell nyilvánvaló dolgokat nyakatekert módon bizonygatni?! Ez minden egyéb fogalom kialakításánál így alakul: ha kimondunk egy definíciót, ezzel még nem tanítottuk meg! Egyre világosabbá majd az alkalmazások, más fogalmakkal való kapcsolatának megteremtése, funkciójának megismerése során válik egyre tisztábbá! A repülőgépről van fogalma a kisgyereknek, az utasnak, a pilótának, a repülőgéptervező mérnöknek, de például ezen fogalmak közötti különbséget nem is érdemes hangsúlyozni.

Oktatásunknak is vannak hiányosságai ezen a téren. Egy-egy fogalom még a különböző matematikai tantárgyakban is definiálásra kerül, más-más megfogalmazásban: például szerepel a függvény, a számosság fogalma az algebrában, a folytonosság a geometriában is. Másrészt ha a hallgató kezébe veszi egy másik egyetem (főiskola, tanfolyam) tankönyvét, jegyzetét, vagy egyéb analízis tárgyú szakkönyvet, ugyancsak el kell mélyednie az adott tananyag ott alkalmazott felépítésében. A főiskolai hallgató emlékszik középiskolai tanulmányaira is, ennek szemléletes tárgyalásmódja kezdetben segítheti az átmenetet, de később zavarja az absztrakt ismeretszerzés folyamatát. Probléma jelentkezik a társtanszékekkel való kapcsolatban a tantárgyi koncentráció terén is. Például a fizikában jóval előbb szükség van olyan fogalmakra — differenciálhányados, integrál, ... —, amelyek a rendszeresen felépített matematikai analízis későbbi fejezetei.

Itt bizony zavar keletkezik! Ha a többi szakterület nem törekszik az axiomatikus felépítésre, akkor az analízis axiomatikus tárgyalása helyett axiomatizmust tanítunk analízis címszó alatt.

Ugyanekkor a tananyag rendszeres felépítésére, a precízségre, a szabatosságra, most lenne a legnagyobb szükség, amit a szabatosság paradoxona címen is szokás nevezni.

Aki még nem látja a különbözőséget, annak a szabatosság semmit sem mond. Aki már jól látja, az viszont az elnagyolt fogalmazás ellenére is látja. Akik értik egymást, azok pontatlanul is kifejezhetik magukat. A szabatos megkülönböztetésre azoknak van leginkább szükségük, akik éppen kezdik látni a különbséget, de még nem biztosak benne ([3] 52. o.).

2. A jelölésrendszer

Az analízis tananyagának felépítésében mutatkozó eltérések mellett növeli az oktatás nehézségét még az is, hogy a szakirodalom szimbolikája nem egységes. Ahány intézmény, ahány tanszék, sőt ahány szerző, annyiféle jelölésrendszert alkalmaz, sokszor párhuzamosan és részben ellentétesen. Gazdagítja ezt a választékot az önköltséges képzési formák, az önálló tanulási módszerek segítségére ki-kialakított jelölésrendszer, valamint az egyes tanárok szubjektív elképzelései.

Mi a továbiakban következetesen [1] és [2] jelöléseit, felépítését és feladatmegoldásait használjuk.

Valós számsorozatok esetében külön ki kell térni arra, hogy mi a különbség az

$$\langle a_n \rangle; \quad a_n; \quad \{a_n\}$$

jelentése között. Elegáns taglalása ennek a témakörnek a [8] 141. oldalán kezdődő fejezet.

Ha a függvény fogalmát előzetesen definiáltuk, a valós számsorozat fogalmát úgy értelmezhetjük, mint a természetes számok ($\mathbf{N}$) halmazán értelmezett függvényt (f):

$$\langle a_n \rangle \colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}; \qquad a_n := f(n), \quad n \in \mathbf{N}$$

Függvények esetében a hallgatók gyakran keverik a következő szimbólumokat:

$$f$$

$$f(x)$$

$$x \longmapsto f(x)$$

$$x \longmapsto f(x),\ x \in D_f$$

$$x \xrightarrow{\mathrm{f}} y$$

$$y = f(x)$$

például

$$f \colon H \to \mathbf{R},\ f(x) := x^2$$

Nem mindig világos előttük, hogy melyik jelölés melyik másikkal ekvivalens, illetve mi a különbözőség! A matematikai analízisben a hozzárendelési szabály nem ad meg függvényt, ha nem határozzuk meg az értelmezési tartományt, hiszen a függvény két halmaz közötti binér reláció speciális esete. Annyi „lezserséget” megengedünk, hogy csak a képelemek halmazát nevezzük meg (valós értékű), mert a pontos értékkészlet általánosabb esetben a függvénydiszkusszió során állapítható meg. A társtudományok legtöbbször megelégszenek a hozzárendelési szabály megadásával, de ekkor külön munka az értelmezési tartomány, mint a valós számok szóba jöhető legbővebb részhalmazának (vagy ennek még egy részhalmazára való leszűkítésének) megállapítása.

3. Az analízis és a természettudományok (valóság, szemléletesség) kapcsolatáról

Ez a kérdés folyamatosan napirenden van, átfogó elemzések tárgya, amelyre nem célunk kitérni. Néhány oktatásban is fontos példát említünk csak.

3.1. Mit nevez egy kezdő diák folytonos vonalnak? „Ha megtudom rajzolni a táblára krétával a kréta felemelése nélkül". Ez a megfogalmazás több szempontból sem fogadható el! Definiálni kellene mit jelent az, hogy „a kréta felemelése nélkül"; matematikai fogalmat egy fizikailag végrehajtott tevékenységgel próbálunk meghatározni; mi a kapcsolat a „folytonos" vonalnak és az ezt leíró függvény folytonosságának,...

Már első szinten is elgondolkodtatják a diákokat a következő kételkedést kifejező problémák: messziről „folytonos"-nak tűnik a táblára rajzolt vonal, de ha közel megyek, már különálló krétaszemcséket látok; mi lenne, ha mikroszkóppal nézném; egymástól távoli mészkődarabok tűnnek fel; ... hol van itt folytonosság?

Az analízis másik irányból általánosabban definiálja ezt a fogalmat. Síkbeli folytonos vonalnak mondjuk az

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

$$\alpha \le t \le \beta; \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

koordinátájú pontok halmazát, valahányszor f és g az $[\alpha, \beta]$-ban folytonos függvény ($t \in [\alpha, \beta]$ számok a paraméter szóba jövő értékei) ([6], 367. o.).

3.2. A felsőoktatásban résztvevő matematika szakos hallgatók érdeklődését tovább lehet fokozni, erre példaként idézünk néhány feladatot.

3.2.1. A hallgatók megismerik, vizsgálják az „úgynevezett" egészrész-függvényt, majd elemzik ennek folytonosságát. Könnyen bebizonyítható, hogy ha $x_0 \notin \mathbf{Z}$, $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := [x]$ függvény folytonos, de ha $x_0 \in \mathbf{Z}$, akkor f az x_0-ban balról nem folytonos, jobbról viszont folytonos! „Hogy lehet ez? Hiszen a függvény grafikonján balról éppen úgy át tudok nézni, mint jobbról az $x_0 \in \mathbf{Z}$ esetekben is?!"

3.2.2. Elemezzük az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \ne 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényt folytonosság szempontjából! Könnyű belátni, bebizonyítani, hogy ez a páros függvény minden valós x esetén folytonos, problémát csak az $x_0 = 0$ hely esete jelent. A függvény grafikonját az $x_0 = 0$ környezetében nem lehet megrajzolni!

Az $x_0 = 0$ felé haladva a görbe végtelen sokszor metszi az x tengelyt. „Elvben bármilyen közel vezethetjük a grafikont az $x_0 = 0$-hoz, de az $x_0 = 0$-án nem vagyunk képesek átvezetni." ([4] 242. o.) Az f függvény pedig folytonos az $x_0 = 0$-ban is! Ennek ellenére nincs értelme az olyan kérdésfelvetésnek, hogy például a görbe jobbról haladva a 0-hoz felülről vagy alulról megy-e be az origóba!

A folytonosság matematikai értelmezésében benne vannak implicite olyan összefüggések, tulajdonságok is, amelyek a szemlélet számára nem nyilvánvalóak, szinte hozzáférhetetlenek. Ez a függvény egyébként nem erőltetett példa, mert bizonyos csillapodó rezgések leírására ehhez hasonló függvények alkalmasak ([4]).

3.2.3. Az érdeklődő hallgatók ilyen példák megismerése után nagyobb figyelemmel kísérik a fogalom általánosítását: kompakt halmazon folytonos függvény kompakt halmazon pontonként és egyenletesen folytonos függvény (és a tulajdonságok) felülről folytonos függvény, teljesen folytonos függvény; ...

4. A végtelen fogalmáról a matematikában

Véges értelmünkkel a végtelent felfogni nem könnyű feladat, a definíciókra való támaszkodás ismételten megkövetelt előfeltétel, mert különben „józan paraszti ésszel", a „szemlélet alapján", ...durva szakmai hibákat lehet elkövetni a „$\frac{\infty}{\infty}$", „$\frac{0}{0}$", „$\infty - \infty$",... típusú kifejezések, ezek határértékének elemzése során. Egy sorozat vagy függvény határértékén mindig valamilyen valós számot értünk. „De akkor mit értsünk plusz (vagy minusz) végtelenen? Semmi esetre sem olyan „számot" ... ([5] 131. o.) Végtelen, „mint olyan" nem létezik, erről általában nem lehet beszélni, funkciója mindig a definícióban szerepel ([1], [2]).

A témakör elemzése is kimeríthetetlen, mint maga a fogalom. Kezdődik azzal, hogy mit is jelent: $n \to +\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =?$; $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$; $\infty \in \mathbf{R}_b$; ...

A konvergens, divergens (valódi divergens) sorozatok és sorok tárgyalása hosszú folyamat. Általában bizonytalanok a hallgatók az elégséges, szükséges, ...feltételek megfogalmazásában, sok hibát követnek el. [7] például kiemeli: konvergens-e a következô valós számsor: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{(2k)!}$ (definíció szerint: $0^0 := 1,\ 0! := 1$)?

A D'Alembert-féle hányados-kritériumot alkalmazva sok hallgató eljut az $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}(2n)!}{(2(n+1))!n^n}$ kifejezéshez, de ez számára bonyolultnak tűnik, és abbahagyja a megoldást. Pedig némi áttekintés után könnyű belátni, hogy ez a határérték 0, tehát a sor konvergens ([7] 127. o.)!

Most egy példát említünk csak. Tanári kérdés: „Mennyi végtelen sok pozitív valós szám összege?" A „természetes" válasz „végtelen"?! A fogalmak tisztázása, a szükséges és elégséges feltételek kimondása és bizonyítása után még mindig marad bizonytalanság a diákokban! Mennyi az összege a közismert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots$$

harmonikus sornak? Számítástechnikában jártas hallgatónk összeadott egymillió tagot: $s_{1\,000\,000} \approx 14{,}39$. Ebből arra következtettek, hogy a sor konvergens, összege 20 alatt marad. Jött a bizonyítás: ez a sor divergens,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Irodalom

[1] Rimán J.: Matematikai analízis I. EKTF Líceum Kiadó, Eger, 1998.

[2] Rimán J.: Matematikai analízis feladatgyűjtemény I—II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

[3] Pálfy S.: Tanári kézikönyv a 6. osztályos számtan-mértan tanításához, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

[4] Ruzsa I.: A matematika és a filozófia határán. Gondolat Kiadó, Budapest, 1966.

[5] Peller J.: Az analízis elemeinek tanítása a középiskolában. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.

[6] Császár, Á., Valós analízis I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[7] Tupikov, V. A.: Osibki v resenii zádács po viszsej matematike, Viszsaja Skola, Minszk, 1976.

[8] Kósa, A.: Vírusok a matematikában. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1994.

Mihály Rados
Institute of Mathematics and Informatics
Károly Eszterházy Teachers' Training College
Leányka str. 4–6.
H-3300 Eger, Hungary