Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae, 25. (1998) pp. 111–118

A matematikai problémamegoldó gondolkodás vizsgálata 13–14 éves korú tanulóknál

OROSZ GYULÁNÉ

Abstract. In this paper is an experimental investigation of the mathematical problem-solving at the age of 13 and 14. It consists of an introduction, the framework of the study, research methods and problems, results and conclusions, a model.

1. Bevezetés, a témaválasztás indoklása

A NAT bevezetését megelőző években a matematikaoktatáshoz kapcsolódó hazai és nemzetközi kutatásokban igen nagy hangsúlyt kapott és kap ma is a tanulói teljesítmények mérése, összehasonlítása, a tantervi aspektusok vizsgálata (IEA, Monitor).

A MAWI-csoport (1994) széles körű vizsgálatot folytat annak feltárására, hogy a matematikatanulásának sikerességére milyen hatást gyakorol a tanulókban a matematikáról kialakított nézet. Ezen vizsgálatok eredményeit figyelembe kell venni a matematikaoktatással kapcsolatos fejlesztéseknél.

Ugyanakkor ezek mellett fontos feltárni a matematikai problémamegoldás életkori jellemzőit, az esetleges alacsony teljesítményszint okait, az előforduló hibákat, hiányosságokat.

E gondolatok inspiráltak bennünket kutatásunk megkezdésekor. Vizsgálatunk célja a 13-14 éves tanulók matematikában nyújtott problémamegoldó gondolkodásának feltérképezése. Számos felvetés és válaszra váró kutatási kérdés fogalmazható meg ezen a területen. Milyen önálló és céltudatos a tanulók ezirányú tevékenysége? Milyen jellemző hibákat követnek el? Milyen következtetéseket vonhatunk le az előforduló hibák lehetséges okaira vonatkozóan? Mi jellemzi a 7. és mi a 8. osztályos tanulók teljesítményét? Milyen a részmegoldások teljesítése? Elakadás esetén milyen arányú a segítségnyújtás? Milyen megoldási módszereket alkalmaznak a tanulók? Mi jelenti a feladatban a tanulók számára a problémát? Végül ebben az egyáltalán nem teljes sorban a legnehezebben megválaszolható kérdés, hogy milyen összefüggésben vannak a tanulói teljesítmények a külső és belső motiváló tényezőkkel? Cikkünkben egy olyan elővizsgálat eredményeiről számolunk be, mely adatokat nyújt és segít abban, hogy egy szélesebb körű vizsgálat hipotéziseit, kérdéseit körültekintőbben és hatékonyabban tudjuk megfogalmazni.

2. A vizsgálatok tervezése, metodikai vonatkozásai

A gondolkodás vizsgálatának módszerére vonatkozó tudományos követelményeknek munkánk során igyekeztünk eleget tenni és teljes egészében elfogadtuk Lénárd Ferenc (1978) megállapításait:

1. Problémákat, feladatokat adunk a kísérleti személyeknek annak érdekében, hogy ezek a gondolkodási tevékenységet kiváltsák.
2. Elakadás esetén segítséget, ún. kisegítő feladatokat alkalmazunk.
3. Megvizsgáljuk, hogy a megoldási menetekben az ismeretek milyen szerepet játszanak.
4. Közvetlen rávezetéseket alkalmazunk.
5. A gondolkodási menet lépéseit gondosan feljegyezzük és elemezzük.
6. A gondolkodási tevékenység közben elkövetett hibák tanulmányozására nagy gondot fordítunk.
7. Sohasem tévesztjük szem elől, hogy a gondolkodási tevékenység kölcsönhatás a személy és a probléma között.

A feladatok összeállításának pszichológiai szempontjai közül figyelembe vettük (Kelemen, 1970) azon megállapítását, hogy „olyan feladatokat kell adni, amelyek bizonyos nehézségeket okoznak, a megoldásuk aktív tevékenységet igényel. A feladat olyan fokig legyen újszerű, hogy lehetséges legyen a múltbeli tapasztalatokhoz való kapcsolódása. Annyi elemet kell tartalmaznia, amennyi feltétlenül szükséges a pontos megértéshez; de kellő hézagokat is kell hagyni, hogy teret biztosítson az önálló tanulói műveletvégzés számára.” A témakör kiválasztásánál elfogadtuk Lénárd (1978) azon megállapítását, miszerint olyan feladatokat kell adnunk, amelyek elindítják „és egy bizonyos ideig - minden külső beavatkozás nélkül aktiválják a kísérleti személyek gondolkodási tevékenységét”. Az elemi számelméleti feladatok több okból is alkalmasnak látszottak erre. Egyrészt a Nemzeti Alaptanterv tananyagában a 10-16 éves korosztály minden évfolyamán előfordulnak számelméleti alapismeretek. Másrészt a számelméleti feladatokkal való foglalkozás felkelti a tanulók matematika iránti érdeklődését, rámutat a matematika tudomány szépségeire, kutatásra ösztönzi a tehetséges tanulókat (fontos motiváló tényezők), alkalmas lehet a matematikai képességek strukturájának feltárására.

3. Vizsgálati módszer

Vizsgálatunkat Egerben 12 általános iskolában végeztük, amelybe 373 14 éves és 241 13 éves tanulót vontunk be. A vizsgálatokban a feladatlapos és az egyéni felmérés módszerét alkalmaztuk.

Jelen dolgozatunkban a feladatlapos méréshez kapcsolódó tapasztalatainkat vázoljuk. Két számelméleti feladatot választottunk ki, amelyet a

7. és 8. osztályos tanulók problémamegoldó gondolkodásának vizsgálatához egyaránt felhasználtunk.

A feladatok a következők voltak:

1. Hány olyan egyenlőszárú háromszög van, amelyeknek oldalhosszai egész számok, és leghosszabb oldalának mérőszáma 1997?

2. Egy sakktábla minden mezőjébe beírjuk rendre az $1, 2, 3, \ldots, 64$ természetes számokat a bal felső sarokból indulva, balról jobbra, felülről lefelé haladva, majd minden lehetséges módon letakarjuk egy 2×2-es négyzettel. Hány esetben lesz a letakart számok összege osztható 3-mal?

Feladatválasztásunkat gyakorlati, tanítási tapasztalataink, valamint egy elővizsgálat eredménye is megerősítí. A matematikai versenyfeladatok megoldásainak javítása során azt tapasztaltuk, hogy az elemi számelméleti feladatok e korosztály számára nehéznek bizonyultak (a teljesítmények alacsony szintje jelezte e tényt), így valóban igazi problémát jelentettek. Az elővizsgálat során a tanulók 12 feladat rangsorolását végeztették el nehézségi sorrendjük szerint, s e rangsorban az általunk kiválasztott két számelméleti feladat került az utolsó két ranghelyre.

4. A feladatok értékelése

Mindkét feladatnál a következő csoportosítást tudtuk elvégezni:
— önállóan, jól oldja meg,
— önállóan, hibásan oldja meg,
— részmegoldások, sok hibával,
— nem képes megoldani a problémát.

A tanulók 1. és 2. feladatban nyújtott teljesítményét összegezve az alábbi eredményt kaptuk:

7. osztály

	1. feladat	2. feladat
Önállóan, jól oldja meg	3,2%	0,8%
Önállóan, hibásan oldja meg	12,4%	4,6%
Részmegoldások, sok hibával	15,8%	16,4%
Nem képes megoldani a problémát	68,6%	78,2%

1. táblázat

8. osztály

	1. feladat	2. feladat
Önállóan, jól oldja meg	4,5%	1,2%
Önállóan, hibásan oldja meg	13,3%	5,5%
Részmegoldások, sok hibával	21,4%	18,6%
Nem képes megoldani a problémát	60,8%	74,7%

2. táblázat

A táblázatok adatai egyértelműen arra hívják fel a figyelmünket, hogy a tanulók önállósága igen alacsony szintű. A tanulók megoldásainak elemzéseiből nem tudunk következtetéseket levonni a sikertelenség okára vonatkozóan, mert ehhez további vizsgálatok szükségesek. A hetedik és nyolcadik osztályosok között nincs lényeges különbség az önállóság mértékét összehasonlítva. Ezért a 7. osztályosok első feladatának megoldásait elemezzük részletesen.

A 7. osztály első feladatának tartalmi, metodikai elemzése

A feladat megoldásához szükséges előismeretek:

Egyenlő szárú háromszög, alap, szár fogalmak ismerete — háromszög-egyenlőtlenség összefüggése, leghosszabb oldal értelmezése, oldalhossz mérőszáma, a háromszög oldalának mérőszáma egész szám, az összes lehetséges adott tulajdonságú háromszög megkeresése, egész számok összehasonlítása, rendezése.

Problémát jelentett a tanulók számára:

Nem volt megadva melyik a háromszög leghosszabb oldala (alapja vagy a szára). Az értelmezésnél is jelentkeztek gondok. A feladatot — tömör megfogalmazásából adódóan — a tanulók első olvasásra nem értették meg, ezért hozzá sem kezdtek a megoldásához, melyet a teljesítmények is igazolnak. Hibátlan megoldást mindössze két tanuló adott (1,2%), egyetlen számolási hibával egy tanuló oldotta meg jól a problémát, sok hibával helytelen megoldást adott a tanulók 28,2%. Nem foglakozott a feladattal a tanulók 68,6%-a. A feladat összetettsége is nehézséget okozott.

Az előforduló hibák, s azok lehetséges okai:

Figyelmetlenségből adódó hiba, hogy a tanulók 18%-a felületesen olvasta el a feladatot és elsiklott az **egész számok**, szavak felett, ami fontos feltétel volt, s ezért jutottak a helytelen következtetésre, miszerint végtelen sok ilyen tulajdonságú háromszög van. A tanulók 3%-a nem értette a mérőszám szó jelentését, s ezért nem tudta értelmezni a feladatot, s kérte, hogy konkrét mértékegységben legyen adott az oldal hossza.

Hiányos előismeretből adódó hiba volt, hogy a háromszög-egyenlőtlenséget nem tudták alkalmazni a feladatban, csupán reprodukálni voltak képesek ezen összefüggést.

Az elemi gondolkodási műveletvégzésben való járatlanságot mutatta, hogy azon tanulók, akik foglalkoztak a feladattal, csak a feladat egyik részét oldották meg, amikor az alap a leghosszabb, s a másik résszel egyáltalán nem foglalkoztak.

A kombinatorikus gondolkodásmód kialakulatlansága is okozott hibákat: sokan felismertek a háromszög-egyenlőtlenség szerepét a feladatban, megállapították mennyi lehet a meg nem adott oldal maximális és minimális hossza, de nem tudtak mit kezdeni a kapott számadatokkal, s így nem jutottak el a megoldásig, mert nem voltak képesek előállítani a meghatározott egész számokat két egész szám összegeként.

A fenti hibákból arra következtethetünk, hogy a probléma e korosztály számára nehéznek bizonyult és csak a matematikából jó képességű tanulók tudták megoldani. Véleményünk szerint a sikertelen megoldásokat adó tanulók számára megfelelő egyéni segítséget nyújtva rávezethetjük őket a helyes megoldásra.

Fenti észrevételeink olyan feltételezések, amelyek a tanulói munkák elemzésén alapulnak. További vizsgálatok szükségesek azonban annak eldöntésére, hogy mi az oka az alacsony teljesítményszintnek. Ezért végeztünk egyéni vizsgálatokat is, amelyekkel egy következő tanulmányokban foglalkozunk részletesen. A tanulói munkák elemzését figyelembe véve kidolgoztunk egy-egy elméleti modellt a tanulók segítésére, s az egyéni vizsgálatok során ezeket kipróbáltuk.

Az egyéni vizsgálatokban az általunk kidolgozott modellt használtunk. A 2. feladat megoldásához ilyen módon adtunk segítséget a tanulóknak, ha önállóan nem voltak képesek megoldani a problémát.

Mindkét osztálynál az (a) és a (b) tevékenységet alkalmaztuk. A további konstrukciókat — (c) és (d) — a felsőbb évfolyamok számára dolgoztuk ki.

5. Elemi számelméleti problémák négyzetrácsra írt számok lefedésével

(a) *Tevékenység:*

Rajzolj egy 4×4-es négyzetrácsot! A négyzetekbe írd be rendre az $1, 2, 3, \ldots, 16$ természetes számokat a bal felső sorokból indulva, balról jobbra, felülről lefelé haladva.

Vágj ki átlátszó fóliából egy 2×2-es négyzetet.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Feladatok:

1. Takard le minden lehetséges módon a számozott négyzetrácsot a 2×2-es négyzettel. Hány különböző letakarás lehetséges?

2. Határozd meg minden esetben a a letakart számok összegét!

3. Hány esetben lesz a letakart számok összege osztható 3-mal?

4. Hány esetben lesz a letakart számok összege osztható 5-tel?

5. Van-e olyan letakarás, amikor az összeg osztható 15-tel?

6. Írd fel a négy szám összegét általánosan!

7. Az általánosan felírt összeg segítségével fogalmazz meg további problémákat!

(b) *Tevékenység:*

Rajzolj egy 8×8-as négyzetrácsot! Az előző feladat feltételei szerint írd be az egyes négyzetekbe rendre az $1, 2, 3, \ldots, 64$ természetes számokat! Ismét az átlátszó fóliából kivágott 2×2-es négyzettel dolgozz!

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
19	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Feladatok:

1. Takard le a négyzetrácsot a 2×2-es négyzettel úgy, hogy a letakart négy szám összege osztható legyen 3-mal. Keress minél több megoldást!

2. Ha minden lehetséges módon elvégezzük a letakarást, akkor hány esetben lesz a letakart számok összege osztható 3-mal?

3. Írd fel általánosan a négy szám összegét!

4. A letakarások elvégzése nélkül próbálj választ adni a kérdésre az általános alak segítségével! Hány esetben lesz a letakart számok összege osztható 9-cel?

5. Igaz-e, hogy az összeg mindig osztható 4-gyel? Miért?

6. Fogalmazz meg további problémákat!

(c) **Gondolati konstrukciók:** (Szükség esetén rajzos modell készítése)

— Képzelj el egy 11×11-es négyzetrácsot, amelybe rendre beírtuk az $1, 2, 3, \ldots, 121$ természetes számokat az előző feladatok feltételei szerint, majd minden lehetséges módon letakartuk a 2×2-es négyzettel.

Feladatok:

1. Írd fel a letakart számok összegét általánosan!
2. Hány esetben lesz a letakart számok összege osztható 8-cal?
3. Hány esetben lesz a a letakart számok összege osztható 3-mal?
4. Igazold, hogy az összeg mindig osztható 4-gyel!
5. Hány letakarás esetén lesz az összeg osztható 12-vel?

(d) **További gondolati konstrukciók:** (modell segítségével vagy attól elvonatkoztatva)

— Képzelj el egy 1997×1997-es négyzetrácsot, amelyre beírtuk a számokat az előző feltételek szerint és minden lehetséges módon letakartuk a 2×2-es négyzettel.

Feladatok:

1. Írd fel a letakart számok összegét általánosan!
2. Bizonyítsd be, hogy bármely letakarás esetén teljesül, hogy az összeg osztható 4-gyel!
3. Fogalmazz meg ezen lefedésekhez kapcsolódó további problémákat!

A további problémák konstruálásához célszerű tanári segítséget nyújtani. Például: A négyzetrácsba prímszámokat páros vagy páratlan számokat írjunk, lefedő alakzatként 3×3-as négyzetet, 3×3-as vagy 2×2-es téglalapot használhatunk.

Következő tanulmányunkban a modellek alkalmazásához kapcsolódó tapasztalatainkról számolunk be.

Irodalom

[1] Ambrus András: *Matematikadidaktikai tanulmnyok,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

[2] Balogh László: *Feladatrendszerek s gondolkodsfejleszts,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[3] Balogh László—Herskovits Mária—Tóth László: *Tehetsg s kpessgek,* KLTE Pedagógiai-Pszichológiai Tanszék Debrecen, 1995.

[4] Czeglédy István: *Matematika tantrgypedaggia I.*, Calibra, Budapest, 1997.

[5] Kelemen László: *A 10—14 ves tanulk tudsszintje s gondolkodsa,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1963.

[6] Lénárd Ferenc: *A problmamegold gondolkods,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978.

[7] Pólya György: *A gondolkods iskolja,* Gondolat, Budapest, 1971.

[8] Pólya György: *A problmamegolds iskolja I-II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[9] Salamon Jenő: *A megismer tevkenysg fejldsllektana,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.

Dr. Orosz Gyuláné
Eszterházy Károly Tanárképző Főiskola
Matematika Tanszék
Leányka u. 4.
3301 Eger, Pf. 43.