Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae, 24. (1997) pp. 131–136

Vírusok a tanulók matematikai gondolkodásában

SZILÁK ALADÁRNÉ

Abstract. La skr bleciono demonstracias uni típan eraron en la matematika pensado de la lernantoj. Ofta eraro en la lecionosolvo, ke la lernantoj ne indikas ĉiû solvojn de la „duondiverĝaj" (diverĝaj) lecionoj. Per helpo de modelleciono sur ĝin demando serĉas respondon, kun kiaj metodoj eblas antaŭforigi, elimini la erarojn.

A matematika tantárgypedagógia a logikus (matematikai) gondolkodás fogalmát és nevelését igen összetetten fogalmazza meg. A korszerű matematikatanításban ezen gondolkodás elemei egyre hangsúlyozottabban jelennek meg. Erről tanúskodnak az utóbbi évek matematika tantervei és a NAT is. A Nemzeti alaptanterv külön tömbben (Gondolkodási módszerek) írja elő a matematikai gondolkodáshoz kapcsolódó tananyagot, az általános és speciális fejlesztési követelményeket. Több matematikus, tantárgypedagógus, didaktikus (Pólya György, Rubinstein, Nagy Sándor, Kelemen László, Mosonyi Kálmán, Czeglédy István) foglalkozott és foglalkozik ma is e fontos területen előforduló gondolkodási hibákkal (vírusokkal). Igen sok odafigyelést feltételez a „megelőzés" és a „gyógyítás" is: Egyrészt meg kellene találnunk az „okokat", másrészt olyan módszereket kellene kidolgoznunk, amelyek gátolnák a hibák létrejöttét, kialakulását. Nincs könnyű dolgunk, hiszen a gondolkodási hibák „tárháza" szinte kimeríthetetlen. E cikkben csupán egyetlen gondolkodási hibával szeretnénk foglalkozni részletesebben.

Többször tapasztaljuk a tanulók feladatmegoldásában azt az alapvető hiányosságot, hogy nem adják meg a feladat teljes (minden) megoldását. Megtalálnak egyet a lehetséges „eredmények" közül, és ezzel megelégedve befejezik a feladatot. Még a tehetséges tanulóknál is előfordul, hogy például matematikaversenyen azért veszítenek pontokat, mert nem hozzák a feladat minden eredményét. Az ilyen típusú hiba alapvető oka lehet a „féldivergens" (divergens) gondolkodás hiánya.

Az olyan feladatokat, amelyeknek egynél több, de véges számú megoldása van „féldivergens" feladatoknak nevezzük. (Az olyan feladatok, amelyeknek végtelen sok megoldása van divergensek.) Az ilyen típusú feladatokhoz kapcsolódó sajátos gondolkodás a „féldivergens" (divergens) gondolkodás, amely szoros összefüggésben van a tanulók kreativitásával is. E gondolkodás lényege az, hogy a feladat megoldása során minden esetet, minden lehetőséget meg kell vizsgálni. Hogyan lehet ezt elérni, azaz hogyan lehet valamennyi megoldást megtalálni? Erre egységes szabály nincs: Például valamilyen rendezőelv, egy algoritmus, diszkusszió, analógia, általánosítás, másféle megoldási módszer stb. is segíthet. Arra sem találunk általában utalást a feladatok szövegében, hogy több megoldás is van. (Természetesen ez nem hiba!)

A következő feladatsor mindegyik feladata „féldivergens”, melyek megoldása során érdemes odafigyelni a címbeli felszólításra.

Keress meg minden megoldást!

1. Van-e olyan tízes számrendszerbeli háromjegyű szám, amelynek középső jegyét törölve, a belőle így nyert kétjegyű szám az eredetinek kilencede? (6. o.)

2. Egy háromszögről a következőket tudjuk:

— Oldalai hosszúságának mérőszámai egymást követő prímszámok.
— Kerületének mérőszáma 50-nél kisebb prímszám.

Mekkorák a háromszög oldalai? (7. o.)

3. Egy társaságban az angol, német, orosz nyelvek közül mindenki beszél legalább kettőt. Németül 24-en, angolul 26-an, oroszul 22-en tudnak:

a) Hány tagja van a társaságnak?
b) Hányan beszélnek németül és angolul; németül és oroszul; angolul és oroszul? (7—8. o.)

4. Szerkessz deltoidot, ha adott átlóinak és egyik oldalának hossza! (7. o.)

5. Összeadtunk néhány egymás után következő természetes számot, és eredményül 3000-et kaptunk. Mely számokat adtuk össze? (8. o.)

6. Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, amelynek szárai 5 cm-esek és a szárakhoz tartozó magasság 2,5 cm! Mekkorák a háromszög szögei? (8. o.)

7. Egy négyzet alapú egyenes hasáb térfogatának és felszínének mérőszáma egyenlő. Minden él hossza egész szám. Add meg a hasáb adatait! (7. o.)

8. Szerkessz derékszögű háromszöget, ha adott az átfogójának hossza, továbbá tudjuk, hogy egyik szögének felezője úgy vágja ketté a háromszöget, hogy az egyik rész egyenlő szárú háromszög. (7—8. o.)

9. Egy térképvázlaton négy fa helyét jelölő pontok olyan rombuszt határoznak meg, amelynek egyik szöge $37,5°$, oldala pedig 6 cm. Szerkessz kör alakú utat, amely mindegyik fától egyenlő távolságra halad! (8. o.)

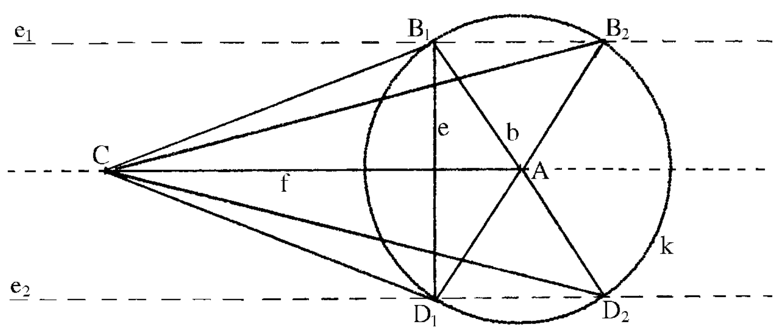
10. Adott egy egyenes és tőle 2 cm-re egy pont. Hol vannak azok a pontok, amelyek az egyenestől 4 cm-nél távolabb vannak, de a ponttól nincsenek messzebb 10 cm-nél? (6—7. o.)

A teljesség igénye nélkül nézzünk meg néhányat a fenti feladatok közül olyan szempontból, hogy a „féldivergens" gondolkodáshoz kapcsolódó hiányosságokat (gondolkodási hibákat) hogyan lehetne a tanulókkal kiküszöböltetni.

(a) Egy geometriai szerkesztési feladatnál a **diszkusszióban** szoktunk a megoldások számával (hány nem egybevágó, az adatoknak és a feltételeknek eleget tevő geometriai alakzat szerkeszthető) foglalkozni, mely általában az utolsó lépés. Ha már az összefüggések keresése és az elemzés közben is a szerkesztési alapelemeket (pl. pont, egyenes, kör) szintézisében (egészében) láttatjuk, és azok kölcsönös helyzetét is vizsgáljuk, akkor nagy valószínűséggel megtalálunk minden megoldást.

A 4. feladatban deltoidot kell szerkeszteni, ha adott az átlóinak (e, f) és egyik oldalának (b) hossza.

Vázlat:



Elemzés, összefüggések keresése:

— A deltoid $B_1(B_2, D_1, D_2)$ csúcsa az A-tól b távolságra van. (Azon tulajdonságú pontok halmaza, amelyek A-tól b távolságra vannak egy A középpontú b sugarú kör.)

— Az f átló egyenese a deltoid B_1 és D_1 (B_2 és D_2) csúcsaira illeszkedő párhuzamos egyenesek (e_1, e_2) középpárhuzamosa.

A fentiek alapján a szerkesztés lépései:
(1) Az $f(AC)$ szimmetriaátló felvétele.
(2) A középpontú b sugarú kör (k) szerkesztése.
(3) e_1 és e_2 szerkesztése.
(4) $k \cap e_1 = B_1$; $k \cap e_2 = D_1$; $k \cap e_1 = B_2$; $k \cap e_2 = D_2$.
(5) B_1 és D_1 összekötése A-val és C-vel. (AB_1CD_1 konvex deltoid)
(6) B_2 és D_2 összekötése A-val és C-vel. (AB_2CD_2 nem konvex deltoid).

Tipikus hibaként fordul elő a tanulók részéről, hogy a (2) és (3) lépést felcserélve (melyet természetesen meg lehet tenni) a körvonalnak csak egy részét (ívét) rajzolják meg, így a körnek az egyenesekkel egy-egy közös pontja lesz. A tanulók figyelme általában a konvex alakzatokra irányul, és így a nem konvex deltoid hiányozni fog a megoldásból.

Arra sem mindig gondolnak, hogy az e is lehet szimmetriaátló, és az előbbi szerkesztési lépéseket követve másik két deltoid is szerkeszthető. (Megjegyezzük, hogy itt most nem térünk ki az egybevágó megoldásokra és a speciális deltoidokra sem.)

Összegezve: a feladatnak 4 megoldása van (4 nem egybevágó deltoid szerkeszthető), és a szerkeszthetőség feltételei: Ha f a szimmetriaátló, akkor $\frac{e}{2} < b$-nek kell teljesülni, ha pedig e a szimmetriaátló, akkor $\frac{f}{2} < b$ kell, hogy igaz legyen.

Természetesen a szerkesztés elvégezhető más összefüggések alkalmazásával is.

Hasonló gondolatmenet követhető a 6., 8., 9. feladatok megoldásakor.

(b) Több olyan feladat van, amelyet „ránézésből” is meg lehet oldani.

Ilyen például az 5. feladat A 999, 1000, 1001 számokat adtuk össze (lehet a tanulók válasza). Ez viszont nem elég! Ahhoz, hogy a feladat minden megoldását megtaláljuk **általánosítanunk** kell a problémát:

$$m + (m+1) + (m+2 + \cdots + (m+k) = 3000.$$

A számtani sorozat összegének kiszámítására vonatkozó képletet alkalmazva a fenti összefüggést így írhatjuk:

$$\frac{m+(m+k)}{2}(k+1) = 3000.$$

Átalakítással az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$(2m+k)(k+1) = 6000.$$

A kéttényezős szorzat egyik tényezője páros, a másik páratlan, és $2m+$ $+k > k+1$.

A 6000 prímtényezős felbontásából ($6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$) a kapott feltételeket figyelembe véve a megoldások egy táblázatba felírhatók.

	$2m+k$	$k+1$	m	k	Az összeadott számok
1.	2000	3	999	2	99, 1000, 1001
2.	1200	5	598	4	$598, 599, \ldots, 602$
3.	400	15	193	14	$193, 194, \ldots, 207$
4.	375	16	180	15	$180, 181, \ldots, 195$
5.	240	25	108	24	$108, 109, \ldots, 132$
6.	125	48	39	47	$39, 40, \ldots, 86$
7.	80	75	3	74	$3, 4, \ldots, 77$

Ha az 1., 3. és 7. feladatok megoldása során a fentihez hasonlóan általánosítunk, akkor biztosan megtalálunk minden megoldást.

(c) Az **algoritmizálás** is segíthet az összes megoldás megtalálásában, és a „féldivergens” gondolkodásmód kialakításában.

A 2. feladatot néhány évvel ezelőtt egy televíziós vetélkedőn résztvevő három tanuló közül egyik sem oldotta jól meg. Megtalálták ugyan a feladat feltételeinek megfelelő három számhármast, de külön-külön mindegyikük egyet-egyet. Célszerű lett volna a következő algoritmus lépései szerint eljárniuk:

(1) Írjuk fel az 50-nél kisebb prímszámokat!

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43

(2) $K = 2 + 3 + 5 = 10$ nem prímszám

(3) $K = 3 + 5 + 7 = 15$ nem prímszám

(4) $K = 5 + 7 + 11 = 23$ prímszám;

$5 + 7 > 11; 7 + 11 > 5; 5 + 11 > 7;$

5, 7, 11 számok lehetnek háromszög oldalainak mérőszámai.

(5) $K = 7 + 11 + 13 = 31$ prímszám;

$7 + 11 > 13$; $11 + 13 > 7$; $7 + 13 > 11$;

7, 11, 13 lehetnek a háromszög oldalainak mérőszámai

(6) $K = 11 + 13 + 17 = 41$ prímszám;

$11 + 13 > 17$; $11 + 17 > 13$; $13 + 17 > 11$;

11, 13, 17 lehetnek a háromszög oldalainak mérőszámai

(7) $K = 13 + 17 + 19 = 49$ nem prímszám;

(8) $K = 17 + 19 + 23 = 59$;

$59 > 50$, minden megoldást megtaláltunk.

A 3. és a 7. feladat egy-egy része megoldható algoritmus alkalmazásával is, mely az általánosításhoz képest más megoldási módszer.

(d) Korábban már szóltunk arról, hogy a több eredményre történő utalást általában a feladatok szövege nem tartalmazza.

Az 1. feladat „van-e olyan" kérdése például mintha egyetlen eredmény felé irányítaná a gondolkodásunkat. Hívjuk fel a tanulók figyelmét az így megfogalmazott feladatoknál, hogyha találnak egy megoldást, akkor is keressenek további — a feltételeknek megfelelő — számokat, mert az összes szám jelenti a feladat teljes megoldását.

A 10. feladathoz hasonló példáknál gyakori hiba, hogy a megoldást csak a sík pontjaira adják meg, és nem gondolnak a térbeli megoldásokra. Ilyen feladatok esetében az **analógia** (sík-tér) segíti a „féldivergens" gondolkodást.

Összefoglalva: A tanulók gondolkodásának hibáit szinte lehetetlen differenciálni, mert amilyen összetett a logikus, matematikai gondolkodás, olyan összetettek a hibák is. A „féldivergens" (divergens) gondolkodást és más gondolkodási módszereket, műveleteket — mint láttuk — nem lehet egymástól elválasztani. Hangsúlyozottabban odafigyelhetünk bizonyos „vírusokra", és ha sikerül némi eredményeket elérni (például a fenti feladatok minden megoldását megtalálják a tehetségesebb tanulóink), akkor elégedettek lehetünk.

Irodalom

[1] Dr. Czeglédy István—Dr. Orosz Gyuláné—Dr. Szalontai Tibor—Szilák Aladárné: Matematika tantárgypedagógia I., Calibra Kiadó, Budapest, 1994.

[2] Újvári I.: Matematikai gondolkodást fejlesztő feladatsorok, Pest Megyei Pedagógiai Intézet, Budapest, 1990.

[3] Matematika 7—8. (Feladatgyűjtemény), Szerkesztette: Hajdu Sándor, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

Szilák Aladárné
Eszterházy Károly Teachers' Training College
Department of Mathematics
Leányka u. 4.
3301 Eger, Pf. 43.
Hungary