MENNYI A TÉGLALAP TERÜLETE?

BESSENYEI MIHÁLY ÉS MAKSA GYULA

KIVONAT. Cikkünkben megmutatjuk, hogy a téglalap területképlete levezethető néhány ésszerű feltevésből. Megközelítésünkben a Cauchy-féle függvényegyenlet játszik kulcsszerepet, melynek matematikai és történeti vonatkozásaira szintén kitérünk röviden.

1. BEVEZETÉS

A területfogalom kialakítása már az általános iskolában elkezdődik. Bevezetésként a téglalapot szokás vizsgálni, részben „egyszerűsége” miatt, részben, mert számos alakzat területképlete ebből származtatható. Így mindenki számára magától értetődő tény, hogy a téglalap területe a két merőleges oldal hosszának szorzata. Ám a kérdés valójában nem az, hogy *mennyi* a téglalap területe, hanem hogy *miért* pont ennyi. Az intuíció ugyanis még a területképlet megismerése előtt sugalmaz bizonyos evidenciákat. Elvárjuk, hogy a terület csak az oldalak hosszától függő nemnegatív érték legyen; elvárjuk, hogy ha egy téglalapot bármelyik párhuzamos oldalpárja mentén azonos mértékben és irányban meghosszabítva újabb téglalappá egészítünk, akkor a két rész területének összege egyezzen meg az összterülettel; végezetül elvárjuk, hogy az egységnégyzet területe egységnyi legyen. Mindezeket szabatosan a következő megállapodásokban rögzíthetjük. (A továbbiakban $\mathbb{R}$ a valós, $\mathbb{R}_+$ a nemnegatív valós, $\mathbb{Q}$ a racionális, $\mathbb{Q}_+$ a nemnegatív racionális számok halmazát jelöli.)

1. Megállapodás. A terület egy $T\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ függvény.

2. Megállapodás. Ha $a; a_1, a_2$ valamint $b; b_1, b_2$ adott nemnegatív számok, akkor

$$T(a_1 + a_2, b) = T(a_1, b) + T(a_2, b) \quad \text{és} \quad T(a, b_1 + b_2) = T(a, b_1) + T(a, b_2).$$

3. Megállapodás. $T(1, 1) = 1$.

Ezekre a továbbiakban rendre *nemnegativitási*, *additivitási* és *normáltsági feltétel*ként fogunk hivatkozni. Elsőként azt igazoljuk, hogy e három geometriai tartalmú megállapodás egy és csakis egy algebrai formulát eredményezhet: az általános iskolában megismert területképletet.

2. ENNYI A TÉGLALAP TERÜLETE!

Tegyük fel, hogy az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz zárt az összeadásra, azaz bármely két elemével együtt azok összegét is tartalmazza. Azt mondjuk, hogy az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény *additív*, ha minden $x, y \in A$ esetén teljesül rá az úgynevezett *Cauchy-féle függvényegyenlet*:

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Date: 2021. augusztus 19..

A cikk a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj és az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Az egyenlet általános megoldásának leírása nem könnyű feladat. Nyilván az identitás számszorosa, vagyis egy $f(x) = cx$ alakú függvény mindig additív. Sőt, az $A = \mathbb{R}_+$ speciális választás és a nemnegativitási feltétel mellett valamennyi additív függvény csakis ilyen alakú lehet:

Tétel. *Ha* $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *additív függvény, akkor minden* $x \in \mathbb{R}_+$ *esetén* $f(x) = f(1)x$.

Bizonyítás. Elsőként megmutatjuk, hogy f racionálisan homogén, azaz minden $r \in \mathbb{Q}_+$ és minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén $f(rx) = rf(x)$ teljesül. Az (1) egyenletben az $x = y$ helyettesítést alkalmazva kapjuk, hogy $f(2x) = 2f(x)$. Innen teljes indukcióval igazolható, hogy $f(nx) = nf(x)$ teljesül minden n pozitív egész esetén. Legyen most $r = m/n$ alakban adott, ahol m és n pozitív egészek. Az előbbi tulajdonságot kétszer felhasználva,

$$f(rx) = f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n}\cdot nf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x) = rf(x).$$

Másodszor azt igazoljuk, hogy f monoton növekvő. Legyenek $x \le y$ nemnegatív számok. Ekkor $y - x$ is nemnegatív, így az f additivitása és a nemnegativitása miatt

$$f(y) = f((y-x)+x) = f(y-x) + f(x) \ge f(x).$$

A harmadik és egyben utolsó lépésben megmutatjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén az $f(x)$ és az $f(1)x$ értékek eltérése akármilyen pozitív számnál kisebb. Ez ugyanis pontosan azt jelenti, hogy az eltérés nulla, azaz $f(x) = f(1)x$. Jelölje $[x]$ az x valós szám (alsó) egészrészét. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén $[nx] \le nx < [nx] + 1$, ezért

$$r_n := \frac{[nx]}{n} \le x < \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} = r_n + \frac{1}{n}.$$

Azonban f racionálisan homogén és monoton növő, ezért ebből az egyenlőtlenségláncból következik, hogy

$$r_n f(1) = f(r_n) \le f(x) \le f\left(r_n + \frac{1}{n}\right) = \left(r_n + \frac{1}{n}\right) f(1).$$

Ha még fölhasználjuk az $x - \frac{1}{n} \le r_n \le x$ egyenlőtlenséget, akkor itt $f(1) \ge 0$ miatt a bal oldal alsó, míg a jobb oldal felső becsléssel folytatható:

$$\left(x - \frac{1}{n}\right) f(1) \le f(x) \le \left(x + \frac{1}{n}\right) f(1).$$

Tehát

$$|f(x) - f(1)x| \le \frac{f(1)}{n}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén, és éppen ezt akartuk belátni. □

Rögzített nemnegatív b szám mellett az $a \mapsto T(a,b)$ függvény nemnegatív és additív az első két megállapodás értelmében, így a fenti tétel miatt $T(1,b)a$ alakú. Hasonlóan, a $b \mapsto T(1,b)$ függvény szükségképpen $T(1,1)b$ alakú. Vagyis megállapodásaink *egyértelműen meghatározzák* a téglalap területképletét:

$$T(a,b) = T(1,b)a = T(1,1)ab = ab.$$

A területfogalom megalapozásának most bemutatott útja Legendre munkásságára eredeztethető [5]. Megállapodásai lényegében a mieinkhez hasonlóak, egyetlen apró eltéréssel: nincs feltételezve a terület nemnegativitása. Rövidesen látni fogjuk, hogy e feltétel hiányában az előző tétel érvényét veszti.

3. Kitekintés: a Cauchy-féle függvényegyenlet

Mint említettük, az identitás konstansszorosa, vagyis egy cx alakú függvény additív a valós egyenesen. Az ilyen típusú megoldásokat *reguláris megoldás*nak nevezzük. Mit állíthatunk a nem reguláris additív valós függvényekről? A továbbiakban erre a kérdésre keresünk választ a koordinátageometria segítségével.

A Descartes-féle sík, azaz $\mathbb{R}^2$ rendezett számpárjait hol pontoknak, hol vektoroknak fogjuk tekinteni. Ez ugyanis sohasem okoz majd félreértést, viszont adott esetben biztosítja a választás kényelmét. A szokásos módon két ilyen vektor összege a komponensek összegéből képzett vektor, egy vektor számszorosa pedig az eredeti komponensek számszorosából álló vektor. Egy vektor *normá*ja alatt a Pithagorasz-tétel szerint számított euklideszi hosszát értjük:

$$\|v\| := \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \text{ahol} \qquad v=(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Az így bevezetett norma *pozitív definit*, *abszolút homogén* és *szubadditív*. Azaz, minden $v,w\in\mathbb{R}^2$ és minden $\lambda\in\mathbb{R}$ esetén

- $\|v\|\geq 0$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v a nullvektor;
- $\|\lambda v\| = |\lambda|\cdot\|v\|$;
- $\|v+w\|\leq\|v\|+\|w\|$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a norma segítségével a p középpontú, $\varepsilon>0$ sugarú nyílt körlap a következő módon adható meg:

$$U(p,\varepsilon) := \{v\in\mathbb{R}^2 \,:\, \|v-p\|<\varepsilon\}.$$

Az $U(p,\varepsilon)$ körlemezt szokás a p pont ε sugarú környezeteként is említeni. Az $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény *gráf*ja alatt az $\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\}$ halmazt értjük. Világos, hogy reguláris additív valós függvény gráfja egy origón áthaladó egyenes. Teljesen másként viselkednek a nem reguláris additív függvények:

Tétel. *Ha $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nem reguláris additív függvény, akkor gráfja mindenütt sűrű a Descartes-féle síkon. Azaz, a sík minden pontjának minden környezete tartalmaz gráfpontot.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nem reguláris, azaz nem cx alakú. Ekkor léteznek olyan $x_1\neq x_2$ valós számok, hogy az $(x_1,f(x_1))$ és az $(x_2,f(x_2))$ pontok két különböző origón átmenő egyenest határoznak meg. Másképpen fogalmazva, a

$$v_1=(x_1,f(x_1)) \quad \text{és} \quad v_2=(x_2,f(x_2))$$

vektorok egy nem elfajuló paralelogrammát feszítenek ki a Descartes-féle síkon. Legyen most a $p\in\mathbb{R}^2$ pont és az $\varepsilon>0$ sugár tetszőlegesen adott. Azt kell megmutatnunk, hogy az $U(p,\varepsilon)$ nyílt körlemez tartalmaz f gráfjáról valamilyen q pontot. Mivel a v_1 és v_2 vektorok nem párhuzamosak, ezért a sík minden pontja előállítható a segítségükkel. Azaz, léteznek olyan α_1 és α_2 valós számok, hogy

$$p=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2.$$

Válasszunk olyan r_1 és r_2 racionális számokat, amelyek elég közel vannak az α_1 és α_2 együtthatókhoz az alábbi értelemben:

$$|\alpha_1-r_1|<\frac{\varepsilon}{\|v_1\|+\|v_2\|}; \qquad |\alpha_2-r_2|<\frac{\varepsilon}{\|v_1\|+\|v_2\|}.$$

Ilyen r_1 és r_2 racionális szám létezését az előző tétel bizonyításának harmadik lépésében használt módszer biztosítja. Tekintsük a $q = r_1v_1 + r_2v_2$ pontot! A norma abszolút homogenitása és szubadditivitása, valamint r_1 és r_2 választása miatt

$$\begin{aligned}\|p-q\| &= \|(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2)-(r_1v_1+r_2v_2)\| = \|(\alpha_1-r_1)v_1+(\alpha_2-r_2)v_2\| \\ &\le \|(\alpha_1-r_1)v_1\|+\|(\alpha_2-r_2)v_2\| = |\alpha_1-r_1|\cdot\|v_1\|+|\alpha_2-r_2|\cdot\|v_2\| \\ &< \frac{\varepsilon}{\|v_1\|+\|v_2\|}\cdot\|v_1\|+\frac{\varepsilon}{\|v_1\|+\|v_2\|}\cdot\|v_2\| = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ez azt mutatja, hogy $q \in U(p,\varepsilon)$. Másrészt, az előző tétel bizonyításában látottak alapján megmutatható, hogy f racionálisan homogén. Ezt és f additivitását szem előtt tartva,

$$\begin{aligned}q = r_1v_1+r_2v_2 &= (r_1x_1+r_2x_2, r_1f(x_1)+r_2f(x_2)) \\ &= (r_1x_1+r_2x_2, f(r_1x_1)+f(r_2x_2)) \\ &= (r_1x_1+r_2x_2, f(r_1x_1+r_2x_2)).\end{aligned}$$

Ha tehát $x = r_1x_1 + r_2x_2$, akkor $q = (x, f(x))$ alakú. Vagyis, q egy megfelelő gráfpont a $U(p,\varepsilon)$ nyílt körlemezben. □

Továbbra is kérdés persze, hogy egyáltalán létezik-e nem reguláris additív valós függvény. Gondoljuk csak el, mi a szemléletes tartalma ennek a tételnek: egy mindenütt sűrű függvénygráfot az egész síkot kitöltő szürke ködhöz lehet leginkább hasonlítani. Nem véletlenül akarták sokáig makacsul azt igazolni, hogy minden additív $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reguláris. Ez a törekvés csak akkor bizonyult sikeresnek, ha valamilyen többletfeltételt szabtak a keresett függvényre. A teljesség igénye nélkül megemlítjük, hogy az (1) egyenletet elsőként a névadó Cauchy tanulmányozta és oldotta meg a folytonosság feltételezése mellett [2]. Darboux vette észre, hogy a nemnegativitási feltétel szintén reguláris megoldásokra vezet [3].

A probléma végső megoldása sokáig váratott magára. A fordulatokban gazdag történeti és matematikai részletekkel kapcsolatban ajánljuk Aczél könyvét [1]. Most csupán arra utalunk, hogy végül Hilbert tanítványa, Hamel oldotta meg a Cauchy-egyenletet miden egyéb segédfeltétel nélkül. Mindenki legnagyobb meglepetésére eredményéből kiderült, hogy a megoldások között *léteznek* nem reguláris megoldások. Egy ilyen megoldás birtokában lehetőségünk nyílna a téglalap területének másfajta mérésére is. Kérdés persze, hogy mire megyünk egy olyan területmértékkel, amely lehet negatív, és ráadásul egy mindenütt sűrű függvénygráffal áll kapcsolatban...

HIVATKOZÁSOK

[1] Aczél J.: *Lectures on functional equations and their applications*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 19, Academic Press, New York-London, 1966.

[2] Cauchy, A. L.: *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnic, Analyse algébrique*, V., Oeuvres (2)3, Paris, 1897.

[3] Darboux, G.: *Sur le théorème fundamental de la géométrie projective*, Math. Ann. **17**, (1880), 55–61.

[4] Hamel, G.: *Eine Basis aller Zahlen und die unstetige Lösungen der Funktionalgleichung* $f(x+y) = f(x)+f(y)$, Math. Ann. **60**, (1905), 459-462.

[5] Legendre, A. M.: *Eléments de géométrie*, Note II. Paris, 1791.

DEBRECENI EGYETEM, MATEMATIKAI INTÉZET H-4010 DEBRECEN, PF. 12

E-mail address: besse@science.unideb.hu

E-mail address: b9wgla@unideb.hu