

Bevezetés

A kvantummechanika megszületése óta ismert, hogy a klasszikus fizikában megszokottaktól eltérően a mikrovilág fizikai mennyiségei nem valós értékű függvényekkel, hanem egy absztrakt $\mathcal{H}$ lineáris (állapot)térén ható önadjungált operátorokkal azonosítandók. Egy adott fizikai mennyiségre vonatkozó mérési eljárás során minden mért érték a szóban forgó operátor spektrumából kerül ki. Azt, hogy utóbbi minden esetben a valós számoknak egy részhalmaza, a szóban forgó operátor önadjungált jellege garantálja.

A fizikai mennyiségekhez tartozó önadjungált operátorok megtalálása az ún. kanonikus kommutációs relációkon (CCR) nyugszik. Eszerint egy kvantumposztrészecske x_i helyéhez és p_i ($i = 1, 2, 3$) impulzusához tartozó $\hat{x}_i$ és $\hat{p}_i$ operátorokra fennállnak az alábbi felcserélési relációk:

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij}, \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

ahol $\hbar = h/2\pi$ (h a Planck-állandó). A kvantumelmélet vonatkozásában Neumann János egyik legfontosabb felismerése az volt, hogy akármilyen $\hat{x}_i$ és $\hat{p}_i$ operátorokat is találunk a fenti csererelációk kielégítése végett, az biztosan (unitér) ekvivalens az ún. schrödingeri ábrázolással [1]. Ebben a $\mathcal{H}$ állapottér a négyzetesen integrálható függvények $\mathcal{L}_2$ tere, $\hat{x}_i$ a részecske helyével, mint valós számmal való szorzással ($\hat{x}_i = x_i \cdot$), $\hat{p}_i$ pedig a helyváltozó szerinti gradiensképzés műveletével azonosítandó ($\hat{p}_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$).

Az előbbi, az irodalomban Stone-von Neumann-tétel néven ismertté vált állítás tetszőlegesen sok, de véges szabadsági fokú rendszer esetén működik, azonban mezőelméletekben érvényét veszti. Példának okáért egy $\hat{\Phi}(x)$ valós skalármezővel dolgozva, a lagrange-i dinamika szerint a $\hat{\Phi}(x)$ -hez kanonikusan konjugált $\hat{\Pi}(x)$ impulzussal vett kommutátorra a fenti, (1) általánosításaként előálló

$$\begin{aligned} [\hat{\Phi}(x), \hat{\Pi}(y)] &= i\hbar\delta(x-y), \\ [\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)] &= 0, \quad [\hat{\Pi}(x), \hat{\Pi}(y)] = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

felcserélési relációknak végtelen sok inekvivalens ábrázolása létezik. Végtelen sok szabadsági fokkal rendelkező fizikai rendszerek esetén ezen a felismerésen alapszik az ún. szuperszelekciós szektorok megjelenésének lehetősége.

Szuperszelekció

A $\mathcal{H}$ állapottér szuperszelekciós szektorai olyan $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{H}$ altereket jelentenek, melyek között semmilyen, fizikai mennyiségnek megfeleltethető operátornak nincs nem-elűnő mátrixeleme. Matematikailag azt mondhatjuk, hogy $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ szuperszelekciós szektorok, ha tetszőleges $|\psi_1\rangle \in \mathcal{S}_1$, $|\psi_2\rangle \in \mathcal{S}_2$ állapotokra bármilyen megfigyelhető mennyiséghez tartozó $\hat{O}$ operátor esetén $\langle\psi_1|\hat{O}|\psi_2\rangle = 0$. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy értelmetlen dolog két különböző szuperszelekciós szektorhoz tartozó állapot kvantumposzuperpozíciójáról beszélni, hiszen akármilyen fizikai mennyiség „kvantumposz” átlagértéke egy ilyen állapotban mindig a „klasszikus” átlaggal egyezik meg a keresztagok elűnése miatt.

Egy végtelen sok szabadsági fokot tartalmazó rendszer esetén szuperszelekciós szektorok létrejötte fizikailag nagyon is természetes. Gondoljunk például egy folytonos szimmetriát mutató (ferro)mágneses soktestrendszerre, melyben spontán szimmetriasértés során a spinnek mindegyike egy adott irányba áll be. Erre, mint vákuumállapotra gerjesztett (spin hullám) állapotok sokasága tud ráépülni, de a nettó mágnesezettség mindegyikben azonos. A rendszernek természetesen nem az előbbi az egyetlen alapállapota, hiszen a mágnesezettség iránya bármerre beállhat, így ezen esetek mindegyikéhez külön tartozik egy-egy vákuumállapot. Két különböző alapállapotra épülő gerjesztett állapotok között viszont akármilyen $\hat{O}$ fizikai mennyiség mátrixeleme szükségszerűen el kell, hogy tűnjön, hiszen definíció szerint a mágnesezettség átlaga a két állapotban eltér, és egy végtelen nagy rendszerben a dinamika konkrét formájától függetlenül végtelenül kicsi kell legyen a valószínűsége annak, hogy kvantumposz vagy termális fluktuációk hatására az összes spin kollektíve úgy forogjon el, hogy a nettó mágnesezettség megváltozzék. A fentiek szerint ez pontosan azt jelenti, hogy szuperszelekciós osztályok alakulnak ki, és így az állapottér direkt összeg jellegű, $\mathcal{H} = \oplus_i \mathcal{H}_i$, ahol $\mathcal{H}_i$ a nettó mágnesezettség lehetséges irányaihoz tartozó Hilbert-tereket jelenti. (Mivel a mágnesezettség iránya folytonos változó, $\mathcal{H}$ valójában egy megfelelően definiált direkt integrál alakban áll elő, $\mathcal{H} = \int d\mu(\lambda) \mathcal{H}(\lambda)$, ahol λ a megengedett mágnesezettség irányaira utal.) A fentiekhez hasonlóan szuperszelekciós szektorok jöhetnek létre megmaradó mennyiségek vonatkozásában is, pl. nem feltétlenül van „átjárás” különböző elektromos (vagy bármely más megmaradó) töltésű állapotok között. R. Haag volt az, aki felismerte azt, hogy a fenti direkt összeg (integrál) jellegű állapottér létrejötte mögött az egyes szektorokban ábrázolódó kanonikus kommutációs relációk inekvivalenciája van [2].

* gergely.fejos@ttk.elte.hu

Gyakran elhangzik, hogy a Stone-von Neumann-tétel miatt szuperszelekció a kvantummechanikában nem képzelhető el, mivel a CCR unitér ekvivalencia erejéig egyértelműen rögzíti a Hilbert-teret, és így direkt összeg jellegű állapottér véges szabadsági fok esetén nem valósulhat meg. Jelen ismeretterjesztő írás célja az, hogy rámutasson a H. Reeh által 1988-ban kidolgozott [3, 4], a mai napig kevésbé ismert tényre, hogy az ún. Aharonov-Bohm effektus során a Stone-von Neumann-tétel sérülni tud, és a CCR két, egymással inekvivalens módon is ábrázolható.

Az Aharonov-Bohm effektus

Az Aharonov-Bohm effektus egy kvantummechanikai jelenség [5], mely azt demonstrálja, hogy töltött részecskék hullámfüggvénye az elektromágneses mezők helyett a potenciálokra érzékeny. Ez azért meglepő, mert a klasszikus elektrodinamikában az elektromágneses potenciálok nemfizikai objektumként kezelendők (a mértékszimmétrie miatt nem is egyértelműek), és csak maguk az elektromos- és mágneses mezők bírnak relevanciával. Az Aharonov és Bohm neve által viselt jelenség szerint azonban a kvantumelmélet vonatkozásában a potenciálok válnak alapvető mennyiséggé.

Ennek vázlatos magyarázata a következő. Ha az elektromágneses mezőt klasszikus objektumként kezeljük (vagyis a kvantumelektrodinamika jelenségeitől eltekintünk), egy q töltésű részecske hullámfüggvényének fázisa eltűnő $\vec{E}$ és $\vec{B}$ mező, de nemnulla $\vec{A}$ vektorpotenciál mellett (ekkor nyilván $\text{rot } \vec{A} = 0$)

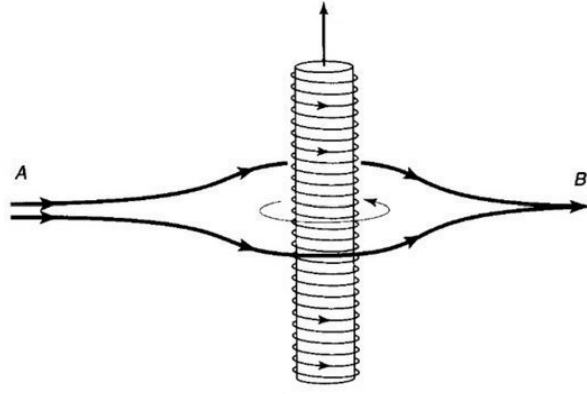
$$\varphi = \frac{q}{\hbar} \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{x} \quad (3)$$

eltolódást szenved el, ahol Γ a részecske által bejárt út. Mivel egy zárt görbe által kijelölt felületre vonatkozó mágneses fluxus

$$\Phi_B = \oint \vec{A} \cdot d\vec{x}, \quad (4)$$

ezért ha egy-egy azonosan preparált identikus részecske két különböző úton jut el pl. A pontból B pontba (ld. az 1. ábrát), akkor az utak uniója, mint zárt görbe által kijelölt mágneses fluxussal arányos fáziskülönbség jelenik meg a hullámfüggvényekben. Kísérleti úton az ezen fázistolásokhoz tartozó interferencia valóban kimutatható. Az elmélet szerint tehát a részecskék a potenciálokra „érzik”, nem pedig közvetlenül az $\vec{E}$ - vagy $\vec{B}$ -mezőket, hiszen utóbbiak a részecskék által bejárt utak mentén végig nulla értékűek voltak. A fenti feltételek legegyszerűbb megvalósítása egy, a z -tengely mentén futó végtelenül vékony szolenoid esete, melynek belsejéből a mágneses mező nem szóródik ki, de maga körül nemeltűnő vektorpotenciált hoz létre. Az így létrejött, effektíve két dimenziós rendszerben előbbi az

$$A_x = -\frac{\Phi_B}{2\pi r^2} y, \quad A_y = \frac{\Phi_B}{2\pi r^2} x. \quad (5)$$



1. ábra. Ha két azonos részecske különböző úton jut el az A pontból a B pontba, hullámfüggvényeik fáziskülönbsége a bezárt mágneses fluxussal lesz arányos. A fáziskülönbség interferenciakísérletekkel kimutatható.

vektormező írja le, ahol r a szolenoidtól mért távolság, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Hogyan kapcsolódik a jelenséghez a kanonikus kommutációs relációk inekvivalens ábrázolása? Idézzük fel, hogy egy, elektromágneses mezőben mozgó q töltésű részecske helyéhez a Lagrange-formalizmus szerint kanonikusan konjugált impulzus

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{p} + q\vec{A}(\vec{x}), \quad (6)$$

ahol $\vec{p}$ az elektromágneses mező nélkül használatos lendület. Ez azt jelenti, hogy (az elektromágneses mezőt továbbra is klasszikus objektumként kezelve) az impulzus kvantummechanikai operátorára heurisztikusan megpróbálhatjuk előírni, hogy

$$\hat{\mathcal{P}}_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} + qA_i(\vec{x}), \quad (7)$$

miközben a hely operátora továbbra is fenntartjuk a

$$\hat{x}_i = x_i. \quad (8)$$

műveletet. Ezek az operátorok ugyanúgy kielégítik a kanonikus kommutációs relációkat, mintha $\vec{A} = 0$ lenne,

$$[\hat{x}_i, \hat{\mathcal{P}}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{\mathcal{P}}_i, \hat{\mathcal{P}}_j] = 0, \quad (9)$$

ahol az utolsó felcserélési törvénynél feltételeztük, hogy a mágneses mező nulla, $\text{rot } \vec{A} = 0$. Utóbbi természetesen a fenti példákat tekintve minden pontban érvényes (az origót kivéve). A Stone-von Neumann-tétel szerint viszont ekkor a (7) választás unitér ekvivalens kellene, hogy legyen az eredeti, $\hat{p}_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$ előírással, vagyis léteznie kellene egy $\hat{\mathcal{U}}$ unitér operátornak úgy, hogy

$$\hat{\mathcal{U}}^\dagger \hat{p}_i \hat{\mathcal{U}} = \hat{\mathcal{P}}_i. \quad (10)$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ilyen $\hat{\mathcal{U}}$ unitér operátor nem létezik.

Az unitér ekvivalencia sérülése

Első, naiv benyomásunk az lehet, hogy a Stone-von Neumann-tétel egyáltalán nem sérül. Tekintsük először az x irányú impulzus esetét! Mivel $\partial_x \arctan(x/y) = y/(x^2 + y^2)$, ezért ha

$$\hat{U} = \exp[-iq\Phi_B \arctan(x/y)/2\pi\hbar], \quad (11)$$

akkor rögtön az alábbi operátor egyenlőséghez jutunk:

$$\hat{U}^\dagger \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \hat{U} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{q\Phi_B}{2\pi r^2} y \equiv \hat{P}_x, \quad (12)$$

ami éppen (10) x komponensét adja. A probléma az, hogy viszont ha ezek után az y irányú impulzust vizsgáljuk, akkor bár a fentiekhez hasonló,

$$\hat{U}'^\dagger \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} \hat{U}' = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{q\Phi_B}{2\pi r^2} x \equiv \hat{P}_y \quad (13)$$

összefüggés vezethető le, ezesetben az áttérést leíró operátor

$$\hat{U}' = \exp[iq\Phi_B \arctan(y/x)/2\pi\hbar] \neq \hat{U}. \quad (14)$$

Felhasználva az

$$\arctan(s) + \arctan(1/s) = \epsilon(s)\pi/2 \quad (15)$$

azonosságot [itt $\epsilon(s)$ az előjelfüggvény], azt kapjuk, hogy

$$\hat{U}' = \hat{U} \exp \left[i\epsilon(x)\epsilon(y) \frac{q\Phi_B}{4\hbar} \right], \quad (16)$$

ami azt jelenti, hogy bár az x és y irányokra $\mathcal{P}_x$ és $\mathcal{P}_y$ külön-külön ekvivalensek a(z egydimenziós) Schrödinger-ábrázolással, együtt viszont általában nem! A két irányra vonatkozó áttérő függvény között egy helytől függő(!) fázisfaktor eltérés van, vagyis nincsen egy közös unitér operáció, ami átforgatná a (7) ábrázolást a hagyományos schrödingeri alakba. Paradox módon a Stone-von Neumann-tétel sérülni látszik.

A paradoxon feloldása

A paradoxon feloldásához tekintsük át a tételt és az ahhoz kapcsolódó legfontosabb állításokat. Az alábbiakban mindezt mindennemű matematikai precizitást nélkülözve tesszük meg, pusztán ismeretterjesztő szinten tárgyaljuk a releváns állításokat.

A legfontosabb tudnivaló, hogy Neumann János valójában nem a CCR algebra ábrázolására tett állításokat. Ennek oka az, hogy mivel egy részecske helye és impulzusa nem szorulhat véges értékek közé, azokat nemkorlátos operátorokkal kell leírni, melyek számos matematikai nehézséget okoznak általános állítások bebizonyíthatóságát illetően. Neumann János ezeket elkerülve az impulzus és a hely operátorai által generált Lie-csoport nyelvében felírható CCR-t ábrázolta. Amennyiben az impulzus és a hely is önadjungált operátorok, akkor Stone tétele miatt odavissza egyértelmű összefüggés

áll fenn az operátorok, és az általuk generált egyparaméteres (unitér) Lie-csoportok között. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy egy szabadsági fokot tartalmazó rendszert, az impulzus és hely operátorait jelölje továbbra is rendre $\hat{p}$ és $\hat{x}$, illetve legyenek a és b valós paraméterek. Ekkor az exponencializált operátorokra (a csoportelemekre) az exponenciális függvény definíciója szerint

$$\begin{aligned} \exp(ia\hat{x}) \exp(ia'\hat{x}) &= \exp(i(a+a')\hat{x}), \\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}b\hat{p}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}b'\hat{p}\right) &= \exp\left(\frac{i}{\hbar}(b+b')\hat{p}\right), \end{aligned} \quad (17)$$

illetve a Baker–Campbell–Hausdorff formula és a CCR felhasználásával formálisan levezethető, hogy

$$\exp(ia\hat{x}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}b\hat{p}\right) = \exp(-iab) \exp\left(\frac{i}{\hbar}b\hat{p}\right) \exp(ia\hat{x}), \quad (18)$$

amit a kanonikus kommutációs relációk Weyl-alakjának nevezünk. Bevezetve az $\hat{U}(a) = \exp(ia\hat{x})$ és a $\hat{V}(b) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}b\hat{p}\right)$ jelöléseket, (17) és (18) az alábbiak szerint írható:

$$\begin{aligned} \hat{U}(a)\hat{U}(a') &= \hat{U}(a+a'), \quad \hat{V}(b)\hat{V}(b') = \hat{V}(b+b'), \\ \hat{U}(a)\hat{V}(b) &= \exp(-iab)\hat{V}(b)\hat{U}(a), \end{aligned} \quad (19)$$

és értelemszerűen

$$\begin{aligned} \hat{U}^{-1}(a) &= \hat{U}(-a), \quad \hat{V}^{-1}(b) = \hat{V}(-b), \\ \hat{U}(0) &= \hat{V}(0) = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

A (19) és (20) relációk által definiált kétparaméteres nemábeli, nemkompakt Lie-csoportot W_1 Weyl-csoportnak hívjuk. A fentiek általánosításaként előálló, $1 < N < \infty$ dinamikai változót tartalmazó rendszer esetén generálódó Lie-csoport jele W_N , és emlékezzünk rá, hogy ezen esetekhez tartozó Lie-algebráknak része a különböző hely- és a különböző impulzus operátorok felcserélhetősége is, így ezek exponencializálás után is fenn kell, hogy álljanak. Ez azt jelenti, hogy $N > 1$ -re az utóbbi relációk szintén a csoport definíció részét képezik. Neumann János azt látta be, hogy unitér ekvivalencia erejéig bármelyik W_N csoportnak csak egyetlen ábrázolása létezik. A generátorokra vonatkozóan ez felel meg a szokásos schrödingeri reprezentációnak.

A kérdés az, hogy a fenti példánk esetén miért nem találjuk érvényesnek a tételt. A feloldás abban áll, hogy rendszerünkben a hely és impulzus operátorok bár hermitikusak (azaz tudják a szimmetritási tulajdonságot), de egyik sem önadjungált! Önadjungáltak csak olyan hermitikus operátorokat nevezünk, melyek esetén az adjungált operátor értelmezési tartománya megegyezik az eredetivel. A kettő azért nem triviálisan azonos, mert nemkorlátos operátorokat a zártgráf-tétel miatt nem lehet a teljes Hilbert-téren értelmezni, és így semmi sem garantálja azt, hogy az adjungált operátor értelmezési tartománya megegyezik az eredeti operátoréval. (Az olvasó ehhez kapcsolódó érdekes paradoxonokat találhat

egy korábbi Fizikai Szemle cikkben [7].) Ahhoz viszont, hogy a Stone-von Neumann-tételt alkalmazni lehessen, szükséges feltétel a hely és impulzus operátorok önadjungált jellege azért, hogy őket exponencializálni lehessen tetszőleges (valós) transzformációs paraméterekre, és így a Weyl-csoport le tudjon belőlük generálódni. Esetünkben ehhez $\hat{\tilde{P}}$ -nek és $\hat{\tilde{x}}$ -nek is az önadjungált kiterjesztésével kell dolgozni, de ekkor az exponencializált impulzus operátorok felcserélhetősége sérül (ld. lejjebb), a tétel pedig így nem alkalmazható. Vizsgáljuk meg kicsit részletesebben az emögött rejlő matematikát!

A vektorpotenciál szingularitása miatt az Aharonov-Bohm elrendezésben az állapotteret az origóban nem definiált négyzetesen integrálható függvények feszítik ki, $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \equiv \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$, melynek (a fentiek szerint) legjobb esetben is csak egy mindenütt sűrű részalmazán lehet mind $\hat{\tilde{P}}$ -t, mind $\hat{\tilde{x}}$ -et definiálni. Ha nem lenne az origóban futó szolenoid, akkor ez a halmaz szokásosan a tetszőlegesen sokszor differenciálható függvények $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ tere lehetne. Figyelembe kell vennünk azonban a vektorpotenciál szingularitását, de így ha a tetszőlegesen sokszor differenciálható, viszont az $\{\mathbb{R}^2 \setminus 0\}$ -n kompakt tartójú függvények $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$ terét tekintjük, akkor továbbra is az állapottér egy mindenütt sűrű halmazát kapjuk. Így a $\hat{\tilde{P}}$ és $\hat{\tilde{x}}$ operátorok értelmezési tartományaira a $D(\hat{\tilde{P}}) \equiv D(\hat{\tilde{x}}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$ választással élhetünk. Ebből rögtön következik, hogy az impulzus $\hat{\tilde{P}}^\dagger$ adjungált operátorának értelmezési tartománya bővebb $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$ -nél, hiszen előbbiben az origóban nemeltűnő függvények is benne lehetnek. Eszerint viszont $\hat{\tilde{P}}$ csupán hermitikus, de valóban nem önadjungált. A $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$ halmazon értelmezett $\hat{\tilde{P}}$ és $\hat{\tilde{x}}$ operátorok továbbra is teljesítik a CCR-t, illetve az is belátható, hogy a $\hat{\tilde{P}}_x \pm i$ és $\hat{\tilde{P}}_y \pm i$ operátorok értékkészlete sűrű halmaz $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ -ben, melyből szintén Neumann János defektindexekről szóló tétele értelmében mind $\hat{\tilde{P}}_x$, mind $\hat{\tilde{P}}_y$ *alapvetően* önadjungált, vagyis az operátorok lezárása önadjungált és egyértelmű. (Ezen a ponton megjegyezzük, hogy egy $\hat{A}$ lineáris operátort lezárhatónak nevezünk, ha létezik olyan $\tilde{A}$ operátor, melynek grafikonja az $\hat{A}$ operátor grafikonjának, mint halmaznak a lezárása. Ekkor az $\tilde{A}$ operátor $\hat{A}$ lezárása. Belátható, hogy minden hermitikus operátor lezárható.)

A lezárt impulzusoperátorok, $(\tilde{\hat{P}}_x, \tilde{\hat{P}}_y)$, mivel önadjungáltak, már exponencializálhatók. Ekkor (12) és (13) a következőképpen írható át:

$$\begin{aligned} \exp\left(i\frac{b}{\hbar}\tilde{\hat{P}}_x\right) &= \exp[iq\Phi_B \arctan(x/y)/2\pi\hbar] \\ &\quad \exp[-iq\Phi_B \arctan((x+b)/y)/2\pi\hbar] \\ &\quad \exp\left(i\frac{b}{\hbar}\hat{P}_x\right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \exp\left(i\frac{b'}{\hbar}\tilde{\hat{P}}_y\right) &= \exp[-iq\Phi_B \arctan(y/x)/2\pi\hbar] \\ &\quad \exp[iq\Phi_B \arctan((y+b')/x)/2\pi\hbar] \\ &\quad \exp\left(i\frac{b'}{\hbar}\hat{P}_y\right). \end{aligned} \quad (22)$$

A korábbiakhoz hasonlóan bevezetve a

$$\hat{V}_x(b) = \exp\left(i\frac{b}{\hbar}\tilde{\hat{P}}_x\right), \quad \hat{V}_y(b) = \exp\left(i\frac{b}{\hbar}\tilde{\hat{P}}_y\right) \quad (23)$$

jelöléseket, (21) és (22) felhasználásával, rövid számolás után arra a meglehetősen egyszerű eredményre jutunk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{V}_x(b)\tilde{V}_y(b')\tilde{V}_x^{-1}(b)\tilde{V}_y^{-1}(b') &= \\ \exp\{i(q\Phi_B/4\hbar)[\epsilon(x) - \epsilon(x+b)][\epsilon(y) - \epsilon(y+b')]\}, \end{aligned} \quad (24)$$

amiből az következik, hogy a lezárt, és így már valóban önadjungált impulzusoperátorok exponencializálás után általában nem cserélnek fel! Mivel a szögletes zárójelek szorzatának lehetséges értékei a hely függvényében $\{0, \pm 4\}$, ezért azt kapjuk, hogy a két szabadsági fokhoz tartozó W_2 Weyl-algebra teljes egészében csak akkor generálódik le, ha

$$q\Phi_B/(2\pi\hbar) = \text{egész szám}. \quad (25)$$

Ebben az esetben a Stone-von Neumann-tétel alkalmazható, és az unitér ekvivalencia helyreáll. Ha azonban a szolenoidban futó fluxus olyan, melyre (25) nem teljesül, akkor a $\hat{\tilde{P}}$ operátorok nem forgathatóak át a Schrödinger-ábrázolásba. Ilyen esetekben a tétel nem érvényes, és ekkor már semmi sem tiltja azt, hogy a CCR-nek több inekvivalens ábrázolása is létezzen, ahogy azt feljebb expliciten is láttuk.

Záró megjegyzések

A Stone-von Neumann-tétel szerint véges szabadsági fokú kvantumozott rendszerekben a kanonikus kommutációs relációk ábrázolása egyértelmű abban az értelemben, hogy minden reprezentáció unitér ekvivalencia erejéig megegyezik a Schrödinger-ábrázolással. Utóbbiban a hely operátora a hullámfüggvény megfelelő argumentumával való szorzás műveletével, az impulzus komponensei pedig (a konstansoktól eltekintve) az előbbieket szerinti parciális differenciálásokkal azonosítandók. A tétel alkalmazhatóságának egy feltétele, hogy a rendszer összes impulzus és hely operátora legenerálja a Weyl-csoportot. Ehhez elegendő az előbbi operátorok önadjungált jellegének feltételezése, ami a legtöbb fizikai rendszerben valóban plauzibilis, ám a H. Reeh által kidolgozott példán keresztül rámutattunk arra, hogy az értelmezési tartományokhoz kapcsolódó problémák miatt létezhet olyan fizikai rendszer, melyben az impulzus- és hely operátorok az állapottér egy részalmazán, mint megfelelő értelmezési tartományon bár kielégítik a kanonikus kommutációs relációkat, de

nem önadjungáltak. Így bár létezhet (unikális) önadjungált kiterjesztésük, azokat felexponencializálva már nem adják vissza a teljes CCR algebrát, ami pedig alkalmazhatatlanná teszi a Stone-von Neumann-tételt. Azt a meghökkentő, egyáltalán nem intuitív megfigyelést, hogy létezhetnek olyan *alapvetően* önadjungált operátorok, melyek az értelmezési tartományukon felcserélnek, de unikális önadjungált kiterjesztésük formájában felexponencializálva már nem, a funkcionálanalízisben E. Nelson már az 1950-es években jelezte, és a matematikai szakirodalom Nelson-jelenségként hivatkozza. A jelen cikkben tárgyalt példa azért nagyon impozáns, mert egy jól ismert fizikai rendszeren keresztül mutat rá

nagyon természetes módon arra, hogy a Nelson-jelenség van a kanonikus kommutációs relációk inekvivalens ábrázolásainak lehetősége hátterében. H. Reeh munkája valószínűsíthetően azért lett kevésbé ismert, mert már jóval előtte napvilágot látott az, hogy végtelen szabadsági fokot tartalmazó rendszerekben a CCR-nek végtelen sok inekvivalens ábrázolása létezik, így az egyszerűbb, véges szabadsági fokú rendszerek esete kevésbé tudott az érdeklődés középpontjába kerülni. Ez azonban nem csorbítja a kvantumoz rendszerek fizikája mögött megbúvó funkcionálanalízis egy újabb trükkös megnyilvánulásának szépségét.

-
- [1] J. von Neumann, Math. Ann. **104**, 570 (1931).
 - [2] R. Haag, Danske Mat.-Fys. Medd., **29**: 12 (1955).
 - [3] H. Reeh, J. of Math. Phys. **29**, 1535 (1988).
 - [4] R. N. Sen, arXiv:1002.0547.
 - [5] Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. **115** (3), 485 (1959).

- [6] E. Nelson, Ann. Math. **70**, 572 (1959).
- [7] Fejős G., „Absztrakt vektorfogalom és kvantummechanika”, Fizikai Szemle, 2021. január.