A funkcionális renormálási csoport és alkalmazásai kvantumos soktestrendszerekben

Habilitációs dolgozat

Fejős Gergely

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Fizikai Intézet, Atomfizikai tanszék

2022

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A fizika számos ágában megfogalmazható alapvető kérdés, hogy sok apró mikroszkopikus összetevőből álló rendszerek milyen kollektív, makroszkopikus viselkedést képesek mutatni. A soktestelmélet, mely a kvantummechanika sokrészecskés általánosítása, számos idevonatkozó jelenség magyarázatának alapjául szolgál. Központi szerepet játszik statisztikus– és szilárdtestfizikai fázisátalakulások megértésétől kezdve, az elemi részek fizikáján át egészen akár a kvantumgravitáció lehetséges leírásáig. A matematikai keretrendszert, melyet a soktestelmélet használ, kvantummezőelméletnek hívjuk. A kvantummezőelmélet elemi objektumai a d dimenziós tér egyes pontjaihoz rendelt dinamikai változók (tipikusan skalárok, vektorok, tenzorok), melyek a szóban forgó fizikai rendszer lehetséges kvantumállapotainak lineáris terén ható lokális operátorokként képzelendőek el. A változók és a Lagrange–formalizmusban hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusok a kvantummechanikából ismert Heisenberg–féle felcserélési relációknak tesznek eleget. Kvantummezőelméletek alkalmazásai során általában abból indulunk ki, hogy a szóban forgó fizikai rendszer mikroszkopikus törvényei ismertek, és ezek ismeretében próbálunk a rendszer makroszkopikus viselkedéséről számot adni. Matematikailag azt mondjuk, hogy ismertnek tekintjük a rendszerhez tartozó klasszikus hatásfunkcionált (S), amiből különböző módszerek segítségével próbáljuk meghatározni annak kvantum effektív változatát (Γ), mely az elméletből kinyerhető összes korrelációs függvényt, és így információt is tartalmazza. Az előbbi korrelációs függvények segítségével a rendszert jellemző számos fizikai mennyiségre tudunk jóslatokat tenni. Ismeretükben mondhatjuk meg pl. fázisátalakulások kritikus hőmérsékletét és exponenseit, az elemi részek fizikájában többek között szórási amplitudókat és a gerjesztési (vagy részecske) spektrumot, vagy akár szilárdtest rendszerek vezetőképességét és polarizálhatóságát is. Megjegyezzük, hogy a kvantummezőelmélet nem csak és kizárólag soktestrendszerek matematikai keretét adja; kissé más értelemben, de kvantummezőelméletnek tekinthető az összes húrelmélet, és azok kiterjesztései is. Utóbbiakról ebben a dolgozatban nem lesz szó.

A kvantummezőelméletek megoldása, vagyis az effektív hatás, illetve a belőle számunkra érdekes korrelátorok kiszámítása igen komplikált feladat. Általános megoldási módszer nem létezik, a régmúltban a legnagyobb sikert a perturbációszámítás segítségével lehetett elérni. A technika annyira sikeresnek bizonyult, hogy a kvantumelektrodinamikából (quantum electrodynamics – QED), mint kvantummezőelméletből az elektron anomális mágneses momentumára adott perturbatív eredmény a fizika történetének legpontosabb jóslatát szolgáltatta, az elméleti és a kísérleti eredmények egymással több, mint 10 tizedesjegy pontossággal azonosnak adódtak. A perturbációszámítás működése azon az egyszerű feltételezésen alapszik, hogy a szóban forgó elméletben szereplő kölcsönhatásokat jellemző paraméterek kicsik (pl. QED-ben az elektron töltése), így a szabad elmélet ismert (lényegében triviális) megoldása körül a Feynman–féle diagramtechnikán alapuló perturbációs sorokat lehet felépíteni. Bár matematikailag belátható, hogy az így generált sorok konvergenciasugara nulla, megfelelő rendekig azok konvergálni látszanak, így alkalmasak számos fizikai mennyiség közelítő kiszámítására. Borel–féle újraösszegzési technikákkal az eljárás tovább is javítható. Az igazi probléma akkor lép fel, ha nincsenek az elméletben olyan paraméterek, melyek szerinti perturbatív sorok egyáltalán látszólagos konvergenciát mutatni lennének képesek. Ilyenkor a perturbációszámítás teljesen csődöt mond, és új matematikai eljárás(ok)ra van szükség.

A dolgozatban egy ilyen matematikai metódust mutatok be, számos különböző soktestrendszerre alkalmazva. A javasolt technika a funkcionális renormálási csoport (functional renormalization group – FRG) nevet viseli, mely a renormálási csoport, mint matematikai eszköz egy továbbfejlesztett változata, és mely a ma ismert formájában először az 1990-es években jelent meg az irodalomban [1, 2]. Korábbra visszatekintve lényeges megjegyezni, hogy a fizika a 20. század második felében végbement fejlődése szempontjából a renormálási csoport az egyik legjelentősebb felfedezésnek tekintendő, mely alapjaiban változtatta meg a kvantummezők és a rájuk épülő kölcsönhatások megértését [3]. Segítségével vagyunk képesek leírni és megérteni, hogy egy fizikai rendszer jellemzői hogyan változnak attól függően, hogy milyen méretskálán tekintünk rá.

A renormálási csoportnak rengeteg változata létezik, de történetileg két variáns különösen fontos szerepet töltött be a skálaváltozáshoz kapcsolódó jelenségek megértését illetően. Az első a Gell-Mann–Low, vagy ismertebb nevén a térelméleti renormálási csoport, mely túlnyomó részben az elemi részek fizikájában használatos. Ez a technika mutatott rá elsőként arra, hogy egy adott, karakterisztikus E energiaskálán végbemenő folyamat valószínűségi amplitudójának perturbatív kifejtésében megjelenő, az energia logaritmusával skálázó járulékok, melyek nagy E esetén tönkreteszik a perturbációs sort, az ún. futó csatolás bevezetésével, illetve a renormálási skála megfelelő választásával felösszegezhetők, így a perturbációszámítás nem szükségszerűen divergens. A másik változat, mely Wilson nevéhez kötődik, pedig azt mutatta meg, hogy móduseliminációval hogyan lehet infravörös divergenciáktól mentesen leírni egy önhasonló statisztikus fizikai rendszer viselkedését a kritikus pontban. A két alkalmazás és a szóban forgó matematikai megfogalmazások bár távolinak tűnnek, valójában ugyanazt a fizikai ötletet valósítják meg. Az olvasó az összefüggések pedagogikus leírását kaphatja a [4] cikkben.

A renormálási csoport kialakulásának felidézésekor érdemes tudni, hogy annak alapötlete valójában a méltatlanul kevés elismerést kapott Stückelberg és Petermann (1953) nevéhez fűződik [5], akik már Gell-Mann és Low (1954) [6] előtt letették a módszer alapköveit. Ma ismert formáját Callan és Symanzik (1970) [7, 8] hozzájárulásai nyomán érte el, és Collins által ezidőtájt (1975) nyert megértést a renormálási csoport egyenlet és az anomális skálainvariancia Ward-azonossága közötti kapcsolat is [9]. Wilson (1971) [10, 11, 12] Kadanoff munkájára (1966) [13] építkezve dolgozta ki a saját változatát, melyről kiderült, hogy az eredeti megfogalmazásnál általánosabb, és annál jóval intuitívabb is. Ezen eredmények ismeretében jutott elsőként a korai funkcionális renormálási csoporthoz Polchinski [15], majd később Wetterich [1] és Morris [2] egymástól függetlenül vezették le a ma is széles körben használt, az effektív hatás skálafüggését leíró egyenletét, melyet a szakirodalom Wetterich–egyenletként ismer.

A dolgozat részecskefizikai alkalmazásokkal, és statisztikus–, illetve szilárdtestfizikai rendszerekkel foglalkozik, és az elmúlt években elért legfontosabb eredményeimet tartalmazza. Az első fejezetben az FRG módszert mutatom be, melynek középpontjában a skálafüggő effektív hatás renormálási csoport futását leíró Wetterich–egyenlet áll. A második fejezetben az FRG–t a nulla kvarktömegű, három kvarkízt tartalmazó kvantumszíndinamika királis fázisátmenete rendjének meghatározására használom, majd a harmadik fejezetben szintén az erős kölcsönhatással foglalkozom, az axiális anomália termális viselkedését tárgyalom a fizikai pontban. A negyedik fejezetben a konvencionális szupravezetők átalakulásának rendjét tárgyalom, melyet N–komponensszámra is kiterjesztek, külön gondot fordítva az FRG formalizmus és a mértékszimmetria kapcsolatára. Az ötödik fejezetben a sűrű kvarkanyag által mutatott szín–szupravezető fázisátalakulásához kapcsolódó eredményeket talál az olvasó.

1. fejezet

A funkcionális renormálási csoport

1.1. A skálafüggő effektív hatás

Kvantummezőelméletek megoldása során legfőbb feladatunk a kvantumos– és (ha véges hőmérsékletű rendszerünk van) termális fluktuációk kiszámítása a különböző n–pont korrelációs függvények tekintetében. A dolgozatban teljes egészében euklideszi elméletekkel foglalkozunk, és úgy tekintjük, hogy a Minkowski térben megfogalmazott modellek minden esetben Wick–forgatással átvihetők euklideszi térbe. Ezzel lefedjük az elemi részek fizikájában használatos kontinuum elméletektől, a kompakt euklideszi időben érvényes termális térelméleteken át a dimenziós redukció után adódó Ginzburg–Landau jellegű effektív modelleket is. A tárgyalást az egyszerűség kedvéért egy Φ, valós mezők kollekciójaként előálló többkomponensű mennyiségen keresztül mutatjuk be, de előbbi egyszerűen általánosítható komplex mezőkre és fermionokra is. Ezekről a fejezet végén szólunk.

A feladatunk tehát a

$$\langle 0|\, \Phi(x_1)\Phi(x_2)...\Phi(x_n)\, |0\rangle \tag{1.1}$$

n–pont korrelációs függvények meghatározása, ahol Φ a szóban forgó elméletben szereplő (valós) kvantummezők összességére utal (indexek kiírása nélkül), x_i $(i = 1, ...n)$ pedig a d dimenziós euklideszi tér egy adott pontja. Az (1.1)-ban definiált átlagok helyett érdemesebb az összefüggő, és külső lábakkal csonkított korrelátorokkal dolgozni, melyeket valódi vertexeknek hívunk [16]. A $\Gamma^{(n)}$ n–pont valódi vertexeket az kvantum effektív hatásból (Γ)

származtatjuk [16],

$$\Gamma[\Phi] = \int_{\{x\}} \sum_n \frac{1}{n!}\Gamma^{(n)}(x_1, x_2, ...x_n)\Phi(x_1)\Phi(x_2)...\Phi(x_n). \tag{1.2}$$

Itt Γ definíció szerint egy J forrástól függő $\mathcal{Z}$ partíciós függvény negatív logaritmusának Legendre transzformáltja,

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\tilde{\Phi} \exp\Big(- S[\tilde{\Phi}] - \int_x J(x)\tilde{\Phi}(x)\Big), \tag{1.3a}$$

$$\Gamma[\Phi] = -\log \mathcal{Z}[J] - \int_x J(x)\Phi(x), \tag{1.3b}$$

ahol $\Phi(x) = -\delta \log \mathcal{Z}[J]/\delta J(x)$, a J külső forrás konjugált változója, az átlagtér, $S[\Phi]$ pedig az elmélethez tartozó klasszikus, vagy másnéven mikroszkopikus hatás. Utóbbi elnevezés onnan eredeztethető, hogy ha $\mathcal{Z}$ definíciójából kihagynánk az összes térkonfigurációra való funkcionális integrálást, vagyis a rendszerben jelenlévő fluktuációkról teljesen elfelejtkeznénk, akkor Γ –ra éppen S–et kapnánk. Egy ilyen esetben azonban egy olyan Γ hatáshoz jutunk, ami annyira óriási nagyításban írja le a fizikai rendszerünkent, melyben semmilyen makroszkopikus fluktuáció nem megfigyelhető. Ilyen értelemben az S funkcionál a (fluktuációmentes) mikroszkopikus hatás.

A funkcionális renormálási csoport alapjául szolgáló wilsoni renormálás alapgondolata az, hogy a $\mathcal{Z}[J]$-ben megjelenő fluktuációkat szukcesszíve, alacsony hullámhosszaktól a magasak felé haladva veszi figyelembe, megfelelő differenciálegyenlet(ek) felállításával. Eredetileg ennek fő motivációja az volt, hogy ha egy statisztikus térelméletben a fluktuációk kiszámítása végett perturbációszámítást építenénk fel S valamely kicsiny paramétere(i) szerint, a kritikus pontban infravörös (nagy hullámhosszú fluktuációkból eredő) divergenciákat kapnánk (ha $d \leq 4$). A fenti ötlet szerint azonban a hullámszámok között fokozatosan lépdelve az utóbbi probléma biztosan elkerülhető, hiszen a leghosszabb hullámhosszú módusokat sosem érintjük. Két közbenső skála közötti kiintegrálás műveletét nevezzük renormálási csoport transzformációnak. Az eredeti gondolatmenet szerint $\mathcal{Z}$ $(J = 0)$ minden lépés után előáll egy redukált funkcionálintegrál alakjában,

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\tilde{\Phi}^{(k)}_{<} \exp\Big(- S_k[\tilde{\Phi}]\Big), \tag{1.4}$$

ahol a funkcionális integrációs mértékben, és a hatásfunkcionálban is felbukkanó k skálaparaméter (cutoff) azt a közbenső hullámszámot jelzi, amelyen túli módusokat már figyelembe vettük (tehát csak az ennél kisebbekre van integrálás). Wilson az S_k–ban szereplő csatolási állandók k–függésére állított fel differenciálegyenleteket, melyek $k \to 0$ megoldásával vizsgálta $\mathcal{Z}$ tulajdonságait. Ezzel komplementer, de teljesen ekvivalens megfogalmazás, hogy S helyett $\mathcal{Z}$–nek adunk k–függést, ahol definíció szerint

$$\mathcal{Z}_k = \int \mathcal{D}\tilde{\Phi}_{>}^{(k)} \exp\Big(- S[\tilde{\Phi}]\Big). \tag{1.5}$$

Utóbbi abban az értelemben komplementer (1.4) –hez képest, hogy itt a k–nál nagyobb módusokra integrálunk, és ezesetben $\mathcal{Z}_k$ –ra állíthatunk fel differenciálegyenletet. Mind az (1.4), mind az (1.5) megfogalmzazás esetében úgy gondolkozunk, hogy valamilyen, a rendszerre jellemző mikroszkopikus Λ skálától $k = 0$ –ig összeadjuk az összes módus járulékát, ezzel végeredményben a teljes $\mathcal{Z}$ állapotösszeget állítjuk elő. Egy statisztikus fizikai rendszerben tipikusan $\Lambda \sim 1/a$, ahol a rendszert jellemző mikroszkopikus összetevők távolsága (rácsállandó), míg egy kontinuum sok változót tartalmazó térelméletben értelemszerűen $\Lambda = \infty$.

Az (1.5) egyenlet megfogalmazása azért érdekesebb, mert az eredeti gondolatmenet általánosítására ad lehetőséget. Vegyük észre, hogy (1.5) szerint $\mathcal{Z}_k$ –ban szigorúan csak olyan módusokra integrálunk, melyek hullámszáma nagyobb, mint k. Lehetőségünk van azonban $\mathcal{Z}_k$–t általánosabban is definiálni, melyben az infravörös fluktuációk nem egzaktul vannak kilőve, hanem folytonosan csökkentjük le a hatásukat nullára (a rövidebb hullámhosszak felől közelítve). Ekkor az a karakterisztikus hullámszám, ami szétválasztja a fluktuációkat abból a szempontból, hogy bekerülnek-e effektíve a funkcionálintegrálba, válik a k változóvá. Ezt a konstrukciót egy R_k, ún. regulátor függvényen keresztül érjük el, melynek segítségével a skálafüggő állapotösszeg általánosított definíciója

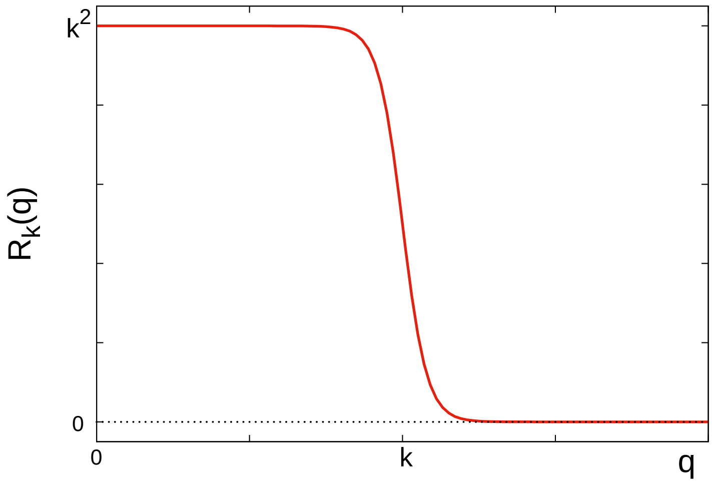
$$\mathcal{Z}_k = \int \mathcal{D}\tilde{\Phi} \exp\Big(- S[\tilde{\Phi}] - \frac{1}{2}\int\int \tilde{\Phi} R_k \tilde{\Phi}\Big). \tag{1.6}$$

Az S klasszikus hatás mellé bevezetett reguláló tagot érthetjük direkt, vagy Fourier–térben is:

$$\frac{1}{2}\int\int \tilde{\Phi} R_k \tilde{\Phi} \;\equiv\; \frac{1}{2}\int_x\int_y \tilde{\Phi}(\vec{x}) R_k(\vec{x},\vec{y}) \tilde{\Phi}(\vec{y}) \equiv \frac{1}{2}\int_p\int_q \tilde{\Phi}(\vec{p}) R_k(-\vec{p},\vec{q}) \tilde{\Phi}(-\vec{q}), \tag{1.7}$$

ahol R_k –t érdemes funkcionális értelemben diagonálisnak választani,

$$R_k(\vec{p},\vec{q}) = R_k(\vec{q})(2\pi)^d \delta(\vec{p}+\vec{q}), \tag{1.8}$$



1.1. ábra. Egy tipikus regulátorfüggvény alakja, mely az alacsony hullámszámú módusokat befagyasztja, a magasakhoz pedig nem járul hozzá.

és a fentieknek megfelelve az $R_k(\vec{q})$ mátrixtól azt követeljük meg, hogy az infravörös módusok „tömegét” naggyá tegye, befagyasztva ezáltal a fluktuációikat. Eszerint az $R_k(\vec{q})$ mátrix összes diagonális eleme $|\vec{q}|^2 \gg k^2$ esetén kicsi, míg $|\vec{q}|^2 \ll k^2$ esetén nagy kell, hogy legyen, a közbenső értékekre pedig valamilyen módon interpolálnak, ld. az 1.1 ábrát. Vegyük észre, hogy (1.6)–ben minden módusra integrálunk, és valójában az R_k regulátor hatása következtében lesznek az infravörös fluktuációk fokozatosan kisebb súlyúak a funkcionálintegrálban. Az eredeti wilsoni változatnak, ld. (1.5), értelemszerűen az

$$R_k^W(\vec{q}) = \lim_{M^2\to\infty} M^2\Theta(k^2 - \vec{q}^2)\cdot \mathbb{1} \tag{1.9}$$

élesen levágó regulátor felel meg, ahol az $M^2 \to \infty$ feltétel a k–nál alacsonyabb hullámszámú fluktuációkat egzaktul eliminálja. Ez azonban csak egy speciális választás, és érdemes lehet a regulátor függvény specifikációja nélkül felállítani skálafutást leíró differenciálegyenleteket.

Kényelmi okokból valójában nem $\mathcal{Z}_k$–val, hanem a neki megfelelő effektív hatással érdemes dolgozni, mely definíció szerint

$$\Gamma_k[\Phi] = -\log \mathcal{Z}_k[J] - \int J\Phi - \frac{1}{2}\int\int \Phi R_k \Phi, \tag{1.10}$$

ahol ismét $\Phi = -\delta \log \mathcal{Z}_k[J]/\delta J$, a jobb oldal utolsó tagját pedig kényelmi szempontból vontuk le. Az alábbiakban megadjuk a skálafüggő effektív hatás, a Γ_k k–függését leíró differenciálegyenletet.

1.2. A Wetterich–egyenlet

A Wetterich–egyenlet levezetéséhez érdemes felexponencializálni (1.10) mindkét oldalát, majd differenciálni k szerint. Alkalmazva (1.6)–ből $\mathcal{Z}_k$ definícióját, majd kihasználva, hogy az összefüggő kétpont függvény a második valódi vertex inverze, Γ_k–ra a következő renormálási csoport egyenletet kapjuk:

$$\partial_k \Gamma_k[\Phi] = \frac{1}{2} \int\!\!\int \mathrm{Tr}\left[(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}[\Phi]\partial_k R_k\right], \tag{1.11}$$

melyet Wetterich–egyenletnek is hívunk [1]. Itt $\Gamma_k^{(2)}$ a Γ_k függvény második funkcionális deriváltja Φ háttéren, és (1.11) jobb oldalán szereplő integrál ismét értékelmezhető direkt– vagy Fourier–térben is. Az R_k mátrix tulajdonságaiból következően $\Gamma_\Lambda = S$, ahol S a klasszikus (mikroszkopikus) hatás, melyben definíció szerint semmilyen fluktuáció nincsen figyelembe véve. Praktikusan, (1.11) megoldása során a $k = \Lambda$ ultraibolya skáláról, S–ből kiindulva leintegrálunk $k \to 0$–ra, hogy megkapjuk a teljes effektív hatást, $\Gamma_{k=0} \equiv \Gamma$–t. Vegyük észre, hogy (1.11) az alábbi alakba is írható:

$$\partial_k \Gamma_k[\Phi] = \frac{1}{2} \tilde{\partial}_k\, \mathcal{TR}\, \mathrm{Log}\,(\Gamma_k^{(2)} + R_k)[\Phi], \tag{1.12}$$

ahol a logaritmus függvény és a $\mathcal{TR}$ operáció is funkcionális és mátrix értelemben is értendő, $\tilde{\partial}_k$ pedig egy olyan differenciáloperátor, mely csak az R_k–ban szereplő k–függésre hat. Az (1.12) felírás azért érdekes, mert ismeretes, hogy a „trace log” művelet adott inverz propagátor körüli kifejtés esetén 1–hurok diagramokat generál le. Elsőre nem egyértelmű, hogy a Wetterich–egyenlet hogyan lehet egzakt, ha belőle minden renormálási csoport futás egyhurok diagramokból kikeverhető. A feloldás abban áll, hogy bárhogyan is fejtjük ki a regulált $\Gamma_{k,R}^{(2)} \equiv \Gamma_k^{(2)} + R_k$ kétpont függvényt, benne teljesen felöltözött vertexek és hullámfüggvény renormálási faktor is van, melyek hordozni fogják azokat a járulékokat, melyek a szokvány perturbatív kifejtésben magasabb hurokszámnál jelennek csak meg. Ha bevezetünk egy alkalmasan választott $\Gamma_{k,R}^{(2)0}$, regulált, Φ független (pl. szimmetrikus fázisbeli), de felöltözött propagátort, akkor egy érdektelen konstans faktortól eltekintve

(1.12) -ből a

$$\begin{aligned}\partial_k\Gamma_k[\Phi] \;=\; & \frac{1}{2}\tilde{\partial}_k\,\mathrm{Tr}\Big\{\int_{p_1}\int_{p_2}\Big(\Gamma^{(2)0}_{k,R}\Big)^{-1}(p_1,p_2)P(-p_2,-p_1)\\ & -\frac{1}{2}\int_{p_1}\int_{p_2}\int_{p_3}\int_{p_4}\Big(\Gamma^{(2)0}_{k,R}\Big)^{-1}(p_1,p_2)P(-p_2,p_3)\Big(\Gamma^{(2)0}_{k,R}\Big)^{-1}(-p_3,p_4)P(-p_4,-p_1)\\ & +\frac{1}{4}\int_{p_1}\int_{p_2}\int_{p_3}\int_{p_4}\int_{p_5}\int_{p_6}\Big(\Gamma^{(2)0}_{k,R}\Big)^{-1}(p_1,p_2)P(-p_2,p_3)...P(-p_6,-p_1)+...\Big\}\end{aligned} \tag{1.13}$$

összefüggést kapjuk, ahol a funkcionális tracet Fourier–térben értékeltük ki. A P függvény az összes Φ térfüggést is tartalmazó egzakt $\Gamma^{(2)}_{k,R}$, és a kifejtéshez használt, általában nemperturbatív $\Gamma^{(2)0}_{k,R}$ kétpont függvény különbségét jelenti. Könnyen látszik, hogy (1.13) valóban egyhurok gráfokat generál, melyek $(\Gamma^{(2)0}_{k,R})^{-1}$ propagátorokból, és a P–ben található vertexekből épülnek fel. Érdemes ismét felhívni a figyelmet arra, hogy az így generált kifejtés nem azonos a szokvány perturbációszámítással. Természetesen ha a hullámfüggvény renormálási faktortól eltekintünk ($Z_k \equiv 1$), és pl. perturbatív propagátorral közelítjük $(\Gamma^{(2)0}_{k,R})^{-1}$–t, akkor visszakapjuk a szokásos perturbatív egyhurok futásokat. Fontos látni azonban, hogy (1.13) ennél lényegesen általánosabb közelítések alkalmazását is lehetővé tevő egzakt összefüggés.

1.3. Lokális potenciál közelítés

Gyakran alkalmazott az ún. lokális potenciál közelítés (local potential approximation – LPA), melyben a

$$\Gamma_k[\Phi] = \int_x \left[\frac{Z_k}{2}\Phi(-\Delta)\Phi + V_k(\Phi)\right] \tag{1.14}$$

feltevéssel élünk. Ennek akkor van főleg értelme, ha a Γ funkcionális deriváltjaiként előálló valódi vertexeket nulla impulzus mellett szeretnénk kiértékelni. Az irodalomban általában az LPA elnevezés csak $Z_k \equiv 1$ mellett használatos, ha $Z_k \neq 1$, akkor LPA' közelítésről szokás beszélni. Mi ebben a dolgozatban nem teszünk elnevezésbeli különbséget a két eset között, és csak LPA–ként hivatkozunk rájuk. Az (1.14) közelítő alakot az (1.11)–es Wetterich–egyenletbe beírva, homogén Φ hátteret feltételezve V_k futására kapjuk, hogy

$$\partial_k V_k[\Phi] = \frac{1}{2}\int_q \mathrm{Tr}\Big[(Z_k q^2 + V^{(2)}_k + R_k(q))^{-1}[\Phi]\partial_k R_k(q)\Big], \tag{1.15}$$

ahol $V_k^{(2)}$ a V_k függvény második derivált mátrixa, és kihasználtuk, hogy a regulátor mátrix funkcionális értelemben diagonális, ld. (1.8)–at. Itt fontos megjegyezni, hogy nyilvánvaló módon Z_k futásának meghatározásához nem lehet homogén háttéren dolgozni, hiszen ekkor a kinetikus tag azonnal kinullázódik. A dolgozat későbbi szakaszaiban, ahol szükségünk lesz hullámfüggvény renormálások futására, a konkrét problémákhoz igazítva adjuk meg azok skálafüggéseit.

Egy egyszerű példának okáért, egykomponensű $\Phi \equiv \phi$ mező esetén, $Z_k \equiv 1$ feltevéssel a V_k effektív poteciált Taylor–sor alakban elképzelve,

$$V_k(\phi) = m_k^2\phi^2/2 + \lambda_k\phi^4/4! + u_k\phi^6 + w_k\phi^8 + ..., \tag{1.16}$$

(1.11) segítségével a k–függést leíró renormálási csoport egyenleteket vezethetünk le a m_k^2, λ_k, u_k, w_k,... együtthatókra. Ehhez (1.11) mindkét oldalát ϕ szerint haladó sor alakban írjuk fel, majd azonosítjuk a bal és jobb oldalakon az egyes Taylor–együtthatókat. A V_k második deriváltjára kapjuk, hogy

$$V_k^{(2)}(\phi) = m_k^2 + \lambda_k\phi^2/2 + 30u_k\phi^4 + 56w_k\phi^6 + ..., \tag{1.17}$$

amit behelyettesítve (1.11)–be, a regulátor függvény megválasztása után megkaphatjuk a csatolások (nulla impulzusú n–pont vertexek) skálafutását. A wilsoni regulátort használva, ld. (1.9), (1.11)–ből a Taylor–együtthatók futására, vagyis a rájuk vonatkozó renormálási csoport transzformációkra kapjuk, hogy ($\Omega_d = 2/[(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)]$ a szögintegrálból következik)

$$k\partial_k m_k^2 = -\Omega_d\frac{\lambda_k}{2}\frac{k^d}{k^2+m_k^2}, \quad k\partial_k\lambda_k = \Omega_d\frac{3\lambda_k^2}{2}\frac{k^d}{(k^2+m_k^2)^2}, \tag{1.18}$$

ahol a magasabb rendű tagok járulékait elhagytuk, illetve a $\sim \phi^6$ és azon túli Taylor–együtthatók futását nem írtuk le. Ahogy vártuk, az (1.18) egyenletek reprodukálják Wilson eredeti, 1–hurok számításból kapott eredményeit. Ezek értelmezésébe itt nem megyünk bele, az olvasó részletesen megtalálja a fenti futások alkalmazásait pl. a [17] könyvben.

A későbbiekben többször elő fog kerülni a β függvények fogalma. Ezek definíció szerint a csatolások k által dimenziótlanított változatainak logaritmikus deriváltjai. Előbbieket a továbbiakban minden esetben egy felső vonal jelzi, pl. $\bar{m}_k^2 = m_k^2/k^2$, és így az idevonatkozó β függvény $\beta_{m^2} = k\partial_k\bar{m}_k^2$.

Érdemes tudni, hogy a csatolások futásai általában regulátorfüggőek, azonban ha $m_k^2 = 0$, akkor lokális potenciál közelítést alkalmazva, bármilyen szimmetriájú elmélet esetén $d = 2$ –ben a tömeg(ek), $d = 4$ –ben a negyedfokú csatolás(ok), általában pedig $d = n$ esetén az n–edfokú csatolás(ok) futása univerzális.

1.4. Optimalizált renormálási csoport futások

Mielőtt a Wetterich–egyenletet különböző problémákra alkalmaznánk, meg kell jegyeznünk, hogy a wilsoni regulátor használata [ld. (1.9)] általában nem vezet optimális közelítésekhez. A futási egyenlet optimalizációját elsőként Litim vetette fel [18, 19], aki LPA jellegű közelítésekre vonatkozóan állított fel optimalizációs kritériumot és vizsgálta annak következményeit. Az alábbiakban ezen eredményeket tekintjük röviden át.

Az LPA közelítésben érvényes futási egyenletet (1.15) mutatja. Tételezzük fel, hogy az $R_k(q)$ regulátor az egységmátrixszal arányos, azaz minden módust ugyanaz a függvény regulálja. A jobb oldal struktúrájából látható, hogy a futási egyenlet szingulárissá válhat, amennyiben a $V_k^{(2)}$ valamelyik sajátértéke, és az ún. gap függvény, $C(q) = Z_k q^2 + R_k(q)$ összege valamely q –ra eltűnik. Tipikus példa lehet egy szimmetriasértő potenciál, melyben bizonyos Φ pontokban $V_k^{(2)}$ valamely komponense annyira negatívvá válik, hogy az kompenzálja a gap függvényt, így a (1.15) jobb oldala szingulárissá válik. Ilyen esetben a Wetterich–egyenlet jobb oldalát nem lehet integrálni, vagyis az effektív potenciálra vonatkozó renormálási csoport futás értelmezhetetlen. Kézenfekvő optimalizációs kritériumnak bizonyulhat tehát egy olyan $R_k(q)$ függvény választása, melyre ilyen szingularitások a q szerinti integráláskor minél kisebb Φ tartományon jelenjenek meg. Matematikailag azt lehet mondani, hogy keressük meg a $C(q)$ függvény q szerinti minimumát, majd azt próbáljuk meg $R_k(q)$ szerint maximalizálni. Ezzel elérjük azt, hogy $V_k^{(2)}$ esetlegesen negatív sajátértékei a lehető legkevésbe tudják kompenzálni a gap függvényt, vagyis a futási egyenlet minél kevésbe legyen képes elveszíteni matematikai értelmét. Könnyen belátható, hogy $\min_q C(q)/Z_k \le k^2$, vagyis a minimum helyre előírható optimális érték $C_{\mathrm{opt}} = Z_k k^2$. Bármilyen $R_k(q)$ függvényt, melyre a gap minimuma felveszi a C_{opt} értéket, optimális regulátornak nevezhetünk. Litim azt mondta, hogy miért ne válasszuk meg $R_k(q)$ –t úgy, hogy a $C(q)$ gap függvény ne is függjön q–tól, viszont vegye fel mindenütt a C_{opt} értéket.

Ebből arra jutunk, hogy $R_k(q) = Z_k(k^2 - q^2)$, ami természetesen fizikailag helytelen, hiszen a regulátornak nagy impulzusokra nullához kell tartania. Ezt azonban könnyen megoldhatjuk úgy, ha az egészet megszorozzuk $\Theta(k^2 - q^2)$ -tel. Így egy optimális regulátor a következő választás:

$$R_k^L(q) = Z_k(k^2 - q^2)\Theta(k^2 - q^2), \tag{1.19}$$

melyet Litim–regulátornak is hívunk. A dolgozat egy jelentős részében ezzel a regulátorral fogunk dolgozni. Meggondolható, hogy a gap függvény valójában az (1.15) egyenlet megfelelően definiált amplitudó kifejtésének konvergenciasugarát is megadja. Ennek maximalizálása tehát a szóban forgó kifejtés konvergenciatulajdonságainak optimalizációját is magába foglalja. Ez különösen fontosnak bizonyulhat akkor, ha V_k –t valamilyen sor alakban képzeljük el, hiszen ekkor valójában a sor egyes tagjainak futását optimalizáljuk. Az érvelés részleteibe itt nem megyünk bele, az olvasó részletesen tájékozódhat róla a [18, 19] tanulmányokban.

A (1.19) által definiált regulátort beírva (1.15)–be (többkomponensű mező esetén azt az egységmátrixszal arányosnak tekintve), az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\partial_k V_k = \frac{\Omega_d}{d} k^{d+1}\Big(1 + \eta_k/(d+2)\Big)\,\mathrm{Tr}\,(k^2 + V_k^{(2)}/Z_k)^{-1} \tag{1.20}$$

ahol $\eta_k = k\partial_k Z_k/Z_k$ és $V_k^{(2)}$ a V_k függvény második derivált mátrixa. Amennyiben az anomális dimenzió kicsi, jó közelítésnek bizonyul a $Z_k = 1$ választás, ekkor a méginkább egyszerű

$$\partial_k V_k = \frac{\Omega_d}{d} k^{d+1}\,\mathrm{Tr}\,(k^2 + V_k^{(2)})^{-1} \tag{1.21}$$

alakot kapjuk.

1.5. Véges hőmérsékletű futások

Az FRG formalizmus, és a (1.11) Wetterich–egyenlet nagyon egyszerűen általánosítható véges hőmérsékletű statisztikus térelméletekre. Ilyen rendszerekben a klasszikus (euklideszi) hatás egy τ képzetes idő irányú integrállal egészül ki, és minden térfogati integrálban a $\int_x \longrightarrow \int_0^\beta d\tau \int_x$ helyettesítést kell elvégezni, ahol $\beta = 1/T$ az inverz hőmérséklet. Ennek megfelelően a Fourier–térbeli integrálok a $\int_q \longrightarrow T\sum_{\omega_n}\int_q$ módon változtatandóak meg, ahol ω_n a rendszert jellemző bozonikus ($\omega_n = 2\pi nT$) vagy fermionikus [$\omega_n = 2\pi(n+1/2)T$] Matsubara–frekvenciák. Ezek a frekvenciák az impulzus képzetes idő irányához tartozó vetületében jelennek meg. A Wetterich–egyenlet mindezek alapján véges hőmérsékleten formailag teljesen azonos az (1.11) egyenlettel, ha benne az előbbiek szerinti formális átalakításokat elvégezzük. Lokális potenciális közelítésben így (1.15) felhasználásával

$$\partial_k V_k[\Phi] = \frac{T}{2}\sum_{\omega_n}\int_q \mathrm{Tr}\left[\Big(Z_k(\omega_n^2+q^2)+V_k^{(2)}+R_k(\omega_n,q)\Big)^{-1}[\Phi]\partial_k R_k(\omega_n,q)\right] \tag{1.22}$$

adódik. Különösen egyszerű alakot kapunk akkor, ha a regulátort frekvenciafüggetlennek tesszük fel, de ettől eltekintve a már tárgyalt Litim változatot használjuk, $R_k(\omega_n,q) = Z_k(k^2-q^2)\Theta(k^2-q^2)$. Ez azt jelenti, hogy a Matsubara–szummát nem reguláljuk, csak a térszerű integrált. (1.20) alapján

$$\partial_k V_k = \frac{\Omega_d}{d}k^{d+1}\Big(1+\eta_k/(d+2)\Big)T\sum_{\omega_n}\mathrm{Tr}\,(\omega_n^2+k^2+V_k^{(2)}/Z_k)^{-1}, \tag{1.23}$$

ahol a valós térbeli dimenziószámot továbbra is d-vel jelöltük. $Z_k = 1$ közelítésben a skálafejlődést leíró egyenlet a

$$\partial_k V_k = \frac{\Omega_d}{d}k^{d+1}T\sum_{\omega_n}\mathrm{Tr}\,(\omega_n^2+k^2+V_k^{(2)})^{-1} \tag{1.24}$$

alakúra egyszerűsödik.

1.6. Fermionok

A fejezet végén röviden szólunk a fermionokkal kapcsolatos különbségekről. Egy ψ fermionikus mező definíció szerint Grassmann–változó és komplex. Utóbbi miatt a ψ és a Dirac–adjungáltja, $\bar\psi$, független változóként kezelhető. Eszerint akármilyen belső szimmetria nélkül is a Wetterich–egyenletben szereplő $\Gamma_k^{(2)}$ mátrix biztosan legalább 2×2–es, és tipikusan off–diagonális, hiszen $\delta^2\Gamma_k/\delta\psi^2 = \delta^2\Gamma_k/\delta\bar\psi^2 \equiv 0$. Vegyük azonban észre, hogy a változók Grassmann jellege miatt $\delta^2\Gamma_k/\delta\psi\delta\bar\psi = -\delta^2\Gamma_k/\delta\bar\psi\delta\psi$, ami azt jelenti, hogy a Wetterich–egyenlet jobb oldalán a tracet kiértékelve a fermionok járuléka mindig negatív lesz, és hordozni fog egy 2–es faktort a bozonokéhoz képest (előbbit lehet értelmezni úgy is, hogy a fermion hurkok negatív előjelet kapnak a felcserélési relációk miatt). Hallgatólagosan feltéve, hogy a fermionikus regulátormátrix is a kinetikus tagnak megfelelően off–diagonális, a Wetterich–egyenlet fermionokra a

$$\partial_k \Gamma_k = -\int\int \mathrm{Tr}\left[(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1} \partial_k R_k\right] \tag{1.25}$$

alakot ölti. Itt a szokásos, bár kissé pongyola jelölésben $\Gamma_k^{(2)}$ a $\delta^2\Gamma_k/\delta\psi\delta\bar{\psi}$ deriváltat jelöli, és a trace csak a lehetséges belső indexekre vonatkozik. Ha bozonok, és velük nem keveredő fermionok is vannak a rendszerben, akkor felírható a

$$\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2}\int\int \mathrm{Tr}\left[(\Gamma_{k,B}^{(2)} + R_{k,B})^{-1} \partial_k R_{k,B}\right] - \int\int \mathrm{Tr}\left[(\Gamma_{k,F}^{(2)} + R_{k,F})^{-1} \partial_k R_{k,F}\right] \tag{1.26}$$

összefüggés, ahol a B (F) index a bozonokra (fermionokra) vonatkozik. Amennyiben olyan elméletünk van, melyben a bozonok és a fermionok viszont keveredni tudnak, és ráadásul olyan háttéren dolgozunk, ahol ez a keveredés a kétpont függvények szintjén meg is valósul, akkor a (1.26) egyenlet nem érvényes, és érdemesebb az eredeti, (1.11) alakot használni, gondosan ügyelve a bozonikus és fermionikus mezőkből felépülő $\Gamma_k^{(2)}$ mátrix struktúrájára.

2. fejezet

A királis fázisátalakulás rendje a QCD–ben

2.1. Kvantumszíndinamikai bevezető

Az elemi részek fizikájában az erős kölcsönhatás napjaink egyik legprominensebb, széles érdeklődést kiváltó területe. Kvantummezőelmélete, a kvantumszíndinamika (quantum chromodynamics – QCD) bár már közel 50 éve ismert, a mai napig számos hozzá kapcsolódó jelenség megértésre vár. A QCD mértékelmélet, melynek szimmetriacsoportja $SU(3)$, és melyhez N_f db kvarkmező társul, ahol N_f az ún. kvarkízek, mint belső szabadsági fokok száma. Ezek mindegyike mértéktranszformáció során az $SU(3)$ mértékscsoport fundamentális ábrázolása szerint transzformálódik. A természetben $N_f = 6$ (u,d,s,b,c,t kvarkok létezése ismert), de számos alacsonyenergiás jelenség szempontjából tökéletes leírást ad az $N_f = 2, 3$ megszorítás. Ennek oka a kvarkok

$$\begin{aligned} m_u &= 2.3\,\mathrm{MeV}\,, \quad m_d = 4.8\,\mathrm{MeV}\,, \quad m_s = 95\,\mathrm{MeV}\,, \\ m_c &= 1275\,\mathrm{MeV}\,, \quad m_b = 4180\,\mathrm{MeV}\,, \quad m_t = 173210\,\mathrm{MeV} \end{aligned} \tag{2.1}$$

tömegeinek hierarchiája, mely mutatja, hogy pl. egy tipikus 1 GeV –et el nem érő karakterisztikus energiájú folyamat szempontjából az $N_f = 3$, míg néhány tíz MeV esetén $N_f = 2$ valóban jó közelítés, hiszen a magasabb tömegű gerjesztések nem tudnak megjelenni a szóban forgó folyamat során. A QCD Lagrange függvénye

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu a} + \bar{q}_i \Big(i\gamma^\mu (D_\mu)_{ij} - m\delta_{ij} \Big) q_j,$$

ahol $G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu$ a G^a_μ mértékmezőkből álló térerősségtenzor, $D_\mu = \partial_\mu - igG^a_\mu T^a$ pedig a kovariáns derivált. A kvarkmezőket egységesen q_i jelöli (csak a szín indexet írtuk ki), γ^μ pedig a Dirac–mátrixokra utal. Az m mátrix a fenti kvarktömegeket foglalja magába, mérete az ízek N_f számától függ. Az elmélet fontos tulajdonsága, hogy $m = 0$ esetén egy globális $U(N_f) \times U(N_f)$ királis szimmetriával (is) rendelkezik, mely az íz térben hat, és a kvarkok, mint Dirac–fermionok jobb– és balkezes projekcióihoz tartozó, $\mathcal{L}$–t invariánsul hagyó (királis) unitér operációit foglalja magába. A fentiek szerint természetesen $m \neq 0$, de egy jellegzetes energiaskála függvényében hasznos $U(2) \times U(2)$ vagy $U(3) \times U(3)$ közelítő királis szimmetriáról beszélni.

Ismeretes, hogy a könnyű pszeudoskalár mezonok tömegei arról árulkodnak, hogy a QCD alapállapotában a $\langle \bar{q}q \rangle$ kondenzátum nemnulla értéket vesz fel, amiből az következik, hogy a $U(N_f) \times U(N_f)$ (közelítő) királis szimmetria spontán sérül, a $U(N_f) \times U(N_f) \longrightarrow U_V(N_f)$ mintázatot követve. Itt a megmaradó szimmetria olyan királis transzformációkat jelöl, melyekre a bal– és jobbkezes transzformációs paraméterek megegyeznek (vektor szimmetriák). Szintén fontos tudni, hogy az elmélet kvantumos változatában a királis szimmetria $U_A(1)$ részcsoportja, mely olyan, az egységmátrixszal arányos transzformációkat foglal magába, melyekben a bal– és jobbkezes paraméterek egymás ellentettjei (axiálvektor szimmetriák), anomálisan is sérül.

Ebben a fejezetben a királis szimmetria spontán sérülésének véges hőmérsékletű helyreállásával foglalkozunk. Célunk annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy az átalakulás rendje a királis limeszben (vagyis zérus kvarktömegek mellett) lehet–e folytonos. A kérdés évtizedek óta vita tárgya. Elsőként Pisarski és Wilczek foglalkozott a kérdéssel [20], és rámutattak arra, hogy a mezonikus fluktuációk figyelembevétele bármilyen $N_f > 1$ egész szám esetén megkerülhetetlen. Eredményeik szerint a fluktuációk következtében nem létezhet infravörös renormálási csoport fixpont a rendszerben, vagyis az másodrendű átalakulást nem mutathat. Az eredeti analízis azon a feltételezésen alapult, hogy az axiális anomália termális fluktuációk hatására eltűnik a kritikus pontban, melyről azonban bebizonyosodott, hogy ha az mégis megmarad, és mértéke kellően nagy a kritikus pontban, $N_f = 2$ esetén másodrendűvé változtathatja az átalakulást, $O(4)$ kritikus exponenseket mutatva. $N_f = 3$ esetén azonban az anomália az átalakulás rendje szempontjából semmilyen relevanciával nem rendelkezik, és mindenképpen elsőrendű átmenet adódik [21].

Később arra utaló jelek jelentek meg, hogy az átalakulás $N_f = 2$ –re még akkor is másodrendű jelleget ölthet, ha az axiális $U_A(1)$ szimmetria nem áll helyre az átalakulási hőmérsékleten [22, 23], ekkor az előbbi viszont feltehetően egy másik univerzalitási osztályba tartozik. Ehhez hasonló eredmények azonban $N_f = 3$ esetén továbbra sem adódtak, és később tankönyvi anyaggá is vált, hogy az átalakulás nem lehet folytonos [24]. Korábbi rács QCD szimulációk is megerősítették az átalakulás elsőrendű jellegét [25, 26, 27], de fontos szem előtt tartani, hogy a szóban forgó szimulációkban a levágás miatt megjelenő numerikus hibák tipikusan igen nagyok, és olyan állítások is napvilágot láttak, hogy az átalakulás elsőrendű jellege valójában megkérdőjelezhető [28]. Fontos hangsúlyozni, hogy a rács QCD számolásoknál szükségszerűen fellépő legfőbb probléma az, hogy nulla kvarktömegek mellett a fermion determináns szingulárissá válik, és közvetlen mód a szimulációra nem képzelhető el. A királis limesz véges kvarktömegeken keresztül történő megközelítése pedig óriási számítási kapacitásokat emészt fel, miközben a kontinuum és végtelen térfogati limeszeket is kezelni kell. Bár a numerikus kapacitások az idő előrehaladtával megsokszorozódtak, ezen problémák a mai napig komoly kihívás elé állítják a rácsszimulációkkal foglalkozókat.

Az axiális anomália hőmérsékletfüggése a királis limeszben szintén vizsgálatok tárgyát képezi, és nincs általánosan elfogadott álláspont a kérdésben. Számos tanulmány jelent meg az elmúlt évtizedben, melyek az axiális $U_A(1)$ szimmetria helyreállása mellett [29, 30, 31], és ellen [32, 33, 34, 35, 36, 37] érvelnek. A fejezet következő részeiben azt fogjuk próbálni megmutatni, hogy a királis átalakulás rendje zérus kvarktömegek mellett nagyon érzékenynek bizonyulhat az anomália véges hőmérsékletű fejlődését illetően. Az ezirányú, mind rács QCD, mind effektív modelleken alapuló kutatások továbbra is meglehetősen nagy jelentőséggel bírnak [38].

Számos korábbi tanulmánynak ellentmondva, a közelmúltban rács QCD szimulációk arra a következtetésre jutottak, hogy eltűnő kvarktömegek mellett az átalakulás másodrendű [39, 40]. Ezen eredmény azonban komoly ellentmondásban van a fentebb felidézett renormálási csoport alapú érvelésekkel [20, 21], hiszen utóbbiak szerint nem létezik infravörös fixpont a rendszerben, ami viszont szükséges feltétele lenne egy másodrendű átalakulás megjelenésének. Fő motivációnk ebben a fejezetben az, hogy rámutassunk, az ellentmondás a funkcionális renormálási csoport segítségével feloldhatóvá válik.

2.2. Ginzburg–Landau elmélet

A fázisátalakulások elméletének egyik alappilére a Ginzburg–Landau paradigma, mely azt mondja, hogy ha egy fizikai rendszer kellően közel van egy folytonos (másodrendű) vagy nagyon gyengén elsőrendű fázisátmenethez, akkor a mikroszkopikus szabadsági fokok fluktuációinak rövid hullámhosszakra történő kiátlagolása során létrejön egy effektív, a rendszerhez kapcsolható Φ lokális rendparaméter, ami az átalakulási ponttól való távolságot jellemzi, és így az ultraibolya szabadenergia (ami az előző fejezetben definiált klasszikus hatásnak, $\Gamma_\Lambda \equiv S$, felel meg) Φ szerint Taylor–sorba fejthető. (Itt $\Lambda \sim 1/a$, ahol a a rácsállandó, aminél kisebb hullámhosszú fluktuációk már kiintegrálásra kerültek.) A teljes Γ szabadenergia (térelméleti nyelven az effektív hatás) a Φ teljes spektrumára vonatkozó fluktuációinak figyelembevételével adódik ki, mely viszont már nem analitikus (az átalakulási pontban). Ennek oka az, hogy másodrendű fázisátalakulások során a rendszerek önhasonlóvá válnak, a rendparaméter(ek) fluktuációi minden hullámhosszon relevánsak lesznek, és a végtelen térfogati limeszben nemanalitikus viselkedést alakítanak ki. A Γ_Λ funkcionál fenomenológiailag adandó meg, a Ginzburg–Landau elmélet szerint arra kell figyelni, hogy a rendszer szimmetriái által megengedett összes tag meg tudjon jelenni a Taylor–sorban.

A királis szimmetria csoportja $U(N_f) \times U(N_f)$, ami alapján a mikroszkopikus kvark– és mérték szabadsági fokok (képzeletbeli) kiintegrálása után kialakuló Φ mező egy $N_f \times N_f$ –es komplex mátrix, melyen a királis szimmetria $\Phi \longrightarrow L\Phi R^\dagger$ módon ábrázolódik, ahol L és R a bal– és jobbkezes királis transzformációkhoz tartozó unitér $N_f \times N_f$ –es mátrixok. Érdemes a

$$\Phi = \sum_a (s^a + i\pi^a) T^a \tag{2.2}$$

parametrizációval dolgozni, ahol s^a és π^a valós mezők, T^a $(a = 0, ...8)$ pedig egy bázis az $N_f \times N_f$ –es mátrixok terében. Utóbbit lehet pl. az $U(N_f)$ Lie–algebra generátoraival azonosítani, $\mathrm{Tr}\,(T^a T^b) = \delta^{ab}/2$. Az első kérdés, hogy az ultraibolya szabadenergia Φ szerinti Taylor–sorában milyen kombinációk jelenhetnek meg, melyek őrzik a királis szimmetriát. Tér szerinti deriváltakat nem tartalmazó tagokra vonatkozóan kézenfekvő módon az alábbi invariáns tenzorok megfelelnek a kritériumnak:

$$\tilde{I}_1 = \mathrm{Tr}\,(\Phi^\dagger\Phi), \quad \tilde{I}_2 = \mathrm{Tr}\,(\Phi^\dagger\Phi\Phi^\dagger\Phi), \quad \tilde{I}_3 = \mathrm{Tr}\,(\Phi^\dagger\Phi\Phi^\dagger\Phi\Phi^\dagger\Phi), \quad ... \; \tilde{I}_n = \mathrm{Tr}\,(\Phi^\dagger\Phi)^n. \tag{2.3}$$

Fontos azonban tudni, hogy $N_f = 2$ esetén $\tilde{I}_{n>2}$, míg $N_f = 3$–nál $\tilde{I}_{n>3}$ (általában N_f íz esetén $\tilde{I}_{n>N_f}$) kikeverhető az alacsonyabb indexű invariánsok segítségével. Az is megmutatható, hogy $U(N_f) \times U(N_f)$ szimmetria esetén az előbbiektől független kombinációk nem is képzelhetőek el, melyek őriznék a királis szimmetriát. Később látni fogjuk, hogy kényelmi okokból $\tilde{I}_n$ helyett érdemes áttérni az

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathrm{Tr}\,(\Phi^\dagger\Phi), \quad I_2 = \mathrm{Tr}\,(\Phi^\dagger\Phi - \mathrm{Tr}\,(\Phi^\dagger\Phi)/N_f)^2, \\ I_3 &= \mathrm{Tr}\,(\Phi^\dagger\Phi - \mathrm{Tr}\,(\Phi^\dagger\Phi)/N_f)^3, \quad ... \end{aligned} \tag{2.4}$$

invariánsokra. Az $U_A(1)$ anomáliát szintén figyelembe kell vennünk. Könnyű megmutatni, hogy a

$$I_{\mathrm{det}} = \det\Phi^\dagger + \det\Phi, \quad \tilde{I}_{\mathrm{det}} = \det\Phi^\dagger - \det\Phi \tag{2.5}$$

kombinációk a teljes $U(N_f) \times U(N_f)$ szimmetriára nézve invariánsak, leszámítva az $U_A(1)$ faktort. Fontos észrevétel, hogy $\tilde{I}_{\mathrm{det}}$ azonban tértükrözéskor előjelet vált, ezért nem jelenhet meg az effektív hatásfunkcionálban. Ez azt is jelenti, hogy $\tilde{I}^2_{\mathrm{det}}$ és hatványai viszont elvben bekerülhetnének a Taylor–sorba, ezekről viszont megmutatható, hogy nem függetlenek, pl. $N_f = 3$ esetén

$$\tilde{I}^2_{\mathrm{det}} = I^2_{\mathrm{det}} + 4I_1^3/27 - 2I_1I_2/3 + 4I_3/3. \tag{2.6}$$

Hasonló megfontolásokból pl. a $\det\Phi^\dagger \cdot \det\Phi$ kombináció sem független invariáns.

A fejezet hátralévő részében a fenomenológiailag legérdekesebb, $N_f = 3$ esettel foglalkozunk. A fentiek szerint az ultraibolya szabadenergia (deriváltakat nem tartalmazó része) Φ–től nem tetszőlegesen, hanem az alábbi négy invariánson keresztül függhet csak: I_1, I_2, I_3, I_{det}. A szabadenergia valamely k skálán Taylor–sor alakban a következő:

$$\begin{aligned} \Gamma_k[\Phi] &= \int d^dx \Big[V_k[\Phi] + \mathrm{Tr}\,[\partial_i\Phi^\dagger\partial_i\Phi] + ... \Big], \\ V_k[\Phi] &= m_k^2 I_1 + a_k I_{\mathrm{det}} + g_{1,k} I_1^2 + g_{2,k} I_2 \\ &\quad + b_k I_1 I_{\mathrm{det}} + \lambda_{1,k} I_1^3 + \lambda_{2,k} I_1 I_2 + a_{2,k} I^2_{\mathrm{det}} + g_{3,k} I_3 + ... \end{aligned} \tag{2.7}$$

ahol a magasabb rendű deriváltakat, illetve a Φ–ben magasabb rendű tagokat elhagytuk, így garantálva, hogy $d = 3$ dimenzióban az összes perturbatíve renormálható operátor megjelent a kifejtésben. Vegyük észre, hogy a (2.7) Ginzburg–Landau kifejtés a korábban tárgyalt LPA közelítéssel teljesen konzisztens $Z_k \equiv 1$ választással, hiszen csak második deriváltak szerepelnek benne, illetve az LPA -ban szereplő V_k effektív potenciál pedig az 1.3 –dik szakaszban tárgyaltakkal analóg módon Taylor–sorként áll előttünk. A (2.7)–t beírva az LPA–ban érvényes, optimalizált renormálási csoport futási egyenletbe, ld. (1.20)–ot $Z_k \equiv 1$ esetén, elvben megkaphatjuk az összes csatolás futását. Erre hamarosan visszatérünk.

2.2.1. ϵ sorfejtés

Az alábbiakban áttekintjük az eredetileg a szokvány térelméleti (perturbatív) renormálási csoportból megkapott, $d = 4 - \epsilon$ dimenzióban érvényes, a g_1 és g_2–re vonatkozó futási egyenleteket [20]. Ezek az FRG–ből is levezethetőek, az alábbi módon. Vegyük észre, hogy $d \approx 4$ dimenzióban a perturbatíve renormálható csatolások száma négyre redukálódik: m_k^2, $g_{1,k}$, $g_{2,k}$, a_k marad. Ebből első körben a_k –t kézzel elhagyjuk (a hatására mindjárt visszatérünk), és mivel $d \geq 4$ esetén a gaussi fixpont infravörös stabil, ezért $d = 4 - \epsilon$ esetén azt várjuk, hogy ha meg is jelenik új fixpont, az perturbatív lesz a gaussi körül. Ennek megfelelően a kritikus pontban az $m_k^2 \approx 0$ közelítéssel élve, $\epsilon \ll 1$ feltételezéssel a β függvényekre az alábbi kifejezések adódnak (1.20)-ből:

$$\beta_{g_1} = -\epsilon\bar{g}_1 + \frac{N_f^2+4}{4\pi^2}\bar{g}_1^2 + \frac{N_f}{\pi^2}\bar{g}_1\bar{g}_2 + \frac{3\bar{g}_2^2}{4\pi^2}, \tag{2.8a}$$

$$\beta_{g_2} = -\epsilon\bar{g}_2 + \frac{3}{2\pi^2}\bar{g}_1\bar{g}_2 + \frac{N_f}{2\pi^2}\bar{g}_2^2, \tag{2.8b}$$

ahol (1.20)–et egy kétkomponensű háttéren értékeltük ki (pl. $\Phi = s_0T_0 + s_8T_8$–on) azért, hogy a két négypont csatoláshoz tartozó operátorok egyértelműen szétváljanak (megkülönböztethetőek legyenek) a renormálási csoport egyenlet jobb oldalán. Ehhez meg kellett konstruálnunk a $V_k^{(2)}$, 18×18–as mátrixot a fenti háttéren, melyet (1.20)–be helyettesítve, a mezők szerinti sorfejtés után az egyenlet jobb oldalán összeálló I_1 és I_2 invariánsok együtthatóit összevetve a bal oldalon megjelenő skálafutásokkal kaphatóak meg a β függvények. Bár a fentiek szerint a Litim–féle regulátort használtuk, ahogy arra korábban utaltunk, $d = 4$ esetén (és így az ϵ sorfejtésben is) vezető rendben a négypont csatolások skálafüggései regulátorfüggetlenek. A (2.8) egyenletek Pisarski és Wilczek a fejezet elején is felidézett híres eredményeit adják, melyek szerint ha a kifejezéseket $d = 3$ –ba ($\epsilon = 1$) elfolytatjuk, nem létezik infravörösen stabil fixpont $N_f > \sqrt{3}$-ra. Ha az a_k anomália együtthatót is hozzávesszük a rendszerhez, akkor belátható, hogy az csak és kizárólag $N_f = 2$ esetén képes kritikus jelenségekhez vezetni. Utóbbihoz az kell, hogy a_k kezdeti értéke nagyon nagy legyen (szigorúan véve végtelen), ekkor a renormálási csoport folyamok egy $O(4)$ fixpontba vezetnek alacsony skálán. Ha azonban $N_f \geq 3$, akkor a_k–tól függetlenül azt kapjuk, hogy a rendszer skálázó viselkedésre képtelen, így ha létezik benne átalakulás, akkor az (feltehetően) elsőrendű kell, hogy legyen.

2.2.2. Futások $d = 3$–ban

Az ϵ sorfejtés vezető rendű eredményei 2022–ben ellentmondani látszanak a legújabb rács QCD számolásoknak [39, 40], melyek szerint a királis limeszben, három kvarkíz esetén másodrendű az átalakulás. Ez azt jelentené, hogy a rendszerben mégis van egy infravörös fixpont, melyet az ϵ sorfejtés nem képes leírni. Megjegyzendő, hogy korábbi, FRG-n alapuló számolások is hasonló eredményekre vezettek [41, 42, 43], melyek azonban (az ϵ sorfejtéshez hasonlóan) nem a teljes operátorkészlettel dolgoztak, és valószínűsíthetően ezért nem voltak képesek infravörös fixpont(ok) leírására. Az alábbiakban a problémát szintén az FRG módszer segítségével vizsgáljuk, és megadjuk a (2.7) közelítésben megjelenő kilenc csatolás futását. Ezek mindegyike perturbatív értelemben renormálható $d = 3$ –ban, viszont minden ezeken túli operátor nemrenormálható. A futások kiszámítása szempontjából fontos látni, hogy az FRG módszer egyik nagy előnye, hogy nem kötelező $d = 4$–hez közel dolgozni, tetszőleges dimenzióban kiértékelhető a skálafüggést leíró Wetterich–egyenlet.

Fontos megjegyzés viszont, hogy szigorúan csak az ϵ sorfejtésben mutatható meg az, hogy a nemrenormálható csatolások csak a kifejtés magasabb rendjeiben befolyásolják a renormálási csoport folyamokat, az FRG esetében nem egy kis paraméter által kontrollált közelítési sémában dolgozunk, hanem feltesszük, hogy a vezető rendű derivatív kifejtés [ld. (1.14)–et] mellett a magasabb rendű operátorok hatása sem számottevő. Minél közelebb vagyunk a gaussi fixponthoz, ezt annál inkább érvényesnek várjuk, általános érvényű állítások azonban nem tehetők. Az elhagyott nemrenormálható operátorok hatásainak feltérképezése ezért mindenképpen fontos kutatási irány a jövőben.

A szóban forgó kilenc csatolás, $\{m_k^2, a_k, g_{1,k}, g_{2,k}, b_k, \lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, a_{2,k}, g_{3,k}\}$ futásához ismét a $V_k^{(2)}$ mátrixot kell meghatározni alkalmas homogén (térfüggetlen) Φ háttéren, majd Φ komponensei szerint (1.20) mindkét oldalát Taylor–sorba fejtve az invariánsok megjelenése (összekombinálódása) után leolvashatók az egyes csatolások skálafüggése. A probléma az, hogy a $V_k^{(2)}$ mátrix meghatározása teljesen általános háttér mellett nem valósítható meg. Ennek nem elvi, hanem gyakorlati oka van. Az derül ki, hogy ahogyan egyre több nemnulla átlagteret teszünk be a Φ–ben lévő 18 valós változó helyére, a (1.20) egyenlet jobb oldalán szereplő $k^2 + V_k^{(2)}$ inverzének kiszámítása praktikusan nem valósítható meg. Vegyük észre azonban, hogy az ϵ sorfejtésnél leírtakhoz hasonlóan, valójában most sem kell teljesen általános háttér mellett dolgoznunk. Annyi a cél, hogy a szóban forgó háttéren (adott rendben) a felbukkanó invariánsok ne keveredjenek össze, azok egyértelműen szétválaszthatóak legyenek. Ez teszi lehetővé a β függvények egyértelmű kinyerését az egyenletből.

A háttérmezők választásának egy lehetséges sorozata rendről rendre a következő. Az $\mathcal{O}(\phi^2)$ és $\mathcal{O}(\phi^3)$ rendekben nyugodtan választhatjuk a legegyszerűbb, $\Phi = s_0 T_0$ hátteret, mely egyértelműen meghatározza β_{m^2}–et és β_a–t. Az $\mathcal{O}(\phi^4)$ rendben ugyanez a háttér β_{g_1} meghatározását lehetővé teszi, de mivel $I_2|_{\Phi=s_0T_0} = 0$, nem alkalmas β_{g_2} kiszámítására. Ehhez ebben a rendben átmehetünk egy $\Phi = s_8 T_8$ háttérbe, mely bár összekeveri I_1^2–et és I_2–t, β_{g_1} birtokában β_{g_2} már egyértelműen adódik. Az $\mathcal{O}(\phi^5)$ rendben visszatérhetünk $\Phi = s_0 T_0$–hoz, ami megadja β_b-t. A számítás legbonyolultabb része az $\mathcal{O}(\phi^6)$ rend, mely négy különböző operátort tartalmaz, melyeket szét kell tudni választani. Ha kezdetben egy $\Phi = i\pi_0 T_0$ tisztán képzetes háttérrel dolgozunk, akkor megkaphatjuk β_{λ_1}-et, ugyanis a maradék három tag ilyenkor nullát ad. β_{λ_1} felhasználásával visszatérhetünk $\Phi = s_0 T_0$–hoz, amely bár összekeveri β_{λ_1} és β_{a_2}–t, a másik kettő tagot kinullázza, így β_{λ_1} ismeretében β_{a_2} már egyértelműen adódik. Ami β_{λ_2} és β_{g_3}–at illeti, ilyenkor muszáj egy kétkomponensű hátteret használni, mivel egy komponens esetén a megmaradt két invariáns vagy együtt eltűnik, vagy mindketten nemnulla értéket vesznek fel, ami nem teszi lehetővé a megmaradt két β függvény egyértelmű meghatározását. Egy kényelmes választás lehet pl. $\Phi = s_8 T_8 + i\pi_0 T_0$, amiből β_{λ_2} és β_{g_3} egyszerűen adódik.

Érdemes hangsúlyozni, hogy bár a β függvények természetesen egyértelműek, a hozzájuk vezető út, vagyis a fent leírt háttérmezők sorozatára más választás is elképzelhető. Ahogy feljebb már szerepelt, ha a $k^2 + V_k^{(2)}$ mátrix tetszőleges háttéren könnyen invertálható lenne, az egész procedúra csak abból állna, hogy az (1.20) jobb oldalát a mezők szerint Taylor–sorba fejtjük, az invariánsok egyértelműen „maguktól” összeállnak, és az őket szorzó faktorok elvezetnek a β függvényekhez. Mivel ez praktikus okokból nem valósítható meg, a feljebb vázolt séma az egyik legegyszerűbb módja annak, hogy a teljes csatolási állandó készlet skálafüggését meghatározzuk. A fentiek szerint kiszámolt β függvények a következőek:

$$\beta_{m^2} = -2\bar{m}_k^2 - \frac{4}{9\pi^2}\frac{15\bar{g}_{1,k}+4\bar{g}_{2,k}}{(1+\bar{m}_k^2)^2} + \frac{4}{3\pi^2}\frac{\bar{a}_k^2}{(1+\bar{m}_k^2)^3}, \tag{2.9}$$

$$\beta_a = -\frac{3\bar{a}_k}{2} - \frac{4}{\pi^2}\frac{\bar{b}_k}{(1+\bar{m}_k^2)^2} + \frac{4}{3\pi^2}\frac{\bar{a}_k(3\bar{g}_{1,k}-4\bar{g}_{2,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^3}, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\beta_{g_1} &= -\bar{g}_{1,k} - \frac{1}{9\pi^2}\frac{2\bar{a}_{2,k}+99\bar{\lambda}_{1,k}+16\bar{\lambda}_{2,k}}{(1+\bar{m}_k^2)^2}\\ &+ \frac{4}{27\pi^2}\frac{24\bar{a}_k\bar{b}_k+117\bar{g}_{1,k}^2+48\bar{g}_{1,k}\bar{g}_{2,k}+16\bar{g}_{2,k}^2}{(1+\bar{m}_k^2)^3}\\ &- \frac{16}{9\pi^2}\frac{\bar{a}_k^2(6\bar{g}_{1,k}+\bar{g}_{2,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^4} + \frac{8}{9\pi^2}\frac{\bar{a}_k^4}{(1+\bar{m}_k^2)^5},\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\beta_{g_2} = -\bar{g}_{2,k} &+ \frac{1}{3\pi^2}\frac{\bar{a}_{2,k}-5\bar{g}_{3,k}-13\bar{\lambda}_{2,k}}{(1+\bar{m}_k^2)^2} - \frac{4}{3\pi^2}\frac{\bar{a}_k\bar{b}_k-6\bar{g}_{1,k}\bar{g}_{2,k}-4\bar{g}_{2,k}^2}{(1+\bar{m}_k^2)^3}\\ &+ \frac{4}{3\pi^2}\frac{\bar{a}_k^2(3\bar{g}_{1,k}+5\bar{g}_{2,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^4} + \frac{2}{3\pi^2}\frac{\bar{a}_k^4}{(1+\bar{m}_k^2)^5},\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\beta_b = -\frac{\bar{b}_k}{2} &+ \frac{4}{9\pi^2}\frac{\bar{b}_k(66\bar{g}_{1,k}-4\bar{g}_{2,k})+3\bar{a}_k(5\bar{a}_{2,k}+9\bar{\lambda}_{1,k}-4\bar{\lambda}_{2,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^3}\\ &+ \frac{8}{3\pi^2}\frac{-3\bar{a}_k^2\bar{b}_k-18\bar{a}_k\bar{g}_{1,k}^2+12\bar{a}_k\bar{g}_{1,k}\bar{g}_{2,k}+4\bar{a}_k\bar{g}_{2,k}^2}{(1+\bar{m}_k^2)^4} + \frac{32}{9\pi^2}\frac{\bar{a}_k^3(3\bar{g}_{1,k}-\bar{g}_{2,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^5}\end{aligned} \tag{2.13}$$

a releváns csatolásokra, míg a marginálisokra

$$\begin{aligned}\beta_{\lambda_1} &= \frac{8}{27\pi^2}\frac{9\bar{b}_k^2+3\bar{a}_{2,k}\bar{g}_{1,k}+24\bar{g}_{1,k}(9\bar{\lambda}_{1,k}+\bar{\lambda}_{2,k})+4\bar{g}_{2,k}(9\bar{\lambda}_{1,k}+4\bar{\lambda}_{2,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^3}\\ &- \frac{4}{81\pi^2}\frac{72\bar{a}_k\bar{b}_k(9\bar{g}_{1,k}+\bar{g}_{2,k})+4(297\bar{g}_{1,k}^3+108\bar{g}_{1,k}^2\bar{g}_{2,k}+72\bar{g}_{1,k}\bar{g}_{2,k}^2+16\bar{g}_{2,k}^3)}{(1+\bar{m}_k^2)^4}\\ &- \frac{4}{81\pi^2}\frac{9\bar{a}_k^2(2\bar{a}_{2,k}+45\bar{\lambda}_{1,k}+4\bar{\lambda}_{2,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^4} + \frac{32}{81\pi^2}\frac{\bar{a}_k^2(15\bar{a}_k\bar{b}_k+171\bar{g}_{1,k}^2+36\bar{g}_{1,k}\bar{g}_{2,k}+8\bar{g}_{2,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^5}\\ &- \frac{80}{81\pi^2}\frac{\bar{a}_k^4(15\bar{g}_{1,k}+\bar{g}_{2,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^6} + \frac{8}{9\pi^2}\frac{\bar{a}_k^6}{(1+\bar{m}_k^2)^7},\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\beta_{\lambda_2} &= \frac{2}{9\pi^2}\frac{2\bar{g}_{2,k}(25\bar{g}_{3,k}+54\bar{\lambda}_{1,k}+44\bar{\lambda}_{2,k}-2\bar{a}_{2,k})-9\bar{b}_k^2-6\bar{g}_{1,k}(\bar{a}_{2,k}-5\bar{g}_{3,k}-28\bar{\lambda}_{2,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^3}\\ &+ \frac{1}{3\pi^2}\frac{36\bar{a}_k\bar{b}_k(2\bar{g}_{1,k}+\bar{g}_{2,k})-8\bar{g}_{2,k}(36\bar{g}_{1,k}^2+21\bar{g}_{1,k}\bar{g}_{2,k}+7\bar{g}_{2,k}^2)+\bar{a}_k^2(6\bar{a}_{2,k}+5\bar{g}_{3,k}+36\bar{\lambda}_{1,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^4}\\ &+ \frac{8}{27\pi^2}\frac{9\bar{a}_k^3\bar{b}_k+180\bar{a}_k^2\bar{g}_{1,k}^2+132\bar{a}_k^2\bar{g}_{1,k}\bar{g}_{2,k}+26\bar{a}_k^2\bar{g}_{2,k}^2}{(1+\bar{m}_k^2)^5} + \frac{20}{9\pi^2}\frac{\bar{a}_k^4(3\bar{g}_{1,k}+2\bar{g}_{2,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^6},\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\beta_{a_2} = \frac{4}{3\pi^2}\frac{6\bar{b}_k^2 + 15\bar{a}_{2,k}\bar{g}_{1,k} - 8\bar{a}_{2,k}\bar{g}_{2,k}}{(1+\bar{m}_k^2)^3} + \frac{16}{\pi^2}\frac{\bar{a}_k\bar{b}_k(\bar{g}_{2,k} - 3\bar{g}_{1,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^4} + \frac{16}{3\pi^2}\frac{\bar{a}_k^2(9\bar{g}_{1,k}^2 + 2\bar{g}_{2,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^5}, \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\beta_{g_3} = {} & \frac{4}{3\pi^2}\frac{15\bar{g}_{1,k}\bar{g}_{3,k} + \bar{g}_{2,k}(2\bar{a}_{2,k} + \bar{g}_{3,k} + 12\bar{\lambda}_{2,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^3} \\ & + \frac{1}{\pi^2}\frac{4\bar{a}_k\bar{b}_k\bar{g}_{2,k} + 8\bar{g}_{2,k}^2(\bar{g}_{2,k} - 9\bar{g}_{1,k}) + \bar{a}_k^2(\bar{g}_{3,k} + 8\bar{\lambda}_{2,k} - 2\bar{a}_{2,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^4} \\ & + \frac{16}{9\pi^2}\frac{3\bar{a}_k^3\bar{b}_k + 2\bar{a}_k^2\bar{g}_{2,k}(7\bar{g}_{2,k} - 12\bar{g}_{1,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^5} + \frac{20}{9\pi^2}\frac{\bar{a}_k^4(5\bar{g}_{2,k} - 6\bar{g}_{1,k})}{(1+\bar{m}_k^2)^6} + \frac{2}{\pi^2}\frac{\bar{a}_k^6}{(1+\bar{m}_k^2)^7}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

adódik.

2.2.3. Fixpontok és stabilitás

A [44]–ban alkalmazott eljáráshoz hasonlóan először a marginális csatolások β függvényeinek nullhelyeit keressük, vagyis megoldjuk a $\beta_{\lambda_1} = 0$, $\beta_{\lambda_2} = 0$, $\beta_{a_2} = 0$, $\beta_{g_3} = 0$ egyenleteket $\bar{\lambda}_{1,k}$, $\bar{\lambda}_{2,k}$, $\bar{a}_{2,k}$ és $\bar{g}_{3,k}$–ra vonatkozóan, a releváns csatolások függvényében. Az így adódó kifejezéseket ezekután behelyettesítjük a megmaradt, releváns operátorok β függvényeibe, melyek így már felösszegzéseket is tartalmazó, a $\bar{g}_{1,k}$ és $\bar{g}_{2,k}$ csatolások függvényében nemperturbatív kifejezésekként állnak elő. Utóbbi mutatja, hogy a perturbatív renormálási csoport $d = 4$ dimenzió körül nem vezethet ehhez hasonló eredményekre. Végül numerikusan keresünk fixpont megoldásokat a $\{\bar{m}_k^2, \bar{a}_k, \bar{g}_{1,k}, \bar{g}_{2,k}, \bar{b}_k\}$ változók terében, a rájuk vonatkozó β függvények nullhelyeinek megkeresésével. Vegyük észre, hogy a fixpontokat megadó egyenletek (a β függvények nullhelyei) szimmetrikusak az $a \to -a$, $b \to -b$ együttes tükrözésekre, ezért az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy $a < 0$.

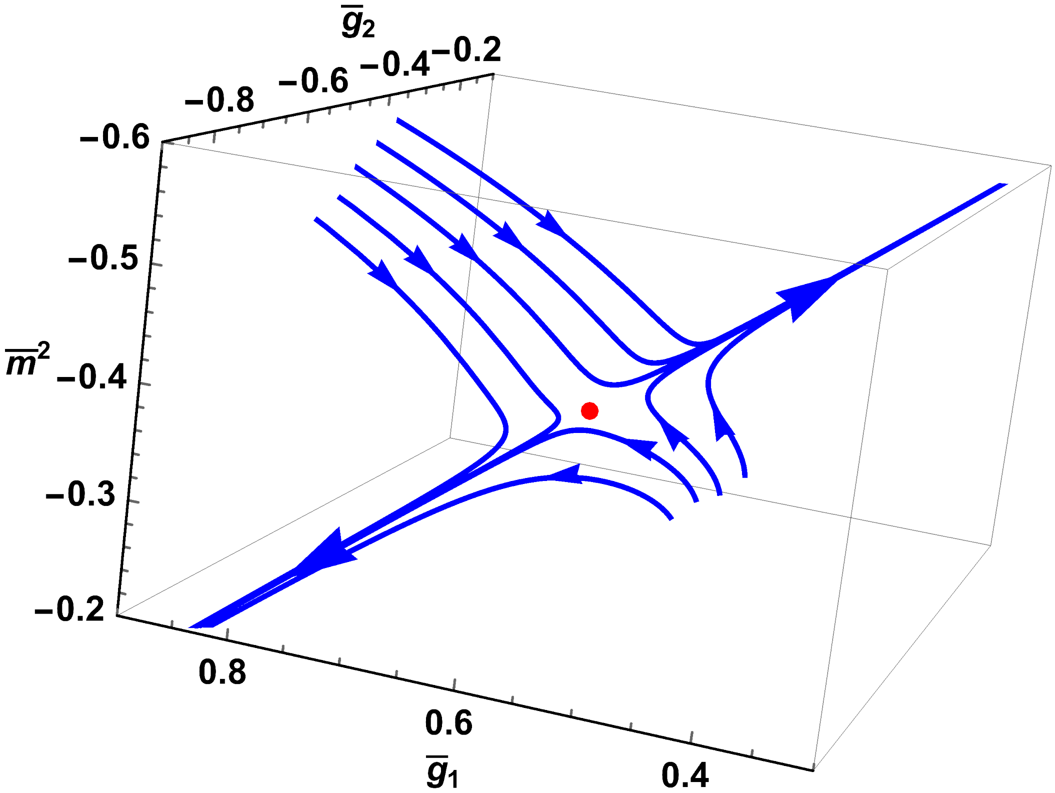
Az 2.1. táblázatban azon valós értékű fixpontokat soroljuk fel, melyekre a stabilitási mátrix, $\Omega_{ij} = \partial\beta_{\omega_i}/\partial\omega_j$ (itt ω_i a csatolások összességére utal), valós sajátértékekkel rendelkezik. (Mivel véges hőmérsékletű, másodrendű átalakulásokat keresünk, komplex értékű fixpontokkal, illetve valós értékű, de komplex stabilitási sajátértékekkel rendelkező fixpontokkal nem foglalkozunk.) Az első sorban látszik a gaussi–, majd a másodikban a szokásos $O(18)$ fixpont, és mindezeken kívül találunk két teljesen új fixpontot is, kettő és négy releváns iránnyal. A két releváns irányt mutató fixpont különösen érdekes. Mivel

$\bar{m}^2$	$\bar{g}_1$	$\bar{g}_2$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	# of RD
0	0	0	0	0	5
-0.31496	0.43763	0	0	0	3
-0.38262	0.59726	-0.62042	0	0	2
-0.01786	0.09163	-0.14148	-0.11900	0.39087	4

2.1. táblázat. Valós fixpontok, melyek stabilitási mátrixa valós sajátértékekkel rendelkezik. Az utolsó oszlopban a fixpontokhoz tartozó releváns irányok számát (RD) jelöltük.

véges hőmérsékletű, másodrendű fázisátalakulások olyan fixpontokhoz köthetőek, melyeknek pontosan egy releváns iránya van, ezért elsőre úgy tűnik, hogy egyik megtalált fixpont sem írhat le ilyen jellegű viselkedést. A stabilitási mátrix gondos analízisével azonban kiderül, hogy abban a fixpontban, mely két releváns iránnyal rendelkezik, a stabilitási mátrix blokkdiagonális, felbomlik egy 3×3–as blokkra a $\{\bar{m}_k^2, \bar{g}_{1,k}, \bar{g}_{2,k}\}$ térben, és egy 2×2–es blokkra a $\{\bar{a}_k, \bar{b}_k\}$ térben. Ez azt jelenti, hogy ha az axiális $U_A(1)$ szimmetria helyreáll az átalakulási pontban, vagyis sem az $\bar{a}_k$, sem a $\bar{b}_k$ irányok nem léteznek a Ginburg–Landau potenciálban, akkor ennek a fixpontnak pontosan egy releváns iránya van, ld. a 2.1. ábrát. Ez az eredmény nagyon meglepő az ϵ sorfejtés jóslatainak ismeretében, és ha az axiális anomália valóban eltűnik a kritikus pontban, akkor ez a fixpont egy másodrendű átalakulást jelezhet. Fordítva is lehet gondolkozni és amellett érvelni, hogy ha a királis átalakulásról tudni lehet, hogy az másodrendű (pl. rács szimulációkból), akkor ez az eredmény azt vetítheti előre, hogy az axiális $U_A(1)$ szimmetria helyreállt a kritikus pontban. Vegyük észre, hogy ez pont ellentétes a korábban idézett $N_f = 2$ esettel az ϵ sorfejtésben. Ott ugyanis az egyetlen mód arra, hogy a rendszer egy fixpontba [ez az $O(4)$ fixpont] kerüljön infravörös skálán az volt, hogy a kezdeti anomália csatolás legyen nagyon nagy (szigorúan véve végtelen).

Végül megjegyezzük, hogy a másodrendű átalakulás, amit a fenti anomáliamentes fixpont ír le, nem tartozhat egyik $O(N)$ univerzalitási osztályba sem, hiszen a rendszer szimmetriája ebben a pontban $U(3) \times U(3)$. Ami a kritikus exponenseket illeti, a stabilitási mátrix hőmérsékleti változóhoz tartozó sajátértékére $y_t \approx -1.206$ adódik, mely a ν kritikus exponensre a $\nu = -1/y_t \approx 0.829$ értéket jósolja. Mivel a tárgyalt közelítésben hullámfüggvény renormálási faktort nem vettük figyelembe, az η exponens értéke nulla.



2.1. ábra. Infravörös fixpont egy releváns iránnyal eltűnő axiális anomália mellett.

2.3. Összegzés

Ebben a fejezetben a kvantumszíndinamika királis szimmetriájának helyreállásával foglalkoztunk három kvarkíz esetén eltűnő kvarktömegek mellett. Korábbi, az ϵ sorfejtésen, illetve kevésbé kifinomult FRG analíziseken alapuló vizsgálatoktól eltérően azt találtuk, hogy a rendszerben létezik egy potenciálisan infravörös stabil fixpont, mely egy másodrendű fázisátalakulást képes leírni. A mostani és korábbi eredmények közötti eltérés vélhetően annak köszönhető, hogy jelen eljárásban a szabadenergiában előforduló operátorkészletet jelentősen kibővítettük, a (perturbatív) renormálhatóság, mint irányelv szerint. A sokdimenziós csatolási állandók terében így új fixpontok tudtak megjelenni, melyek egyszerűbb közelítésekben nem elérhetőek.

Rámutattunk arra is, hogy ahhoz, hogy a rendszerben valóban folytonos átalakulás menjen végbe, az axiális anomáliának el kell tűnnie a kritikus pontban. Ellenkező esetben vélhetően elsőrendűség lép fel. Eredményeink arra utalnak, hogy a legújabb rács QCD számolásokon [39, 40] alapuló következtetések, melyek szerint a királis limeszben a fázisátalakulás másodrendű három kvarkíz esetén, nem mondanak szükségszerűen ellent a renormálási csoport módszeren alapuló számításoknak. Ha valóban bebizonyosodik, hogy az átalakulás másodrendű, akkor eredményeink úgy is interpretálhatóak, hogy az infravörösben megtalált új fixpont stabilitási kritériumai miatt az axiális anomália helyreáll a kritikus pontban.

3. fejezet

Az axiális $U(1)$ szimmetria termális viselkedése

3.1. Az anomália szerepe az erős kölcsönhatásban

Az előző fejezetben részletesen elemeztük azt, hogy a királis szimmetria helyreállásának vonatkozásában az axiális $U_A(1)$ részcsoport anomális sérülése milyen következményeket von maga után. Ebben a fejezetben arra teszünk javaslatot, hogy az axiális anomália termális fluktuációkon keresztül fellépő hőmérsékletfüggése milyen módon tárgyalható. Ahogy az előzőekben már említettük, az anomália hőmérséklettől való függése kevéssé ismert, szerepe azonban annál jelentősebb. A kérdés megválaszolása különösen fontos abból a szempontból, hogy az anomália hatására jön létre a könnyű mezonspektrumban az η–η' felhasadás, illetve az axion nevű hipotetikus részecske fenomenológiája is ezen a jelenségen nyugszik [48, 49, 50]. Utóbbi a sötét anyag kutatások vonatkozásában is igen nagy jelentőséggel bír. Az anomália jellemzően mezontömegek degenerációjának hiányaként (ld. lejjebb), illetve nemnulla topologikus szuszceptibilitás formájában bukkan fel. Utóbbi az anomália hatására a QCD alapállapotában expliciten megjelenő topologikus töltés fluktuációjához köthető.

Mára gyakorlatilag tankönyvi anyag az, hogy az $U_A(1)$ szimmetria helyreáll magas hőmérsékleten, azonban igen keveset tudunk az anomáliának a királis fázisátalakulás pszeudokritikus hőmérséklete (T_c) környéki és főleg az alatti viselkedéséről. Ha $T \gg T_c$, akkor a Debye–árnyékolás hatására az instanton sűrűség, mely az anomália kialakulásáért felel, és rajta keresztül a topologikus szuszceptibilitás is exponenciálisan lecseng [45, 46, 47], azonban az idevonatkozó szemi–klasszikus számolások biztosan érvényüket vesztik, ha $T \lesssim T_c$.

Az anomália hőmérsékletfüggésének nagy irodalma van, ld. részletesen a [38] áttekintő írást. A legtöbb tanulmány a két kvarkízt tartalmazó rács QCD–n keresztül érhető el, melyekben tipikusan szuszceptibilitások és megfelelő tömegek degenerációját mérik a hőmérséklet függvényében. Pontosítva, mivel a pion (pszeudoskalár izotriplet mezon, π), és az a_0 (skalár izotriplet mezon) egy $U_A(1)$ transzformáció hatásásra vihetőek át egymásba, ezért az $m_{a_0} - m_\pi$ tömegkülönbség (vagy a $\chi_\pi - \chi_{a_0}$ szuszceptibilitás különbség) jól jellemzi az $U_A(1)$ részcsoport anomális sérülését.

A [32, 33, 34] tanulmányokban különböző piontömegek mellett, domain–wall fermionok alkalmazásával, szuszceptibilitásokon alapuló számítással arra jutottak, hogy az anomália a kritikus hőmérsékleten túl is jelen van. [29] szerint azonban (két kvarkíz mellett), Wilson fermionok használatával, a tömegkülönbségek mérésével az látszik, hogy az anomália effektíve megszűnik a kritikus hőmérsékleten királis limeszben. A Dirac–operátor sajátérték spektrumának analízisével, overlap fermionokat használva [35]–ben az látszik, hogy a szuszceptibilitások különbsége nemnulla, és az anomália a kritikus hőmérsékleten túl is él. A szuszceptibilitásokra vonatkozó királis extrapolációval, javított staggered fermion hatással még $1.6T_c$–nél is sérülő axiálszimmetriát lehet látni [36]. Ehhez hasonló konklúzióra jut [37], kevéssel T_c felett. Két kvarkíz mellett (Möbius) domain wall sea fermionokkal, az idevonatkozó sajátérték analízis után, az előzőekkel ellentétben az eredmények már T_c–n is konzisztensek az eltűnő anomáliával (királis limeszben) [30, 31].

Az anomália helyreállása effektív modellek és módszereken keresztül is tárgylható, lásd pl. a nemlineáris szigma modellt unitarizált királis perturbációszámítással [51, 52], a Polyakov kvark–mezon modellt [56, 57], a Polyakov hurokkal kiterjesztett Nambu–Jona-Lasinio modellt [54, 55], vagy a Witten–Di Vecchia–Veneziano modellt és a kiterjesztett lineáris szigma modellt [58]. A mezonspektrum és a topologikus szuszceptibilitás viselkedése vizsgálható Dyson-Schwinger módszerrel [59, 60], Ward–identitások alkalmazásával [61], illetve renormálási csoport technikával [62, 63].

A mi célunk ebben a fejezetben az anomáliát leíró effektív Kobayashi–Maskawa–t' Hooft (KMT) determináns csatolásának meghatározása. Ehhez azt fogjuk feltenni, hogy előbbi a királis kondenzátumnak is a függvénye, mely hatással van a csatolási erősségre elpárolgása nyomán. Ennek minél realisztikusabb leírása végett a csupasz anomália együtthatónak, mely a kezdeti UV skálán (Λ) definiált, explicit hőmérsékletfüggést is adunk, mely az instantonok járulékát hordozza magában. Emögött az a képünk van, hogy amennyiben az effektív mezonmodell, amivel dolgozni fogunk, levezethető a QCD–ből, az valami olyan $\Lambda = \mathcal{O}(1\,\mathrm{GeV}\,)$ UV skálán lesz érvényes, melyen az elmélet paramétereinek hőmérsékletfüggése nem elhanyagolható. Utóbbiak közül az anomáliának van a legfontosabb szerepe, hiszen erről pontosan tudjuk, hogy nagy T esetén el kell tűnnie. A csupasz anomália együttható hőmérsékletfüggésére az irodalomban már korábban használtakhoz hasonló feltételezéssel élünk majd [53, 54, 55, 56]. Vizsgálataink középpontjában az fog állni, hogy az így bevezetett instanton járulékok, és a kiszámolandó mezonikus fluktuációk hogyan alakítanak ki együttesen egy realisztikus (effektív) hőmérsékletfüggő anomália együtthatót.

3.2. Királis effektív potenciál

Vizsgálódásainkat az előző fejezetben már ismertetett effektív modellel bár teljesen nem azonos, de vele analóg elméletben folytatjuk. Az ott elhangzottaktól eltérően most nem egy három dimenziós Ginzburg–Landau modellként gondolunk az effektív leírásra, hanem bevezetjük negyedik iránynak a hőmérsékletet is. Az elméletünk dinamikai változója ugyanúgy egy 3×3–as komplex M mátrix, $M = (s_a + i\pi_a)T^a$, ahol T^a ismét az $U(3)$ csoport generátorait jelöli, $\mathrm{Tr}\,(T^aT^b) = \delta^{ab}/2$. Az M mezőn a királis szimmetria $M \to LMR^\dagger$ módon ábrázolódik, ahol L és M tetszőleges $U(3)$ unitér mátrixok. A s_a és π_a mezők gerjesztései skalár és pszeudoskalár mezonokkal azonosítandók. A skálafüggő effektív hatásra ezúttal is a következő (LPA, hullámfüggvény renormálás nélküli) feltételezéssel élünk:

$$\Gamma_k = \int_x \Big(\mathrm{Tr}\,[\partial_i M^\dagger \partial_i M] + V_k[M] \Big), \tag{3.1}$$

ahol azonban a V_k effektív potenciálra az előző fejezettől eltérő közelítést fogunk tenni. Ehhez először felidézzük újra, hogy V_k–ban csak királisan szimmetrikus kombinációk fordulhatnak elő, ezek közül a függetlenek három kvarkíz esetén (a 3+1 dimenziós modellben új jelöléseket használva)

$$\begin{aligned}
\rho &= \mathrm{Tr}\,(M^\dagger M), \qquad \tau = \mathrm{Tr}\,\Big(M^\dagger M - \mathrm{Tr}\,(M^\dagger M)/3\Big)^2, \\
\rho_3 &= \mathrm{Tr}\,\Big(M^\dagger M - \mathrm{Tr}\,(M^\dagger M)/3\Big)^3,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

az anomáliát leíró KMT tag pedig

$$\Delta = \det M^\dagger + \det M. \tag{3.3}$$

Ismét megjegyzendő, hogy $\tilde{\Delta} = \det M^\dagger + \det M$ paritása negatív, ezért tiltott, illetve, hogy $\tilde{\Delta}^2$ nem független invariáns. Ezek alapján az effektív potenciál négy invariáns függvénye, $V_k(M) = V_k(\rho, \tau, \rho_3, \Delta)$. A szimmetriasértés mintázata explicit szimmetriasértő tagok nélkül $U(N_f) \times U(N_f) \longrightarrow U_V(N_f)$ (Wafa–Witten tétel [64]), ahol a megmaradó szimmetriák a vektor transzformációkból kerülnek ki, vagyis a spontán sértett alapállapotban $\bar{M} \sim \mathbf{1}$. Ez azt jelenti, hogy vákuumban $\tau = 0 = \rho_3$, vagyis a $V_k(\rho, \tau, \rho_3, \Delta)$ potenciált van értelme az alapállapot körül az előbbi invariánsok szerint sorba fejteni. Az alábbiakban nem csak τ és ρ_3 szerinti Taylor–sor vezető rendjében dolgozunk, hanem elvégezzük a kifejtést Δ szerint is. Ezt előzetesen semmi nem indokolja, de megjegyezzük, hogy közelítésünk így is messze túlmutat a szokvány perturbatív számolásokon, hiszen minden invariáns együtthatója egy ρ–tól függő függvénnyé válik. Természetesen nagyon érdekes volna majd látni, hogy Δ magasabb hatványai milyen módon befolyásolják az eredményeket. Megmutatható, hogy ezek a tagok a QCD magasabb töltésű instantonjait reprezentálják az effektív modellben [66]. Az explicit szimmetriasértő tagokkal (H) kiegészített potenciál így

$$V_k(\rho, \tau, \rho_3, \Delta; H) \ = \ U_k(\rho) + C_k(\rho)\tau + D_k(\rho)\rho_3 + A_k(\rho)\Delta - \operatorname{Tr}\Big(H(M + M^\dagger)\Big), \tag{3.4}$$

ahol a H külső térről rögtön feltettük, hogy skálafüggetlen, hiszen fluktuációk hatására nem renormálódik. A kvarktömegek izospin sértését elhanyagolva a $H = h_0 T^0 + h_8 T^8$ választással élünk.

Fő feladatunk a V_k függvény véges hőmérsékletű skálafüggésének numerikus előállítása az (1.24) egyenlet alapján. Vegyük észre, hogy ehhez valójában csatolt, térfüggő differenciálegyenletet kell megoldanunk a U_k, C_k, D_k és A_k koefficiens függvényekre (általánosított csatolásokra). Az anomália fejlődésének leírásához ebből majd az A_k függvényt kell analizálnunk.

3.3. A koefficiens függvények futásai

A Wetterich–egyenlet megoldásához kezdeti feltételekre van szükségünk. Ahogy a bevezetésben szerepelt, az FRG formalizmusban általában azt tesszük fel, hogy a szóban forgó rendszer mikroszkopikus jellemzői valamilyen Λ UV skálán ismertek, és ebből határozzuk meg a makroszkopikus viselkedést $k = 0$–n. Az UV skálára esetünkben a modell effektív jellege miatt $\Lambda = 1\,\mathrm{GeV}$-et írunk elő, és mivel a mikroszkopikus skálán jó közelítéssel az effektív potenciál csak renormálható operátorokat tartalmaz, így

$$V_\Lambda(\rho,\tau,\rho_3,\Delta;H) = m^2\rho + g_1\rho^2 + g_2\tau + a\Delta - \operatorname{Tr}\Big(H(M+M^\dagger)\Big), \tag{3.5}$$

vagyis

$$U_\Lambda(\rho) = m^2\rho + g_1\rho^2, \quad C_\Lambda(\rho) = g_2, \quad D_\Lambda(\rho) = 0, \quad A_\Lambda(\rho) = a. \tag{3.6}$$

A m^2, g_1, g_2, és a paraméterek, ha az UV skála kellően magas, nem függhetnek külső jellemzőktől (pl. hőmérséklet), és valamilyen fizikailag releváns bemenő adatok segítségével fogjuk őket meghatározni, pl. az elmélethez tartozó mezonspektrum kialakulásából $k = 0$–n. Mivel a modellünk mikroszkopikus skálája nem elegendően magas ($1\,\mathrm{GeV}$ összemérhető a rendszerben fellépő mezontömegek karakterisztikus nagyságrendjével), ezért valójában az m^2, g_1, g_2, és a UV értékeinek külső paraméterektől való függése nem feltételnül hanyagolható el. Mi ezt az anomália a paramétere esetén erősen ki fogjuk használni, hiszen tudjuk azt, hogy kellően magas hőmérsékleten az effektív modellben az anomáliát leíró determináns tag nem jelenhet meg. Ez azt jelenti, hogy $a \approx 0$ kell legyen, ha T nagy. Erre a későbbiekben még visszatérünk.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogyan lehet a Wetterich–egyenletből a különböző koefficiens függvényekre vonatkozó futási egyenleteket kinyerni. Ehhez mindenek előtt feltesszük, hogy mivel ρ_3 nemrenormálható operátor, a rendszer viselkedésének szempontjából kevéssé releváns, és a $D_k(\rho) \approx 0$ feltételezéssel élünk minden k–ra. A véges hőmérsékletű Wetterich–egyenlet Litim–regulátorral felírt (1.24) alakjának bal oldalán

$$\partial_k U_k(\rho) + \partial_k C_k(\rho)\tau + \partial_k A_k(\rho)\Delta \tag{3.7}$$

áll, a jobb oldalon pedig az $\omega_n^2 + k^2 + V_k^{(2)}$ 18×18–as mátrix inverzének trace–jét kell kiértékelnünk. Ahogy azt már az előző fejezetben is részletesen tárgyaltuk, a probléma ezen a ponton az, hogy a $V_k^{(2)}$ mátrix a mezők, nem pedig a belőlük összeálló invariánsoknak a függvénye. A Wetterich–egyenlet természetesen királisan szimmetrikus, ezért ezek a térfüggések végül össze kell, hogy kombinálódjanak invariáns tenzorokká, de gyakorlati szempontból nemtriviális az, hogy ez hogyan valósítható meg. Az (1.24) egyenlet jobb oldalának kiértékeléséhez egy olyan kifejtést kell alkalmaznunk, melynek eredménye kompatibilis a kiindulási, (3.4) ansatz–cal. Ehhez vegyük észre azt, hogy akármilyen mezőt is használunk háttérnek, a végeredmény invariánsok formájában ugyanaz kell, hogy legyen. Ez azt jelenti, hogy különféle, speciális mezőkonfiguráció is használható (1.24) jobb oldalának kiszámításakor egészen addig, amíg a benne szereplő ρ, τ és Δ invariánsok egyértelműen felismerhetők a kapott kifejezésben. Használhatjuk a számolás szempontjából legkényelmesebb háttérmezőt, majd az invariánsok azonosítása, és a futási egyenlet megoldása után az effektív potenciált már a külső terek által diktált fizikai háttérhez ($M = s_0 T^0 + s_8 T^8$) tartozó pontokban tudjuk vizsgálni.

Először az $M = (s_0 + i\pi_0)T^0$ háttéren dolgozunk. Ennek fő előnye az, hogy benne $\tau = 0$ (és az elhagyott ρ_3 is eltűnik rajta), továbbá

$$\rho = \frac{1}{2}(s_0^2 + \pi_0^2), \qquad \Delta = \frac{s_0^3 - 3\pi_0^2 s_0}{3\sqrt{6}}. \tag{3.8}$$

Eszerint a τ invariáns a Wetterich–egyenletben ezen a háttéren nem szerepel, vagyis az U_k és az A_k kiszámítható a tisztán ρ függő, illetve a Δ –ban lineáris tagok összességéből. Ez különösen kényelmes, hiszen nem kell nyomon követnünk, hogy a τ invariáns hogyan bukkan fel a futási egyenlet jobb oldalán. Természetesen ezáltal a C_k függvény futása ebben a keretben nem is érhető el (később visszatérünk hozzá), viszont az U_k és az A_k egyenleteibe ettől függetlenül járulékot fog adni. Mivel a háttér, amin dolgozunk, arányos az egységmátrixszal, az ekörüli fluktuációk a $V_k^{(2)}$ mátrixot 8 dublet sajátmódusra bontja a $\{s_i, \pi_i\}$, $i = 1, 2, ..., 8$ síkokban, illetve létrehoz egy ezektől különböző dubletet a $\{s_0, \pi_0\}$ síkban. A sajátértékek hosszas és nehézkes kiszámítása után az (1.24) egyenlet jobb oldala az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned}
&8\frac{\Omega}{2}T\sum_n \tilde{\partial}_k \log\Big((\omega_n^2 + k^2 + U_k' + A_k'\Delta)^2 + \frac{4}{3}(\omega_n^2 + k^2 + U_k' + A_k'\Delta)\rho C_k - \frac{\rho A_k^2}{3} + 2A_k C_k \Delta\Big)\\
&+\frac{\Omega}{2}T\sum_n \tilde{\partial}_k \log\Big((\omega_n^2 + k^2 + U_k' + A_k'\Delta)^2 + 2(\omega_n^2 + k^2 + U_k' + A_k'\Delta)\Big(3A_k'\Delta + (U_k'' + A_k''\Delta)\rho\Big)\\
&\qquad -6A_k\Delta(U_k'' + A_k''\Delta) - \frac{4}{3}\rho(A_k + \rho A_k')^2 + 9\Delta^2 A_k'^2\Big),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ahol $\Omega = \frac{k^3}{6\pi^2}$, illetve bevezettük a $\tilde{\partial}_k$ jelölést, mely egy olyan differenciáloperátor, mely csak az explicit k–függésre hat. Az első tag az $s - \pi$ keveredésből következik a $i = 1, 2, ...8$ szektorokban, míg a második az $i = 0$–hoz tartozó dubletből jön. Megjegyezzük, hogy a ρ és Δ invariánsok már ezen szektorokon belül egyértelműen azonosíthatóak voltak. Ahhoz, hogy az eredeti, (3.4) ansatz–cal kompatibilis eredményt kapjunk, (3.9) kifejezését Δ szerint lineáris rendig sorba kell fejtenünk. Ezzel az U_k egyenletére kapjuk, hogy

$$\partial_k U_k(\rho) = \frac{\Omega}{2} T \sum_n \tilde{\partial}_k (8 \log D_8 + \log D_0), \tag{3.10}$$

míg az A_k –ra az alábbi vonatkozik:

$$\begin{aligned} \partial_k A_k(\rho) &= \Omega T \sum_n \tilde{\partial}_k \Big[\frac{8}{D_8} \Big(A_k'(\omega_n^2 + k^2 + U_k') + \frac{2}{3}\rho C_k A_k' + A_k C_k \Big) \\ &\quad + \frac{1}{D_0} \Big((4A_k' + \rho A_k'')(\omega_n^2 + k^2 + U_k') + U_k''(\rho A_k' - 3A_k) \Big) \Big], \end{aligned} \tag{3.11}$$

ahol

$$\begin{aligned} D_8 &= (\omega_n^2 + k^2 + U_k')(\omega_n^2 + k^2 + U_k' + \frac{4}{3}\rho C_k) - \frac{1}{3}\rho A_k^2, \\ D_0 &= (\omega_n^2 + k^2 + U_k')(\omega_n^2 + k^2 + U_k' + 2\rho U_k'') - \frac{4}{3}\rho (A_k + \rho A_k')^2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Megjegyezzük, hogy (3.10) közvetlenül az $M = i\pi_0 T^0$ háttér alkalmazásával is megkapható, ahol $\tau = 0$ mellett $\Delta = 0$ is teljesül. A $V_k^{(2)}$ mátrix kiszámítása után a (1.24) jobb oldalának kiszámításával azonnal (lényegesen egyszerűbben) (3.10)–hez jutunk.

Most már rátérhetünk a $C_k(\rho)$ egyenletére. Ehhez az $M = i(\pi_0 T^0 + \pi_8 T^8)$ tisztán képzetes hátteret választjuk. Ilyenkor Δ automatikusan eltűnik, ρ és τ–ra pedig a

$$\rho = \frac{1}{2}(\pi_0^2 + \pi_8^2), \quad \tau = \frac{1}{3}\pi_8^2 \Big(\pi_0 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\pi_8 \Big)^2. \tag{3.13}$$

kifejezések érvényesek. Ezen a háttéren a fluktuációs járulékok három + négy degenerált dublettté ($\{\sigma_i, \pi_i\}$, $i = 1, 2, 3$, illetve $\{\sigma_i, \pi_i\}$, $i = 4, 5, 6, 7$ síkok), illetve egy teljesen csatolt kvartetté ($\{s_0, s_8, \pi_0, \pi_8\}$ altér) válnak szét. Az előbbi hét, 2×2–es alszektorok könnyedén számolhatóak, azonban a 4×4–es blokk analitikus kiszámítása meglehetősen körülményes. A (1.24) egyenlet jobb oldalát π_8 szerint sorbafejtve, a $\tau = \pi_0^2\pi_8^2/3 + \mathcal{O}(\pi_8^3)$ azonosítással, az U_k egyenletének ismeretében a C_k egyenletére az alábbiakat kapjuk:

$$
\begin{aligned}
\partial_k C_k \;=\; \Omega T \sum_n \tilde{\partial}_k \bigg\{ & \frac{7}{2D_8}\Big(2C'_k(\omega_n^2+k^2+U'_k)+\frac{4}{3}\rho C_k C'_k+2C_k^2\Big) \\
& +\frac{2}{D_8}\Big(\frac{3}{2}C'_k(\omega_n^2+k^2+U'_k)+\frac{1}{3}\rho C_k C'_k-\frac{1}{4}A_k A'_k\Big) \\
& -\frac{2}{3D_8^2}\Big(A_k^2+\frac{4}{3}\rho C_k^2+4C_k(\omega_n^2+k^2+U'_k)\Big)^2 \\
& +\frac{1}{D_0}\Big((3C'_k+\rho C''_k)(\omega_n^2+k^2+U'_k)+\frac{3}{2}A'_k(A_k+\rho A'_k)+\rho C'_k U''_k\Big) \\
& -\frac{4}{3D_8^2}\bigg(\frac{1}{16}A_k^4+\frac{7}{12}\rho A_k^2 C_k^2+\frac{2}{9}\rho^2 C_k^4(\omega_n^2+k^2+U'_k)\Big(A_k^2+\frac{1}{3}\rho C_k^2\Big)C_k \\
& \qquad +\frac{5}{4}(\omega_n^2+k^2+U'_k)^2 C_k^2\bigg) \\
-\frac{8}{D_0 D_8}\bigg(& (\omega_n^2+k^2+U'_k)^2\Big(\frac{5}{12}C_k^2+\frac{3}{16}(U''_k+\frac{4}{3}\rho C'_k)^2+\frac{1}{2}C_k(U''_k+\frac{4}{3}\rho C'_k)\Big) \\
& +(\omega_n^2+k^2+U'_k)\Big(\frac{1}{6}\rho C_k^2(U''_k+\frac{2}{3}C'_k)+\frac{1}{16}(U''_k+\frac{4}{3}\rho C'_k)(A_k^2-4\rho A_k A'_k-4\rho^2 A'^2_k) \\
& \qquad +\frac{C_k}{24}(3A_k^2-4\rho^2 A'^2_k)\Big) \\
& +\frac{2}{9}\rho^2 U''_k C_k^3-\frac{1}{9}\rho C_k^2(A_k^2-\rho A_k A'_k-2\rho^2 A'^2_k)-\frac{1}{4}\rho C_k A_k^2 U''_k \\
& -\frac{2}{9}\rho^2 C_k C'_k A_k(A_k+\rho A'_k)-\frac{A_k}{48}(A_k+\rho A'_k)(A_k^2-4\rho^2 A'^2_k)\bigg) \\
+\frac{A_k^2}{6D_0D_8} & \Big(4C_k(\omega_n^2+k^2+U'_k)-A_k^2\Big) \\
+\frac{(\omega_n^2+k^2+U'_k)^2 A_k^2}{4D_0D_8^2} & \Big(A_k^2+\frac{8}{3}\rho A_k A'_k+\frac{4}{3}\rho^2 A'^2_k-\frac{8}{3}\rho C_k(U''_k-\frac{2}{3}C_k)\Big) \\
+\frac{(\omega_n^2+k^2+U'_k)}{4D_0D_8} & \bigg(6(\omega_n^2+k^2+U'_k)(U''_k-\frac{2}{3}C_k)^2-\frac{2A_k^2}{D_8}(\omega_n^2+k^2+U'_k)^2(U''_k-\frac{2}{3}C_k) \\
& +(A_k^2+\frac{8}{3}\rho A_k A'_k+\frac{4}{3}\rho^2 A'^2_k)\Big(\frac{4\rho C_k A_k^2}{3D_8}-3(U''_k-\frac{2}{3}C_k)\Big)\bigg) \\
+\frac{1}{D_0}\bigg(& A_k A'_k+\rho A'^2_k\Big(\frac{1}{2}-\frac{(\omega_n^2+k^2+U'_k)^2}{D_8}\Big) \\
-\frac{\omega_n^2+k^2+U'_k}{4D_8} & \Big(A_k^2(2C_k+U''_k)-4\rho A_k A'_k(U''_k-\frac{2}{3}C_k)+4\rho^2 A'^2_k(U''_k+\frac{2}{3}C_k)\Big)\bigg)\bigg\}. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Itt D_0 és D_8 háttérfüggetlen definíciója (3.12)–ből olvasható le. Megjegyezzük, hogy a ρ_3 invariáns ezen a háttéren is a nulla értéket vesz fel, ezért nem is tud megjelenni, és esetlegesen összefolyni a C_k renormálási csoport egyenletével (1.24) jobb oldalán.

3.4. Numerikus eredmények

A (3.10), (3.11) és (3.14) egyenleteket az ún. grid módszerrel oldjuk meg. Ehhez felveszünk három egydimenziós rácsot ρ térben, $\delta\rho = 50\,\mathrm{MeV}^2$ lépésközzel. Minden ρ szerinti deriváltat a 6–pont formula segítségével számolunk, kivéve a határokon, ahol 5– és 4–pont formulákat használunk. A differenciálegyenleteket ezután a negyedrendű Runge–Kutta módszerrel integráljuk, $k = \Lambda \equiv 1\,\mathrm{GeV}$–ból indulva $k = 0$–ig, a (3.6) kezdeti feltételekkel. Ahogy az irodalomban számos alkalommal már szerepelt, itt is azt tapasztaljuk, hogy az egyenletek megoldása fokozatosan lelassul a $k \to 0$ limeszben, egyre nagyobb számítási kapacitást igényelve. Az integálásokat ezért, $k_{\mathrm{end}} = 10\,\mathrm{MeV}$ értéknél abbahagyjuk, amikor már az összes függvény gyakorlatilag bekonvergált, és semmilyen eredmény nem függ k–tól. A Matsubara–szummákat analitikusan végezzük el a (3.10) és (3.11) egyenletekben, míg numerikusan (3.14)–ben. Utóbbi során a levágásokat olyan nagynak választjuk, hogy azoktól az összegzések végeredménye gyakorlatilag nem függ. Ez nagyságrendileg $\mathcal{O}(1000)$ tag figyelembevételét jelenti.

Az első feladatunk, mielőtt eredményeket tudnánk felmutatni, a modell paraméterezése. A H mátrix, vagyis annak h_0 és h_8 komponensei a részlegesen megmaradó axiálvektor áram (PCAC) relációkból következnek. Ezek a következőek:

$$m_\pi^2 f_\pi = \sqrt{\frac{2}{3}}h_0 + \sqrt{\frac{1}{3}}h_8, \qquad m_K^2 f_K = \sqrt{\frac{2}{3}}h_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}h_8, \tag{3.15}$$

amiből

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}m_\pi^2 f_\pi + \sqrt{\frac{2}{3}}m_K^2 f_K, \qquad h_8 = \frac{2}{\sqrt{3}}m_\pi^2 f_\pi - \frac{2}{\sqrt{3}}m_K^2 f_K \tag{3.16}$$

adódik, ahol m_π, m_K rendre a pion és kaon tömegek, míg f_π ($93\,\mathrm{MeV}$) és f_K ($113\,\mathrm{MeV}$) a hozzájuk tartozó bomlási állandók. A H mátrix az előbbieknek megfelelő megválasztása esetén a rendszer alapállapotában kétkomponensű kondenzátum alakul ki: $M = s_0 T^0 + s_8 T^8$. Az elmélet hátralévő négy paraméterét, m^2, g_1, g_2, és a–t úgy kell megválasztani, hogy a pszeudoskalár mezonok tömegei (π, K, η, η') reprodukálják a fizikai spektrum idevonatkozó részét, vagyis legyen $m_\pi \approx 140\,\mathrm{MeV}$, $m_K \approx 494\,\mathrm{MeV}$, $m_\eta \approx 548\,\mathrm{MeV}$, $m_{\eta'} \approx 958\,\mathrm{MeV}$.

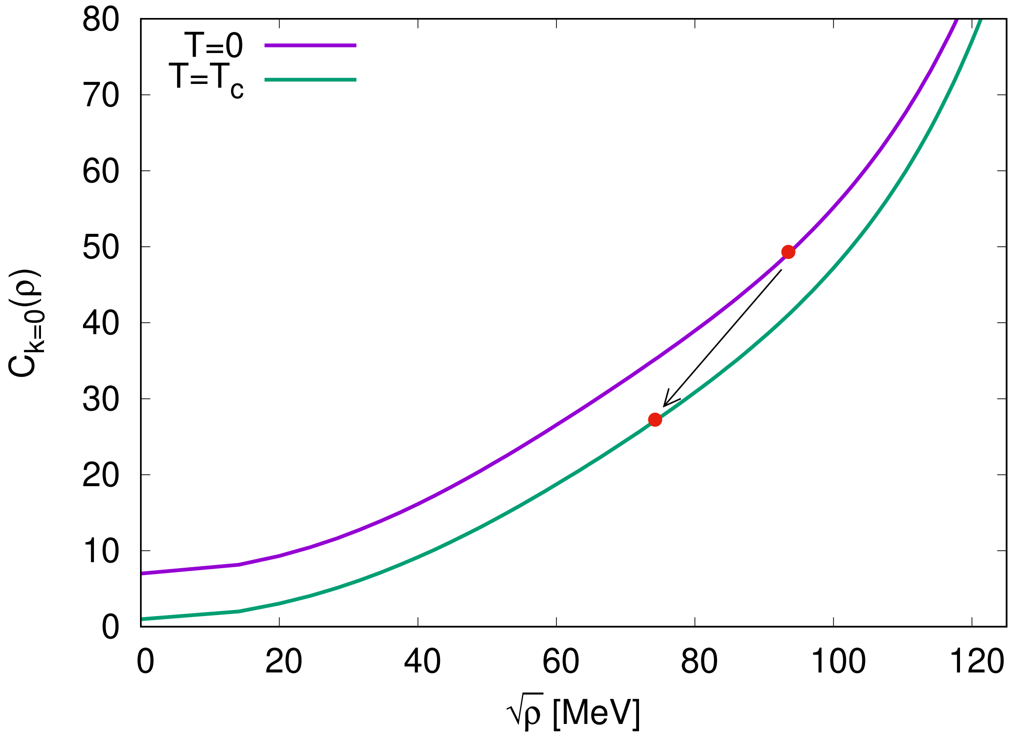
m^2	$-0.9\,\mathrm{GeV}^2$
g_1	20
g_2	360
a	$-2.6\,\mathrm{GeV}$
h_0	$(285\,\mathrm{MeV})^3$
h_8	$(-310\,\mathrm{MeV})^3$

3.1. táblázat. A kezdeti, UV potenciálhoz tartozó paraméterek értékei.

A tömegek alapján adódó paraméterek a 3.1 táblázatban találhatóak. A skalárokat az $f_0(500)$ (σ), $K_0^*(800)$ (κ), $a_0(980)$, és $f_0(980)$ mezonokkal szeretnénk azonosítani, de a kialakuló tömegek kevéssé pontosak, különösen ami a σ mezont illeti. Itt megjegyezzük, hogy a σ mező a királis szimmetriasértés rendparamétere is egyben, mely, bár a hozzátartozó fluktuáció tömege pontatlan, pontosan azt a viselkedést mutatja, amit egy véges hőmérsékletű átalakulásnál várunk. A tömegek pontatlanságának egy lehetséges oka az, hogy euklideszi térben dolgozva az FRG egyenletek nem alkalmasak arra, hogy a részecskék élettartamát is figyelembe vegye, így azok széles rezonanciákként való értelmezése sem lehetséges. Meg lehetett volna tenni, hogy a pszeudoskalár spektrum bizonyos részeit feláldozva úgy választjuk meg a paramétereket, hogy azok inkább a skalárok tömegeit írják le pontosabban, de mivel itt főként az axiális anomália skálafejlődésére vagyunk kíváncsiak a fizikai pontban, ezért a könnyű pszeudoskalárok mellett az η–η' rendszer tömegét igyekeztünk minél pontosabban beállítani. Azt is megjegyezzük, hogy egy pontosított skalár szektorhoz tartozó paraméter választással (és ezáltal persze pontatlanabb pszeudoskalár spektrummal) sem változott volna kvalitatíve az anomália fejlődése.

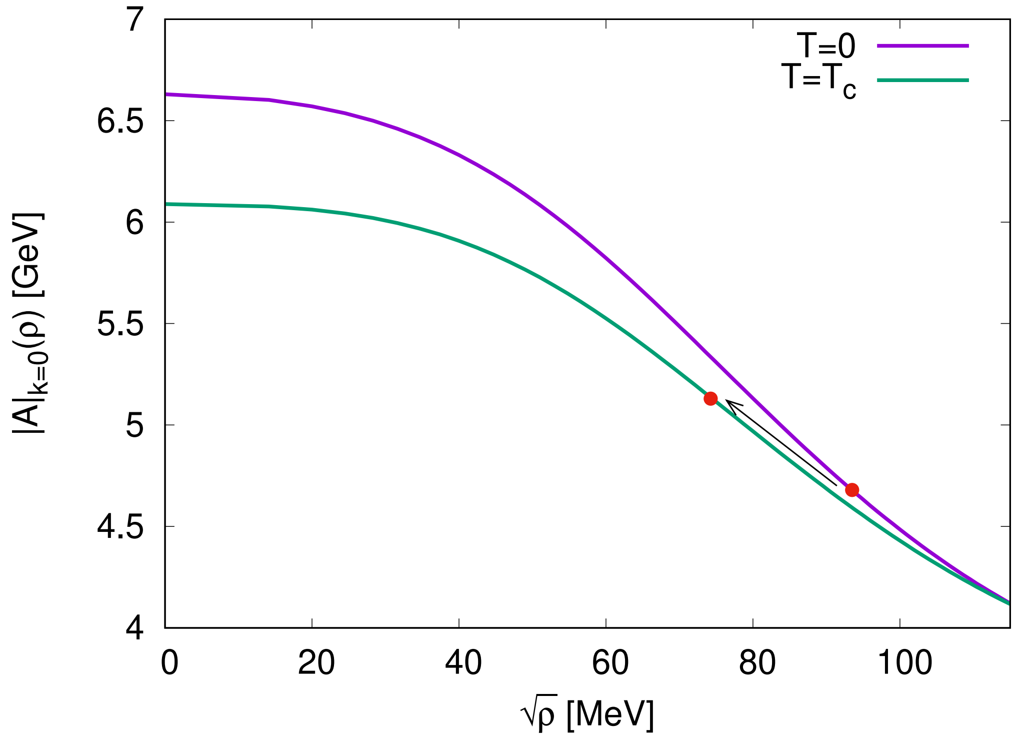
3.4.1. Nulla hőmérséklet

Először áttekintjük a nulla hőmérsékletű eredményeket. Az $U_{k\to 0}(\rho)$ megoldásaként adódó görbe hasonlóan viselkedik, mint az effektív potenciál bármilyen $O(N)$ jellegű modellben, vagyis a szimmetriasértő alak fokozatosan kisimul, ahogy k csökken, hiszen az infravörösben az $U_k(\rho)$ függvény konvex kell, hogy legyen. A $C_{k\to 0}(\rho)$ és $A_{k\to 0}(\rho)$ függvények érdekesebbek. Ami az előbbit illeti, a 3.1 ábrán azt látjuk, hogy a csupasz, térfüg-



3.1. ábra. A $C_{k\to 0}(\rho)$ függvény menete $T = 0$–n és $T = T_c$–n. A piros pontok a $C_{k\to 0}$ függvénynek az effektív potenciál minimumában felvett értékeit jelzik.

getlen, UV skálán definiált csatolás ($g_2 = 360$) nagyon jelentősen megváltozik az infravörös skálák felé haladva. Ez nem meglepő (dimenzióanalízis alapján), hiszen feltehetően $\sim \log \Lambda^2$ típusú tagok befolyásolják a csupasz csatolást, de amit fontosabb észrevennünk, hogy a $C_{k\to 0}(\rho)$ függvény térfüggése egyáltalán nem elhanyagolható. Ez azt jelzi, hogy az FRG által megvalósuló ρ szerinti felösszegzés nagyon jelentős, hiszen pl. perturbációszámításon keresztül biztosan nem kaphattunk volna hasonló viselkedést. Ami az $A_{k\to 0}(\rho)$ függvényt illeti, hasonló mintázatot látunk, az anomáliafüggvény abszolút értéke azonban monoton csökkenő. Nulla hőmérsékleten az anomáliának a nulla tér mellett, illetve a minimumban felvett értéke közötti relatív különbségének arányszámára, $[|A|_{k\to 0}(\rho = 0) - |A|_{k\to 0}(\rho = \rho_{\min})]/|A|_{k\to 0}(\rho = 0) \sim 30\%$–ot kapunk, ami jelentős különbség. Az anomáliafüggvény csökkenő jellege rögtön azt jelzi, hogy amint a hőmérsékleti fluktuációkat figyelembevesszük, az axiális anomália erőssége nőni fog, hiszen ahogy a kondenzátum elpárolog, az anomáliafüggvény, $|A|_{k\to 0}(\rho = \rho_{\min})$, tényleges értéke nagyobb lesz, ld. a 3.2 ábrát.



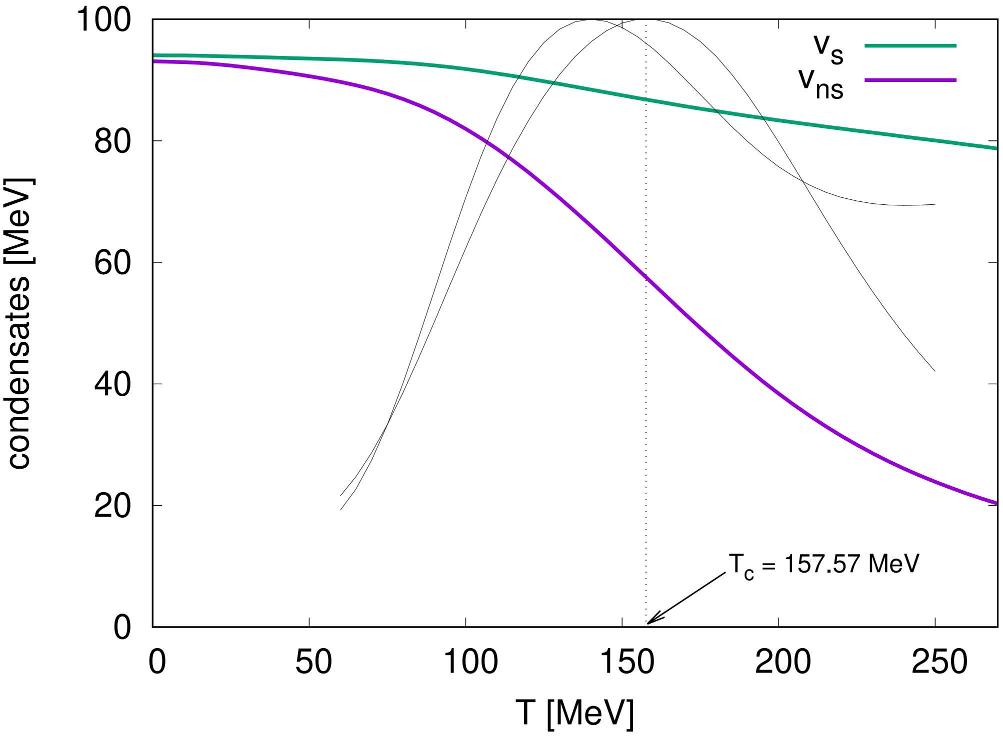
3.2. ábra. Az $A_{k\to 0}(\rho)$ függvény menete $T=0$–n és $T=T_c$–n. A piros pontok az $|A|_{k\to 0}$ függvénynek az effektív potenciál minimumában felvett értékeit jelzik.

3.4.2. Véges hőmérséklet

A teljes effektív potenciál minimalizálásának feltételéből a s_0 és s_8 kondenzátumok termális fejlődésére következtethetünk. Valójában a $0-8$ irányok helyett érdemesebb ritka–nemritka bázist használni:

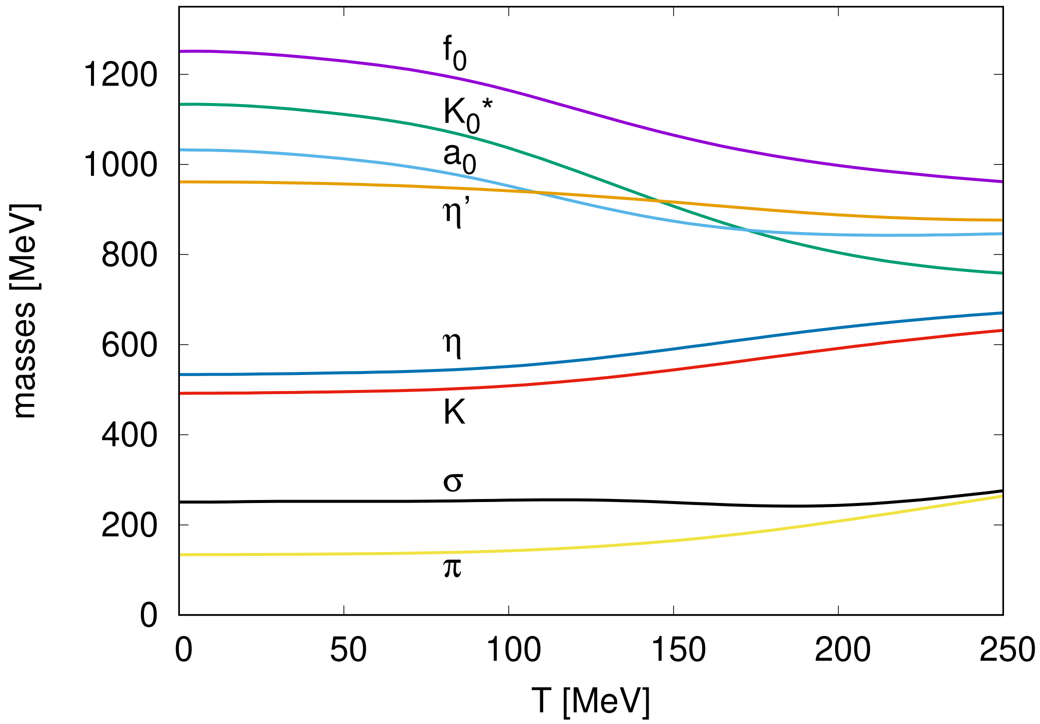
$$\begin{pmatrix} s_{\rm ns} \\ s_{\rm s} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_8 \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

és $V_{k\to 0}$ minimum pontját $v_{\rm ns}, v_{\rm s}$ –val jelölve $\rho_{\rm min} = (v_{\rm ns}^2 + v_{\rm s}^2)/2$. Az eredmények a 3.3 ábrán láthatóak. A pszeudokritikus hőmérsékletet, T_c–t, a $v_{\rm ns}(T)$ inflexiós pontjaként definiáljuk, mely meglepően közelinek adódik a rács QCD eredményekhez, $T_c \approx 158\,\mathrm{MeV}$–at kapunk. Vegyük észre, hogy a ritka komponens sokkal lassabban párolog el, de az inflexiós pontja egy kevéssel ($\sim 10\,\mathrm{MeV}$) alacsonyabbnak adódik. Megjegyezzük, hogy akár az $m_\sigma - m_\pi$ tömegkülönbséget is lehet használni a pszeudokritikus hőmérséklet meghatározására. Ebből $T_c \approx 167\,\mathrm{MeV}$ adódik, mely 5% –kal magasabb annál, mint amit a nemritka kondenzátum termális fejlődéséből kaptunk. Az így kapott hőmérsékletek egymáshoz közeli értéke kompatibilis egy sima crossover átmenetről alkotott képpel.



3.3. ábra. A ritka– és nemritka kondenzátumok hőmérséklettől (T) való függése. A fekete görbék a kondenzátumok T–deriváltjait mutatják, az ábra tetejére normálva. Eredményünk a pszeudokritikus hőmérsékletre $T_c \approx 158\,\mathrm{MeV}$.

A 3.4 ábrán a tömegspektrum termális fejlődése látszik. A tömegek az effektív potenciál második deriváltjának, mint mátrixnak a sajátértékei, és ahogy már korábban említettük, a modell paramétereinek meghatározásához a pszeudoskalár gerjesztéseket használtuk fel bemenő adatként. Ebben a parametrizációban a skalárok tömegei kevésbe pontosak, pl. kifejezetten alacsony σ, de magas f_0 tömeg adódott. Az nyitott kérdés, hogy egy kifinomultabb FRG közelítésben a skalárok tömege pontosabbá tud–e válni. Amire felhívjuk a figyelmet, hogy az η' tömege nem mutat csökkenést a pszeudokritikus hőmérséklet környékén, ami arra utal, hogy az $U_A(1)$ anomália nem szűnik meg az átalakulás során. Ez persze nem perdöntő, hiszen csupán a tömegspektrumból nem helyes az anomália viselkedésére következteni. Ennek leginkább az az oka, hogy a tömegekben „anomália erősség × kondenzátum” jellegű tagokon keresztül jelenik meg az $U_A(1)$ sértés, ami a kondenzátumok csökkenése miatt is kisebb súlyúvá válhat, miközben az axiálszimmetria továbbra is sérül. Ami már expliciten megmutatja az anomália viselkedését, az az anomália együtthatónak a hőmérsékletfüggése, mely a 3.5 ábrán látható. Ez azt támasztja alá, amit már a 3.2



3.4. ábra. A véges hőmérsékletű tömegspektrum abban az esetben, amikor a csupasz anomália paraméter hőmérsékletfüggetlen.

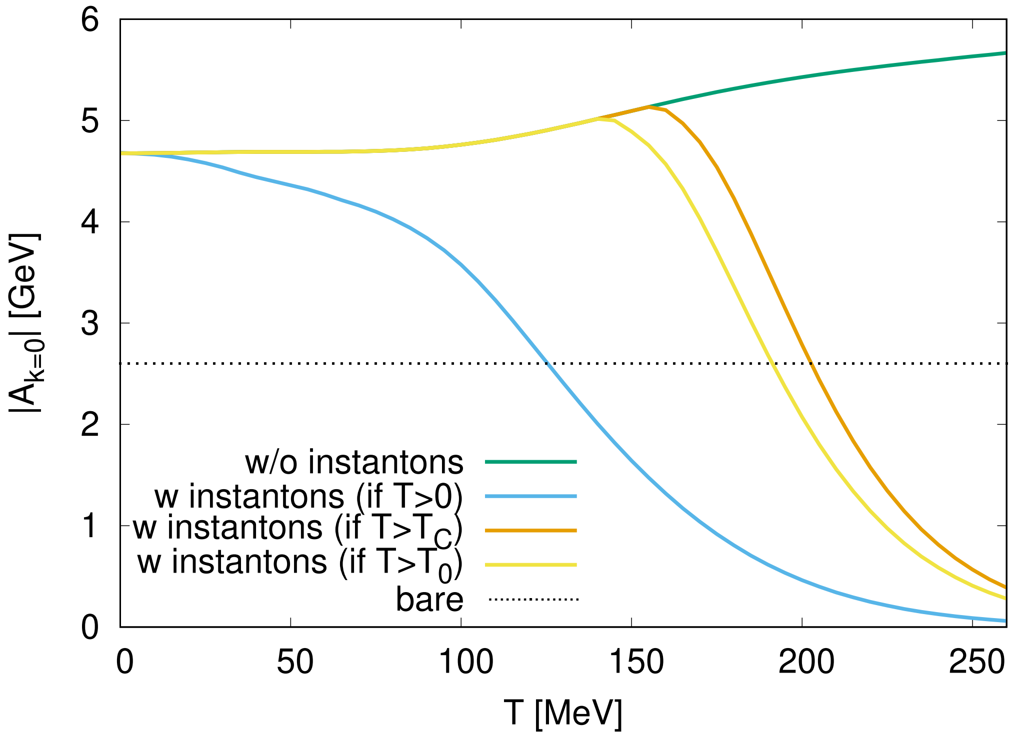
ábra alapján is vártunk, a mezonikus fluktuációk következtében az anomália nőni kezd a hőmérséklet függvényében.

3.4.3. Instanton járulékok

A történet természetesen ezzel nem ér véget, hiszen T_c–n túl az $U_A(1)$ szimmetria helyre kell, hogy álljon, ahogy azt az instanton alagutazás amplitudójának szemi–klasszikus közelítése mutatja [45, 46]. Az instanton folyadék modellben a topologikus szuszceptibilitás az instanton sűrűséggel közelíthető, $\chi_{top} \simeq n(r)$, ahol r az átlagos instanton méret. Ha a hőmérséklet sokkal nagyobb, mint T_c, $n(r)$ egy exponenciálisan levágó faktort tartalmaz,

$$n(r) \sim \exp[-8(\pi r T)^2/3]. \tag{3.18}$$

Benne maradva az effektív modell keretrendszerében, ha a csupasz KMT csatolásról (a) feltesszük, hogy arányos χ_{top}–pal, akkor megkaphatjuk a Witten–Veneziano relációt [45, 46]. Ahogy azonban az [45] –ben is szerepel, valójában nem teljesen helyénvaló a topologikus szuszceptibilitást sem a KMT csatolással, sem az instanton sűrűséggel azonosítani. Mégis,



3.5. ábra. A felöltözött anomália paraméter, az effektív potenciál minimumhelyén kiértékelve, mint a hőmérséklet függvénye. A különböző esetkhez tartozó leírást lásd a szövegben.

pusztán fenomenológiai alapon, a leginkább értelmes közelítés a–ra egy olyan interpoláló alak használata, mely $T = 0$–n, illetve aszimptotikusan nagy hőmérsékleten is követi a topologikus fluktuációk hatását [53, 54, 55, 56]. Ennek megfelelően, a már tárgyalt eset (hőmérsékletfüggetlen a paraméter) mellett további három forgatókönyvet térképezünk fel, melyek esetén $a(T)$ expliciten függ a hőmérséklettől:

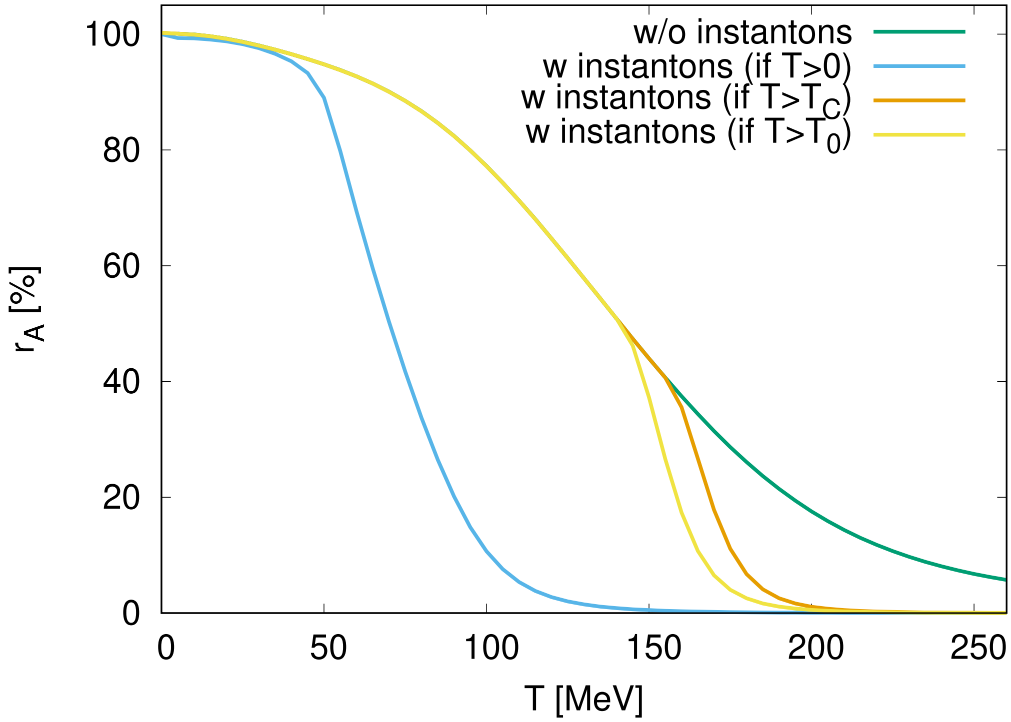
$$\begin{aligned}
i.)\quad a(T) &= a_0 \exp[-8(\pi r T)^2/3],\\
ii.)\quad a(T) &= \begin{cases} a_0, & \text{ha } T < T_c\\ a_0 \exp[-8(\pi r)^2(T^2 - T_c^2)/3], & \text{egyébként}\end{cases}\\
iii.)\quad a(T) &= \begin{cases} a_0, & \text{ha } T < T_0\\ a_0 \exp[-8(\pi r)^2(T^2 - T_0^2)/3], & \text{egyébként}\,.\end{cases}
\end{aligned}$$

Az i.)–es közelítés meglehetősen durva, mivel az exponenciális elnyomás csak nagyon magas T–n lehet érvényes, bőven túl T_c–n. A ii.) –es eset már észszerűbb, hiszen mivel a Debye–féle árnyékolási hatásról gondoljuk azt, hogy az instanton mezőt exponenciálisan elnyomja, így az T_c alatt semmilyen hatást nem tud kiváltani. Mindazonáltal, ahogy majd rögtön kiderül, ez a közelítő $a(T)$ alak megváltoztatja a kritikus hőmérséklet értékét, vagyis helyesebbnek tűnik egy új, az exponenciálisban megjelenő T_0 paraméter bevezetése, melyet úgy hangolhatunk, hogy a T_c a fizikai értékén maradjon. Utóbbi definiálja a iii.)–as esetet.

A számítások során az átlagos instanton méretet $r \simeq 1/3\,\mathrm{fm}$ –nek választjuk, a T_0 paraméter értékére pedig $T_0 \approx 143\,\mathrm{MeV}$ adódik. A 3.5. ábrán látható a felöltözött anomália paraméter abszolút értéke, $|A|(\rho = \rho_{\min})$, az effektív potenciál minimumhelyén kiértékelve, mind a négy felvázolt közelítő esetre vonatkozóan. Ahogy azt vártuk, ha az instantonok nincsenek figyelembe véve, akkor a mezonikus fluktuációk erősíteni kezdik az anomáliát a hőmérséklet növelésével. Ha a szemi–klasszikus közelítésből származó exponenciális függés a teljes hőmérsékleti tartományban érvényesnek van feltéve, akkor az anomália koefficiens monoton csökkenő tendenciát mutat a hőmérséklettel, de ebben az esetben a pszeudokritikus hőmérséklet túlságosan kicsinek adódik. Ha az instanton hatások csak T_c–n túl vannak figyelembe véve, akkor egy átmeneti erősödést tapasztalunk, majd az anomália csökkenni kezd. Ha ezutóbbi esetet a T_0 paraméter segítségével úgy korrigáljuk, hogy T_c a fizikai értéken maradjon, akkor jellegében egy teljesen hasonló görbét kapunk. Összegzésként azt a tanulságot vonhatjuk le, hogy a mezon fluktuációk képesek megnövelni az anomália értékét nagyságrendileg $\sim \mathcal{O}(10\%)$–kal, mielőtt az instanton hatások bekapcsolnak és ledominálják az előbbi hatást, az $U_A(1)$ szimmetria helyreállását kikényszerítve. Mindezek következtében azt látjuk, hogy az anomáliának még $\sim 1.5T_c$–n is látható jele van, a felöltözött A paraméter $T = 0$–n felvett értékének $\sim 20\%$–át megtartja.

Érdemes felidézni, hogy a KMT csatolás hasonló viselkedése már korábban felmerült a Nambu–Jona–Lasinio (NJL) modell keretin belül is [67]. Utóbbi tanulmányban a szerzők úgy következtettek az effektív KMT csatolás hőmérsékletfüggésére, hogy belőle a χ_{top}–ra vonatkozó rács adatokat a lehető legpontosabban reprodukálni tudják. Megjegyzendő, hogy bár χ_{top} monoton csökkenő tendenciát mutat, az effektív KMT csatolás nem feltétlenül követi ugyanezt a viselkedést. Ahogy azt [67]–ben is jelzik a szerzők, nem feltétlenül χ_{top} a legmegfelelőbb mennyiség arra, hogy az $U_A(1)$ sértés mértéket előrejelezzük, hiszen az összekapcsolódik a királis kondenzátummal és értéke a hőmérséklettel csökkeni tud, miközben az anomália (precízebben az effektív KMT csatolás) továbbra is jelen van a rendszerben.

Hasonló gondolatmenetet követve megpróbálhatjuk az anomália viselkedését egy dimen-



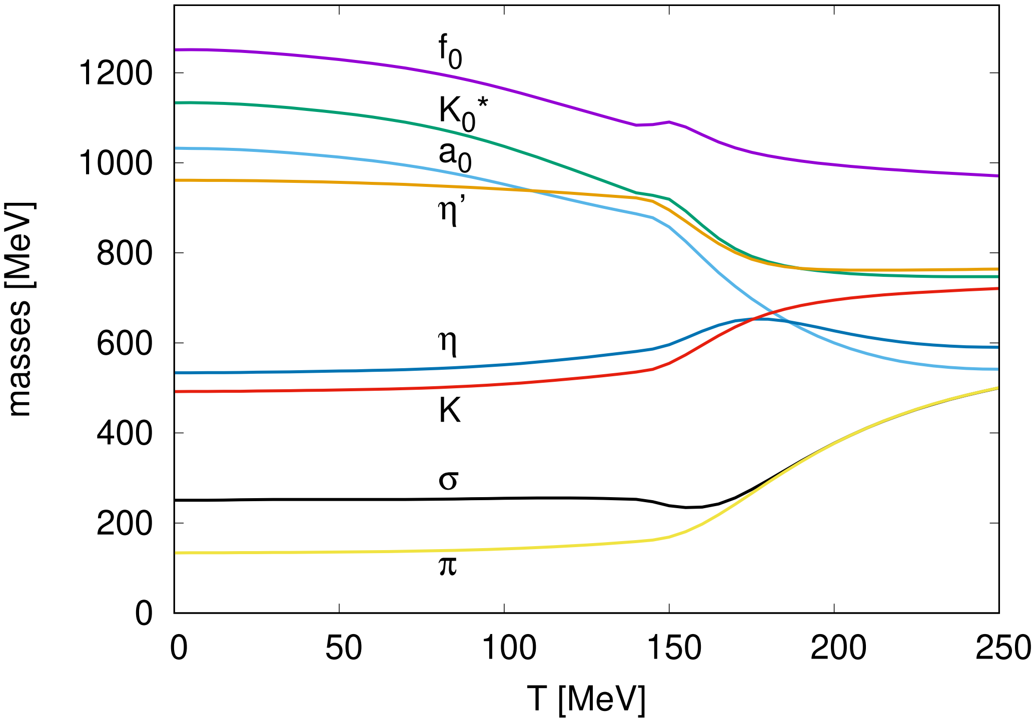
3.6. ábra. Az r_A arány a hőmérséklet függvényében, különböző csupasz anomália esetekre vonatkozóan.

ziótlan paraméterrel is jellemezni, mely az $U_A(1)$ sértés mértékét az effektív potenciálon keresztül mutatja. Mivel a KMT determináns a fizikai háttéren $\Delta = v_{\rm ns}^2 v_{\rm s}/2\sqrt{2}$, a szóban forgó r_A paraméter definíció szerint

$$r_A = \frac{[v_{\rm ns}^2 v_{\rm s} A(\rho=\rho_{\rm min})]|_T}{[v_{\rm ns}^2 v_{\rm s} A(\rho=\rho_{\rm min})]|_{T=0}}, \tag{3.19}$$

lásd a hőmérsékletfüggését a 3.6. ábrán. Az így létrehozott mennyiség azt mutatja, hogy az $U_A(1)$–et sértő tag az effektív potenciálban hogyan viszonyul adott T hőmérsékleten a $T=0$–n felvett értékéhez. Vegyük észre, hogy r_A χ_{top}–hoz hasonlóan összefonódik a kondenzátumok viselkedésével, és ezáltal, az anomália fejlődése mellett a királis szimmetria sérülés mértékétől is függ. Ennek eredményeképp r_A szintén kevéssé tekintendő adekvát mennyiségnek tisztán az $U_A(1)$ sértés vizsgálata szempontjából.

Végül, ahogy a bevezetésben már említettük, az a_0–π tömegkülönbség viszont valóban egy sokkal jobb indikátora lehet az $U_A(1)$ szimmetria helyreállása mértékének. A tömegmátrixok analízisével könnyen megmutatható, hogy $m_{a_0}^2 - m_\pi^2 = -\sqrt{2}A(\rho_{\rm min})v_{\rm s} + C(\rho_{\rm min})v_{\rm ns}^2$. Ez azt mutatja, hogy ha a nemritka kondenzátum elegendően elpárolgott, akkor az előbbi tömegkülönbség tisztán az anomália függvénye, annak a feltételezésével,



3.7. ábra. Az instantonok által korrigált spektrum hőmérséklettől való függése. A néhány nemfizikai kicsiny hupli egyes tömegekben valószínűsíthetően a csupasz anomáliaparaméter, $a(T)$ deriváltjának szinguláris viselkedése miatt alakult ki.

hogy a ritka kondenzátum hőmérsékletfüggése nagyon enyhe. Más szavakkal, ha T_c–n túl az előbbi tömegkülönbség nem tűnik el, akkor az anomália továbbra is jelen van. A 3.7. ábrán az instantonok által korrigált spektrum hőmérsékletfüggése látszik, a leginkább realisztikus iii.) számú esetnek megfelelően. Az a_0–π tömegek egyre közelednek egymáshoz a hőmérséklet növelésével, de a különbségük mutatja, hogy az anomália továbbra is jelentős, még $\sim 1.5T_c$ környékén is. A numerikus megoldásból expliciten leolvasható az is, hogy a $C(\rho_{\mathrm{min}})$–t tartalmazó tag ezen hőmérsékleti tartományban valóban elhanyagolható, vagyis az a_0–π tömegkülönbséget ténylegesen csak az anomália kontrollálja.

3.5. Összegzés

Ebben a fejezetben az $U_A(1)$ anomáliát leíró KMT determinánshoz tartozó effektív csatolás hőmérsékletfüggésével foglalkoztunk. A leírtak egyik legfontosabb üzenete az, hogy effektív mezonmodellekben perturbatív számolások nem tudnak helyes eredményt szolgáltatni. Az FRG formalizmust alkalmazva rámutattunk, hogy a hagyományos értelemben vett csatolások fluktuációk hatására mezőfüggő mennyiségekké lépnek elő (ami nemrenormálható operátorok egy felösszegzéseként is interpretálható), és ezek még csak közelítőleg sem viselkednek konstansként, miután a mezonikus fluktuációk kiintegrálásra kerültek, lásd pl. a $C_{k=0}$ és $A_{k=0}$ függvények viselkedését a 3.1. és 3.2. ábrákon. Mindezek alapján bármilyen tisztán perturbatív számolás az effektív potenciál felöltözött vertexeire vonatkozóan megkérdőjelezhető, és abba az irányba mutat, hogy (részleges) felösszegzések elkerülhetetlenek. A funkcionális renormálási csoport módszer, ami a feljebb említett, mezőfüggő vertexeket relatíve egyszerű módon állítja elő, eredményeink szerint az egyik leghatékonyabb módszer nemperturbatív eredmények elérése szempontjából.

Megmutattuk, hogy a fizikai pontban a felöltözött KMT csatolás abszolút értéke növekedni képes a hőmérséklettel a királis átalakulási pont felé haladva. Ezen erősődésnek két, egymástól független forrása van. Egyrészt a teljesen felöltözött, fluktuációk által korrigált, térfüggő $A(\rho)$ anomália együttható függvény expliciten hőmérsékletfüggővé válik, másrészt pedig mivel az effektív potenciál minimumhelye a hőmérséklettel csökken, az $A(\rho)$ függvényt fokozatosan más pontokban kell kiértékelni ahhoz, hogy egy effektív kölcsönhatás definiálható legyen. Növekvő hőmérsékletek mellett, de még mielőtt az $U_A(1)$ szimmetria instanton effektusok miatt helyreállna, a KMT csatolás egy kvalitatíve is látható, kb. $\sim 10\%$–os relatív növekedést produkál.

Ahogy azt a közelítési sémánk definiálásakor hangsúlyoztuk, az effektív potenciálnak a KMT determináns szerinti Taylor–sorfejtését valójában a királis limeszhez tartozó $U_V(3)$ vákuum nem írná elő, vagyis a királis invariánsokon alapuló kifejtés ebben az irányban mindenképpen javítható. Az itt ismertetett eljárás általánosításaként érdemes lehet a jövőben az $U(\rho)$ függvényt kétváltozóssá tenni, $U(\rho) \to U(\rho, \Delta)$, és megoldását a renormálási csoport egyenletet segítségével egy kétdimenziós rácson állítani elő. Ebben már a magasabb töltésű instantonok járuléka is szerepelni tudna [66], melyek relatív súlya lenne képes arról árulkodni, hogy az itt ismertetett séma mennyire jó közelítés.

4. fejezet

A konvencionális szupravezető átalakulás

4.1. A szupravezetés fenomenológiai elmélete

Több mint, száz éve ismert, hogy különböző fémeket az abszolút nulla fokhoz közeli hőmérsékletekre lehűtve azok drasztikusan elveszítik az elektromos árammal szemben mutatott ellenállásukat. Elsőként Heike Kamerlingh Onnes figyelte meg a jelenséget a 20. sz. elején, melyet szupravezetésnek nevezett el. A holland fizikus higanyt mártott folyékony héliumba, és a vezetőképesség hőmérsékletfüggését vizsgálva azt tapasztalta, hogy $\sim 4.2K$–en a minta ellenállása eltűnik. A jelenséget $\mathcal{O}(1K)$ hőmérsékleteken később más fémekre is megfigyelték. Az ellenállás csökkenésének következménye az ún. Meissner–effektus, mely szerint a mágneses mező erővonalai ki kell, hogy kerüljék a szupravezető állapotban lévő mintákat. Ez az indukciótörvényből egyenesen adódik, hiszen eszerint ha a mágneses mező időben meg tudna változni a minta belsejében, akkor az végtelen nagy áramot indukálna a szupravezetőben.

A szupravezetés elméleti leírásában elsőként a London testvérek értek el komolyabb eredményeket, akik elméletükkel bár az ellenállás eltűnésének mikroszkopikus mechanizmusát nem, de a Meissner–effektust sikeresen le tudták vezetni. A London–féle behatolási mélység, mely az a karakterisztikus távolság, amin túl a mágneses mező elhanyagolható a minta belsejében, elméletük szerint a töltéshordozók számsűrűsége, tömege, és töltése függvényében megjósolható. A modell tisztán fenomenológiai alapokra építkezett, melyet később Ginzburg és Landau az alábbiak szerint fejlesztett tovább.

A 2. fejezetben már tárgyaltaknak megfelelően a szupravezető fázisátalakuláshoz közel is létre kell, hogy jöjjön egy, a megfelelő mikroszkopikus átlagolások után kialakuló ϕ rendparaméter, mely szerint az ultraibolya szabadenergia sorbafejthető. Ginzburg és Landau azt mondta, hogy a szupravezető átalakulást jellemző szabadenergiában az elektrodinamika $U(1)$ mértékszimmetriája kell, hogy megjelenjen, a ϕ rendparaméter pedig egy komplex skalár. Feltételezéseik helytállónak bizonyultak, de szigorú értelemben ezt csak a később a Bardeen–Cooper–Schrieffer (BCS) által megalkotott mikroszkopikus modell segítségével lehetett bizonyítani. Utóbbi leírás alapjául az a felismerés szolgált, hogy az elektronok a szilárdtesten belül a rácsrezgésekkel történő kölcsönhatás következtében effektív vonzóerőt képesek egymásra kifejteni, mely lényegesen dominánsabb a Coulomb–taszításnál. A vonzóerő következtében a Fermi–gömb instabillá válik, és az egymással ellentétes spinű elektronok kötött állapotokat hoznak létre, melyeket Cooper–pároknak hívunk. Ezek alacsony hőmérsékletű kondenzációja változtatja meg annyira az anyag vezetőképességének viselkedését, hogy az lényegében elveszíti az elektromos árammal szemben mutatott ellenállását. A BCS elmélet részleteivel ebben a dolgozatban nem foglalkozunk, a következőkben az effektív Ginzburg–Landau leírást fogjuk használni az átalakulás leírásának szempontjából.

A Ginzburg–Landau szabadenergia ultraibolya skálán, a szupravezető átalakuláshoz közel a

$$\Gamma_\Lambda[\phi] = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\vec{B}^2 + |(\vec{\nabla} + ie\vec{A})\phi|^2 + m^2\phi^\dagger\phi + \frac{\lambda}{6}(\phi^\dagger\phi)^2\right] \tag{4.1}$$

alakba írandó, ahol $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ a mágneses mező, $\vec{A}$ a hozzá tartozó vektorpotenciál, m^2 és λ pedig valós állandók. A rendparamétert érdemes $\phi = (\sigma + i\pi)/\sqrt{2}$ alakban parametrizálni, így $\phi^\dagger = (\sigma - i\pi)/\sqrt{2}$. Ugyanitt e az áramot képviselő töltéshordozók elektromos töltése, mely a BCS–elmélet szerint éppen az elektron töltésének kétszerese. A (4.1) alak mértékszimmetrikus, azaz invariáns a $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$ transzformációra, amennyiben a ϕ rendparaméter $\phi \to \exp(ie\psi)\phi$ módon változik.

Ha elfelejtkezünk a mezők ultraibolya és az infravörös skálák közötti fluktuációiról, és (4.1) –et a rendszer teljes szabadenergiájával azonosítjuk, akkor értelemszerűen az alapállapotot (4.1) ϕ szerinti variációjának eltűnésének feltételéből lehet származtatni. Mágneses mező nélkül ez ekvivalens a

$$-\Delta\phi + m^2\phi + \frac{\lambda}{3}|\phi|^2\phi = 0 \tag{4.2}$$

feltétellel. Helyfüggés nélkül az egyenlet megoldása $|\phi_0|^2 = -3m^2/\lambda$, amivel leosztva az előzőeket

$$-\Delta f + m^2 f - m^2|f|^2 f = 0 \tag{4.3}$$

adódik, ahol $f = \phi/\phi_0$. Ha a szupravezető határfelületét az $x = 0$ végtelen síknak választjuk, akkor minden változás csak x-től függ, és az egyenlet megoldása

$$f(x) = \text{th}\,\frac{x - x_0}{\sqrt{2}\xi_c}, \tag{4.4}$$

ahol x_0 egy, az egyenletek által nem meghatározott konstans, ξ_c pedig az inhomogenitások karakterisztikus skálája, amit koherenciahossznak hívunk, $\xi_c^2 = -1/m^2$. A szupravezetőt jellemző másik karakterisztikus hosszúság jellegű mennyiség, a korábban már említett London–féle behatolási mélység az alábbiak szerint adható meg. Ha most (4.1)–nek az $\vec{A}$ szerinti variációjának eltűnését követeljük meg, akkor

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -ie(\phi^\dagger \vec{\nabla}\phi - \vec{\nabla}\phi^\dagger \phi) + 2e^2\phi^\dagger\phi\vec{A} \approx 2e^2|\phi|^2(\vec{A} + \frac{i}{e}\vec{\nabla}\varphi) \tag{4.5}$$

adódik, ahol a $\phi = |\phi|e^{i\varphi}$ alakot alkalmazva a második lépésben feltettük, hogy $|\phi|$ helyfüggése elhanyagolható a mágneses mező változásának jellegzetes skálájához képest. A zárójelen belüli φ függés $\vec{A}$ megfelelő mértéktranszformációjával eltüntethető, ϕ–t pedig az egyensúlyi ϕ_0 értékével közelítve

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{6e^2m^2}{\lambda}\vec{A}, \tag{4.6}$$

aminek rotációját véve

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{6e^2m^2}{\lambda}\vec{B} \equiv -\frac{1}{\lambda_L^2}\vec{B} \tag{4.7}$$

adódik. Utóbbi egyenletnek a fenti elrendezésnél vett fizikai megoldása

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{B}_0 & \text{ha} \quad x < 0, \\ \vec{B}_0 e^{-x/\lambda_L} & \text{ha} \quad x > 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

ahol feltettük, hogy a szupravezetőn kívüli mágneses mező párhuzamos az $x = 0$ síkkal. Láthatóan λ_L írja le a behatolás mélységét, a ξ_c koherenciahossz és a λ_L hányadosa pedig az ún. Ginzburg–Landau paraméter, $\kappa = \lambda_L/\xi_c \equiv \sqrt{\lambda/6e^2}$. Az alábbiakban látni fogjuk, hogy a szupravezető fázisátalakulás rendje a κ paraméter értékétől függ.

4.2. A fluktuációk szerepe

(4.1) helyett érdemes az annak általánosításaként előálló ábeli Higgs–modellt vizsgálni tetszőleges d euklideszi térdimenzióban, melyre a ultraibolya hatás (szabadenergia)

$$\Gamma_\Lambda[\phi] = \int d^d x \Big[\frac{1}{2} A_i(-\partial^2\delta_{ij} + \partial_i\partial_j)A_j + (D_i\phi)^\dagger D_i\phi + m^2\phi^\dagger\phi + \frac{\lambda}{6}(\phi^\dagger\phi)^2\Big], \qquad (4.9)$$

ahol $D_i = \partial_i + ieA_i$ a kovariáns derivált ($i = 1, ...d$). A $d = 3$ esetben parciális integrálás után (az első tagban) egzaktul visszakapjuk (4.1) kifejezését. A (4.9) által definiált elmélet először $d = 4$ dimenzióban (3 tér + 1 idő) került komolyabb vizsgálat alá, ugyanis ezen modellben mutattak rá elsőként arra, hogy pusztán radiatív korrekciók képesek spontán szimmetriasértést generálni a rendszer alapállapotában még akkor is, ha fluktuációk elhanyagolásával szimmetrikus lenne a vákuum (Coleman–Weinberg mechanizmus) [68]. A dimenziós redukción átesett változatban [3 térdimenzió, ld. (4.1)] ez pontosan azt jelenti, hogy valójában a fázisátalakulás elsőrendű kell, hogy legyen [69]. A feltételezett jelenség oka az, hogy a mértékmező fluktuációi olyan fontossá válnak a kritikus pontban, hogy azok az átlagtér közelítésből következő másodrendű átalakulást elsőrendűvé képesek változtatni, legalábbis kicsiny Ginzburg–Landau paraméterrel rendelkező szupravezetők esetén. Érdemes tudni, hogy a kérdés valójában kísérleti szempontból kevéssé volt releváns, ugyanis hagyományos szupravezetők esetén az ún. Ginzburg–intervallum [70], mely a kritikus hőmérséklethez közeli azon tartományt jelenti, melyben az átlagtér közelítés a fluktuációk hatására csődöt mond, nagyon kicsi, nK nagyságrendű. Ez azt jelenti, hogy kísérletileg a kritikus ponttól csak nK nagyságrendben látható számottevő változás az átlagtér közelítés (és így a másodrendűség) eredményeitől. A probléma ettől függetlenül elvi szinten továbbra is fontos, és érdemes azt is megjegyezni, hogy magas hőmérsékletű szupravezetők esetén a Ginzburg–intervallum $\mathcal{O}(1\text{K})$ nagyságrendű is lehet, vagyis a kritikus viselkedés ilyenkor közelebbről is megvizsgálható [71].

Később, az ábeli Higgs–modell duális térelméleti megfogalmazása alapján arra a következtetésre lehetett jutni, hogy az átalakulás valójában mégis tud másodrendű is lenni [72, 73], amennyiben a Ginzburg–Landau paraméter, $\kappa = \lambda_L/\xi_c$ kielégíti a $\kappa > \kappa_c \approx 0.798/\sqrt{2}$ egyenlőtlenséget. Ezt később Monte–Carlo szimulációk is megerősítették [74], a kritikus értékre $\kappa_c = (0.76 \pm 0.04)/\sqrt{2}$ jóslatot téve [75]. Az előbb említett dualitási érvek szerint a rendszerben végbemenő másodrendű átalakulás a háromdimenziós XY [$O(2)$]

modell univerzalitási osztályába tartozik [76, 73, 77]. Feltételezések szerint a perturbatív számolás azért nem működik nagy κ esetén, mert ilyenkor a kritikus ponthoz közeledve nemperturbatív mezőkonfigurációk (vortexek) fluktuációi is relevánssá válnak [72, 73], homogén vákuum körüli perturbatív kifejtésben pedig ilyen jellegű korrekciók nem elérhetőek.

Az átalakulás másodrendű jellege bár elfogadottá vált, azt továbbra sem lehetett renormálási csoport módszeren alapuló eljárásokkal leírni, és a szóban forgó infravörös fixpontot megtalálni. Perturbációszámítás alkalmazása során, pl. minimális levonás sémában (MS) az ellentagok $d = 4$–ben történő kiszámításával az öncsatolás és a töltés futása ϵ sorfejtésben előállítható. Az így adódó β függvények $d = 3$–ba extrapolálva nem adnak stabil fixpontot az infravörös skálák felé közeledve, vagyis a jóslat ezesetben az, hogy az átmenet akármilyen kis mértékcsatolás esetén is elsőrendű. Ha a rendparamétert N–komponensű komplex mezővé terjesztjük ki, akkor $N \geq 183$ [78] esetére kapunk csak olyan (infravörös) fixpontot, mely másodrendű átalakulást képes leírni. Fontos kiemelni, hogy az így adódó fixpontban a mértékcsatolás (töltés) nem nulla. Ezeket töltött fixpontoknak nevezzük. Számos tanulmány foglalkozott olyan analitikus és numerikus közelítési sémák felállításának lehetőségével, mely le tudná írni a fázisdiagramot [79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 85], és bár voltak jelek a konvencionális szupravezetést leíró $N = 1$ esetén töltött fixpontok létezésére, mindezidáig nem született olyan eljárás, melyben a rendszer viselkedését renormálási csoport módszerrel megfelelően le lehetett írni. A kritikus Ginzburg–Landau paraméter MC módszerrel kiszámított értékére ennek megfelelően semmilyen, még csak közelítőleg sem érvényes analitikus eredmény nem született. Az alábbiakban az FRG egy közelítési sémájában mutatjuk meg, hogy az IR fixpont megtalálható, és a kapcsolódó κ_c érték teljesen analitikus becslése is meglepően jó eredményt ad.

Az UV szabadenergiát először (4.9) alapján kibontjuk elemi mezők szerint:

$$\begin{aligned}\Gamma_\Lambda &= \int d^dx\Big[\frac{1}{2}A_i\left(-\partial^2\delta_{ij}+\partial_i\partial_j\right)A_j+\frac{1}{2}\sigma(-\partial^2+m^2)\sigma+\frac{1}{2}\pi(-\partial^2+m^2)\pi+\\ &\quad+\frac{\lambda_k}{24}(\sigma^2+\pi^2)^2+eA_i(\sigma\partial_i\pi-\pi\partial_i\sigma)+\frac{1}{2}e^2A_iA_i\left(\sigma^2+\pi^2\right)\Big].\end{aligned} \tag{4.10}$$

Ez az alak még nem alkalmas fluktuációk kiszámítására, hiszen a mértéket valahogyan rögzíteni kell. Ebben a részben az R_ξ mértékek [87] egyik változatával élünk, és a következő tagot adjuk a hatáshoz: $\Gamma_{\Lambda,gf} = \int d^dx\frac{1}{2\xi}(\partial_iA_i+\xi e\tilde{\sigma}\pi)^2$, ahol $\tilde{\sigma}$ egy tetszőlegesen hangolható háttér jellegű mező, ξ pedig a mértékrögzítő paraméter. Ez a választás az alábbi szellemdinamikát generálja a rendszerbe: $\Gamma_{\Lambda,gh} = \int d^dx c^* \left(-\partial^2 + \xi e^2 \tilde{\sigma}\sigma\right) c$, ahol c és c^* a szellemmezőket jelöli. Az UV szabadenergia így $\Gamma_\Lambda \to \Gamma_\Lambda + \Gamma_{\Lambda,gf} + \Gamma_{\Lambda,gh}$ helyettesítéssel módosul. Vegyük észre, hogy ha adott homogén σ háttéren dolgozva (nem feltétlenül a potenciál minimumában) előírjuk a $\tilde{\sigma} = \sigma$ egyenlőséget, akkor a mértékválasztás éppen kiejti az A_i–π keveredést. Ennek kényelmi funkcióját hamarosan látni fogjuk.

4.2.1. Skálafutások

Tetszőleges k–skálán a szabadenergiát (Γ_k) lokális potenciál közelítésben állítjuk elő. Ehhez azonban most figyelembevesszük a mezők hullámfüggvény renormálási faktorait is $\phi \to Z_k^{1/2}\phi$, $A_i \to Z_{A,k}^{1/2}A_i$, illetve a töltés renormálását is elsőként multiplikatíve írjuk fel: $e \to Z_{e,k}/(Z_{A,k}^{1/2}Z_{\phi,k})e$. A $Z_{e,k}$ és Z_k faktorokat összekapcsoló Ward–azonosság szerint $Z_k = Z_{e,k}$, így a skálafüggő mértékcsatolásra a $e_k = e/Z_{A,k}^{1/2}$ választással élünk. Megjegyezzük, hogy az előbbi Ward–azonosság érvényességét az FRG keretein belül nem vizsgáljuk, hanem azt az ansatz részének tekintjük. A skálafüggő effektív hatás (szabadenergia) így

$$\begin{aligned}\Gamma_k = \int d^dx\Big[&\frac{Z_{A,k}}{2}A_i\left(-\partial^2\delta_{ij} + \partial_i\partial_j(1-\xi_k^{-1})\right)A_j + \frac{Z_k}{2}\sigma(-\partial^2)\sigma + \frac{Z_k}{2}\pi(-\partial^2)\pi + U_k(\sigma,\pi)\\ &-Z_kZ_{A,k}^{1/2}e_k\partial_iA_i(\sigma-\tilde{\sigma})\pi - 2Z_kZ_{A,k}^{1/2}e_kA_i\pi\partial_i\sigma + \frac{Z_kZ_{A,k}}{2}e_k^2A_iA_i\left(\sigma^2+\pi^2\right)\\ &+\frac{\xi_k}{2}Z_k^2e_k^2\sigma^2\pi^2 + c^*\left(-\partial^2 + \xi_kZ_ke_k^2\tilde{\sigma}\sigma\right)c\Big], \end{aligned} \tag{4.11}$$

ahol az U_k lokális potenciál alakját az ultraibolya viselkedéssel azonos alakúnak tételezzük fel,

$$U_k(\sigma,\pi) = \frac{Z_km_k^2}{2}(\sigma^2+\pi^2) + \frac{Z_k^2\lambda_k}{24}(\sigma^2+\pi^2)^2. \tag{4.12}$$

A (4.11) ansatz választásával a Wetterich–egyenlet közönséges csatolt differenciálegyenletekre esik szét a hullámfüggvény renormálási faktorok és a csatolásokra vonatkozóan. A következőkben minden β függvényt $\mathcal{O}(e_k^4, e_k^2\lambda_k, \lambda_k^2)$ rendig állítunk elő. Megjegyzendő, hogy a szellemmező hullámfüggvény renormálási faktora csak magasabb rendekben ad járulékot, ezért (4.11)–ben már rögtön a $Z_{c,k} = 1$ választással éltünk. Szintén vegyük észre, hogy a ξ_k mértékrögzítő paraméter viszont a regulátor jelenlétének következtében az FRG formalizmusban függhet a k skálától [89].

Számításaink első felében az U_k potenciál, vagyis az abban szereplő paraméterek futásainak meghatározását végezzük el. Ehhez először ki kell számítanunk a $\{A_i, \sigma, \pi, c^*, c\}$

összecsatolt változók terében a $\Gamma_k^{(2)}$ második deriváltat. Ezt a ϕ mező egy olyan hátterén tesszük meg, ami tisztán valós, vagyis a $\sigma \neq 0$, $\pi = 0$ választással élünk. A számítás különösen egyszerűnek adódik akkor, ha minden σ értéknél a differenciálást követően a $\tilde{\sigma} = \sigma$ előírást is megtesszük, ekkor ugyanis az A_i–π szektorokban nincs keveredés, és a $\Gamma_k^{(2)}$ mátrix diagonalizációja különösen egyszerű. A kétpont függvény mátrixának sajátértékei a következőnek adódnak:

$$\begin{aligned}
\Gamma_k^{(2),I}(q) &= Z_{A,k}q^2/\xi_k + Z_k e^2\sigma^2 \\
\Gamma_k^{(2),II}(q) &= Z_{A,k}q^2 + Z_k e^2\sigma^2 \\
\Gamma_k^{(2),III}(q) &= Z_k(q^2 + m_k^2 + Z_k\lambda_k\sigma^2/2), \\
\Gamma_k^{(2),IV}(q) &= Z_k(q^2 + m_k^2 + Z_k\lambda_k\sigma^2/6 + \xi_k\frac{Z_k e^2}{Z_{A,k}}\sigma^2) \\
\Gamma_k^{(2),V}(q) &= q^2 + \xi_k\frac{Z_k}{Z_{A,k}}e^2\sigma^2,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

ahol a $\Gamma_k^{(2),II}$ $(d-1)$–szeresen elfajult (d a fizikai tér dimenziószáma), az utolsó sajátérték pedig a szellemmezőkhöz tartozik, és fermionikus jellege miatt negatív előjellel, és egy 2–es faktorral kell figyelembe venni (ld. az 1. fejezetet részletesen). Mindegyik sajátmódushoz egy Litim–jellegű regulátort bevezetve [18] $[R_k(q) = (k^2 - q^2)\Theta(k^2 - q^2)]$, majd beírva őket az (1.11) egyenletbe, σ szerint sorfejtést végzünk. A másodrendű tag megadná $Z_k m_k^2$ futási egyenletét, de gondoljunk bele, hogy erre valójában nincsen szükségünk, hiszen a kritikus pontban dolgozunk, vagyis $k \to 0$ esetén $m_k^2 \to 0$ kell legyen. (Itt azzal a feltevéssel éltünk, hogy az átalakulási hőmérsékleten a tömegparaméter eltűnik.) Ezt a feltételt viszont kihasználva negyedrendben az alábbiakat kapjuk:

$$k\partial_k(Z_k^2\lambda_k)|_{d=4} = \frac{54e_k^4 + 6e_k^2\lambda_k\xi_k + 5\lambda_k^2}{24\pi^2}Z_k^2, \tag{4.14a}$$

$$k\partial_k(Z_k^2\lambda_k)|_{d=3} = \frac{72e_k^4 + 12e_k^2\lambda_k\xi_k + 10\lambda_k^2}{9\pi^2 k}Z_k^2. \tag{4.14b}$$

Láthatóan λ_k futásához szükségünk van a skalár hullámfüggvény renormálási faktor, Z_k futására. Ehhez vegyük észre azt, hogy ha $\sigma = 0$ háttéren értékeljük ki a $\Gamma_k^{(2)}$ mátrixot, de feltesszük, hogy a mező valójában (infinitezimálisan) keveset változik, vagyis formálisan a $\partial_i\sigma \neq 0$ feltétellel élünk, akkor a $\Gamma_k^{(2)}$ továbbra is diagonális lesz Fourier–térben, miközben benne megjelenik az előbbi inhomogenitás. A $\Gamma_k^{(2)}$ mátrix sajátértékei ekkor $\mathcal{O}((\partial_i\sigma)^2)$

rendben a következőek:

$$\begin{aligned}
\Gamma_k^{(2),I}(q) &= Z_{A,k}q^2/\xi_k - \frac{4e^2Z_k^2(\hat{q}_i\partial_i\sigma)^2}{q^2(Z_k - Z_{A,k}/\xi_k) + Z_k m_k^2}, \\
\Gamma_k^{(2),II}(q) &= Z_{A,k}q^2 - \frac{4e^2Z_k^2\Big((\partial_i\sigma)^2 - (\hat{q}_i\partial_i\sigma)^2\Big)}{q^2(Z_k - Z_{A,k}) + Z_k m_k^2}, \\
\Gamma_k^{(2),IIb}(q) &= Z_{A,k}q^2, \\
\Gamma_k^{(2),III}(q) &= Z_k(q^2 + m_k^2), \\
\Gamma_k^{(2),IV}(q) &= Z_k(q^2 + m_k^2) + \frac{4e^2Z_k^2(\partial_i\sigma)^2}{q^2(Z_k - Z_{A,k}) + Z_k m_k^2)} \\
&+ \frac{4e^2Z_k^2(q_i\partial_i\sigma)^2(\xi_k^{-1} - 1)Z_{A,k}}{(q^2(Z_k - Z_{A,k}) + Z_k m_k^2)(q^2(Z_k - Z_{A,k}/\xi_k) + Z_k m_k^2)} \\
\Gamma_k^{(2),V}(q) &= q^2, \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

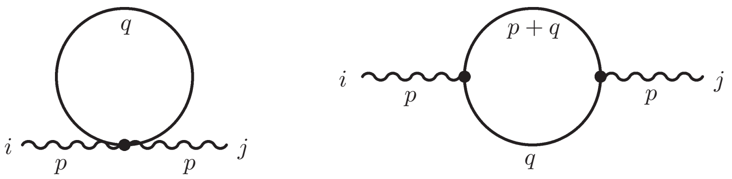
ahol $\hat{q}_i = q_i/q$. Bár relevanciája nincs, ezúttal $\Gamma_k^{(2),IIb}(q)$ elfajult, multiplicitása $d-2$. Ha ismét mindegyik sajátmódushoz Litim–regulátort vezetünk be, és most $\partial_i\sigma$ végezzük el (1.11) kifejtését (miközben formálisan $\sigma = 0$ továbbra is), akkor vezető rendben a $\sim(\partial_i\sigma)^2$–es gradiens tagot generáljuk le a Wetterich–egyenlet jobb oldalán. Az együtthatója pedig megadja Z_k futását:

$$k\partial_k Z_k|_{d=4} = \frac{3+\xi_k}{8\pi^2}e_k^2 Z_k, \qquad (4.16a)$$

$$k\partial_k Z_k|_{d=3} = \frac{4(2+\xi_k)}{3\pi^2 k}e_k^2 Z_k, \qquad (4.16b)$$

ahol ismét a kritikus pontban dolgoztunk, és így a $m_k^2 \to 0$ határesetet vettük. A képleteket az irodalomban fellelhető korábbi eredményekkel [78] összehasonlítva azt találjuk, hogy (4.14a) és (4.16a) az egyhurok perturbatív eredményeket szolgáltatják $d = 4$–ben, $d = 3$–ban viszont teljesen új kifejezéseket kaptunk.

Számításaink második felében $Z_{A,k}$ futását határozzuk meg. Ehhez nem a skalár σ, hanem tisztán a mértékmező, A_i hátterén kell dolgoznunk. Sajnos nem választhatjuk A_i–t homogénnek, mert ekkor kinullázzuk a mértékmező kinetikus részét, és vele együtt eltüntetjük $Z_{A,k}$–t. Ezért ezesetben érdemes a Wetterich–egyenlet (1.13) alakjához fordulni, ahol a $\Gamma_{R,k}^{(2)0}$ kifejtési propagátort kölcsönhatásmentesnek választva, minden módushoz Litim–regulátort rendelve, az A_i–ben kvadratikus járulékot kiprojektálva a 4.1. ábrán látható diagramok generálódnak le. Ezen diagramoknak a külső impulzusra vonatkozó $\mathcal{O}(p^2)$ rendű része szolgáltatja a mértékmező hullámfüggvény renormálási faktorának skálafutását.



4.1. ábra. Egyhurok diagramok, melyek a mértékmező kétpont vertexéhez adnak járulékot. A sima vonalak skalár propagátorokra, a hullámos lábak mértékmezőkre utalnak.

Ezen a ponton viszont a következő problémával szembesülünk. Vegyük észre, hogy az FRG formalizmus expliciten megsérti a mértékszimmetriát, hiszen UV levágást vezet be a partíciós függvénybe [88, 89]. Ennek eredményeképp a 4.1. ábrán látható két gráf összege (a perturbációszámítással ellentétben) általában nem ad $\mathcal{O}(p^2)$ rendben transzverzális kifejezést, ráadaásul $\mathcal{O}(p^0)$ részt is generál, ami azt jelenti, hogy a radiatív korrekciók fotontömeget alakítanak ki infravörös skálán. Utóbbi kevéssé problémás, mert azt lehet mondani, hogy az effektus egyértelműen a levágással bevezetett kvadratikus divergencia eredménye, vagyis ha már kapásból az UV skálán egy megfelelő fotontömeget vezetünk be, akkor azt az infravörösben pont meg tudja enni a két gráf által generált korrekció $\mathcal{O}(p^0)$ része. A nagyobb probléma a transzverzalitás, melyre nincsen gyógyír. Vegyük azonban észre, hogy ξ_k bevezetése miatt lehetőségünk van egy olyan mértékválasztásra, mely pont olyan alakúra hozza a Wetterich–egyenlet bal oldalán a mértékmező kétpont vertexét, mint amilyet a radiatív korrekciók a jobb oldalon kialakítanak, vagyis $Z_{A,k}$ futása így egyértelműen leolvasható. Az ár, amit fizetni kell, az az, hogy ebben a közelítésben ξ_k nem lehet tetszőleges, azt egyértelműen meghatározza a Wetterich–egyenlet által felösszegzett fluktuációs járulékok és a (4.11) ansatzunk kompatibilitása.

A két gráf járuléka expliciten a következő (most is $m_k^2 \to 0$):

$$\partial_k \Gamma_k|_A = \frac{e_k^2 Z_{A,k}}{2} \int_p A_i(-p)A_j(p) \times \tilde{\partial}_k \left[\int_q \frac{2\delta_{ij}}{q^2 + R_k(q)} - \int_q \frac{(p+2q)_i(p+2q)_j}{(q^2+R_k(q))((p+q)^2+R_k(p+q))} \right], \tag{4.17}$$

ami, a foton tömeg eldobása után (ld. a korábbi magyarázatot) az alábbira egyszerűsödik:

$$\partial_k \Gamma_k|_A = \frac{1}{2}\Big(- \frac{8e_k^2 Z_{A,k} k^{d-5}\Omega_d}{d(d+2)} \Big) \int_p A_i(-p)A_j(p) \Big(p^2\delta_{ij} - \frac{d-2}{2} p_i p_j \Big) + \mathcal{O}(p^4), \tag{4.18}$$

ahol ismét $\Omega_d^{-1} = 2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)$. Az effektív hatást direkt térbe visszaírva, $\mathcal{O}(\partial^2)$ rendben, tiszta mértékmező háttéren ez a következőt adja:

$$\partial_k\Gamma_k|_{A,d=4} = \frac{1}{2}\left(-\frac{e_k^2 Z_{A,k}}{24\pi^2 k}\right)\int_x A_i(-\partial^2\delta_{ij} + \partial_i\partial_j)A_j, \tag{4.19a}$$

$$\partial_k\Gamma_k|_{A,d=3} = \frac{1}{2}\left(-\frac{4e_k^2 Z_{A,k}}{15\pi^2 k^2}\right)\int_x A_i(-\partial^2\delta_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j)A_j. \tag{4.19b}$$

Vegyük észre, hogy a $d = 4$–re vonatkozó (4.19a) csak akkor konzisztens (4.11) –gyel, ha $\xi_k = \xi_{k=\Lambda} Z_{A,k}$, hiszen ekkor a radiatív korrekciók mégis transzverz kifejezést adtak (a perturbációszámításhoz hasonlóan). Ez azt jelenti, hogy a longitudinális rész valójában nem fut a skála változtatásával, ahogy azt a perturbatív számítások során megszoktuk. Érdemes megjegyezni, hogy a Landau–mérték, $\xi_k = 0$, egy olyan speciális választásnak minősül, mely egyedüliként nem visz magával k–függést, így valójában a renormálási csoport egy fixpontjaként viselkedik [88, 89]. Azt láthatjuk azonban, hogy $d = 4$–ben a mértékrögzítő paraméter értéke valójában egyáltalán nem fontos, hiszen (4.19a)–ből kapjuk, hogy $k\partial_k Z_{A,k}|_{d=4} = -e_k^2 Z_{A,k}/24\pi^2$ (ami a szokásos perturbatív eredmény), és ez pedig (4.14a) és (4.16a) segítségével arra vezet, hogy a λ_k és e_k^2 futások ξ_k függetlenek (ahogy azt várnánk is):

$$k\partial_k\lambda_k|_{d=4} = \frac{54e_k^4 - 18e_k^2\lambda_k + 5\lambda_k^2}{24\pi^2}, \tag{4.20a}$$

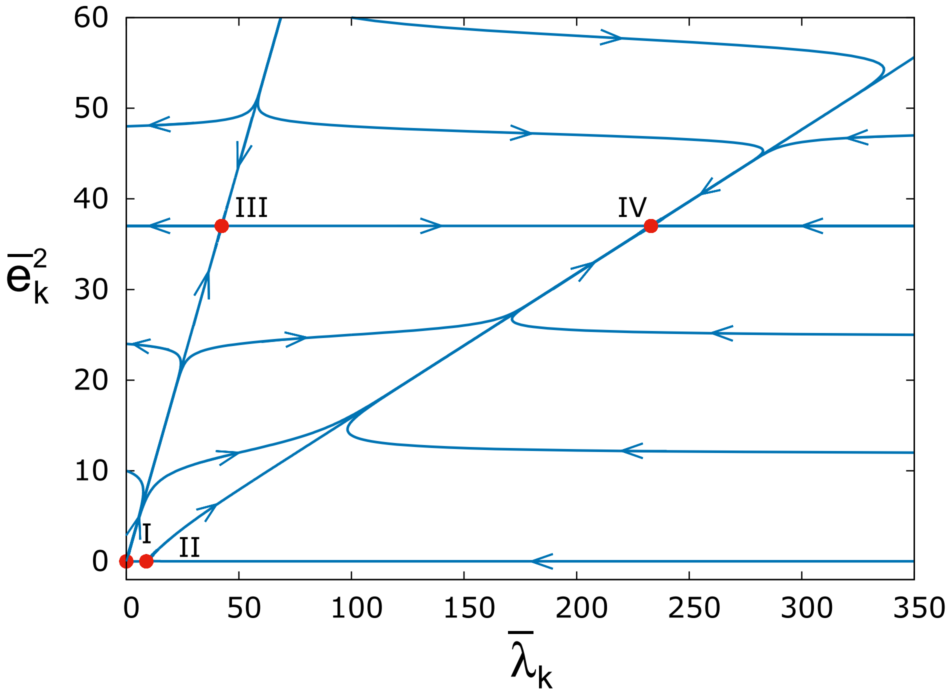
$$k\partial_k e_k^2|_{d=4} = \frac{e_k^4}{24\pi^2}, \tag{4.20b}$$

ami reprodukálja a perturbatív eredményeket [78]. Azt is megjegyezzük, hogy (4.20) egzaktul a standard vezető rendű ϵ sorfejtés eredményét adja. Rövid számolás után arra jutunk, hogy $d = 4 - \epsilon$ dimenzióban a dimenziótlan csatolások, $\bar\lambda_k = \lambda_k/k^\epsilon$ és $\bar e_k^2 = e_k^2/k^\epsilon$ futásait a

$$\beta_\lambda|_{d=4-\epsilon} = k\partial_k\bar\lambda_k = -\epsilon\bar\lambda_k + \frac{54\bar e_k^4 - 18\bar e_k^2\bar\lambda_k + 5\bar\lambda_k^2}{24\pi^2}, \tag{4.21a}$$

$$\beta_{e^2}|_{d=4-\epsilon} = k\partial_k\bar e_k^2 = -\epsilon\bar e_k^2 + \frac{\bar e_k^4}{24\pi^2} \tag{4.21b}$$

egyenletek írják le. Ahogy korábban említettük, ezen eredményekből (helytelenül) arra konkludálhatunk, hogy a rendszerben nincsen infravörös fixpont, vagyis másodrendű átalakulás nem képzelhető el, csak fluktuációindukált elsőrendűség jelenhet meg.



4.2. ábra. Fixpontok az ábeli Higgs modellben $d = 3$ esetén. Az I és II a gaussi és a Wilson–Fisher fixpontok, míg a III és IV töltött fixpontok, melyek egy trikritikus pontot és magát a másodrendű fázisátalakulást jellemzik.

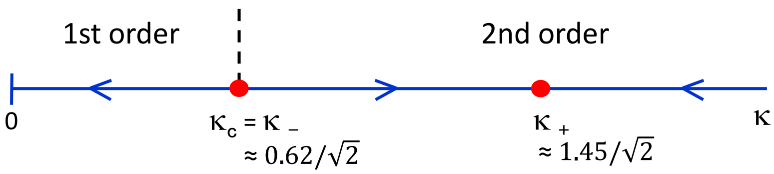
4.2.2. Töltött fixpontok $d = 3$–ban

Visszatérve a (4.19b)–hez ($d = 3$), a legfontosabb felismerés az, hogy előbbi csak akkor kompatibilis (4.11)–vel, ha a mértékrögzítő paraméter $\xi_k = 2$ [általában pedig $\xi_k = 2/(4-d)$]. Ez egyértelműen meghatározza, hogy $k\partial_k Z_{A,k}|_{d=3} = -4e_k^2 Z_{A,k}/15\pi^2 k$, így a β függvények közvetlenül $d = 3$–ban, az ϵ sorfejtés alkalmazása nélkül a következőnek adódnak:

$$\beta_\lambda|_{d=3} = -\bar{\lambda}_k + \frac{72\bar{e}_k^4 - 72\bar{e}_k^2\bar{\lambda}_k + 10\bar{\lambda}_k^2}{9\pi^2}, \tag{4.22a}$$

$$\beta_{e^2}|_{d=3} = -\bar{e}_k^2 + \frac{4}{15\pi^2}\bar{e}_k^4. \tag{4.22b}$$

Az ϵ sorfejtés (4.21) eredményeivel ellentétben, a (4.22) β függvényei mutatnak töltött infravörös fixpontot. Megoldva analitikusan a $\beta_\lambda|_{d=3} = 0$, $\beta_{e^2}|_{d=3} = 0$ egyenleteket, az



4.3. ábra. A Ginzburg–Landau paraméter futása. Ha $\kappa > \kappa_-$, akkor az átalakuás másodrendű.

alábbi megoldásokat kapjuk:

$$\bar{\lambda}_{\mathrm{I}} = 0, \qquad \bar{e}^2_{\mathrm{I}} = 0, \tag{4.23a}$$

$$\bar{\lambda}_{\mathrm{II}} = \frac{9\pi^2}{10}, \qquad \bar{e}^2_{\mathrm{II}} = 0, \tag{4.23b}$$

$$\bar{\lambda}_{\mathrm{III}} = \frac{9\pi^2}{20}(31 - \sqrt{461}), \qquad \bar{e}^2_{\mathrm{III}} = \frac{15\pi^2}{4}, \tag{4.23c}$$

$$\bar{\lambda}_{\mathrm{IV}} = \frac{9\pi^2}{20}(31 + \sqrt{461}), \qquad \bar{e}^2_{\mathrm{IV}} = \frac{15\pi^2}{4}. \tag{4.23d}$$

Az I és II–es fixpontok a gaussi és a Wilson–Fisher fixpontok, III pedig egy ún. trikritikus, a λ–e^2 térben egy instabil iránnyal rendelkező fixpont, mely az első– és másodrendű átalakulásokat mutató paraméter régiók elválasztásáért felelős. Utóbbi átalakulást írja le a IV–es fixpont, mely infravörös stabil, ld. a 4.2. ábrát.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a paramétertér azon részeit, melyek másodrendű átalakuláshoz tartoznak, felidézzük, hogy a Ginzburg–Landau paraméter adott k skálán $\kappa_k = \sqrt{\lambda_k/6e^2_k} \equiv \sqrt{\bar{\lambda}_k/6\bar{e}^2_k}$. Felhasználva (4.22)–t, κ^2_k futására a

$$k\partial_k\kappa^2_k = \frac{4\bar{e}^2_k}{15\pi^2}(25\kappa^4_k - 31\kappa^2_k + 5) \tag{4.24}$$

egyenletet kapjuk. A fizikai régióban (vagyis ahol $\kappa_k > 0$), (4.24)–nak két fixpontja van:

$$\kappa_\pm = \sqrt{\frac{31 \pm \sqrt{461}}{25}}/\sqrt{2}, \tag{4.25}$$

ld. a 4.3. ábrát. Azt látjuk, hogy ha a Ginzburg–Landau paraméter kielégíti a $\kappa > \kappa_- \equiv \kappa_c \approx 0.62/\sqrt{2}$ egyenlőtlenséget, akkor az a $\kappa_+ \approx 1.45/\sqrt{2}$ fixpont felé halad, mely az átalakulásokat jellemző univerzális értéke λ_L/ξ_c–nek. Azonban, ha $\kappa < \kappa_c$, akkor a csatolások többé nem részei az infravörös fixpont vonzási tartományának, így az átalakulás ekkor elsőrendű. Ezzel elértük a célunkat, megmutattuk, hogy ha $\kappa > \kappa_c$, akkor a csatolások befutnak az infravörös (töltött) fixpontba és így a szupravezető átalakulás másodrendű. Elsőrendűség csak akkor fordulhat elő, ha $\kappa < \kappa_c$.

4.3. A regulátor választásának kérdése

Idézzük fel, hogy a fluktuációk kiszámításakor minden esetben az volt a stratégiánk, hogy $\Gamma_k^{(2)}$ diagonalizációja után a sajátmódusokhoz vezettünk be Litim–regulátorokat. Felmerül a kérdés, hogy mit kapunk akkor, ha diagonalizáció előtt rendelünk a rendszer eredeti változóihoz ugyanilyen reguláló tagokat. Ezen a ponton érdemes az elméletünket kiterjeszteni N komplex skalár esetére, azaz dolgozzunk ϕ helyett $\phi^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^a + i\pi^a)$ –val $(a = 1, ...N)$. Ekkor az eredeti $(N = 1)$ eset (4.11) ansatzának általánosításaként a

$$\begin{aligned}\Gamma_k[\Phi] \;=\; \int d^d x\Bigg[&\frac{Z_{A,k}}{2}A_i[-\partial^2\delta_{ij}+\partial_i\partial_j(1-\xi_k^{-1})]A_j+\frac{Z_k}{2}\sigma^a(-\partial^2+m_k^2)\sigma^a\\ &+\frac{\lambda_k Z_k^2}{4!}\Big((\sigma^a)^2+(\pi^a)^2\Big)^2+\frac{Z_k}{2}\pi^a\Big((-\partial^2+m_k^2)\delta^{ab}+\frac{\xi_k Z_k}{Z_{A,k}}e^2\tilde{\sigma}^a\tilde{\sigma}^b\Big)\pi^b\\ &+\frac{1}{2}Z_k e^2 A_i A_i\Big((\sigma^a)^2+(\pi^a)^2\Big)-Z_k e\partial_i A_i(\sigma^a-\tilde{\sigma}^a)\pi^a-2Z_k e\pi^a A_i\partial_i\sigma^a\\ &+c^*\Big(-\partial^2+\xi_k\frac{Z_k}{Z_{A,k}}e^2\tilde{\sigma}^a\sigma^a\Big)c\Bigg].\end{aligned} \tag{4.26}$$

szabadenergia skálafutására vagyunk kíváncsiak. Megválaszolandó kérdésünk az, hogy ha ehhez most már első lépésben, a sajátmódusok megkeresése nélkül a

$$\begin{aligned}\int \Phi^\dagger\mathcal{R}_k\Phi \;\equiv\;& \frac{Z_{A,k}}{2}\int_q A_i(q)R_k(q)\left(\delta_{ij}+\frac{q_iq_j}{q^2}(1-\xi_k^{-1})\right)A_j(-q)\\ +\;& Z_{\phi,k}\int_q \phi^{\dagger a}(q)R_k(q)\phi^a(-q)+\int_q c^*(q)R_k(q)c(-q)\end{aligned} \tag{4.27}$$

reguláló tagokat adjuk (az R_k függvény most is a Litim–féle levágást jelenti), mennyiben kapunk az előző fejezetben tárgyaltakhoz képest más eredményt. Ami azonnal látszik, hogy amikor mérték háttéren dolgozunk, és a $Z_{A,k}$ futását számítjuk, akkor szerkezetileg semmilyen különbség nem adódik, csak annyi a változás, hogy a 4.1. ábrán látható diagramokon most N skalár tud végigfutni, vagyis a $Z_{A,k}$ faktor futására adódott eredményt N–nel be kell szorozni. Tetszőleges d dimenzióban ez (4.18) alapján

$$k\partial_k Z_{A,k} = -\Omega_d\frac{8Ne_k^2Z_{A,k}}{d(d+2)}k^{d-4}. \tag{4.28}$$

A mértékcsatolás futására $(e_k^2 = e^2/Z_{A,k})$ pedig kapjuk, hogy

$$k\partial_k e_k^2 = \Omega_d\frac{8Ne_k^4}{d(d+2)}k^{d-4}. \tag{4.29}$$

Izgalmasabb a helyzet akkor, amikor σ háttérrel dolgozunk, és az öncsatolás, illetve a skalár hullámfüggvény renormálási faktor futását határozzuk meg. A (4.13) és (4.15) egyenletek együttes általánosításaként ezúttal a $\Gamma_k^{(2)}$ mátrix sajátértékei $\mathcal{O}((\partial_j\sigma)^2)$ rendig

$$\begin{aligned}
\gamma_k^{(2),1}(q) &= Z_{A,k}q^2/\xi_k + Z_k e^2\sigma^2 \\
&- \frac{4e^2 Z_k^2(\hat{q}_j\partial_j\sigma)^2}{q^2(Z_k - Z_{A,k}/\xi_k) + Z_k(m_k^2 + Z_k\lambda_k\sigma^2/6 + \xi_k Z_k e^2\sigma^2/Z_{A,k} - e^2\sigma^2)}, \\
\gamma_{k,2}^{(2),2}(q) &= Z_{A,k}q^2 + Z_k e^2\sigma^2 \\
&- \frac{4e^2 Z_k^2\Big((\partial_j\sigma)^2 - (\hat{q}_j\partial_j\sigma)^2\Big)}{q^2(Z_k - Z_{A,k}) + Z_k(m_k^2 + Z_k\lambda_k\sigma^2/6 + \xi_k Z_k e^2\sigma^2/Z_{A,k} - e^2\sigma^2)}, \\
\gamma_k^{(2),3}(q) &= Z_{A,k}q^2 + Z_k e^2\sigma^2, \qquad [\,\text{multiplicitás} : d-2] \\
\gamma_k^{(2),d+1}(q) &= Z_k(q^2 + m_k^2 + Z_k\lambda_k\sigma^2/2), \\
\gamma_k^{(2),d+2}(q) &= Z_k(q^2 + m_k^2 + Z_k\lambda_k\sigma^2/6), \qquad [\,\text{multiplicitás} : 2(N-1)] \\
\gamma_k^{(2),d+2N}(q) &= Z_k(q^2 + m_k^2 + Z_k\lambda_k\sigma^2/6 + \xi_k\frac{Z_k e^2}{Z_{A,k}}\sigma^2) \\
&+ \frac{4e^2 Z_k^2(\partial_j\sigma)^2}{q^2(Z_k - Z_{A,k}) + Z_k(m_k^2 + Z_k\lambda_k\sigma^2/6 + \xi_k Z_k e^2\sigma^2/Z_{A,k} - e^2\sigma^2)} \\
&+ [4e^2 Z_k^2(q_j\partial_j\sigma)^2(\xi_k^{-1} - 1)Z_{A,k}] \\
&\times [q^2(Z_k - Z_{A,k}) + Z_k(m_k^2 + Z_k\lambda_k\sigma^2/6 + \xi_k Z_k e^2\sigma^2/Z_{A,k} - e^2\sigma^2)]^{-1} \\
&\times [q^2(Z_k - Z_{A,k}/\xi_k) + Z_k(m_k^2 + Z_k\lambda_k\sigma^2/6 + \xi_k Z_k e^2\sigma^2/Z_{A,k} - e^2\sigma^2)]^{-1}, \\
\gamma_k^{(2),d+2N+1}(q) &= q^2 + \xi_k\frac{Z_k}{Z_{A,k}}e^2\sigma^2,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

ahol most közösen σ és $\partial_j\sigma$ is nemnulla értéken van hagyva. Megjegyezzük, hogy itt ismét kulcsszerepe van az R_ξ mértékválasztásból jövő szabadságnak, mely szerint minden σ pontban a $\tilde{\sigma} = \sigma$ választással élve a kétpont–függvény diagonális marad Fourier–térben akkor is, ha formálisan a $\partial_i\sigma$ mezőt, mint egy független hátteret tekintjük. (Egy nemeltűnő A_i–π^a keveredés esetén ezt nem lehetne megtenni.)

Ha az előző fejezetbeli regulátorral dolgozunk, akkor a fenti összes sajátmódushoz hozzá kell adnunk egy $\mathcal{Z}_k^{(i)}(k^2 - q^2)\Theta(k^2 - q^2)$ tagot a Wetterich–egyenlet jobb oldalán [itt $\mathcal{Z}_k^{(i)}$ az i-edik sajátmódus $\mathcal{O}(q^2)$ rendű részét szorzó faktor]. Vagyis ekkor a következő egyenlet írható fel (1.12) alapján:

$$\partial_k\Gamma_k^{\mathrm{R1}} = \frac{1}{2}\int_x\int_{|q|<k}\tilde{\partial}_k\sum_{i=1}^{2N+d+2}\log[\gamma_{k,2}^{(i)}(q) - Z_k^{(i)}(q^2 - k^2)]. \tag{4.31}$$

Ha azonban (4.27)–at követjük, és diagonalizáció előtt regularizálunk, akkor a sajátmódusokban formálisan minden q–függést „kicserélünk” k–függésre, vagyis ekkor a

$$\partial_k \Gamma_k^{\mathrm{R2}} = \frac{1}{2}\int_x \int_{|q|<k} \tilde{\partial}_k \sum_{i=1}^{2N+d+2} \log[\gamma_{k,2}^{(i)}(k)], \tag{4.32}$$

egyenlethez jutunk. (A felső indexben látható R1 és R2 a két szóban forgó regularizációra utalnak.) Összevetve (4.31) és (4.32) egyenleteket azt láthatjuk, hogy ha $\partial_i \sigma = 0$, akkor a kettő teljesen ekvivalens, mivel ilyenkor a sajátértékek q–függése csak a gaussi részből ered. Vagyis erre az esetre vonatkozóan nincs különbség a két séma között. A korábbi számolással analóg módon, most N komponensszámmal dolgozva a σ szerinti sorfejtés negyedrendjéből tetszőleges d dimenzióban a

$$k\partial_k(\lambda_k Z_k^2) = \frac{4}{3d}\frac{\Omega_d}{k^{4-d}}\Big[18(d-1)e_k^4 + 6\xi_k e_k^2 \lambda_k + (N+4)\lambda_k^2\Big] Z_k^2, \tag{4.33}$$

egyenletet kapjuk, mely $N = 1$ esetén reprodukálja a korábbi, (4.14a) eredményeket. Itt ismét a $m_k^2 \to 0$ választással éltünk, és emiatt a tömegparaméter futását nem is írtuk fel.

Vegyük észre, hogy amennyiben $\partial_i \sigma^a \neq 0$, akkor viszont (4.31) és (4.32) különböző eredményeket adnak! Ha a hullámfüggvény renormálási faktorra vagyunk kíváncsiak, akkor $\partial_i \sigma^a$–ben fejtünk sorba a formális $\sigma^a = 0$ választással, és eredményül a két különböző regularizációs sémában a

$$k\partial_k Z_k^{\mathrm{R1}} = \frac{8e_k^2 Z_k}{d(d-2)}\frac{\Omega_d}{k^{4-d}}(d-1+\xi_k), \tag{4.34a}$$

$$k\partial_k Z_k^{\mathrm{R2}} = \frac{16e_k^2 Z_k}{d^2}\frac{\Omega_d}{k^{4-d}}(d-1+\xi_k). \tag{4.34b}$$

eredményeket kapjuk [az R1 esetben reprodukáljuk a korábbi (4.16a) egyenleteket]. Összehasonlítva (4.34a) és (4.34b)–t azt kapjuk, hogy $\partial_k \log Z_k^{\mathrm{R1}} / \partial_k \log Z_k^{\mathrm{R2}} = d/2(d-2)$. Látszik, hogy $d = 4$–ben $Z_k^{\mathrm{R1}} = Z_k^{\mathrm{R2}}$, ami az egyhurok β_λ függvények univerzalitásából következik. Ha $d < 4$ ($d > 4$), akkor $Z_k^{\mathrm{R1}} > Z_k^{\mathrm{R2}}$ ($Z_k^{\mathrm{R1}} < Z_k^{\mathrm{R2}}$). A tény, hogy két regularizációs séma két különböző eredményre vezet, egyértelműen az alkalmazott (4.26) ansatz következménye. Ha egzaktul meg tudnánk oldani a Wetterich–egyenletet, akkor nem jelenhetne meg regularizációtól való függés, de (4.34a) és (4.34b) különbözősége azt mutatja, hogy jelen esetben el kell tudni dönteni, hogy melyiket tartjuk jobb közelítésnek. Ezt az effektív hatás $\partial_i \sigma^a$ szerinti sorfejtésének tulajdonságaiból tesszük meg, R1 és R2–t külön vizsgálva. Vegyük észre, hogy $\sigma^a = 0$ esetén az összes sajátmódus, ld. (4.30), amiben $\partial_i \sigma^a$ szerepel, a

$$Z_k^{(i)} q^2 + \frac{A_k^{(i)}}{q^2}(\partial_j \sigma^a)^2 + \frac{B_k^{(i)}}{q^2}(\partial_j \sigma^a)^2 \cos^2\theta, \tag{4.35}$$

alakot ölti, $\mathcal{Z}_k^{(i)}$, $A_k^{(i)}$, és $B_k^{(i)}$ megfelelő választásával. Analizáljuk először (4.31)–et. Behelyettesítve (4.35)–at (4.31)–be, a radiális integrál elvégzése után a

$$\begin{aligned}\partial_k \Gamma_k^{\mathrm{R1}}|_{\partial_j\sigma^a} &= \int_x \Bigg[\int_\Omega \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^{d-1-4n}}{(d-2n)(\mathcal{Z}_k^{(i)})^n} \times (A_k^{(i)} + B_k^{(i)}\cos^2\theta)^n (\partial_j\sigma^a)^{2n} \\ &- \int_\Omega \frac{\pi k^{-d-1}}{2\sin(d\pi/2)} \left(\frac{A_k^{(i)} + B_k^{(i)}\cos^2\theta}{\mathcal{Z}_k^{(i)}} \right)^{d/2} (\partial_j\sigma^a)^d \Bigg]\end{aligned} \tag{4.36}$$

egyenletet kapjuk. (A szögintegrál elvégezhető, de a kompakt alak kedvéért így hagyjuk.) Először is azt látjuk, hogy ha d páros, akkor a jobb oldali összegben az a tag, melyre $n = d/2$, divergens. Vegyük azonban észre, hogy ha $d \to 2n$, akkor viszont $\sin(d\pi/2) \approx (-1)^n \pi(d-2n)/2$, és így az előbbi tag mindig kiesik az utolsó által, vagyis a kifejezés jóldefiniált. Ha d páratlan, akkor az összeg véges, de kapunk egy nemanalitikus tagot $\partial_j\sigma^a$–ben. Bizonyítás nélkül azt várjuk, hogy ezen tagok ki kell, hogy essenek, amennyiben a sajátértékek kifejezésében $\partial_j\sigma^a$ magasabb rendjeit is figyelembe vesszük. Ezt az effektív hatás analiticitása alapján várjuk, illetve azon a megfigyelésen hogy a

$$\int_0^k dq q^{d-1} \Big(k^2 + \text{konst.} \times [(\partial_i\sigma^a)^2/q^2]^m\Big)^{-1} \tag{4.37}$$

jellegű integrálok eredményében mindig felbukkan egy tag, amelyik arányos $(\partial_i\sigma^a)^d$–vel minden m-re [minden további járulék $\mathcal{O}\Big((\partial_i\sigma)^{2j}\Big), j \geq m$]. Ez azt jelenti, hogy ha (4.36)–ban az $\mathcal{O}\Big((\partial_j\sigma)^d\Big)$ tagokat szeretnénk kiszámítani, akkor elvileg az összes rendet figyelembe kellene vennünk (4.35)–ben egy $\partial_j\sigma^a$ szerinti kifejtésben. Mivel Γ_k analitikus függvény $\partial_j\sigma^a$ szerint, ezért az összes fenti jellegű tag összege együtt nullát kell, hogy adjon, amennyiben d páratlan. Ezzel (4.36) a következőképpen foglalható össze:

$$\partial_k \Gamma_k^{\mathrm{R1}}|_{\partial_j\sigma^a} = \int_x \int_\Omega \sum_{i=1,2,d+2N} \sum_{n \neq d/2} \frac{(-1)^n k^{d-1-4n}}{(d-2n)(\mathcal{Z}_k^{(i)})^n} (A_k^{(i)} + B_k^{(i)}\cos^2\theta)^n (\partial_j\sigma^a)^{2n}. \tag{4.38}$$

Másfelől azonban, (4.32)–ra vonatkozóan

$$\partial_k \Gamma_k^{\mathrm{R2}}|_{\partial_j\sigma^a} = \int_x \int_\Omega \sum_{i=1,2,d+2N} \sum_n \frac{(-1)^n 2k^{d-1-4n}}{d(\mathcal{Z}_k^{(i)})^n} (A_k^{(i)} + B_k^{(i)}\cos^2\theta)^n (\partial_j\sigma^a)^{2n} \tag{4.39}$$

adódik. Azt látjuk, hogy mindkét esetben alternáló sort kapunk, de R1 esetén a koefficiensek abszolút értéke csökkenést mutat magasabb rendek felé haladva, R2–vel ellentétben. Ezt úgy interpretáljuk, hogy egy véges csonkítás mellett [amit nyilvánvalóan (4.26) –ben is csinálunk] az R1–es eset a jobb közelítés, hiszen ekkor amiket eldobunk tagokat, azok egyre kisebb járulékot visznek az alternáló sorban.

4.4. Az N komponensű szupravezető

Az R1 regulátort alkalmazva, (4.29), (4.33) és (4.34a) felhasználásával a dimenziótlan csatolásokra tetszőleges d és N esetén az alábbi futási egyenleteket kapjuk [$m_k^2 \to 0$]:

$$\beta_\lambda \equiv k\partial_k \bar{\lambda}_k = (d-4)\bar{\lambda}_k + \frac{4\Omega_d}{3d(d-2)}[18(d-1)(d-2)\bar{e}_k^4 - 12d\bar{e}_k^2\bar{\lambda}_k + (d-2)(N+4)\bar{\lambda}_k^2], \tag{4.40a}$$

$$\beta_{e^2} \equiv k\partial_k \bar{e}_k^2 = (d-4)\bar{e}_k^2 + \frac{8N\Omega_d}{d(d+2)}\bar{e}_k^4, \tag{4.40b}$$

ahol kihasználtuk a $\xi_k = 2/(4-d)$ konzisztenciafeltételt. Utóbbi nyilvánvalóan $d = 4$–ben értelmetlen, de ekkor β_λ–ból ki is esik a mértékrögzítő paraméter, és eredményül közvetlenül $\beta_\lambda|_{d=4} = [54e_k^4 - 18e_k^2\lambda_k + (N+4)\lambda_k^2]/24\pi^2$ adódik. A (4.40) egyenletek fixpont megoldásai nagyon hasonlítanak a korábban tárgyalt $N = 1$ –es esethez. A töltetlen fixpontok megkereséséhez feltesszük, hogy $e_k^2 \equiv 0$, amiből

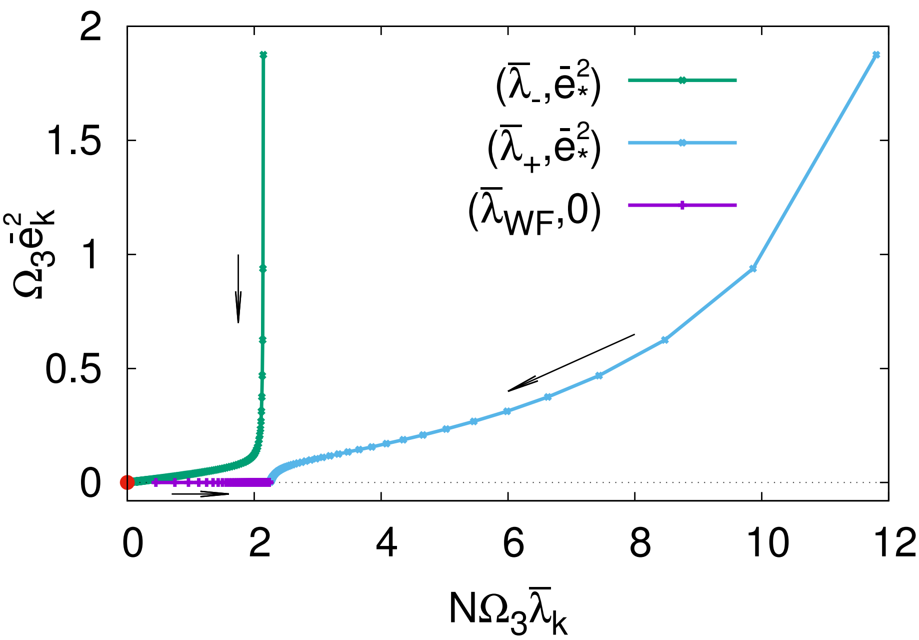
$$\bar{\lambda}_{\mathrm{G}} = 0, \qquad \bar{\lambda}_{\mathrm{WF}} = \frac{3d(4-d)}{4(N+4)\Omega_d} \tag{4.41}$$

adódik. Itt G a gaussi, míg WF a Wilson–Fisher $O(N)$ fixpontra vonatkozik. Az utóbbi létezéséhez stabilitási okokból $d < 4$ irandó elő, mely feltétel töltött fixpontok létrejöttének is szükséges feltétele, hiszen a töltés fixpontja az

$$\bar{e}_k^2 = \bar{e}_*^2 \equiv d(d+2)(4-d)/(8N\Omega_d), \tag{4.42}$$

egyenletnek tesz eleget, és $e_k^2 > 0$ kell legyen. Ha (4.40a)–et a (4.42) feltétellel együtt oldjuk meg, az alábbi fixpontokat kapjuk $\bar{\lambda}$-ra:

$$\bar{\lambda}_\pm = 3d\frac{(4-d)(2d(d+2)+(d-2)N) \pm \sqrt{\Delta}}{8(d-2)N(N+4)\Omega_d}, \tag{4.43}$$



4.4. ábra. Fixpontok helyzete N függvényében $d = 3$ esetén. A nyilak növekvő N értékek felé mutatnak.

ahol

$$\begin{aligned} \Delta &= (d^2-6d+8)^2N^2 - 2(d-4)^2(d-2)(d+2)\Big(4+(d-3)d(d+2)\Big)N \\ &- 4(d-4)^2(d+2)^2(d^2(2d-11)+16d-8). \end{aligned} \tag{4.44}$$

A minket leginkább érdeklő $d = 3$ dimenzióban

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{\mathrm{G}}|_{d=3} = 0, \qquad \bar{\lambda}_{\mathrm{WF}}|_{d=3} = \frac{9}{4(N+4)\Omega_3}, \\ \bar{\lambda}_{\pm}|_{d=3} = \frac{9(30+N\pm\sqrt{(20-N)^2+100)}}{8N(N+4)\Omega_3}, \end{aligned} \tag{4.45}$$

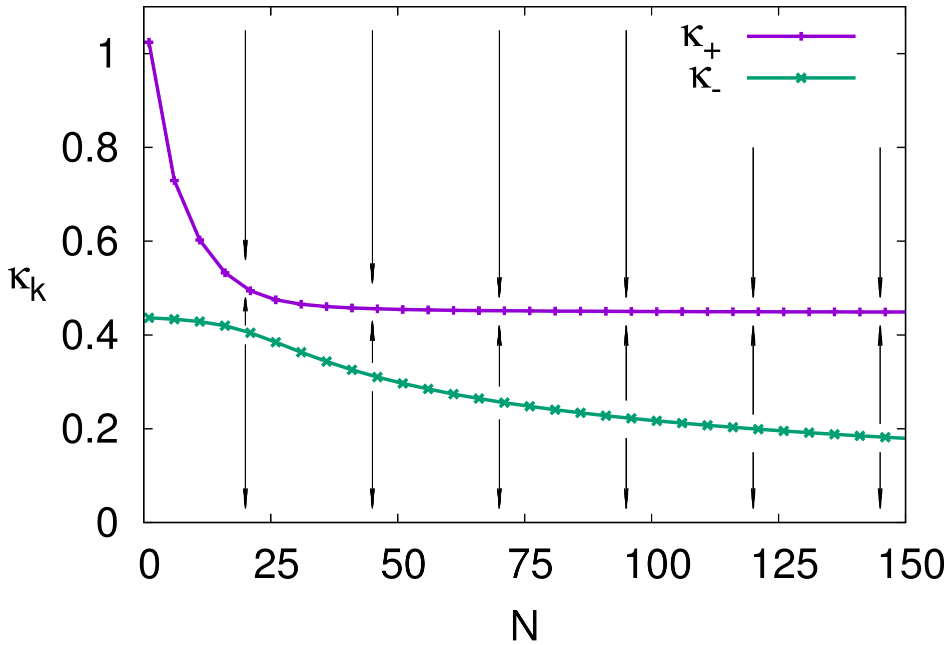
ahol az utolsó kettő töltött fixpont, melyekre (4.42) alapján

$$\bar{e}_*^2|_{d=3} = \frac{15}{8N\Omega_3}. \tag{4.46}$$

Vegyük észre, hogy $N = 1$ esetén visszakapjuk (4.22) eredményeit, illetve minden renormálási csoport futás teljesen analóg azzal, amit a 4.2 ábrán láttunk. A fixpontok helyzete N függvényében, $d = 3$ mellett a 4.5 ábrán látható.

A paramétertér azon része, melyet a $(\lambda_+, \bar{e}_*^2)$ vonz be ismét egyértelműen jellemezhető a Ginzburg–Landau paraméterrel, $\kappa_k^2 \equiv \bar{\lambda}_k/6\bar{e}_k^2$. A κ_k^2 renormálási csoport futása

$$k\partial_k\kappa_k^2 = \frac{8\Omega_3}{15}\bar{e}_k^2\Big(5(N+4)\kappa_k^2 - (N+30)\kappa_k + 5\Big), \tag{4.47}$$



4.5. ábra. A Ginzburg–Landau paraméter, κ_k, futásai $d = 3$–ban. A nyilak az UV irányból mutatnak az IR felé. A κ_- vonala felett a fázisátalakuás másodrendű.

ami újra azt jelzi, hogy κ_k–ra két fixpont van (vegyük figyelembe, hogy $\kappa_k > 0$, mivel $\lambda_k > 0$ és $e_k^2 > 0$):

$$\kappa_\pm = \sqrt{\frac{30 + N \pm \sqrt{(20-N)^2 + 100}}{10(N+4)}}, \tag{4.48}$$

ahol κ_+ stabil, míg κ_- instabil, ld. a 4.5 ábrát.

Az eredmények szempontjából nagyon fontos kihangsúlyozni az R1 regulátor szerepét. Vegyük észre, hogy ha az R2 regularizációt választottuk volna, a Z_k hullámfüggvény renormálási faktora egy 2/3–os faktorral módosult volna, ld. (4.34)–et. Ez természetesen befolyásolja az öncsatolás, λ_k futását (β_λ–t), és megváltoztatja a fixpontok helyzetét. A kifejezések gyors újraszámolása után az derül ki, hogy ez annyira drámaian befolyásolja a rendszer viselkedését, hogy a töltött fixpontok teljesen eltűnnek, ha $N \le N_{\text{krit.}} = 68$. Mivel azt várjuk, hogy már $N = 1$ esetén is ezen fixpontoknak létezniük kell, az eredmény azt mutatja, hogy a regulátorválasztás, és az ezen keresztüli renormálási csoport futások optimalizációja kulcsfontosságú. Az előző fejezet végén leírt analízis mellett ezen felismerés egy újabb érvként szolgál amellett, hogy a sajátmódusokhoz célszerűbb az individuális regulátorokat hozzárendelni, és így az R2–vel szemben inkább az R1 sémában kell dolgozni.

4.5. Összegzés

Ebben a fejezetben a hagyományos szupravezető fázisátalakulást vizsgáltuk. A szupravezetés Ginzburg–Landau szabadenergiája által definiált ábeli Higgs modell renormálási csoport futásait az effektív hatás $\mathcal{O}(\partial^2)$ rendjéig számítottuk ki. Reprdukálni tudtuk a $d = 4$ körüli ϵ sorfejtés perturbatív eredményeit, illetve teljesen új kifejezéseket vezettünk le az ön– és mértékcsatolások β függvényeire $d = 3$–ban. Azt tapasztaltuk, hogy a szóban forgó közelítési sémában a mértékrögzítő paraméter a konzisztencia miatt nem lehet tetszőleges, azt a szabadenergiára felírt ansatz és a radiatív korrekciók kompatibilitása szabja meg. Ebben a speciális mértékben levezetett skálafutások segítségével rámutattunk, hogy a rendszerben két új töltött (azaz nemnulla mértékcsatolással bíró) fixpont létezik. Az egyik egy trikritikus fixpont, mely a paramétertér azon részeinek elkülönítéséért felel, amely a másik, teljesen infravörös stabil fixpont vonzási tartományát definiálja. Ezzel rámutattunk arra, hogy ha a szóban forgó szupravezető Ginzburg–Landau paramétere egy kritikus értéken túl esik, $\kappa > \kappa_c \approx 0.62/\sqrt{2}$, akkor a szupravezető átalakulás folytonos, ellenkező esetben azonban elsőrendű. Ezen eredmény a közelítési séma egyszerűsége ellenére igen közel helyezkedik el a Monte–Carlo szimulációk eredményéhez.

Rámutattunk arra, hogy azonos regulátor profilfüggvények esetén is legalább kétféle választásunk van a hullámfüggvény renormálási faktorhoz járulékot adó radiatív korrekciók regulálására. Kiderült, hogy a fenti fixpont szerkezet nagyon érzékeny az ezutóbbi választásra, és az effektív hatás derivatív kifejtésének vizsgálatával megmutattuk, hogy miért érdemes inkább sajátmódusokhoz, és nem pedig az eredeti változókhoz regulátorokat rendelni. A β függvényeket általános N skalár esetére is megadtuk, és rámutattunk, hogy a fixpont szerkezet tetszőleges N értékre az eredeti $N = 1$ esettel kvalitatíve azonos.

5. fejezet

Szín–szupravezetés

5.1. A szín–szupravezető fázis létrejötte

Az előző fejezetben felidéztük, hogy a konvencionális szupravezetők fázisátalakulásának alapja a töltéshordozóknak a rácsrezgésekkel való kölcsönhatása. Utóbbi következtében az elektronok effektív vonzóerőt képesek egymásra kifejteni, mely a Fermi–gömb instabilitását okozva kötött állapot létrejöttéhez vezet. A párok kondenzációja következtében az elektromos áramot egyre inkább a párbaállt elektronok kezdik vezetni, mely az ellenállás drasztikus csökkenését idézi elő. Könnyű meggondolni, hogy az erős kölcsönhatásban a kvarkok alacsony hőmérsékleten ugyanilyen folyamaton kell, hogy átessenek, hiszen köztük az erős kölcsönhatás mindenféle közvetítő, másodlagos kölcsönhatástól mentesen is vonzóerőt alakít ki. A párbaállási– és a kondenzációs folyamat természetesen csak akkor mehet végbe, ha a környezeti körülmények olyanok, hogy hadronizáció nem lép fel, vagyis a sűrűség elegendően nagy, viszont a hőmérséklet kellően alacsony.

A színtöltésen alapuló szupravezetést $N_c = 3$ szín mellett $N_f = 3$ kvarkíz esetére tárgyaljuk. A konvencionális szupravezetéssel ellentétben az előbbi kvantumszámok jelenléte miatt számos csatornában jöhet létre potenciális párosodás. A fent leírtak következtében viszont a legerősebb vonzást produkáló kombinációkra van szükség. Ezekről a párokról elegendően magas sűrűségen, 1–gluon cserén alapuló számítás alapján megmutatható, hogy szín– és íz–térben is antiszimmetrikusak (ezen az axiális anomália jelenléte sem változtat, így ezt lejjebb el is fogjuk hanyagolni) [91, 92, 93]. A levezetésnél feltételezzük, hogy a konvencionális szupravezetéssel analóg módon, a kölcsönhatásban ellentétes irányba álló spinekkel rendelkező kvarkok (s–hullám) vesznek részt, ahol a szín–térben adódó antiszimmetria miatt az íz–térbeli antiszimmetria már azonnal a Fermi–statisztika következménye. A párosodást követően fokozatosan létrejövő kvark–kvark kondenzátum eszerint eleget tesz a

$$\langle \psi_l^\alpha C \gamma_5 \psi_m^\beta \rangle \sim \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{lmn}\phi_n^\gamma \tag{5.1}$$

összefüggésnek (a görög a szín–, míg a latin indexek az íz–térre vonatkoznak), ahol ψ a kvark–mező, C a töltéskonjugálás operátora, γ_5 az ötödik Dirac–mátrix, ϕ pedig az átalakulás rendparamétere. A fenti reláció valójában azt fejezi ki, hogy a domináns csatorna azonosítása után a szín–szupravezető átalakulás egy ϕ 3×3–as mátrixszal, mint rendparaméterrel jellemezhető. Spontán szimmetriasértés után a ϕ mező természetesen különböző mintázatokat alakíthat ki, melyek közül tipikusan az egybezárt íz–szín (color–flavor–locked, CFL), illetve a kétízű (2SC) mintázat jelenik meg az effektív leírásban [91, 92, 93]. Előbbinél defininíció szerint $\phi_n^\gamma \sim \delta_n^\gamma$, míg utóbbinál $\phi_n^\gamma \sim \delta_3^\gamma \delta_n^3$.

Az átalakulás jellegéről szóló kezdetleges állítások teljesen hasonlóak ahhoz, mint amit a konvencionális szupravezetőnél már felidéztünk. A fluktuációk nélküli Ginburg–Landau potenciál triviális módon másodrendűséget ad [94, 95], de amint a gluonikus fluktuációk kiszámításra kerülnek, a Coleman–Weinberg mechanizmus elsőrendűvé változtatja az átalakulást, eltávolítva a rendszert mindennemű kritikus viselkedéstől [96, 97, 98, 99] (bár alacsony kémiai potenciál esetén egy esetleges másodrendűség nem teljesen zárható ki [101]). Mint azt az előző fejezetben láttuk, hasonló számítások kicsi mértékcsatolás esetén biztosan nem működnek, ezért célunk ebben a fejezetben az, hogy az ábeli eset analógiájára egy, az ϵ sorfejtésen [100] túlmutató, a funkcionális renormálási csoport módszerén alapuló vizsgálatot folytassunk, és választ találjunk arra a kérdésre, hogy a szín–szupravezető átalakulás lehet–e másodrendű. Vizsgálódásainkat, ahol lehet általános N_c szín és N_f íz esetre végezzük el d euklideszi dimenzióban, majd eredményeinket $N_c = N_f = 3$ és $d = 3$ –ra értékeljük ki.

Ezen a ponton érdemes elidőznünk amellett, hogy (az előző fejezetben is látottakkal összhangban) az FRG alkalmazása mértékelméletekre nem magától értetődő, hiszen az impulzus térben bevezetett levágás megsérti a mértékszimmetriát. A problémára többféle megoldási módszert is javasoltak már az irodalomban. Az ún. háttérmező módszer, melyben a mértékszimmetria továbbra is létezik háttérmező transzformációkra vonatkozóan, gyakran alkalmazott eljárás [80, 81, 82, 102, 103]. A renormálási csoport futások manifeszt mértékinvariáns megfogalmazására, melyek a Fadeev–Popov kvantálásra egyáltalán nem támaszkodnak, többféle ötlet is napvilágot látott [104, 105, 106, 107]. Makroszkopikus mértékmezők bevezetésével felépülő mértékinvariáns futási egyenlet konstrukcióját az olvasó [108]–ban talál, illetve a regulátort a BRST invarianciának részévé tevő eljárás [109]–ben került kifejlesztésre. A BRST szimmetria kvantumos master egyenletének a renormálási csoport futásokat leíró Wetterich–egyenlethez való hozzáigazítására tett kísérlet [110]–ben található. Mindannak ellenére, hogy számos javaslat született a mértékszimmetria megsértésének elkerülésére, a kidolgozott eljárások rendkívül bonyolultak és pratikus szempontból kevéssé alkalmazhatóak, különösen ami a konkrét modellszámolásokat illeti. A hagyományos, funkcionálintegrálokon alapuló eljárás, kovariáns mértékrögzítéssel még mindig a legegyszerűbb mód konkrétan kivitelezendő (nem absztrakt) számolások szempontjából. A továbbiakban ezen az úton maradunk, és az előző fejezetben már bevezetett eljárást használjuk, mely szerint a mértékszimmetria sérülését adott mértékválasztással kerüljük el, azt a szóban forgó közelítéshez igazítva.

5.2. Effektív leírás

A hagyományos szupravezető átalakuláshoz hasonlóan, a Ginzburg–Landau paradigma itt is alkalmazható [94, 95]. A korábban bevezetett ϕ mező szerint sorbafejtjük az ultraibolya szabadenergiát, ügyelve arra, hogy a rendszer szimmetriaviszonyai megmaradjanak. Nulla tömegű kvarkokat feltételezve, az axiális anomália figyelembevétele nélkül a szimmetriacsoport $SU(3)_c \times U(3)_L \times U(3)_R$, így a legáltalánosabb felírás

$$\begin{aligned}\Gamma_\Lambda(\phi) \;=\; \int d^dx\Big[&-\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(F_{ij}F_{ij}) + \,\mathrm{Tr}\,[D_i\phi D_i\phi] \\ &+\alpha\,\mathrm{Tr}\,(\phi^\dagger\phi) + \beta_1\Big[\,\mathrm{Tr}\,(\phi^\dagger\phi)\Big]^2 + \beta_2\,\mathrm{Tr}\,\Big[(\phi^\dagger\phi)^2\Big] + \cdots\Big], \end{aligned} \tag{5.2}$$

ahol $D_i = \partial_i + igA_i$ a kovariáns derivált (A_i mértékmezőkkel és g mértékcsatolással), α, β_1, és β_2 pedig hőmérséklet és kémiai potenciál függő paraméterek, melyek alakja a mikroszkopikus elméletből számítható ki (de erre a továbbiakban sem lesz szükségünk). A ϕ^n_γ skalármezőre érdemes általános kvarkíz ($n = 1, 2, \ldots, N_\mathrm{f}$) és szín ($\gamma = 1, 2, \ldots, N_\mathrm{c}$)

mellett tekinteni. Jegyezzük fel, hogy a mértékmező ezúttal egy mátrix, $A_i = A_i^a \hat{T}^a$, ahol $\hat{T}^a$ az $SU(N_c)$ csoport generátorai az antifundamentális ábrázolásban. Utóbbinak oka az, hogy a kvark párokra vonatkozó tenzorszorzat ábrazolásra $3 \otimes 3 \simeq 6 \oplus 3^*$, és a ϕ mező éppen a 3^* reprezentációhoz tartoik. Szokásos módon F_{ij} a térerősség–tenzor mátrixa, $F_{ij} \equiv F_{ij}^a \hat{T}^a$, $F_{ij}^a = \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + g f^{abc} A_i^b A_j^c$. Ahogy feljebb jeleztük, (5.2) minimalizálásából adódó két lehetséges mintázat rendre

$$\langle \phi_n^\gamma \rangle = \begin{cases} \Delta \delta_n^\gamma & \text{(CFL)} \\ \Delta \delta_3^\gamma \delta_n^3 & \text{(2SC)} \end{cases}, \tag{5.3}$$

ahol Δ az ún. gap–paraméter, mely a kondenzáció mértéket jellemzi. Az, hogy az alapállapotban melyik valósul meg, az az α, β_1, β_2 paraméterek függvénye. Ha az ultraibolya szabadenergiából kiindulva fluktuációkat szeretnénk számolni, akkor mértéket kell rögzítenünk. Standard kovariáns mértéket alkalmazva (5.2) az alábbiak szerint írható át:

$$\begin{aligned} \Gamma_\Lambda(\phi) \;=\; \int d^d x \Big[& \frac{1}{2} A_i^a \delta^{ab} \Big(-\partial^2 \delta_{ij} + (1 - \xi^{-1}) \partial_i \partial_j \Big) A_j^b + \bar{c}^a (-\partial^2 \delta^{ac} - g f^{abc} \partial_i A_i^b) c^c \\ & - \phi_\gamma^{\dagger n} \partial^2 \phi_\gamma^n + \alpha \, \mathrm{Tr}\, (\phi^\dagger \phi) + \beta_1 \Big[\mathrm{Tr}\, (\phi^\dagger \phi) \Big]^2 + \beta_2 \, \mathrm{Tr} \Big[(\phi^\dagger \phi)^2 \Big] \\ & + \mathrm{i} g A_i^a \Big(\partial_i \phi_\gamma^\dagger (\hat{T}^a \phi_\gamma) - (\hat{T}^a \phi_\gamma)^\dagger \partial_i \phi_\gamma \Big) + g^2 f^{abe} f^{cde} A_i^a A_i^b (\hat{T}^c \phi_\gamma)^\dagger (\hat{T}^d \phi_\gamma) \\ & + g f^{abc} \partial_i A_j^a A_i^b A_j^c + \frac{g^2}{4} f^{abe} f^{cde} A_i^a A_j^b A_i^c A_j^d \Big], \end{aligned} \tag{5.4}$$

ahol $\bar{c}^a$ és c^a $(a = 1, 2, \ldots, N_\mathrm{c}^2 - 1)$ a szellemmezőket, f^{abc} pedig az $SU(N_c)$ csoport teljesen antiszimmetrikus struktúraállandóit jelöli. Ezen a ponton megjegyezzük, hogy leírásunkban az elektrodinamika $U(1)$ mértékmezője egyáltalán nem szerepel, jóllehet a szín–szupravezető fázisokban az keveredni képes a gluonokkal. Ahogy az a soron következő analízisünkből kiderül, ennek hiánya nem befolyásolja az átalakulás jellegéről kialakuló konklúziót.

5.3. Futó mértékcsatolás

Érdeklődésünk középpontjában a mértékcsatolás futása áll, az (5.4) által definiált elméletekre vonatkozóan, de különösen az $N_c = 3$, $N_f = 3$ esetben. A futás meghatározásához a következő átskálázásokkal kezdjük vizsgálódásainkat:

$$A_i \;\to\; Z_A^{1/2} A_i, \qquad \phi \to Z_\phi^{1/2} \phi, \qquad c \to Z_c^{1/2} c, \qquad g \to Z_g g\,, \tag{5.5}$$

ahol $Z_i \equiv 1 + \delta Z_i$ $(i = A, \phi, c, g)$, és a kapcsolódó ellentagok definíciója a

$$\begin{aligned} Z_g Z_c Z_A^{1/2} &\Rightarrow 1 + \delta_{A\bar{c}c}, \quad Z_g Z_\phi Z_A^{1/2} \Rightarrow 1 + \delta_{\phi^2 A}, \qquad Z_g^2 Z_\phi Z_A \Rightarrow 1 + \delta_{\phi^2 A^2}, \\ Z_g Z_A^{3/2} &\Rightarrow 1 + \delta_{3g}, \qquad Z_g^2 Z_A^2 \Rightarrow 1 + \delta_{4g} \end{aligned} \tag{5.6}$$

relációkon keresztül történik. Az elektrodinamika Ward–azonosságai nemábeli esetben az ún. Slavnov–Taylor–identitásokká általánosodnak, melyek garantálják, hogy a következő kifejezések egyenlőek és így mindegyik ugyanazt a $\beta(g)$ függvényt adja a mértékcsatolásra (perturbatíve vezető rendben):

- $-g\mu\partial_\mu(\delta_{\phi^2 A} - \delta Z_\phi - \delta Z_A/2)$
- $-g\mu\partial_\mu(\delta_{\phi^2 A^2} - \delta Z_\phi - \delta Z_A)/2$
- $-g\mu\partial_\mu(\delta_{3g} - 3\delta Z_A/2)$
- $-g\mu\partial_\mu(\delta_{4g}/2 - \delta Z_A)$
- $-g\mu\partial_\mu(\delta_{A\bar{c}c} - \delta Z_c - \delta Z_A/2)$

Itt μ a renormálási skála, és minden ellentagra úgy gondolunk, hogy azok dimenziós regularizációban vannak kiértékelve közel $d = 4$–hez. Ahogy azt már korábban felvezettük, az FRG formalizmus alapjául szolgáló regulátorfüggvény azonban sérti a mértékinvarianciát, ezért a mértékcsatolás futását adó előbbi lehetséges definícióknak az FRG–ben használatos változatai nem ugyanazt a β függvényt szolgáltatják. Nem kíséreljük meg az összes változatot végigszámolni, és a különbségeket analizálni, hanem diagrammatikailag a legegyszerűbb, utolsó alakot értékeljük csak ki. Ez a választás abból a szempontból is motivált, hogy nem támaszkodik arra a Ward–azonosságra, mely szerint a $\delta_{\phi^2 A} - \delta Z_\phi$ (és hasonlóan a $\delta_{\phi^2 A^2} - \delta Z_\phi$) különbség független az anyagi mezőktől. Az FRG regulátor jelenléte miatt azt várjuk, hogy az első és második definícióban az előbbiek szerint fellépő anyagi járulékok kiejtései nem fognak teljesülni, viszont szerencsére a $\beta(g)$–re vonatkozó utolsó definícióban ez a probléma egyáltalán nem lép fel (hiszen nincsen benne referencia anyagi mezőkre).

A vezető rendű derivatív kifejtésben, (5.4) felhasználásával a skálafüggő szabadenergiára az alábbi ansatzot tételezzük fel:

$$\begin{aligned}
\Gamma_k \;=\; \int_x \Bigg[& \frac{Z_{A,k}}{2} A_i^a \delta^{ab}\Big(-\partial^2\delta_{ij} + (1-\xi_k^{-1})\partial_i\partial_j\Big) A_j^b + Z_{c,k}\bar{c}^a(-\partial^2\delta^{ac} - Z_{g,k}Z_{A,k}^{1/2} g f^{abc}\partial_i A_i^b)c^c \\
& - Z_{\phi,k}\phi_\gamma^{\dagger n}\partial^2\phi_\gamma^n + V_k(\phi) + \mathrm{i}Z_{g,k}Z_{A,k}^{1/2}Z_{\phi,k} g A_i^a \Big(\partial_i\phi_\gamma^\dagger(\hat{T}^a\phi_\gamma) - (\hat{T}^a\phi_\gamma)^\dagger\partial_i\phi_\gamma\Big) \\
& + Z_{g,k}^2 Z_{A,k} Z_{\phi,k} g^2 f^{abe} f^{cde} A_i^a A_i^b (\hat{T}^c\phi_\gamma)^\dagger(\hat{T}^d\phi_\gamma) + Z_{g,k}Z_{A,k}^{3/2} g f^{abc}\partial_i A_j^a A_i^b A_j^c \\
& + Z_{g,k}^2 Z_{A,k}^2 \frac{g^2}{4} f^{abe} f^{cde} A_i^a A_j^b A_i^c A_j^d \Bigg]. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Ahogy a dolgozatban korábban, ebben a részben is mindegyik módushoz egy Litim jellegű regulátorfüggvényt vezetünk be, $R_k(q) = (k^2 - q^2)\Theta(k^2 - q^2)$, vagyis a hatáshoz az alábbi tagot adjuk:

$$\begin{aligned}
\int \Phi^\dagger \mathcal{R}_k \Phi \;=\; & \frac{Z_{A,k}}{2}\int_q A_i^a(q)A_j^a(-q)\Big(\delta_{ij} + \hat{q}_i\hat{q}_j(1-\xi_k^{-1})\Big)R_k(q) \\
& + Z_{c,k}\int_q \bar{c}^a(q)c^a(-q)R_k(q) + Z_{\phi,k}\int_q \phi_\gamma^{\dagger n}(q)\phi_\gamma^n(-q)R_k(q)\,. \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Ahogy korábban megjegyeztük, a Wetterich–egyenlet (1.13) alakjából egyhurok gráfok generálódnak le, ezúttal az (5.7)–nek megfelelő regulált propagátorokból felépülve. A fentiek értelmében a $\beta(g)$ függvényt a mérték–antiszellem–szellem vertexből fogjuk meghatározni. (5.5) alapján, a skálafüggő mértékcsatolást $g_k = gZ_{g,k}$ módon definiálva (itt g a csupasz mértékcsatolás), illetve a dimenziótlan változatát $\bar{g}_k = k^{d-4}g_k$ módon felírva, a futásra a

$$\begin{aligned}
\beta(g) \;\equiv\; & k\partial_k\bar{g}_k = (d-4)\bar{g}_k + gk^{d-4}k\partial_k Z_{g,k} = (d-4)\bar{g}_k + gk^{d-4}k\partial_k\left(\frac{Z_{g,k}Z_{A,k}^{1/2}Z_{c,k}}{Z_{A,k}^{1/2}Z_{c,k}}\right) \\
=\; & (d-4)\bar{g}_k + \frac{\bar{g}_k}{Z_{g,k}Z_{A,k}^{1/2}Z_{c,k}}k\partial_k(Z_{g,k}Z_{A,k}^{1/2}Z_{c,k}) - \frac{\bar{g}_k}{Z_{c,k}}k\partial_k Z_{c,k} - \frac{\bar{g}_k}{2Z_{A,k}}k\partial_k Z_{A,k}
\end{aligned} \qquad (5.9)$$

kifejezést kapjuk. A következőkben a $k\partial_k(Z_{g,k}Z_{A,k}^{1/2}Z_{c,k})$, $k\partial_k Z_{c,k}$, és $k\partial_k Z_{A,k}$, kifejezéseket határozzuk meg, hogy megkaphassuk belőlük $\beta(g)$–t. A Feynman–szabályok (5.7)–ből leolvashatók. Jelöléseink szerint a hullámos, egyenes, szaggatott vonalak rendre a mérték-, skalár-, és szellem propagátorokra vonatkoznak. Először a mérték–antiszellem–szellem vertexet határozzuk meg, majd rátérünk a mérték– és szellem hullámfüggvény renormálási faktorokra. Bevezetve a

$$q_R^2 \equiv q^2 + R_k(q) = q^2 + (k^2 - q^2)\Theta(k^2 - q^2) \qquad (5.10)$$

jelölést, ehhez segítségünkre lesz az alábbi két integrál azonosság:

$$-\int_q k\partial_k \frac{q^{2n}}{q_R^2(p+q)_R^2} = \frac{4}{d+2n}\Omega_d k^{d+2n-4} + \frac{2(n-1)(2dn+d-2)}{d(d+2n-2)}\Omega_d k^{d+2n-6}p^2 + \mathcal{O}(p^3), \tag{5.11a}$$

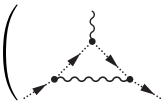
$$-\int_q k\partial_k \frac{p_i q_j}{q_R^2(q+p)_R^2} = -\int_{|q|<k} \frac{2p_i p_j}{k^2(q+p)_R^2} = -\frac{2}{d}\Omega_d k^{d-4}p_i p_j + \mathcal{O}(p^3), \tag{5.11b}$$

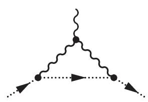
ahol ismét $\Omega_d = [2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)]^{-1}$, a d–dimenziós egységgömb felszíne elosztva $(2\pi)^d$–vel.

5.3.1. Mérték–antiszellem–szellem vertex

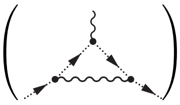
A Feynman–szabályok szerint

$$p_i g f^{abc} k\partial_k (Z_{g,k} Z_{A,k}^{1/2} Z_{c,k}) = k\tilde{\partial}_k \Bigg(\quad + \quad \Bigg). \tag{5.12}$$

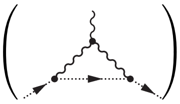




Mindkét diagramot $\mathcal{O}(p)$ rendig kell kiértékelnünk. Felhasználva a fenti azonosságokat,



$$\begin{aligned} k\tilde{\partial}_k \Bigg(\quad \Bigg) &= g^3 Z_{g,k}^3 Z_{A,k}^{1/2} Z_{c,k} \int_q k\tilde{\partial}_k \frac{1}{q_R^2}\left(\delta_{mn} - (1-\xi_k)\frac{q_m q_n}{q^2}\right)\frac{1}{((q-p)_R^2)^2} \\ &\qquad \times (p-q)_m (q-p)_i p_n f^{eoc} f^{fbe} f^{aof} \\ &= p_i f^{abc} g^3 Z_{g,k}^3 Z_{A,k}^{1/2} Z_{c,k} C_2(A)\Omega_d k^{d-4}\frac{-3\xi_k}{d(d+2)} + \mathcal{O}(p^2)\,, \end{aligned} \tag{5.13}$$



$$\begin{aligned} k\tilde{\partial}_k \Bigg(\quad \Bigg) &= g^3 Z_{g,k}^3 Z_{A,k}^{1/2} Z_{c,k} \int_q k\tilde{\partial}_k \frac{1}{q_R^2}\frac{1}{((q-p)_R^2)^2} \\ &\qquad \times \left(\delta_{mn} - (1-\xi_k)\frac{(q-p)_n(q-p)_m}{(q-p)^2}\right) \\ &\qquad \times \left(\delta_{or} - (1-\xi_k)\frac{(q-p)_o(q-p)_r}{(q-p)^2}\right) f^{fdc} f^{aef} f^{bde} q_n p_r \\ &\qquad \times \Big(\delta_{im}(q-p)_o + \delta_{mo}(2p-2q)_i + \delta_{io}(q-p)_m\Big) \\ &= p_i f^{abc} g^3 Z_{g,k}^3 Z_{A,k}^{1/2} Z_{c,k} C_2(A)\Omega_d k^{d-4}\frac{3(1-d)\xi_k}{d(d+2)} + \mathcal{O}(p^2) \end{aligned} \tag{5.14}$$

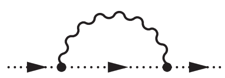
adódik. Megjegyezzük, hogy az (5.13) és (5.14) egyenletek jobb oldalán a k–szerinti differenciáláskor elhanyagoltuk a $Z_{g,k}$, $Z_{A,k}$, és $Z_{c,k}$ faktorok skálafüggését (ezek magasabb rendű járulékokat hordoznak), és kihasználtuk, hogy $f^{abc}f^{abd} = C_2(A)\delta^{cd}$, ahol $C_2(A)$ a Casimir operátor, $\hat{T}_i\hat{T}_i$ értéke az adjungált ábrázolásban. Felhasználtuk továbbá a $f^{oaf}f^{fbe}f^{eco} = -\frac{1}{2}C_2(A)f^{abc}$ azonosságot is. Az (5.13) és (5.14) eredményeit összegezve, (5.12) a

$$\frac{1}{Z_{g,k}Z_{A,k}^{1/2}Z_{c,k}} k\partial_k (Z_{g,k} Z_{A,k}^{1/2} Z_{c,k}) = g^2 Z_{g,k}^2 C_2(A)\Omega_d k^{d-4}\frac{-3\xi_k}{d+2}\,. \tag{5.15}$$

eredményre vezet.

5.3.2. A szellemmező hullámfüggvény renormálása

A $Z_{c,k}$ hullámfüggvény renormálásához csak egyetlen diagram kiértékelése szükséges:

$$p^2\delta^{ab}k\partial_k Z_{c,k} = k\tilde{\partial}_k \Bigg($$

$$\Bigg)$$

$$\begin{aligned}
&= g^2 Z_{g,k}^2 Z_{c,k} f^{adc} f^{bdc} \int_q k\tilde{\partial}_k \frac{1}{q_R^2}\frac{-1}{(q-p)_R^2}\Big(\delta_{ij}-(1-\xi_k)\frac{(q-p)_i(q-p)_j}{(q-p)^2}\Big)q_i p_j \\
&= g^2 Z_{g,k}^2 Z_{c,k} C_2(A) p^2 \delta^{ab} \int_{|q|<k} \frac{-2}{k^4}\Big(-1+(\xi_k-1)(1-2x^2)\Big)+\mathcal{O}(p^3)\,, \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

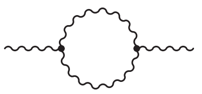
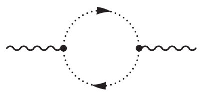
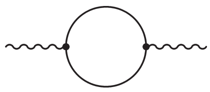
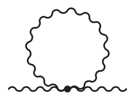
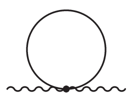
ahol $x=\hat{p}\cdot\hat{q}$ a p és q irányú egységvektorok skaláris szorzata, és ismét elhanyagoltuk az átskálázási faktorok k–függését a jobb oldalon. Az integrál elvégézése után a

$$\frac{k\partial_k Z_{c,k}}{Z_{c,k}} = g^2 Z_{g,k}^2 C_2(A)\Omega_d k^{d-4}\frac{4(d-1)-2\xi_k(d-2)}{d^2}\,. \qquad (5.17)$$

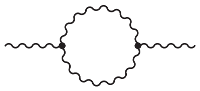
eredményre jutunk.

5.3.3. A mértékmező hullámfüggvény renormálása

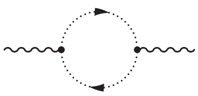
A $Z_{A,k}$ hullámfüggvény renormálási faktor kiszámítása a legbonyolultabb. Összesen öt diagramot kell kiértékelnünk, ismét $\mathcal{O}(p^2)$ rendig:

$$k\partial_k\Big[Z_{A,k}\Big(p^2\delta_{ij}-p_ip_j(1-\xi_k^{-1})\Big)\Big]\delta^{ab} = k\tilde{\partial}_k \Bigg($$

$$+$$

$$+$$

$$+$$

$$+$$

$$\Bigg)\,. \qquad (5.18)$$

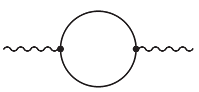
Vegyük észre, hogy az utolsó két tag valójában p–független, és velük együtt az előzőekből jövő $\mathcal{O}(p^0)$ járulékoknak ki kellene esniük, ami azonban a mértékszimmetria explicit sértése miatt nem történik meg. Már a hagyományos szupravezetés esetén is megfigyeltük, hogy a fotonnak tömege generálódik, itt ugyanezt látjuk a gluonokra vonatkozóan. Ahogy az előző fejezetben is, itt is úgy gondolkozunk, hogy már UV skálán be lehet vezetni egy megfelelő gluon tömeget, mely $k\to 0$ esetén pont kompenzálja a (5.18)–ből jövő tömeg járulékot, így vele egyáltalán nem kell foglalkozni, mert formálisan úgy viselkedik, mint egy irreleváns operátor. Ezért valójában csak az első három diagramot kell kiszámítanunk, melyek p független konstansoktól eltekintve az alábbiakra vezetnek:

$k\tilde{\partial}_k$ 

$$
\begin{aligned}
&= g^2 Z_{g,k}^2 Z_{A,k} f^{adc} f^{bdc} \frac{1}{2} \int_q k\tilde{\partial}_k \frac{1}{q_R^2} \frac{1}{(q+p)_R^2} \\
&\times \Big(\delta_{mn} - (1-\xi_k)\frac{q_m q_n}{q^2}\Big)\Big(\delta_{ol} - (1-\xi_k)\frac{(q+p)_o (q+p)_l}{(q+p)^2}\Big) \\
&\times \Big(\delta_{im}(p-q)_o + \delta_{mo}(2q+p)_i + \delta_{io}(-2p-q)_m\Big) \\
&\times \Big(\delta_{jl}(2p+q)_n + \delta_{ln}(-2q-p)_j + \delta_{nj}(q-p)_l\Big) \\
&= g^2 Z_{g,k}^2 Z_{A,k} \delta^{ab} C_2(A) \int_{|q|<k} \frac{-2}{k^4 (q+p)_R^2} \Big(4(1-d) q_i q_j - 2\xi_k (\delta_{ij} q^2 - q_i q_j) \\
&+ p^2 \Big[8(x^2-1)\delta_{ij} + (9-d)\hat{p}_i \hat{p}_j + 4\hat{q}_i \hat{q}_j - 4x(\hat{p}_i \hat{q}_j + \hat{p}_j \hat{q}_i) - 4x^2 \hat{q}_i \hat{q}_j \\
&+ \xi_k \Big(3\delta_{ij} - 3\hat{p}_i \hat{p}_j - 4\hat{q}_i \hat{q}_j + 4x(\hat{p}_i \hat{q}_j + 4\hat{p}_j \hat{q}_i) - 8x^2 \delta_{ij} + 4\hat{q}_i \hat{q}_j x^2 \Big) \Big] \Big) + \mathcal{O}(p^3) \\
= \;& g^2 Z_{g,k}^2 Z_{A,k} \delta^{ab} C_2(A) \Omega_d k^{d-4} \Bigg[\frac{12d(d+1)-40}{d^2(d+2)} \Big(p^2 \delta_{ij} - \frac{d(6+11d-d^2)-24}{6d(d+1)-20} p_i p_j \Big) \\
&+ \xi_k \frac{40+2d(5-4d)}{d^2(d+2)} \Big(p^2 \delta_{ij} - \frac{3(d^2-8)}{d(4d-5)-20} p_i p_j \Big) \Bigg] + \mathcal{O}(p^3)\,,
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

$k\tilde{\partial}_k$ 

$$
\begin{aligned}
&= g^2 Z_{g,k}^2 Z_{A,k} f^{adc} f^{bdc} \int_q k\tilde{\partial}_k \frac{1}{q_R^2} \frac{1}{(q+p)_R^2} (p+q)_i q_j \\
&= g^2 Z_{g,k}^2 Z_{A,k} \delta^{ab} C_2(A) \Omega_d k^{d-4} \frac{2}{d(d+2)} (p^2 \delta_{ij} + 2p_i p_j) + \mathcal{O}(p^3),
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

$k\tilde{\partial}_k$ 

$$
\begin{aligned}
&= -g^2 Z_{g,k}^2 Z_{A,k} \,\mathrm{Tr}\,[\hat{T}^a \hat{T}^b] N_\mathrm{f} \int_q k\tilde{\partial}_k \frac{1}{q_R^2} \frac{1}{(q+p)_R^2} (p+2q)_i (p+2q)_j \\
&= g^2 Z_{g,k}^2 Z_{A,k} \delta^{ab} \Omega_d k^{d-4} \frac{-4N_\mathrm{f}}{d(d+2)} \Big(p^2 \delta_{ij} - \frac{d-2}{2} p_i p_j \Big) + \mathcal{O}(p^3)\,.
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

Ahogy az előző alfejezetekben is, az egyenletek jobb oldalán a skála szerinti deriváláskor elhagytuk az átskálázási faktorokból származó k–függést, illetve, ahogy korábban is, feltételeztük, hogy a skalármező tömege a kritikus pontban $k \to 0$ esetén eltűnik. Összegyűjtve

(5.19), (5.20) és (5.21) eredményeit, (5.18) az alábbira vezet:

$$\begin{aligned} k\partial_k\Big[Z_{A,k}\Big(p^2\delta_{ij}-p_ip_j(1-\xi_k^{-1})\Big)\Big] &= g^2Z_{g,k}^2Z_{A,k}\Omega_d k^{d-4} \\ &\times\Big[p^2\delta_{ij}\Big(-\frac{4N_\mathrm{f}}{d(d+2)}+C_2(A)\frac{12d^2+14d-40-2\xi_k(4d^2-5d-20)}{d^2(d+2)}\Big) \\ &-p_ip_j\Big(-\frac{2N_\mathrm{f}(d-2)}{d(d+2)}+C_2(A)\frac{-2d^3+22d^2+8d-48-6\xi_k(d^2-8)}{d^2(d+2)}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Amennyiben $d=4$, azt látjuk, hogy (5.22) jobb oldala tranzverzális, vagyis a mértékrögzítő paraméter az ábeli esethez hasonlóan $\xi_k=$ konst. $\times\, Z_{A,k}$ alakú, ahogy azt az egyhurok perturbatív eredményekből vártuk is. Mindazonáltal, ha $d\neq 4$, akkor a gluon propagátor longitudinális összetevője is fut a skálával. Itt ismét kihasználjuk azt, hogy ξ_k megfelelő választásával a szabadenergiára feltett (5.7) ansatz ezzel tökéletesen összhangba hozható. Az ár, amit ismét fizetünk, hogy a ξ paraméter nem tetszőleges. Először a transzverzális projekciók összevetéséből azt kapjuk, hogy

$$\frac{k\partial_k Z_{A,k}}{Z_{A,k}}=g^2Z_{g,k}^2\Omega_d k^{d-4}\Big(-\frac{4N_\mathrm{f}}{d(d+2)}+C_2(A)\frac{12d^2+14d-40-2\xi_k(4d^2-5d-20)}{d^2(d+2)}\Big), \tag{5.23}$$

majd miután feltesszük, hogy a mértékrögzítő paraméter skálafüggetlen, $\xi_k\equiv\xi$, a longitudinális projekció az alábbi konzisztenciafeltételt adja:

$$\begin{aligned} k\partial_k Z_{A,k}(1-\xi^{-1}) &= g^2Z_{g,k}^2Z_{A,k}\Omega_d k^{d-4} \\ &\times\Big(-\frac{2N_\mathrm{f}(d-2)}{d(d+2)}+C_2(A)\frac{-2d^3+22d^2+8d-48-6\xi(d^2-8)}{d^2(d+2)}\Big), \end{aligned} \tag{5.24}$$

ami kihasználva (5.23)–at ekvivalens a

$$\begin{aligned} &\Big[-\frac{4N_\mathrm{f}}{d+2}+C_2(A)\frac{12d^2+14d-40-2\xi(4d^2-5d-20)}{d(d+2)}\Big]\Big(1-\xi^{-1}\Big) \\ &\quad=-\frac{2N_\mathrm{f}(d-2)}{d+2}+C_2(A)\frac{-2d^3+22d^2+8d-48-6\xi(d^2-8)}{d(d+2)}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

feltétellel. Ez egy másodfokú egyenletre vezet ξ–ben, melynek két megoldása van. Ezen a ponton nem dönthető el, hogy melyik választható, azt a mértékcsatolás skálafutására vonatkozó fizikai követelmény fogja eldönteni, ld. lejjebb.

5.3.4. A mértékcsatolás β függvénye

Most már össze tudjuk szedni az összes járulékot, ami a $\beta(g)$ függvényt meghatározza. Behelyettesítve (5.15), (5.17) és (5.23) eredményét (5.9)–be kapjuk, hogy

$$\beta(g) = -(4-d)\bar{g}_k - \bar{g}_k^3\Omega_d\left[C_2(A)\frac{10d^2+11d-28+\xi_k(-3d^2+5d+28)}{d^2(d+2)} - \frac{2N_\mathrm{f}}{d(d+2)}\right]. \tag{5.26}$$

Láhattóan $d = 4$ dimenzióban visszakapjuk a szokvány 1–hurok perturbatív eredményt,

$$\beta(g)|_{d=4} = -\frac{\bar{g}_k^3}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{3}N_\mathrm{c} - \frac{N_\mathrm{f}}{6}\right), \tag{5.27}$$

ahol felhasználtuk, hogy $C_2(A) = N_c$ $SU(N_c)$ esetén. Ez ismételten annak az ismert ténynek az eredménye, hogy $d = 4$ esetén legalacsonyabb rendben az elméletek dimenziótlan csatolásainak futása regulátorfüggetlen. Ezen a ponton érdemes megjegyezni, hogy ha magasabb rendű perturbatív eredményeket szeretnénk az FRG módszerrel reprodukálni, akkor az átskálázási faktorok k–függését a futási egyenletek jobb oldalán minden esetben figyelembe kell venni. Mi ezeket következetesen elhagytuk.

Ami igazán érdekes új eredmény, hogy (5.26) a minket igazán érdeklő $d = 3$–ban is kiértékelhető. Ekkor kapjuk, hogy

$$\beta(g)|_{d=3} = -\bar{g}_k - \frac{\bar{g}_k^3}{2\pi^2}\left[\left(\frac{19}{9} + \frac{16}{45}\xi\right)N_\mathrm{c} - \frac{2N_\mathrm{f}}{15}\right], \tag{5.28}$$

ahol ξ–t a fenti, (5.25)–ös konzisztenciafeltétel határozza meg. Ennek két megoldása van, melyekre $N_c = 3$ esetén $d = 3$–ban kapjuk, hogy

$$\xi_\pm = 1 + \frac{N_f}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{N_f^2 - 8N_f + 456}. \tag{5.29}$$

Vegyük észre, hogy $\xi_- \to 2 + \mathcal{O}(1/N_f)$, míg $\xi_+ \to N_f/2 + \mathcal{O}(1/N_f)$, ha $N_f \to \infty$. Ezen a ponton megköveteljük azt, hogy ha $N_f \to \infty$, ahol is a mértékmezők járulékai bizonyosan el vannak nyomva a skalárokéhoz képest, a β függvények az ábeli Higgs modellhez hasonlóan tegyék lehetővé egy nemtriviális fixpont létezését. Ez kizárja a ξ_+ választását, és ξ_-–t írja elő. Ekkor viszont arra jutunk, hogy ha $N_f \leq 55$, akkor $\beta(g)|_{d=3} < 0$ minden $\bar{g} > 0$–ra és így az előbbi nem teszi lehetővé $d = 3$–ban egy infravörös fixpont létezését.

Vegyük észre, hogy ezen eredmény eléréséhez ki sem kellett számítanunk a skalár szektort jellemző potenciál skálafüggését. Még ha esetleg utóbbinak létezne is skálázó fixpont megoldása $\bar{g} = 0$ esetére, ez soha sem lehet infravörösen stabil, mivel az előzőek szerint kicsit is eltávolodva $\bar{g} = 0$–tól $\beta(g)$ instabilitást okoz. Ez azt jelenti, hogy ha $N_{\mathrm{f}} \leq 55$, a skalár potenciál $V(\phi)$ semmilyen relevanciával nem bír a fázisátalakulás szempontjából, az mindenképpen (feltehetően) elsőrendű. Az így kapott eredmény szöges ellentétben áll az előző fejezetben tárgyalt hagyományos szupravezető átalakulással, ahol a mértékcsatolás β függvényének van nemtriviális nullhelye, amit behelyettesítve a skalárpotenciál futási egyenleteibe, kaptunk nemtriviális infravörös fixpontot. A gluonikus fluktuációk azonban sokkal robosztusabbnak bizonyulnak a fotonokénál, így nemábeli mértékelméletekben az előző forgatókönyv nem jöhet létre.

5.4. Vertex regulátorok

Az előzőekben ismertetett eredmények a kontinuum elmélet egy tökéletesen legitim regularizációjának eredményeként álltak elő. A regularizáció azonban, ahogy azt a dolgozatban korábban többször is hangsúlyoztuk, nem egyértelmű, és minden alkalmazott közelítés általában regulátortól való függést is eredményez. Ahogy a hagyományos szupravezetés tárgyalásánál, itt is felmerül az, hogy bár megtartva a Litim–féle profilfüggvényt, van–e más mód a regularizáció bevezetésére. Vegyük észre, hogy olyan elméletekben, ahol impulzusfüggő vertexeink vannak (ami direkt térbeli derivált–csatolásokból ered), szigorú értelemben inkonzisztens eljárás a propagátorok regularizációja anélkül, hogy a vertexeket is regulálnánk. Ennek az az egyszerű oka, hogy amint egy q hurokimpulzusra $q < k$, a hozzá kapcsolódó, eredetileg q impulzusú propagátorban k impulzus fog haladni, ami a vertexek regulálása nélkül ahhoz vezet, hogy az impulzus nem marad meg a csomópontban. Ez nem jelenthet problémát $d = 4$–ben vezető rendben, hiszen ekkor bármilyen regulátor azonos eredményre vezet, más dimenzióban azonban fontos tisztázni, hogy az eredmények mennyire érzékenyek a vertexek regulálására, és hogy utóbbi egyáltalán milyen módon kivitelezhető. Az alábbiakban erre keressük a választ.

A vertexek regulálása az FRG formalizmusban egyáltalán nem magától értetődő, hiszen a regulátor kvadratikus a mezőkben, a vertexekhez pedig legalább köbös térfüggés tartozik. Ez azt jelenti, hogy a hatásban nem lehet a vertexekhez regulátorokat bevezetni, hiszen azok megsértik a Γ_k skálafüggő hatás szerkezetét. Vannak speciális esetek, melyek esetén azonban kvadratikus regulátorok vertexek regulálására használhatók. Képzeljünk el egy diagramot, amelyben egy külső vonal nulla impulzussal egy impulzusfüggő hárompont vertexhez csatlakozik. Egy ilyen struktúra a funkcionálintegrálban egy olyan tag eredménye, melyben a mező, ami a nulla impulzusú külső vonalhoz tartozik konstans, és pontosan azt a háttérmezőt jelenti, amin az effektív hatást (szabadenergiát) éppen kiértékelni szeretnénk. Eszerint, ha az előbbi háttértől explicten függő, a másik két mezőben off–diagonális elemet adunk a kvadratikus regulátor mátrixhoz, effektíve el lehet érni, hogy az előző vertexben az átfolyó q impulzusra vonatkozóan $q_i \to q_{R,i}$ formális csere történjen, ahol $q_{R,i} = q_i + (\hat{q}_i k - q_i)\Theta(k^2 - q^2)$. Felhívjuk a figyelmet, hogy ez csak akkor működik, ha a vertex csakis egyetlen impulzus jellegű változótól függ, és ha a háttérfüggő off–diagonális regulátor elem azon két mezőhöz van bevezetve, melyeken ez a bizonyos impulzus átfolyik. Bár az előző részben egyetlen olyan diagramunk sem volt, ahol a vertexeken egyetlen impulzus folyik át, minden esetben a külső impulzusban sorba kellett fejtenünk. Ez effektíve azt jelenti, hogy a sorfejtés során megmaradó diagram struktúra valójában pont olyan, mint amit az előbb leírtunk, ezért a vertexeken átfolyó impulzus regulálása megengedett.

A mérték–antiszellem–szellem vertexre és a szellem hullámfüggvény renormálásra vonatkozóan az eljárás működik. Ezek esetén ugyanis valóban igaz az, hogy amikor a szóban forgó diagramokat sorbafejtjük a külső p impulzus szerint, a kialakuló koefficiens egy olyan kifejezésnek adódik, mely a szóban forgó diagram redukálása egy olyan esetre, ahol csak és kizárólag egyetlen impulzus folyik át a benne lévő vertexeken. Ami viszont a mértékmező hullámfüggvény renormálási faktorának futását illeti, ez többé nem igaz. Ennek oka az, hogy $Z_{A,k}$ futásának meghatározásakor $\mathcal{O}(p^2)$ rendben mindig van olyan rész, ami nem a vertexek sorbafejtéséből adódik, hanem a regulált propagátor p függéséből, vagyis mindig kapunk a sorfejtésben olyan tagot, melyben a vertex két független impulzust (külső és hurok) is tartalmaz, így a fenti trükk nem alkalmazható. Ilyen esetekre vonatkozó, általánosan működő vertex regularizáció megtalálása fontos és érdekes irány a jövőre nézve, de jelen dolgozat ennek lehetőségével nem foglalkozik.

Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy a vertexek regularizálásával hogyan módosulnak eredményeink a mértékcsatolás $\beta(g)$ függvényére vonatkozóan. Ehhez a mérték–antiszellem–szellem vertex és a szellem hullámfüggvény renormálási faktorának megváltozását fogjuk meghatározni. Ami az előbbit illeti, amikor a feljebb vázolt eljárásnak megfelelően végrehajtjuk a $q_i \to q_{R,i}$ cserét, formálisan az alábbi változást érjük el a hurokintegrálra vonatkozóan: $\int_q k\tilde{\partial}_k[q^2/(q_R^2)^3] \to \int_q k\tilde{\partial}_k[1/(q_R^2)^2]$. Ez egy $\frac{2(d+2)}{3d}$ faktorban módosítja (5.13) és (5.14) kifejezését, ami azt jelenti, hogy (5.15) az alábbiak szerint módosul:

$$\frac{1}{Z_{g,k}Z_{A,k}^{1/2}Z_{c,k}}k\partial_k(Z_{g,k}Z_{A,k}^{1/2}Z_{c,k}) = g^2 Z_{g,k}^2 C_2(A)\Omega_d k^{d-4}\frac{-2\xi_k}{d}\,. \tag{5.30}$$

Ahogyan vártuk, $d = 4$–ben nincs különbség, de más dimenziószám esetén igen. Hasonló analízis a szellem hullámfüggvény renormálásra vonatkozóan (5.17)–et a következőképpen módosítja:

$$\frac{k\partial_k Z_{c,k}}{Z_{c,k}} = g^2 Z_{g,k}^2 C_2(A)\Omega_d k^{d-4}\frac{3-\xi_k}{d}\,, \tag{5.31}$$

ami ismét mutatja a $d = 4$–beli univerzalitást. A $Z_{A,k}$ faktort nem változtatjuk meg a fentiek értelmében, így felhasználva (5.9), (5.23), (5.30) és (5.31) eredményeit, a módosított $\beta(g)$ függvény

$$\beta(g) = -(4-d)\bar{g}_k - \bar{g}_k^3\Omega_d\left[N_\mathrm{c}\frac{9d^2-13d+20+\xi_k(3d^2-7d-20)}{d^2(d+2)} - \frac{2N_\mathrm{f}}{d(d+2)}\right], \tag{5.32}$$

ahol ismét kihasználtuk, hogy $C_2(A) = N_c$ $SU(N_c)$–re. A $d = 4$ esetben az univerzális (5.27) alakot kapjuk, míg $d = 3$–ban

$$\beta(g) = -\bar{g}_k - \frac{\bar{g}_k^3}{2\pi^2}\left[\left(\frac{20}{9}+\frac{14}{45}\xi_k\right)N_\mathrm{c} - \frac{2N_\mathrm{f}}{15}\right]. \tag{5.33}$$

adódik. Ez az eredmény nyilvanvalóan nem egyezik meg (5.28)–cal, de azt is vegyük észre, hogy a numerikus faktorok nagyon közel vannak egymáshoz. Amikor az (5.25) konzisztencia feltételt oldjuk meg ξ–re, ismét ξ_-–t választva [ld. (5.29)–et] újra azt találjuk, hogy ha $\bar{g} > 0$, akkor $\beta(g) < 0$, vagyis infravörösen stabil fixpont a rendszerben nem létezik, így másodrendű átalakulás nem képzelhető el, hanem az valószínűsíthetően elsőrendű.

5.5. Összegzés

Ebben a fejezetban a hagyományos szupravezetés mintájára a szín–szupravezető fázisátalakulás rendjét vizsgáltuk. A kérdés, amit feltettünk, hogy a szín–szupravezetés Ginzburg–Landau modelljében létezhet–e infravörösen stabil fixpontja a renormálási csoport futások-nak, ami egy esetleges másodrendű átalakulást tudna leírni. A hagyományos szupravezetésnél látottakkal analóg módon az FRG futási egyenleteket közvetlenül $d = 3$–ban értékeltük ki, az ϵ sorfejtés alkalmazása nélkül.

Rámutattunk, hogy a fenti kérdés eldöntéséhez pusztán a mértékcsatolás renormálási csoport futásának megadása elegendő, hiszen arról kiderült, hogy (a hagyományos szupravezetéssel ellentétben) nem teszi lehetővé infravörösen stabil fixpont létezését. Azt találtuk, hogy $N_c = 3$ esetén $N_f \leq 55$–re a mértékcsatolás β függvénye a skálával monoton csökken, vagyis nem létezhet nemtriviális fixpont $d = 3$–ban. Ez az eredmény pedig indirekt bizonyítékként szolgál arra vonatkozóan, hogy az átalakulás elsőrendű kell legyen, hiszen másodrendű az előzőek fényében biztosan nem lehet. Azt is lehet mondani, hogy ez az erős kölcsönhatás aszimptotikus szabadságának a következménye $d = 3$–ra is kiterjedve, mely szerint az egyetlen létező fixpont a rendszerben az ultraibolyában létezik és az triviális.

A hagyományos szupravezetéssel analóg módon azt találtuk, hogy ahhoz, hogy a radiatív korrekciók hatása és a szabadenergiára feltett ansatz egymással kompatibilis tudjon maradni, egy speciális mértékválasztással kell élni. Ez egyenes következménye annak, hogy az FRG regulátor megsérti a mértékszimmetriát, és a gluon propagátor longitudinális projekciójának is skálafüggést ad.

Megvizsgáltuk az ún. vertex regularizáció kérdését, melyet a renormálási csoport futások konzisztenciája vet fel akkor, ha impulzusfüggő vertexek vannak az elméletben. Rámutattunk arra, hogy bizonyos esetekben létezik mód arra, hogy a vertexekben futó impulzusok is regularizáció alá kerüljenek, amit sikerrel alkalmaztunk a mérték–antiszellem–szellem vertex és a szellem hullámfüggvény renormálási faktora futásának meghatározására. Ennek eredményeképp az újraszámolt mértékcsatolás skálafüggése bár kvantitatíve kissé megváltozik, ugyanazt a végeredményt adja: a szín–szupravezető átalakulás nem mutathat kritikus viselkedést, és az így vélhetően elsőrendű kell, hogy legyen.

Tézispontok

Az alábbiakban összefoglalom a dolgozatban elért legfontosabb eredményeket, tézispontok formájában. A szóban forgó eredményeket a tézispontok után található publikációk tartalmazzák.

1. A kvantumszíndinamika három kvarkíz melletti királis szimmetriájának véges hőmérsékletű helyreállásáról nulla kvarktömegek mellett megmutattam, hogy az irodalomban fellelhető, lényegében tankönyvi állításokkal ellentétben másodrendű átalakuláson keresztül is végbe mehet. Eredményeim szerint a rendszer Ginzburg–Landau potenciáljában egy új, nemperturbatív infravörös renormálási csoport fixpont létezik, mely arról is árulkodik, hogy az axiális anomália feltehetően helyreáll a kritikus pontban.

[1] G. Fejos, Phys. Rev. D**105**, L071506 (2022) [arXiv:2201.07909].

2. A három kvarkízt tartalmazó lineáris szigma modellben kidolgoztam a funkcionális renormálási csoport egyenleteknek egy, a királis invariánsok kifejtésén alapuló közelítő alakját, melyben a csatolási állandók kondenzátumfüggő koefficiens függvényekké lépnek elő. A formalizmust ezek után az axiális $U_A(1)$ anomália hőmérséklet–függésének meghatározására alkalmaztam. Rámutattam, hogy a kondenzátum elpárolgása nyomán a mezonikus fluktuációk erősíteni igyekeznek az axiális szimmetria sérülésének mértékét a királis átalakulás hőmérséklete felé haladva.

[2a] G. Fejos, Phys. Rev. D**90**, 096011 (2014) [arXiv:1409.3695].

[2b] G. Fejos, Phys. Rev. D**92**, 036011 (2015) [arXiv:1506.07399].

3. Az előző pontban tárgyalt rendszert a csupasz anomália együtthatón át bevezetett instanton járulékok figyelembevételével is megvizsgáltam. Eredményeim azt mutatják, hogy a várakozásoknak megfelelően nagyon magas hőmérsékleten az $U_A(1)$ szimmetria biztosan helyreáll, de a királis fázisátalakulás (pszeudo)kritikus hőmérséklete környékén az axiális anomália egy átmeneti erősödést is mutat. A jelenségnek a mezonikus fluktuációkon alapuló magyarázata elméleti háttérrel szolgál korábbi, az irodalomban rács QCD adatok által adott hasonló felvetésekre.

[3a] G. Fejos and A. Hosaka, Phys. Rev. D**94**, 036005 (2016) [arXiv:1604.05982].

[3b] G. Fejos and A. Patkos, Phys. Rev. D**105**, 096007 (2022) [arXiv:2112.14903].

4. A Cooper–párok kondenzációján alapuló hagyományos szupravezetők véges hőmérsékletű átalakulásának a funkcionális renormálási csoport módszerén alapuló vizsgálatával rámutattam, hogy korábbi Monte–Carlo szimulációkkal összhangban, a fázisátmenet valóban első– és másodrendű is lehet. A másodrendű átmenetet mutató szupravezetőkhöz tartozó idáig ismeretlen infravörös fixpont helyére analitikus kifejezést vezettem le, melyből az ön– és mértékcsatolások arányára vonatkozó olyan korlátot állítottam fel, mely megmondja, hogy milyen esetben létezik elsőrendű- illetve folytonos átalakulás.

[4] G. Fejos and T. Hatsuda, Phys. Rev. D**93**, 121701 (2016) [arXiv:1604.05849].

5. Az előző pont eredményeit olyan esetekre is általánosítottam, melyben a rendparamétert N komponensű komplex skalárok közé terjesztjük ki. Megmutattam, hogy tetszőleges komponensszám esetén a rendszert jellemző renormálási csoport trajektóriák analóg viselkedést mutatnak az $N = 1$ esettel, a fixpontok szerkezete is azonos, azok pontos helye, illetve az ön– és mértékcsatolások arányára felállított korlát numerikus értéke csak az, ami a skalármező komponenseinek konkrét számértékétől függ.

[5] G. Fejos and T. Hatsuda, Phys. Rev. D**96**, 056018 (2017) [arXiv:1705.07333].

6. Rámutattam arra, hogy a funkcionális renormálási csoport módszer alapjául szolgáló regulátor függvényben fellépő skálaszeparáció hogyan sérti meg az ábeli Higgs–modell mértékszimmetriáját, és javaslatot tettem arra, hogy az így felmerülő anomáliákat speciális mértékválasztással, illetve az ultraibolya paraméterek hangolásával hogyan lehet mégis konzisztenssé tenni. A mértékrögzítő paraméter d dimenziószámtól való függésének feltérképezésével egy olyan keretrendszert alakítottam ki, melyet később más elméletek mérték–anomáliáinak vizsgálatára is alkalmazni lehet (ld. pl. a következő pontot).

[6] G. Fejos and T. Hatsuda, Phys. Rev. D**100**, 036007 (2019) [arXiv:1905.04272].

7. A színtöltésen alapuló, a kvarkok által alacsony hőmérsékleten és magas sűrűségen megvalósuló szín–szupravezetés effektív modelljében is megkíséreltem másodrendű átalakulást leíró fixponto(ka)t keresni. A mértékcsatolás futásának meghatározásával és a mértékszimmetria megsértésének feloldására tett javaslatom általánosításával rámutattam arra, hogy a gluonikus fluktuációk sokkal robosztusabbak a fotonokénál, melynek következtében az SU(3) mértékszimmetrián alapuló „nemábeli” Higgs–modellben a mértékcsatolás instabilitása miatt nincs infravörös fixpont, így a szín–szupravezető átalakulás szükségszerűen elsőrendű.

[7] G. Fejos and N. Yamamoto, JHEP **12**, 069 (2019) [arXiv:1908.03535].

Irodalomjegyzék

[1] C. Wetterich, Phys. Lett. B**301**, 90 (1993).

[2] T. R. Morris, Int. J. Mod. Phys. A**9**, 2411 (1994).

[3] Polónyi János, „*Kvantummechanika: a láthatatlan forradalom*”, Fizikai Szemle 2021/04.

[4] Fejős Gergely, „*Renormálási csoport Wilson és Gell-Mann–Low módra*”, Fizikai Szemle 2022/03.

[5] E. C. G. Stueckelberg and A. Petermann, Helv. Phys. Acta. **26**, 499 (1953).

[6] M. Gell-Mann and F. Low, Phys. Rev. **95** (5), 1300 (1954).

[7] C.G. Callan, Phys. Rev. D**2** (8), 1541 (1970).

[8] K. Symanzik, Comm. Math. Phys. 18 (3), 227–246 (1970).

[9] J. C. Collins, Il Nuovo Cimento A**25**, 47 (1975).

[10] K. G. Wilson, Phys. Rev. B**4** (9), 3174 (1971).

[11] K. G. Wilson, Phys. Rev. B**4** (9), 3184 (1971).

[12] K. G. Wilson & M. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28** (4), 240 (1972).

[13] L. P. Kadanoff, Physics **2**, 263 (1966).

[14] L. P. Kadanoff, Nature **500**, 30 (2013).

[15] J. Polchinski, Nucl. Phys. **B**231 (2), 269 (1984).

[16] R. J. Rivers, „*Path Integral Methods in Quantum Field Theory*" (Cambridge University Press, 2010).

[17] P. Kopietz, L. Bartosch, and F. Schütz, „*Introduction to the Functional Renormalization Group*" (Springer, Berlin, 2010).

[18] D. Litim, Phys. Lett. **B**486, 92 (2000).

[19] D. F. Litim, Phys. Rev. D**64**, 105007 (2001).

[20] R. D. Pisarski and F. Wilczek, Phys. Rev. D**29**, 338 (1984).

[21] A. Butti, A. Pelissetto, and E. Vicari, JHEP **08**, 029 (2003).

[22] A. Pelissetto and E. Vicari, Phys. Rev. D**88**, 105018 (2013).

[23] M. Grahl, Phys. Rev. D**90**, 117904 (2014).

[24] K. Yagi, T. Hatsuda, and Y. Miake, „*Quark Gluon Plasma*", Cambridge University Press, 2005.

[25] F. Karsch, E. Laermann, and C. Schmidt, Phys. Lett. B**520**, 41 (2001).

[26] P. de Forcrand and O. Philipsen, Nucl. Phys. B**673**, 170 (2003).

[27] X.-Y. Jin, Y. Kuramashi, Y. Nakamura, S. Takeda, and A. Ukawa, Phys. Rev. D**91**, 014508 (2015).

[28] A. Bazavov, H.T. Ding, P. Hegde, F. Karsch, E. Laermann, S. Mukherjee et al., Phys. Rev. D**95**, 074505 (2017).

[29] B. Brandt, A. Francis, H. B. Meyer, O. Philipsen, D. Robaina, and H. Wittig, JHEP **12**, 158 (2016).

[30] A. Tomiya, G. Cossu, S. Aoki, H. Fukaya, S. Hashimoto, T. Kaneko, and J. Noaki, Phys. Rev. D**96**, 034509 (2017).

[31] S. Aoki, Y. Aoki, H. Fukaya, S. Hashimoto, C. Rohrhofer, and K. Suzuki, arXiv:2103.05954.

[32] A. Bazavov, T. Bhattacharya, M.I. Buchoff, M. Cheng, N.H. Christ, H.T. Ding et al., Phys. Rev. D**86**, 094503 (2012).

[33] M.I. Buchoff, M. Cheng, N.H. Christ, H.T. Ding, C. Jung, F. Karsch et al., Phys. Rev. D**89**, 054514 (2014).

[34] T. Bhattacharya, M.I. Buchoff, N.H. Christ, H.T. Ding, R. Gupta, C. Jung et al., Phys. Rev. Lett. **113**, 082001 (2014).

[35] V. Dick, F. Karsch, E. Laermann, S. Mukherjee, and S. Sharma, Phys. Rev. D**91**, 094504 (2015).

[36] H. T. Ding, S.T. Li, S. Mukherjee, A. Tomiya, X.D. Wang, and Y. Zhang, Phys. Rev. Lett. **126**, 082001 (2021).

[37] O. Kaczmarek, L. Mazur, and S. Sharma, Phys. Rev. D**104**, 094518 (2021).

[38] A. Lahiri, arXiv:2112.08164.

[39] F. Cuteri, O. Philipsen, and A. Sciarra, JHEP **11**, 141 (2021).

[40] L. Dini, P. Hegde, F. Karsch, A. Lahiri, C. Schmidt, and S. Sharma, Phys. Rev. D**105**, 034510 (2022).

[41] K. Fukushima, K. Kamikado, and B. Klein, Phys. Rev. D**83**, 116005 (2011).

[42] M. Grahl and D. H. Rischke, Phys. Rev. D**88**, 056014 (2013).

[43] S. Resch, F. Rennecke, and B.-J. Schaefer, Phys. Rev. D**99**, 076005 (2019).

[44] T. Papenbrock and C. Wetterich, Z. Phys. C**65**, 519 (1995).

[45] T. Schaefer, Phys. Lett. B**389**, 445 (1996).

[46] T. Schaefer and E. Shuryak, Rev. Mod. Phys. **70**, 323 (1998).

[47] K. Fukushima and T. Hatsuda, Rept. Prog. Phys. **74**, 014001 (2011).

[48] V. Azcoiti, Phys. Rev. D**94**, 094505 (2016).

[49] C. Bonati, M. D'Elia, M. Mariti, G. Martinelli, M. Mesiti, F. Negro, F. Sanfilippo, and G. Villadoro, JHEP**03**, 155 (2016).

[50] M. P. Lombardo and A. Trunin, Int. J. Mod. Phys. A**35**, 20, 2030010 (2020).

[51] A. Gomez Nicola and J. Ruiz de Elvira, Phys. Rev. D**98**, 014020 (2018).

[52] A. Gomez Nicola, J. Ruiz de Elvira, A. Vioque-Rodriguez, and D. Alvarez-Herrero, Eur. Phys. J. C**81**, 637 (2021).

[53] M. C. Ruivo, P. Costa and C. A. de Sousa, Phys. Rev. D**86**, 116007 (2012).

[54] M. Ishii, K. Yonemura, J. Takahashi, H. Kouno, and M. Yahiro, Phys. Rev. D**93**, 016002 (2016).

[55] M. Ishii, H. Kouno, and M. Yahiro, Phys. Rev. D**95**, 114022 (2017).

[56] S. K. Rai and V. K. Tiwari, Eur. Phys. J. Plus **135**, 844 (2020).

[57] X. Li, W.-J. Fu, and Y.-X. Liu, Phys. Rev. D**101**, 054034 (2020).

[58] S. Bottaro and E. Meggiolaro, Phys. Rev. D**102**, 014048 (2020).

[59] D. Horvatic, D. Kekez, and D. Klabucar, Phys. Rev. D**99**, 014007 (2019).

[60] D. Horvatic, D. Kekez, and D. Klabucar, Eur. Phys. J. **229**, 3363 (2020).

[61] A. Gomez Nicola, J. Ruiz De Elvira, and A. Vioque-Rodriguez, JHEP **11**, 086 (2019).

[62] M. Mitter and B-J. Schaefer, Phys. Rev. D**89**, 054027 (2014).

[63] J. Braun, M. Leonhardt, J.-M. Pawlowski, and D. Rosenblüh, arXiv:2012.06231.

[64] C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. B**234**, 173 (1984).

[65] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, Phys. Rept. 363, 223 (2002).

[66] R. D. Pisarski and F. Rennecke, Phys. Rev. D**101**, 114019 (2020).

[67] K. Fukushima, K. Ohnishi, and K. Ohta, Phys. Rev. **C**63, 045203 (2000).

[68] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. D **7**, 1888 (1974).

[69] B. I. Halperin, T. C. Lubensky, and S.-K. Ma, Phys. Rev. Lett. **32**, 292 (1974).

[70] V.L. Ginzburg, Fiz. Tverd. Tela (Leningrad) **2**, 2031 (1960).

[71] T. Schneider, R. Khasanov, and H. Keller, Phys. Rev. Lett. **94**, 077002 (2005).

[72] H. Kleinert, Lett. Nuovo Cimento **35**, 405 (1982).

[73] H. Kleinert, Europhys. Lett. **74**, 889 (2006).

[74] K. Kajantie, M. Karjalainen, M. Laine, and J. Peisa, Phys. Rev. B **57**, 3011 (1998).

[75] S. Mo, J. Hove, and A. Sudbo, Phys. Rev. B **65**, 104501 (2002).

[76] M. Kiometzis, H. Kleinert, and A. M. J. Schakel, Fortschr. Phys. **43**, 697 (1995).

[77] P. Olsson and S. Teitel, Phys. Rev. Lett. **80**, 1964 (1998).

[78] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 2002)

[79] S. Kolnberger and R. Folk, Phys. Rev. B **41**, 4083 (1990).

[80] M. Reuter and C. Wetterich, Nucl. Phys. B**427**, 291 (1994).

[81] B. Bergerhoff, F. Freire, D. F. Litim, S. Lola, and C. Wetterich, Phys. Rev. B **53**, 5734 (1996).

[82] B. Bergerhoff, D. Litim, S. Lola, and C. Wetterich, Int. J. Mod. Phys. A**11**, 4273 (1996).

[83] R. Folk and Y. Holovatch, J. Phys. A **29**, 3409 (1996).

[84] I. F. Herbut and Z. Tesanovic, Phys. Rev. Lett. **76**, 4588 (1996).

[85] H. Kleinert and F. S. Nogueira, Nucl.Phys. B**651**, 361 (2003).

[86] F. Freire and D. F. Litim, Phys. Rev. D **64**, 045014 (2001).

[87] K. Fujikawa, B. W. Lee, and A. I. Sanda, Phys. Rev. D **6**, 2923 (1972).

[88] D. F. Litim and J.-M. Pawlowski, Phys. Lett. B **435**, 181 (1998).

[89] H. Gies, Lect. Notes Phys. **852**, 287 (2012).

[90] I. Herbut, *A Modern Approach to Critical Phenomena* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2007).

[91] M. G. Alford, K. Rajagopal, and F. Wilczek, Nucl. Phys. B**537**, 443 (1999).

[92] D. Bailin and A. Love, Phys. Rept. **107**, 325 (1984).

[93] M. G. Alford, A. Schmitt, K. Rajagopal, and T. Schäfer, Rev. Mod. Phys. **80**, 1455 (2008).

[94] K. Iida and G. Baym, Phys. Rev. D**63**, 074018 (2001); Phys. Rev. D**66**, 059903E (2002).

[95] K. Iida and G. Baym, Phys. Rev. D**66**, 014015 (2002).

[96] R.-D. Pisarski and D.-H. Rischke, Phys. Rev. Lett. **83**, 37 (1999).

[97] T. Matsuura, K. Iida, T. Hatsuda, and G. Baym, Phys. Rev. D**69**, 074012 (2004).

[98] I. Giannakis, D. Hou, H.-c. Ren, and D.-H. Rischke, Phys. Rev. Lett. **93**, 232301 (2004).

[99] J.-L. Noronha, H-c. Ren, I. Giannakis, D. Hou, and D.-H. Rischke, Phys. Rev. D**73**, 094009 (2006).

[100] A. Das, Phys. Rev. B**97**, 214429 (2018).

[101] R.-D. Pisarski, Phys. Rev. C**62**, 035202 (2000).

[102] M. Reuter and C. Wetterich, Nucl. Phys. B**417**, 181 (1994).

[103] H. Gies, Phys. Rev. D**66**, 025006 (2002).

[104] T. R. Morris, Int. J. Mod. Phys., A**16**, 1899 (2001).

[105] S. Arnone, Y. A. Kubyshin, T. R. Morris, and J. F. Tighe, Int. J. Mod. Phys. A**17**, 2283 (2002).

[106] S. Arnone, A. Gatti, and T. R. Morris, Phys. Rev. D**67**, 085003 (2003).

[107] S. Arnone, T. R. Morris, and O. J. Rosten, Eur. Phys. J. C**50**, 467 (2007).

[108] C. Wetterich, Nucl. Phys. B**934**, 265 (2018).

[109] S. Asnafi, H. Gies, and L. Zambelli, Phys. Rev. D**99**, 085009 (2019).

[110] Y. Igarashi, K. Itoh, and T. R. Morris, Prog. Theor. Exp. Phys., 103B01 (2019).