

**HASONLÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓ ALKALMAZÁSA NEM-  
NEWTONI KÖZEG ÁRAMLÁSÁBAN****APPLICATION OF SIMILARITY TRANSFORMATION FOR  
NON-NEWTONIAN FLUID FLOW**

Hriczó Krisztián

*Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Analízis Intézeti Tanszék,  
3515, Magyarország, Miskolci-Egyetemváros, Egyetem út 1. Telefon: +36-46-565-  
111/18-82, Levelezési cím: 3786, Magyarország, Lak, Dózsa György út 14.,  
krisztian.hriczo@gmail.com***Abstract**

Flow of non-Newtonian fluids is examined along flat plate. The boundary layer flow is modeled by a system of partial differential equations, which are derived from the Navier-Stokes equations. The flat plate is placed in a non-Newtonian medium. The assumed boundary layer flow is caused by free convection. Applying similarity transformations the system of partial differential equations is reduced to a system of ordinary differential equations, its solutions provide the velocity and the temperature distribution in the boundary layer. Numerical approximate solutions are determined to illustrate the changes of velocity in the boundary layer.

**Keywords:** *non-Newtonian fluid, similarity transformation, boundary layer.*

**Összefoglalás**

Nem-newtoni folyadékok áramlását vizsgáljuk síklap mentén. A határréteg áramlást parciális differenciálegyenletekkel modellezzük, melyek a Navier-Stokes egyenletekből származtatjuk. Síklapot helyezünk nem-newtoni folyadékba, amely körül a szabad konvekció által indukált áramlást feltételezünk. Hasonlósági transzformáció alkalmazásával az eredeti parciális differenciálegyenlet rendszert visszavezetjük közönséges differenciálegyenlet rendszerre. Meghatározzuk a modell numerikus megoldásait, melyek szemléltetik a határrétegben kialakuló sebességeloszlásokat.

**Kulcsszavak:** *nem-newtoni folyadék, hasonlósági transzformáció, határréteg.*

**1. Bevezetés**

A folyadékmechanika egyik részterülete a határréteg áramlás, melyet az 1900-as évek elején alapozott meg Prandtl, a Navier-Stokes egyenletekre bevezetett egyszerűsítéssel. Az így bevezetett egyenletrendszer hasonlósági megoldásait Blasius publikálta 1908-ban [3]. A modell gyakorlati alkalmazhatósága miatt napjainkban is

aktívan kutatott terület a határréteg áramlás. A kezdetben felírt modellhez különböző peremfeltételek alkalmaznak, melyekkel leírják a síklap mozgását, áteresztő képességét, hőátadási tulajdonságát. A határréteg áramlás elméletét alkalmazzák például gázturbinák működtetésének tervezésénél, polimer lemeztáblák és lemezártyák gyártásánál, papírgyártás és üvegfüzés során, műanyagok extrudálásánál, a geofizikában,

geotermikus energia hasznosításánál [1]-[6].

Célunk egy mozgó, áteresztő síklap mentél fölírt határréteg áramlási modell bemutatása és hasonlósági megoldásaik előállítás.

## 2. Meghatározó egyenletek

Állandósult 2D, lamináris áramlást feltételezünk összenyomhatatlan hatványtörvény szerinti folyadék esetén. A  $T_\infty$  hőmérsékletű folyadék pozitív féltengely mentén áramlik állandó  $U_\infty$  sebességgel. A modell a Navier-Stokes egyenletekből származtatott folytonossági és mozgásegyenlettel írja le a feltételezett áramlást [3], [6].

A folytonossági egyenlet, amely az anyag összenyomhatatlanságát fejezi ki:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

A mozgásegyenlet, amely az áramló közeg mozgását írja le:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (2)$$

ahol  $u$  és  $v$  az  $x$  illetve  $y$  irányú sebességkomponensek. Az áramló folyadék newtoni tulajdonságát fejezi ki a  $\tau_{xy} = K |\partial u_h / \partial y|^{n-1} (\partial u_h / \partial y)$ , amely nyírási feszültség és nyírási sebesség közötti hatványtörvény szerinti kapcsolat. Itt  $K$  a konzisztencia index,  $\alpha$  a hődiffúzió és  $\gamma = K/\rho$  jelöli a kinematikai viszkozitást.

Az egyenletekhez járuló peremfeltételek:

- a síklap felületén ( $y = 0$ ):

$$u(x, 0) = U, \quad v(x, 0) = v_w(x), \quad (3)$$

ahol  $U$  a mozgó síklap sebessége és  $v_w(x)$  a síklap áteresztési képessége,

- a határréteg fölött ( $y \rightarrow \infty$ ):

$$u(x, \infty) = U_\infty. \quad (4)$$

Bevezetjük az  $\eta = a \frac{y}{x^\beta}$ ,

$\psi = b x^{-\alpha} f(\eta)$ , dimenziómentes változókat, melyben az  $a, b, \alpha, \beta$  konstansok, a  $\psi$  pedig az áramfüggvény.

Az áramfüggvényt következő alakban definiáljuk:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (5)$$

amely automatikusan teljesíti a folytonossági egyenletet.

Az áramfüggvényt behelyettesítve a (2) mozgásegyenletbe

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \gamma \frac{\partial}{\partial y} \left( \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

és a (3) - (4) feltételekbe

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = U, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0) = v_w(x), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, \infty) = U_\infty. \quad (8)$$

Alkalmazva az  $\eta$  hasonlósági változót

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -b x^{-\alpha-1} [\alpha f + \beta \eta f'], \quad (9)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = a b x^{-\alpha-\beta} f', \quad (10)$$

ahol az  $f'$  a függvény  $\eta$  szerinti deriváltját jelöli. A (9) és (10) kifejezéseket beírva a (6) egyenletbe adódik a

$$\left( |f''|^{n-1} f'' \right) - \alpha f f'' + (\alpha + \beta) f'^2 = 0. \quad (11)$$

A (11) egyenletnek létezik hasonlósági megoldása, ha  $(2-n)\alpha + (2n-1)\beta = 1$  és  $\gamma a^{2n-1} b^{n-2} = 1$  egyenlőségek teljesülnek.

A (4) peremfeltételből adódik, hogy

$ab = U_\infty$  és  $\alpha + \beta = 0$ . Továbbá teljesülnek a (7) peremfeltételek, ha  $a, b, \alpha, \beta$  az alábbi alakban adottak:

$$a = \gamma^{\frac{1}{n+1}} (U_\infty)^{\frac{2-n}{n+1}}, \quad b = \gamma^{\frac{1}{n+1}} (U_\infty)^{\frac{2n-1}{n+1}},$$

$$\beta = -\alpha = \frac{1}{n+1},$$

és

$$\psi(x, y) = \gamma^{\frac{1}{n+1}} (U_\infty)^{\frac{2n-1}{n+1}} x^{\frac{1}{n+1}} f(\eta),$$

$$\eta = \gamma^{\frac{1}{n+1}} (U_\infty)^{\frac{2-n}{n+1}} \frac{y}{x^{\frac{1}{n+1}}}.$$

A (11) mozgásegyenletbe beírva a paraméterértékeket és elvégezve a megfelelő egyszerűsítéseket:

$$\left( |f'|^{n-1} f'' \right)' + \frac{1}{n+1} f f'' = 0, \quad (12)$$

$$f'(0) = \lambda, \quad f(0) = f_w, \quad (13)$$

$$f'(\infty) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1, \quad (14)$$

ahol  $\lambda = U/U_\infty$  a síklap sebességének és a fölötte áramló folyadék sebességének az aránya, míg  $f_w = -(n+1)v_w(x)(x^n/\lambda U_\infty^{2n-1})$  jelöli a síklapon átáramló anyagmennyiséget, amit konstans értéknek veszünk föl számításaink során.

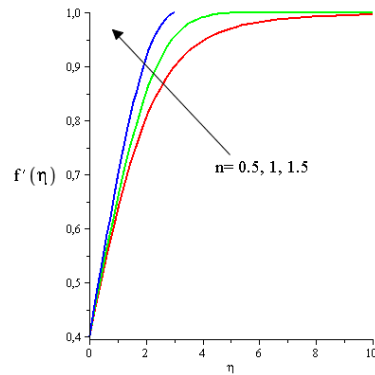
Megjegyezzük, hogy a síklap  $\lambda < 0$  esetén a folyadékkal azonos irányba mozog,  $\lambda > 0$  esetén a folyadék áramlási iránya és a síklap mozgásának iránya ellentétes, míg  $\lambda = 0$  értékre a síklap rögzített. Továbbá  $f_w > 0$  esetén a felület szívó hatású,  $f_w < 0$  esetén injektáló a felület és  $f_w = 0$  értékre a felület nem áteresztő.

Az  $u$  és  $v$  sebességkomponensek a hasonlósági változókkal az alábbiak szerint fejezhetőek ki:

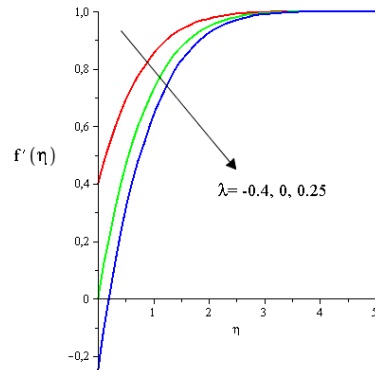
$$u(x, y) = U_\infty f'(\eta),$$

$$v(x, y) = \frac{U_\infty \text{Re}_x^{\frac{-1}{n+1}}}{n+1} (\eta f'(\eta) - f(\eta)),$$

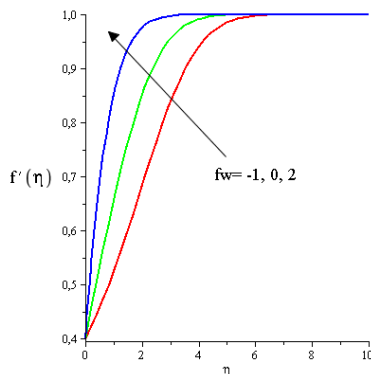
ahol  $\eta = \text{Re}_x^{\frac{1}{n+1}} \frac{y}{x}$  és  $\text{Re}_x = \frac{U_\infty^{2-n} x^n}{\gamma}$  a helyi Reynolds-szám.



1. ábra. Sebességprofil  $n$  változása esetén ( $f_w = 0$ ;  $\lambda = -0,4$ )



2. ábra. Sebességprofil  $\lambda$  változása esetén ( $f_w = 2$ ;  $n = 1$ )



3. ábra. Sebességprofil  $f_w$  változása esetén ( $n = 1$ ;  $\lambda = -0,4$ )

### 3. Numerikus megoldások

A (12), (13) és (14) egyenletekkel fölírt peremérték feladat numerikus közelítő megoldásait MAPLE 12 programmal állítottuk elő, alkalmazva a beépített peremérték megoldó metódust. A megoldásokat az 1.-3. ábrákon szemléltjük, ahol megfigyelhető a feladatban szereplő paraméterek hatása.

### 4. Következtetések

Megadtuk egy mozgó, áteresztő vízszintes síklap fölött kialakuló hidrodinamikusan határretegben a sebesség eloszlását. A vizsgált modell parciális differenciálegyenlettel fölírt peremérték feladat, melyet hasonlósági transzformáció alkalmazásával visszavezettünk közönséges differenciálegyenlet peremérték feladatára. A feladat hasonlósági megoldásait meghatározva azt tapasztal-

tuk, hogy a hidrodinamikusan határreteg vastagsága jelentősen csökken  $n$  és  $f_w$  paraméterek növelésével. A  $\lambda$  paraméter növelése a határreteg vastagságát kis mértékben növeli, míg a kezdeti sebességet jelentősen csökkenti.

### Szakirodalmi hivatkozások

- [1] Aziz, A.: *A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition*, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 14 (2009), pp. 1064-1068.
- [2] Bataller, R. C.: *Radiation effects for the Blasius and Sakiadis flows with a convective surface boundary condition*, Appl. Math. Comput. 206 (2008), pp. 832-840.
- [2] Blasius, H.: *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner reibung*, Z. Math. Phys., 56 (1908), pp. 1-37.
- [3] Ishak, A.: *Similarity solution for flow and heat transfer over a permeable surface with convective boundary condition*, Appl. Math. Comput. 217 (2010), pp. 837-842.
- [4] Magyari, E.: *The moving plate thermometer*, Int. J. Therm. Sci., 47 (2008), pp. 1436-1441.
- [5] Magyari, E.: *Comment on "A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition" by A. Aziz*, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2009; 14:1064-8, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 16 (2011), pp. 599-601.
- [6] Zheng, L., Zhang, X., He, J.: *Suitable heat transfer model for self-similar laminar boundary layer in power law fluids*, J. Thermal Science 13 (2004), pp. 150-154.