XXI. Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka, 2016. Kolozsvár, 205–208. DOI: 10.33895/mtk-2016.05.42
http://hdl.handle.net/10598/29062

ALULDETERMINÁLT SZERKEZETEK ZÉRUS FREKVENCIÁJÚ SAJÁTMÓDJAINAK VALÓSÁGHŰ ÁBRÁZOLÁSA

REALISTIC REPRESENTATION OF THE EIGENMODES OF AN UNDERDETERMINED STRUCTURE

Kakucs András[1], Popa-Müller Izolda[2], Pásztor Judith[3]

[1]*Sapientia-EMTE, Műszaki és Humántudományok Kar – Marosvásárhely, Gépészmérnöki Tanszék, kakucs2@ms.sapientia.ro*

[2]*Sapientia-EMTE, Műszaki és Humántudományok Kar – Marosvásárhely, Gépészmérnöki Tanszék, ipmuller@ms.sapientia.ro*

[3]*Sapientia-EMTE, Műszaki és Humántudományok Kar – Marosvásárhely, Gépészmérnöki Tanszék, pjudit@ms.sapientia.ro*

Abstract

This paper presents a method used in the realistic representation of the zero-frequency eigenmodes of an underdetermined structure, developed by our team. These structures are mechanisms, in fact, so this method may form the basis of a new one used in the analysis of the mechanisms.

Keywords: *mechanism, eigenmode.*

Összefoglalás

A dolgozat célja annak az eljárásnak a bemutatása, amelyet aluldeterminált szerkezetek zérus frekvenciájú sajátmódjainak valósághű ábrázolására fejlesztettünk ki. Mivel e szerkezetek tulajdonképpen mechanizmusok, a bemutatott eljárást továbbfejlesztve, az, egy, a mechanizmusok pozíció-elemzésére alkalmas módszerének alapját képezheti.

Kulcsszavak: *mechanizmus, sajátmód.*

1. Aluldeterminált végeselemes modellek

Egy végeselemes-program megalkotása közben felvetődött az aluldeterminált szerkezetek felismerésének az igénye, illetve az a követelmény, hogy ha a szerkezet mégis aluldeterminált lenne, akkor ábrázoljuk annak a zérus sajátmódjait.

Az ilyen szerkezetek csuklós mechanizmust alkotnak, azonban annak egyszerű támaszai csuszkaként működhetnek. A szakirodalom ajánl néhány eljárást (Csebisev, Kutzbach, Grübler), amelyek egy mechanizmus szabadságfokainak kiszámítására alkalmasok, azonban meg is jegyzi, hogy bizonyos esetekben ezek alkalmazásával téves következtetésekre juthatunk. Konkrétan: megtörténhet, hogy a szabadságfokok száma e kritériumok alapján nulla lenne és levonhatnánk azt a téves következtetést, hogy egy stabil szerkezettel van dolgunk, holott egy mechanizmussal állunk szemben. E kritériumokat tehát inkább csak annak a tesztelésére használhatjuk, hogy meggyőződhessünk arról, hogy egészen biztos mechanizmussal állunk szemben, de arra nem, hogy bármely esetben biztonságosan megállapíthassuk a szerkezet stabil voltát.

A szakirodalomban sokfajta eljárás létezik a mechanizmusok pozíció-analízisére, az [1] szakirodalmi hivatkozás pl. 21, egymástól különböző alapelven nyugvó megoldást sorol fel.

Mivel eleve egy végeselemes modellezéssel foglalkozó program fejlesztéséről van szó, megpróbáltunk olyan megoldásokat keresni, amelyek a program adatstruktúrájához és jellegéhez igazodnak.

2. Közelítés sajátvektorokkal

Az első lehetséges és kipróbált megoldás a sajátmód-analízis lenne, mint egy újabb, huszonkettedik lehetőség. Ez az eljárás a zérus-módok kiszámítására alapoz. Amennyiben a tanulmányozott szerkezet diszkretizálása során n csomóponthoz jutunk, csomópontonként pedig n_f szabadságfokot definiálunk (két dimenzióban például az x és y irányú elmozdulásnak megfelelően kettőt), akkor egy összesen $N = n \cdot n_f$ dinamikai szabadságfokú modellhez jutunk. Ha ez egy stabil szerkezet stabil modellje, akkor annak N nem-zéró frekvenciájú sajátmódja van. Ha viszont zéró sajátfrekvenciájú módokhoz jutunk, akkor azok a mechanizmust alkotó instabil szerkezet olyan mozgásformáinak felelnek meg, amikor annak szabadságfokai közül csak egyet hagyunk szabadon és a többit rögzítjük.

E módszer előnye akkor mutatkozna meg, ha amúgy is sajátmód-elemzést szeretnénk elvégezni, ugyanis ilyenkor nincs szükség külön számításokra. Van azonban egy nagy hátránya is: a sajátmód-analízis lineáris viselkedést feltételez, egy bizonyos pozícióban végzett kis amplitúdójú rezgésekről, elmozdulásokról nyújt információt, a mechanizmusok pedig a nagy elmozdulások miatt geometriailag nem-lineáris szerkezetek. Erre rátevődik az a tény is, hogy a végeselemes analízisben a csomópontoknak rendszerint nincs rotációs szabadságfokuk, ami miatt az elfordulás, mint mozgásforma, csak a pontok elmozdulásainak eredményeként jöhet létre. Például, ha két dimenzióban dolgozunk és egy rögzítetlen testet tanulmányozunk, akkor annak három szabadságfoka van és, a számítások eredményeként, három zérus módhoz jutunk. E három mód sajátvektorai a csomópontok vízszintes és függőleges irányú elmozdulásaiként három mozgásformát definiálnak, azonban azokból pl. a Gram-Schmidt eljárás alkalmazásával sem nyerhetjük ki az elméletileg elvárt két merőleges irányú elmozdulás – ábra síkjában történő elfordulás sajátmódokat, a rotációs szabadságfokok hiánya miatt.

3. A merevségi mátrix módszerének adaptálása

A második, általunk kidolgozott és alkalmazott eljárás azon az észrevételen alapul, hogy az aluldeterminált szerkezet merevségi mátrixa szinguláris, inverzének kiszámítása során a főátlóján zérók jelennek meg – mondhatjuk, hogy a rögzítetlen szabadságfokoknak megfelelő helyeken.

A szakirodalomban fellelhető egy, valószínűleg a következőkben bemutatotthoz hasonlító eljárás [2] – hogy mennyire hasonló, azt nem tudjuk, mert az idézett cikk csak pénzért érhető el, tehát következzék itt a miénk, ingyen.

A merevtest-elmozdulások vizsgálata során fölösleges a diszkretizált szerkezet merevségi mátrixával dolgoznunk, ugyanis a merevtest-elmozdulás során a szerkezetet alkotó alkatrészek (a mechanizmus tagjai) nem szenvednek rugalmas alakváltozást. Ésszerűbb lenne a mechanizmus tagjait egymáshoz kapcsolódó végeselemeknek tekinteni. Ezek a tagok azonban tetszőleges számú pontban illeszkednek egymáshoz és az aljzathoz, tetszőleges számú végeselem pedig nem létezik. Éppen ezért a szerkezetet rúdelemekre osztjuk, a következő módon: ha a mechanizmus egyik tagja n csomópontban illeszkedik a többihez és az aljzathoz, akkor pl. a Delaunay-algoritmussal egy háromszöghálót építhetünk annak csomópontjaira, amelynek az élei egy determinált rácsszerkezetet definiálnak. Ha viszont nem akarunk a Delaunay-hálózással bíbelődni, akkor minden csomópontot minden csomóponttal összekötve egy csillagsokszög alakú, szupradeterminált rácsos szerkezetet alkotó modellhez jutunk, bevállalva a nagyobb számú elem megjelenésével járó többlet-munkát. A modell szabadságfokainak száma nem változik meg, a mechanizmust modellező szerkezet merevségi mátrixa mindkét esetben ugyanakkora marad.

Egy mindkét végén csuklóval illeszkedő rúdelem merevségi mátrixában $k = E \cdot A / L$ formájú tagok vannak, kétdimenziós esetben például [3]:

$$[k] = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Ezek a rúdelemek ugyan egy valódi szerkezet modellezése során keletkeznek, azonban most lényegtelen a merevségük tényleges értéke, mivel a terheletlen mechanizmus mozgását vizsgáljuk. Így elfogadhatjuk pl. azt, hogy az $E \cdot A$ szorzat értéke egységnyi (a SI-ben a mértékegysége N lenne), L pedig a rudak tényleges hossza (a csomópontok távolsága), m-ben.

A rúdelem végpontjainak koordinátáival kiszámítható annak a vízszintes tengellyel bezárt α szöge, amelynek s szinuszával és c koszinuszával meghatározható a

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \tag{2}$$

transzformációs mátrix, amely a rúdelemnek a globális koordináta-rendszerben érvényes

$$[k'] = [T]^T \cdot [k] \cdot [T] \tag{3}$$

merevségi mátrixához vezet. A rúdelemek ilyen módon transzformált merevségi mátrixaival megkapjuk a rács-szerkezet $[K]$ merevségi mátrixát.

E mátrix $[K]^{-1}$ inverzét a Gauss-eliminációs módszerrel, teljes pivotálással próbáljuk meghatározni. E pivotálás során az i és j szabadságfokoknak megfelelő sorok és oszlopok felcserélésével az éppen normalizálni kívánt i helyzetbe a főátlón levő, még nem normalizált legnagyobb j elemet hozzuk be, az elvégzett csereberék számontartása mellett. E folyamat végén, ha a mátrix szinguláris volt, akkor az utolsó m főátlón levő elem nulla lesz. E sorok normalizálása emiatt nem lehetséges, így a merevségi mátrix inverzét nem tudjuk kiszámítani, de erre nincs is szükség: a számunkra hasznos információ abban áll, hogy melyek azok a szabadságfokok, amelyek rögzítetlen volta miatt a szerkezetünk mechanizmusként viselkedik.

Ezután ezeket a szabadságfokokat rögzítjük: $m-1$ szabadságfok esetében zérus, a maradék szabadságfok esetében pedig a $D_k = \delta$ elmozdulás előírásával, ahol δ értékét nullától kezdve fokozatosan és kis lépésekben változtatjuk a mechanizmus keresett pozícióinak megfelelően. Az elmozdulások ilyen módon történő előírásával a szerkezet determinálttá válik, az egyensúlyát pedig az

$$\begin{Bmatrix} \{F_e\} \\ \{F_n\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{en}] & [K_{ee}] \\ [K_{ne}] & [K_{nn}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{D_n\} \\ \{D_e\} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

formában partícionált lineáris egyenletrendszer írja le, ahol az „*e*” index az előírt, az „*n*” pedig az ismeretlen mennyiségekre vonatkozik, ahol $\{F_e\}$ csak zérusokat tartalmaz (mert egy terheletlen, mechanizmusként működő szerkezet mozgásformáit vizsgáljuk) és az esetek többségében $\{D_e\}$ legtöbb eleme is nulla (közöttük van a δ elmozdulás is). A számítás a következő lépésekből álló ciklus ismétléséből áll, amely a nagy elmozdulásokból fakadó nemlineáris jelleg miatt szükséges:

- a végpontoknak az előző lépésben kiszámolt elmozdulásokkal aktualizált helyzetének megfelelő koordinátáival elemenként meghatározzuk az α szöget és azzal a $[T]$ transzformációs mátrixot, ez utóbbival pedig az elemnek az éppen aktuális helyzetében érvényes $[k']$ merevségi mátrixát. E mátrixokkal felépítjük a szerkezet $[K]$ merevségi mátrixát;

- a partícionált merevségi mátrix megfelelő tagjaival kiszámoljuk az előírt elmozdulásokból származó

$$\{F^*\} = [K_{ee}] \cdot \{D_e\} \qquad (5)$$

összetevőket, amelyeket kivonunk az előírt erők amúgy zérus $\{F_e\}$ vektorából. E terheléssel a

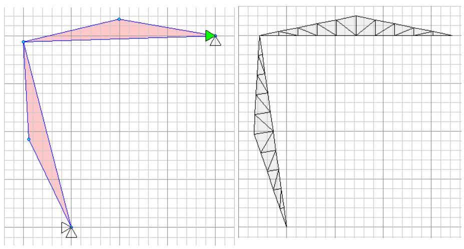
$$-\{F^*\} = [K_{en}] \cdot \{D_n\} \qquad (6)$$

egyenletrendszer megoldásával kiszámoljuk az ismeretlen $\{D_n\}$ elmozdulásokat;

- mivel az elmozdulások egy terheletlen, adott pozícióban rögzített mechanizmus csomópontjainak helyzetéhez kellene vezessenek, valójában az $\{F^*\}$ erők nullák kellene legyenek: ezek az erők csak akkor lesznek nullák, ha az adott pozícióban a mechanizmus tagjai (a rúdelemek) nem szenvedtek alakváltozást. Amennyiben $\{F^*\}$ tagjai nem elhanyagolhatóan kicsik, akkor a $\{D_n\}$ elmozdulásokkal aktualizáljuk a csomópontok helyzetét és megismételjük az iteratív folyamatot.

4. Következtetések

Megtörténhet, hogy egy adott pozícióban a folyamat nem konvergál: ez azt jelenti, hogy ez az elmozdulás nem kompatibilis a mechanizmus elmozdulásával, túlmutat annak valamelyik holtpontján. Ilyenkor δ-t ellenkező irányban változtatva ugyanazokon a helyzeteken keresztül visszafele haladnánk, tehát ilyen módon a mechanizmus teljes ciklusát nem tudjuk feltérképezni – ehhez az algoritmust módosítani kellene, azonban a kitűzött cél a zérus sajátfrekvenciájú sajátmódok valósághű ábrázolása volt és erre az algoritmus ebben a formájában is megfelel.



1. ábra. *Egy szabadságfokú szerkezet sajátmódja, ahogyan az általunk kidolgozott módszerrel ábrázoltuk (balra), illetve ahogyan azt a klasszikus sajátmód-számítás visszaadja (jobbra). A szerkezet rögzítéséhez szükséges hiányzó kényszert a satírozott háromszög jelöli.*

Szakirodalmi hivatkozások

[1] Norton, R., L.: *An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines*. McGraw Hill, 2004.

[2] Avilés, R.; Navalpotro, S.; Amezua E.; Hernández, A.: *An Energy-Based General Method for the Optimum Synthesis of Mechanisms*. ASME, J. Mech. Des. 116(1), 127-136, 1994.

[3] Zienkiewicz, O., C.; Taylor, R., L.: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Seventh Edition*. Elsevier, 2013.