

ZÁRÓJELENTÉS

Lineáris analízis és alkalmazásai

OTKA 46599, témavezető: Dr. Petz Dénes

1. Tudományos eredmények

A 2004-2006 időszakban végzett kutatások három témakörre csoportosíthatók:

1. Véletlen mátrixok
2. Mátrixok nyomegyenlőtlenségeinek alkalmazásai
3. Kvantunmechanikai rendszerek állapottere

1. Véletlen mátrixok

A témában a véletlen mátrixok sajátértéksűrűségére vonatkozó nagy eltérés tételek kaptak központi szerepet. PD, Réffy Júlia doktoranduszával a Haar-eloszlású véletlen mátrixok viselkedését aszimptotikus vizsgálta, a vonatkozó nagy eltérés tétel a *Prob. Theory and Related Fields* neves szakmai folyóiratban jelent meg (és Réffy Júlia megvédett Ph.D értekezésének is ez volt az egyik fő eredménye).

A véletlen mátrixok körébe a nagy eltérés tételek tipikusan egy mátrix sajátértéksűrűségére vonatkoztak, hiszen több mátrix esetében egyáltalán nem világos, hogy minek a határértékét kell tekinteni. Két véletlen projekció esete lett a témája PD és Fumio Hiai közös cikkének, amiben először van két független mátrix sorozat tekintve, amikor a mátrixméret tart a végtelenhez. A dolgozat az *Acta. Sci. Math.* folyóiratban jelent meg.

A szállítási költség-egyenlőtlenségek napjainkban népszerű kutatási témát jelentenek. Dan Voiculescu amerikai matematikus volt az, aki a véletlen valószínűségelméletek keretében megmutatta az első hasonló egyenlőtlenséget. Ezt az eredményt több irányba is továbbfejlesztettük, a körvonalon és a számegyenesen adott mértékekre. A bizonyításban véletlen mátrixok sajátértéksűrűségével való megközelítést és nagy eltérés tételeket alkalmaztunk. A legfontosabb dolgozatok a *Prob. Theory and Related Fields* és a *Canad. Math. Bull.* folyóiratban jelentek meg.

2. Mátrixok nyomegyenlőtlenségeinek alkalmazásai

A mátrixok témakörében a mátrixközepek értelmezése és a köztük levő egyenlőtlenségek volt a legfontosabb téma. Két mátrixra a közepeknek jól kidolgozott elmélete van, de három mátrixra ilyen nem volt, kivéve a mértani közép esetét. PD a Temesi Róberttel írt cikkében több mátrixra is értelmezte a közepeket egy algoritmus segítségével, aminek konvergenciáját teljes általánosságban eddig nem sikerült bebizonyítani, bár a numerikus szimuláció alátámasztja az állítást.

Mátrix egyenlőtlenségek kerültek alkalmazásra PD és M.A. Nielsennel közös dolgozatában, ami egyszerű bizonyítást ad a Neumann-entrópia erős szubadditivitására.

3. A kvantummechanikai rendszerek állapottere

Az állapotter pozitív szénidefinit 1 nyomú mátrixokból áll, egy kvantum bit esetén a mátrixok 2×2 -esek, n kvantum bitnél pedig $2^n \times 2^n$ -esek. Az állapotteren információ mennyiségek differenciálásával Riemann-geometriát lehet bevezetni. A monoton Riemann-metrikákat évekként elelőtt PD jellemezte, és Andai Attila dolgozataiban és Ph.D tézisében több irányba kiegészítette az ismert tulajdonságokat.

Az állapotterrel kapcsolatban egy másik témakör a paraméterbecslés, amikor is az ismeretlen állapot paramétereit mérésekkel kívánjuk megbecsülni. A témakörben a 2006-os évben születtek eredmények, a témakör kutatása tehát most indult be. Bizonyos becslési eljárások statisztikus összehasonlítása és a négyzetes hibamátrix alapján való optimalizálás volt a téma. Bebizonyítottuk, hogy a hibamátrix determinánsa akkor a legkisebb, ha a mérések komplementárisak. A komplementáris mérések általánosításaként PD bevezette a komplementáris részrendszerek fogalmát, ami számos megoldatlan problémát vet fel. Közülük többet megoldottunk két kvantum bitből álló rendszerekre. A témakör várhatóan ki fog szélesedni és érdeklődésre számít. Érdemes megjegyezni, hogy az ebbe az irányba folyó kutatásban matematikus hallgatók is bekapcsolódtak TDK dolgozat (illetve a belőle született publikáció) formájában (Szántó András és Ruppert László).

Állapotterrel kapcsolatban egy másik problémakör egy részrendszer elégségessége statisztikai szempontból egy állapotcsaládra vonatkozóan. Az elégséges részalgebrák több új jellemzése került bizonyításra, közöttük a faktorizációs tulajdonság. Ezek az eredmények Comm. Math. Phys. folyóiratban jelentek meg, és a témakörnek áttekintését adtuk példákkal egy másik dolgozatban. Az elégségesség nem-kommutatív Markov-láncokkal is kapcsolatba hozható a Neumann-entrópia szubadditivitásában az egyenlőségen keresztül. Mosonyi Milánnal és külföldi kollégákkal írt cikkek tartalmazzák a lényeges eredményeket.

2. Fontosabb meghívott előadások

2004:

1. *From the Monotonicity of Quantum Relative Entropy to SSA and Sufficiency:*
Quantum Information Geometry, McMaster University, Hamilton, Canada, May.
2. *Free transportation cost inequalities via random matrix approximation:*
Random Matrices and Probability, Warwick, UK, May.
3. *From the Monotonicity of Quantum Relative Entropy to SSA and Sufficiency:*
Nottingham University, UK, May.
5. *From the Monotonicity of Quantum Relative Entropy to SSA and Sufficient Coarse-grainings:*
Entanglement, Information & Noise, Krzyzowa, Poland, June.
6. *Some transportation cost inequalities. An application of large deviation results for random matrices:*
25th QP Conference on Quantum Probability and Related Topics, Bedlewo, Poland, June.
7. *Equality conditions for strong subadditivity of the von Neumann entropy:*
School of Physics, University of Queensland, Brisbane, August.

8. *Free analogue of transportation cost inequalities:*
„Free probability theory”, October 9 - 14, Banff
9. *Truncated random unitary matrices:*
3rd Sendai Workshop „Free Probability and Random Matrices”, Japan, October
10. *Perturbed Wigner matrices and a conjecture:*
3rd Sendai Workshop „Free Probability and Random Matrices”, Japan, October
11. *Sufficient statistical inference in quantum mechanics:*
Quantum Statistics - Quantum Measurements, Estimation and Related Topics, 15 - 19
November, Cambridge.
12. *Large deviation results for the eigenvalue density of some random matrices and applica-
tions*
University of Munich, November.

2005:

1. *Introduction to random matrices and proofs of the Wigner theorem:*
Mexiko, Iztapalapa, January.
2. *The scientific heritage of John von Neumann:*
Mexiko, Iztapalapa, January.
3. *Relative entropy in quantum information theory:*
Mexiko, Iztapalapa, January.
4. *An application of random matrix methods: The free analogue of the transportation cost
inequality:*
Mexiko, Iztapalapa, January.
5. *Sufficiency in quantum statistical inference:*
Information Theory Seminar, Rényi Institute, April.
6. *Means of positive operators and matrices:*
Riesz-Fejér Conference, Eger, June.
7. *Large deviation results for random matrices:*
TU Braunschweig, July.
8. *Large deviations for functions of two random projections:*
Workshop on non-commutative harmonic analysis, Bedlevo, August
9. *Large deviations:*
Mathematical Physics Days, Leuven, September
10. *Sufficiency in quantum statistical inference:*
Workshop on Random Matrices and Free Probability, Sendai, October
11. *Large deviations:*
RIMS, Kyoto, October

12. *Means of positive matrices:*
Osaka University, October
13. *Information geometry and quantum statistical inference:*
IGAIA2, Tokyo, December
14. *Entropy, information geometry and quantum statistical inference:*
Schrödinger Institute, Vienna, December.

2006:

1. *Large Deviations:*
The Centre for Mathematical Physics, The University of Queensland, 23 March, 2006.
2. *On Sufficient Coarse-Grainings:*
XXXVIII Symposium on Mathematical Physics, *Quantum Entanglement & Geometry*,
Torun, June 4-7, 2006.
3. A course on *Algebraic methods for Quantum Mechanics:*
School on Theory and Technology in Quantum Information, Communication, Computa-
tion and Cryptography, June, 2006, Trieste
4. *Relative Entropy in Quantum Information Theory:*
Quantum Information Workshop, Pécs, 12-15 July 2006.
5. *State Tomography for Quantum Systems:*
QUANTUM PROBABILITY, INFORMATION AND CONTROL, Nottingham 15-22
July, 2006.
6. *Complementarity in quantum systems:*
colloquium lecture, Tohoku University, Sendai, August, 2006.
7. *Qubit tomography:*
DMV Minisymposium: Mathematische Physik und Informationstheorie, Bonn, Septem-
ber, 2006.
8. *State estimation for qubits:*
FOCUS MEETING: QUANTUM PROCESS ESTIMATION, 27th September - 1st Oc-
tober 2006, Budmerice, Slovakia.
9. *State estimation and complementarity:*
Workshop on Quantum Statistics, Erwin Schrödinger Institute on Mathematical Physics,
Vienna, December, 2006.
10. *Noncommutative probability:*
Noncommutative Day, Imperial College, London, December, 2006.

3. Egyéb

Megjegyzésre érdemes, hogy a kutatási program fiatal résztvevői, Andai Attila, Mosonyi Milán és Réffy Júlia az OTKA kutatásokhoz kapcsolódó témákban szereztek PhD fokozatot. Ezen kívül néhány matematikus hallgató, Temesi Róbert, Szántó András és Ruppert László az OTKA kutatáshoz kapcsolódóan írtak TDK dolgozatot, némelyikből publikáció is született.

Az OTKA kutatás jelentős nemzetközi együttműködést is magában foglalt.